

# THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Mathematische Vorübungen

16.10.2009

## Aufgabe 1: Ableiten

a) Beantworte zunächst folgende allgemeine Fragen:

- Wann ist eine Funktion  $f(x)$  stetig in  $x_0$ ? Wann ist sie stetig in dem Intervall  $(a, b)$  ?
- Nenne ein Beispiel von einer Funktion  $f(x) : (-1, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$ , die nicht stetig in  $x_0 = 0$  ist.
- Was ist die Ableitung einer Funktion in  $x_0$ ? Wann ist eine Funktion in dem Intervall  $(a, b)$  ableitbar?
- Nenne ein Beispiel von einer Funktion, die stetig aber nicht ableitbar in  $x_0 = 0$  ist.
- Wie lauten Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für allgemeine Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ ?

b) Berechne die erste Ableitung folgender Funktionen:

- $f(x) = \sin x$  ; •  $f(x) = \cos x$  ; •  $f(x) = \tan x$  ; •  $f(x) = \arcsin x$  ; •  $f(x) = x^\alpha$  ; •  $f(x) = e^x$  ;
- $f(x) = \ln x$  ; •  $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$  ; •  $f(x) = a^x$  ; •  $f(x) = e^{\tan \sqrt{x}}$  ; •  $f(x) = 5$  ;
- $f(x) = \ln \left( 1 - e^{\sqrt{x^2+a^2}} \right)$  .

## Aufgabe 2: Integrieren

a) Auch hier zunächst allgemeine Fragen:

- Was ist die geometrische Bedeutung der bestimmten Integrale  $\int_a^b f(x)dx$  und  $\int_a^b |f(x)| dx$  (wobei  $a < b$ ) ?
- Was ist eine Stammfunktion?
- Wie lautet die Substitutionsregel und wie integriert man mit Hilfe partieller Integration?

b) Berechne folgende bestimmte und unbestimmte Integrale:

- $\int dx x^\alpha \quad \alpha \in \mathcal{R}, \text{ untersuche } \alpha = -1 \text{ und } \alpha \neq -1 \text{ getrennt}$
- $\int dx a^x \quad \text{Tipp: } a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$
- $\int dx \frac{x^3}{(x^4 + 2)^3} \quad \text{substituiere } u = x^4 + 2$
- $\int_{e^2}^{e^3} dx \frac{1}{x(\ln x)} \quad \text{substituiere } u = \ln x$
- $\int_0^{n\pi} dx x^2 \cos x \quad n \in \mathcal{N}, \text{ integriere partiell (in zwei Schritten)}$

Aufgabe 3: Vektoren

a) Zu den elementaren Begriffen im Zusammenhang mit Vektoren:

- Was sind Vektoren?
- Wann sind Vektoren linear unabhängig?
- Was versteht man unter einer Basis?
- Was bedeutet die Addition von Vektoren graphisch?
- Was sind die geometrischen Bedeutungen des Skalarprodukts  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  und des Vektorprodukts  $\vec{a} \times \vec{b}$ ?

b) Gegeben seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Berechne:  
 $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $3\vec{a}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , die Längen von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , den Winkel (in Grad) zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$ .
- Zeige, dass  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear unabhängig sind.
- Zeige, dass der Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

in der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene liegt.

Aufgabe 4: Logisches Denken

Gegeben sei eine Menge gleichschwerer Ziegelsteine. Ein Ziegelstein wiege 1 kg plus die Hälfte eines anderen Ziegelsteins. Wieviel wiegt ein Ziegelstein?