

Aufgabe 1: Teilchen im eindimensionalen Morse-Potential (2+4+4 = 10 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m und Energie $E < 0$ bewege sich in einem eindimensionalen Morse-Potential

$$V(x) = V_0 [e^{-2ax} - 2e^{-ax}], \quad V_0, a > 0, E > -V_0.$$

1. Skizziere den Potentialverlauf.
2. Berechne die Umkehrpunkte der Bewegung (Energieerhaltung) und die Schwingungsdauer T des Teilchens.
3. Wie sieht die Bewegung $x(t)$ näherungsweise aus, wenn E nur wenig größer als $-V_0$ ist? Wie lautet nun die Schwingungsdauer T ?
(Man approximiere hierzu das Potential als Parabel, indem man die Taylorreihe von $V(x)$ nach dem quadratischen Term in x ($n = 2$) abbricht und dann die Bewegungsgleichung aus dem Energieerhaltungssatz $\frac{dE}{dt} = 0$ gewinnt).

Aufgabe 2: Stabile Kreisbahnen im Zentralfeld (3+3+3+3=12 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in einem Zentralkraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$.

1. Stelle die Bewegungsgleichungen in ebenen Polarkoordinaten auf und eliminiere $\dot{\varphi}$ mit Hilfe des konstanten Drehimpulsbetrages $L = mr^2\dot{\varphi}$.
2. Wie groß muss der Drehimpuls L sein, damit die Bewegung auf einer Kreisbahn mit Radius $r(t) = R = \text{const.}$ stattfindet?
3. Der Massenpunkt besitze nun den unter 2. berechneten Drehimpuls, bewege sich aber auf einer infinitesimal gestörten Kreisbahn $r(t) = R + \rho(t)$, wobei $\rho/R \ll 1$ gilt. Vernachlässige in der Bewegungsgleichung alle Terme der Größenordnung ρ^2 und gewinne so die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators in ρ .
4. Welchen Bedingungen muss das Zentralkraftfeld genügen, damit die Störung infinitesimal bleibt? Was bedeutet dies für den Spezialfall $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{c}{r^n}\vec{e}_r$?

Aufgabe 3: Mond (8 Punkte)

Ein Satellit kreist mit einer Periode von $T = 110$ min direkt an der Mondoberfläche um den Mond. Die Entfernung Mondmittelpunkt - Satellit entspricht also ungefähr dem Mondradius R_M . Berechne die durchschnittliche Dichte des Mondes ($\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ist die Gravitationskonstante).