

THEORETIKUM ZUR MECHANIK II SS 10

Aufgabenblatt 11

2.07.2010

Aufgabe 11.1: Elastischer Stab (6 = 2 + 4 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Dichte des in der Vorlesung besprochenen elastischen Stabs,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad (1)$$

wobei $\varphi = \varphi(t, x)$.

1. Bestimme die Bewegungsgleichung für das Feld φ .
2. Zeige, dass

$$\varphi(t, x) = f(ct - x), \quad (2)$$

wobei $c = \sqrt{\kappa/\mu}$ und $f = f(\xi)$ eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion ist, eine Lösung der Bewegungsgleichung ist.

Aufgabe 11.2: Massives Feld (15 = 2 + 3 + 2 + 2 + 6 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (3)$$

1. Bestimme die Bewegungsgleichung für das Feld $\varphi = \varphi(t, x)$.
2. Sei

$$\varphi(t, x) = A \cos[\omega(k)t - kx]. \quad (4)$$

Wie muß $\omega = \omega(k)$ aussehen, damit $\varphi(t, x)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist?

3. Ist die Funktion

$$\varphi(t, x) = A \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk \cos[\omega(k)t - kx] \quad (5)$$

eine Lösung der Bewegungsgleichung?

4. Wenn Δk klein ist, kann man $\omega(k)$ wie folgt approximieren:

$$\omega(k) = \omega_0 + u(k - k_0), \quad (6)$$

wobei $\omega_0 = \omega(k_0)$. Wie lautet die Konstante u ?

5. Bestimme $\varphi(t, x)$ im Rahmen dieser Näherung. Zeichne die Funktion zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit $t = 1$. Wie bewegt sich die Welle?

Aufgabe 11.3: Langlebige Muonen und die berühmteste Formel der Welt (9 = 4 + 5 Punkte)

1. Auf der Höhe $H = 10^5$ m gibt es zur Zeit $t = 0$ N Muonen, die mit Geschwindigkeit v in Richtung Erde fliegen. Im Ruhesystem eines Muons beträgt die Lebensdauer $\tau_\mu = 1.56 \cdot 10^{-6}$ s. Das wiederum heißt, dass im Ruhesystem nach einer Zeit t nur die Anzahl $N = N_0 e^{-t/\tau_\mu}$ der Muonen nicht zerfallen ist. Wie groß muss die Geschwindigkeit v der Muonen sein, damit auf der Erde eine Anzahl $N = N_0/100$ der Muonen ankommt?

2. Die Energie eines Teilchens ist $E = \gamma m_0 c^2$, wobei $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. Wie lautet die Energie für $v \ll c$? Wieviel Energie wird gebraucht, um ein Objekt der Masse $m_0 = 1$ kg von der Geschwindigkeit $v_A = 0$ bis zur Geschwindigkeit $v_E = 0.99c$ zu bringen? Wieviele km könnte man mit einem normalen Wagen fahren, wenn diese Energie vorhanden wäre? (1 Liter Benzin $\approx 3.4 \cdot 10^7$ Joule. Mit einem Liter werden 10 km gefahren). Wieviel Energie wird gebraucht, wenn $v_E = c$? Was bedeutet das?