

Aufgabe 1: Geschwindigkeit und Beschleunigung (5 Punkte)

Berechne für die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = e^{\arctan t} \vec{e}_1 + \ln(1+t^4) \vec{e}_2 + \sin(t) \vec{e}_3$$

die Ausdrücke

$$|\vec{r}(t)|, \quad \dot{\vec{r}}(t), \quad |\dot{\vec{r}}(t)|, \quad \ddot{\vec{r}}(t), \quad |\ddot{\vec{r}}(t)|$$

jeweils für die Zeit $t = 0$.

Aufgabe 2: Begleitendes Dreibein (12 = 2 · 6 Punkte)

Gegeben sei die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \left(4t + 5, \frac{\sqrt{8}}{3} t^3, \frac{1}{5} t^5 - 1 \right).$$

- a) Berechne die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(t=0) = 0$ sein möge,
- b) den Tangentialvektor $\hat{t} \equiv \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ als Funktion von t ,
- c) die Krümmung $\kappa \equiv \left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|$ der Kurve als Funktion von t ,
- d) den Normalenvektor $\hat{n} \equiv \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{t}(s)}{ds}$ als Funktion von t ,
- e) das begleitende Dreibein $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ als Funktion von t , wobei $\hat{b} \equiv \hat{t} \times \hat{n}$ der Binormaleneinheitsvektor ist,
- f) die Torsion $\tau \equiv -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}(s)}{ds}$ als Funktion von t .

Aufgabe 3: Schraubenlinie (8 = 2 · 4 Punkte)

- a) Schreibe die Schraubenlinie $\vec{r}(t) = (R \sin \omega t, R \cos \omega t + 5, bt + 1)$ in natürlicher Darstellung,
- b) berechne die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(t=0) = 0$ sein möge,
- c) zeige, daß der Krümmungsradius $\rho \equiv \kappa^{-1}$ größer als R ist, und daß
- d) der Torsionsradius $\sigma \equiv \tau^{-1}$ für $b \rightarrow 0$ unendlich groß wird.

Aufgabe 4: Zenon von Elea (5 Punkte)

Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in einer Entfernung von einem Stadion (176 m, Längeneinheit im alten Griechenland) vor ihm herkriecht, mit der 10-fachen Geschwindigkeit (sei $v_{Achilles} = 10$ m/sec und $v_{Schildkröte} = 1$ m/sec). Wenn Achilles dorthin gelangt, wo anfangs die Schildkröte war, so ist diese um $1/10$ Stadion voraus. Hat Achilles auch diese Strecke durchlaufen, so ist die Schildkröte $1/100$ Stadion weitergekrochen, u.s.w. Zenon von Elea behauptet, Achilles kann die Schildkröte nie einholen und die Bewegung sei nur eine Illusion. Hat Zenon Recht oder worin besteht das Paradox? Holt Achilles die Schildkröte ein? Wenn ja, wann und wo?