THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Aufgabenblatt 3 **30.04.2010**

Aufgabe 3.1: Nutation der Erde (10 Punkte)

Mit welcher Periodendauer dreht sich der geometrische Nordpol der Erde um den kinematischen Nordpol?

Anleitung:
Betrachte die Erde als leicht abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = b = 6378$ km und $c = 6357$ km. Die beobachtete *Chandlersche Periode* der Erdnutation beträgt 433 Tage. Weshalb weicht die unter obigen Annahmen berechnete von der beobachteten Periodendauer hauptsächlich ab?

Aufgabe 3.2: Planet mit Mond (10 Punkte)

Ein Mond der Masse m bewege sich auf einer Kreisbahn des Radius D um einen Planeten der Masse M. Der Planet rotiere außerdem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Achse, die durch seinen Mittelpunkt und senkrecht zur Bahnebene des Mondes verläuft. Es gelte $M \gg m$, so dass der Schwerpunkt des Systems in guter Näherung mit dem Schwerpunkt des Planeten zusammenfällt.

1. Gib den Gesamtdrehimpuls bezüglich des Schwerpunkts des Systems und die Gesamtenergie an. Eliminiere mit Hilfe der Kreisbahnbedingung den Abstand D aus den beiden Ausdrücken.

2. Im Allgemeinen sind die beiden Drehfrequenzen ω und Ω unterschiedlich. Nimm an, es gebe einen Mechanismus der dem System Energie entzieht solange $\Omega \neq \omega$, der den Gesamtdrehimpuls aber erhält (wie z.B. Reibung durch Gezeiten). Zeige, dass sich das System für $\Omega = \omega$ in einem stabilen Zustand befindet (E ist minimal), wenn
$$\frac{mD^2}{J} + 1 > \frac{4\Omega}{\omega}$$
erfüllt ist ($J \equiv$ Trägheitsmoment des Planeten).

Hinweis: Bilde das totale Differential von $E = E(\omega, \Omega)$ und eliminiere darin $d\Omega$ mit Hilfe von $dL = 0$.

Aufgabe 3.3: Floh auf Planet (10 Punkte)

Ein kugelförmiger Planet der Masse $M = 10$ kg (also eigentlich bloß ein Meteorit) dreht sich mit einer Umdrehung pro Sekunde ungestört im Weltall. Auf seinem kinematischen Nordpol wohnt ein bemerkenswerter, mit den Eulerschen Gleichungen vertrauter Floh der Masse $m = 1$ g in einem masselosen kleinen Haus. Eines Tages entscheidet sich der Floh dazu, den Äquator des Planeten zu seinem Haus hin zu bewegen und läuft dazu schnell auf den 45. Breitengrad des Planeten. Dann wartet er.

Wie lange muss der Floh warten?

Hinweise: Man kann das System Floh/Planet als einen symmetrischen Kreisel auffassen, dessen Figurenachse immer durch den Floh verläuft. Sobald der Floh auf dem 45. Breitengrad sitzt, ist die Drehachse $\vec{\omega}$ nicht mehr parallel zur Figurenachse. Also fängt $\vec{\omega}$ an, eine Nutationsbewegung auf dem Polkegel um die neue Figurenachse zu vollführen. Das masselose Haus auf der z-Achse dreht sich immer um die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ und bewegt sich daher auf einer spiralförmigen Bahn um den Floh. In

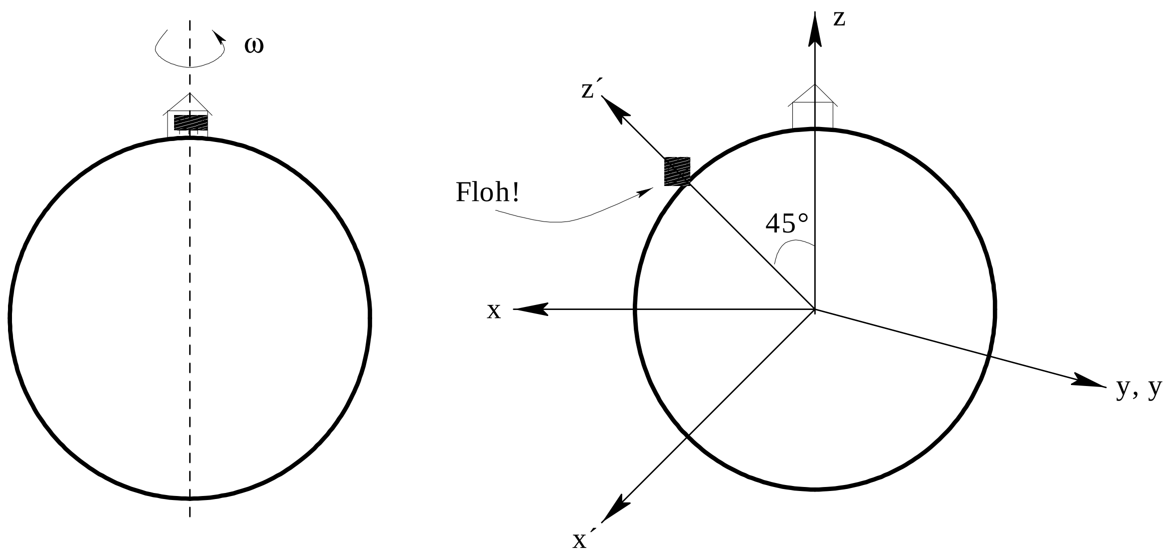

Abbildung 1: Floh.

dem Moment, in dem die momentane Drehachse mit der z-Achse einen rechten Winkel bildet, befindet sich das Haus auf dem momentanen Äquator. Nimm an, dass sich der Floh so schnell bewegt, dass $\vec{\omega}$ während seiner Wanderung praktisch unverändert bleibt. Nimm bei der Berechnung der Trägheitsmomente $A = B, C$ an, dass sich der Floh wie ein Massepunkt auf der Kugeloberfläche verhält. Die Differenz $A - C$ lässt sich dann leicht angeben.