

Einführung in die relativistische Quantenfeldtheorie

Nach einer Vorlesung gehalten im Wintersemester 1988/89
an der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main

von
Eberhard Engel

Frankfurt am Main, 1989

Inhaltsverzeichnis

1	Das Konzept von Quantenfeldtheorien und ihre störungstheoretische Behandlung	1
1.1	Freie Elektronen	1
1.1.1	Klassische Felder	1
1.1.2	2. Quantisierung	2
1.1.3	Stromoperator	4
1.1.4	Freier Propagator für Fermionen	5
1.1.5	Anmerkungen zum Vakuum	6
1.2	Freie Photonen	7
1.2.1	Die Lagrangedichte freier Photonen	7
1.2.2	2. Quantisierung	8
1.2.3	Massive Vektorfelder	11
1.2.4	Freier Propagator für Photonen	12
1.3	Minimale Kopplung: Eichinvarianz	13
1.4	Idee der Störungstheorie	14
1.5	Green'sche Funktionen, Wick'sches Theorem, Feynman-Regeln	16
1.5.1	Green'sche Funktionen	16
1.5.2	Wick'sches Theorem	17
1.5.3	Feynman-Regeln	21
1.6	Klassifikationen, Integralgleichungen	25
2	Der Photon-Propagator: 1. Teil	33
2.1	Die Dyson-Gleichung	33
2.2	Alternative Integralgleichungen	37
3	Eichinvarianz und Ward-Takahashi-Identitäten	41
3.1	Ward-Takahashi-Identitäten	41
3.2	Konsequenzen für Greensfunktionen	42
3.2.1	Vakuumpolarisation	43
3.2.2	Vertexkorrektur	44
3.2.3	Photon-Photon-Streuamplitude	46

4	Regularisierung	49
4.1	Die irreduzible Vakuumpolarisation in niedrigster Ordnung von α	49
4.2	Das Verfahren von Pauli und Villars	53
4.3	Dimensionale Regularisierung	65
4.3.1	Berechnung von Loop-Integralen in beliebiger Dimension	66
4.3.2	Quantenelektrodynamik in D Dimensionen	73
4.3.3	Die Vakuumpolarisation $\omega^{(1)}$ in dimensionaler Regularisierung	75
4.4	Anwendungen in erster und zweiter Ordnung	78
4.4.1	Die Selbstenergie massiver Fermionen in erster Ordnung	78
4.4.2	Die Vertexkorrektur massiver Fermionen in erster Ordnung	81
4.4.3	Die Vakuumpolarisation der masselosen QED in erster Ordnung	82
4.4.4	Die Selbstenergie der masselosen QED in erster Ordnung	83
4.4.5	Die Vertexkorrektur der masselosen QED in erster Ordnung	84
4.4.6	Die Vakuumpolarisation der masselosen QED in zweiter Ordnung	85
4.4.7	Die Selbstenergie der masselosen QED in zweiter Ordnung	86
5	Der Photon-Propagator: 2. Teil	89
5.1	Physikalische Relevanz des Photon-Propagators	89
5.2	Renormierung des Photon-Propagators	91
5.3	Alternative Formulierung des Renormierungsschemas: Das Countertermverfahren	96
6	Divergenzgrad und Renormierbarkeit	99
7	Das Counterterm-Verfahren: Allgemeine Formulierung	105
7.1	Reinstallation von \hbar	105
7.2	Das Counterterm-Verfahren	107
7.3	Vakuumpolarisation, Selbstenergie und Vertexkorrektur	110
7.3.1	Vakuumpolarisation	110
7.3.2	Selbstenergie	111
7.3.3	Vertexkorrektur	114
7.4	Renormierung bis zur zweiten Ordnung	116
7.5	Masselose Quantenelektrodynamik	119
8	Idee des allgemeinen Renormierungsbeweises	125
8.1	Konvergenztheorem für Feynman-Integrale	125
8.2	Diskussion der höheren Ordnungen	128
9	Renormierungspunkt und Renormierungsgruppengleichungen	133
9.1	Die Bedeutung des Renormierungspunktes	133
9.2	Die Renormierungsgruppengleichung	135
9.3	Das Skalentransformationsverhalten von $\Gamma_R^{(2n,l)}$	137
9.4	Masselose Theorie	139
A	Integralsammlung	147

Kapitel 1

Das Konzept von Quantenfeldtheorien und ihre störungstheoretische Behandlung

Dieses Kapitel stellt in knapper Form die elementaren Grundlagen relativistischer Quantenfeldtheorien zusammen. Dabei dient hier wie auch im weiteren stets die Quantenelektrodynamik als explizites Beispiel. Zunächst wird daher die 2. Quantisierung von freien Elektronen und Photonen diskutiert, wobei für letztere der Gupta-Bleuler Formalismus verwendet wird. Anschließend folgen in den Abschnitten 1.3,1.4 einige Bemerkungen zur Wechselwirkung zwischen Elektronen und Photonen sowie zum Grundkonzept der Störungstheorie. Der nächste Abschnitt ist der Auswertung der Störungsentwicklung gewidmet, d.h. nach der allgemeinen Definition von Green'schen Funktionen werden mit Hilfe des Wick'schen Theorems die Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik abgeleitet. Schließlich wird im letzten Abschnitt näher auf die Klassifikation von Green'schen Funktionen eingegangen.

1.1 Freie Elektronen

1.1.1 Klassische Felder

Die grundlegende Größe einer relativistischen Quantenfeldtheorie ist die sie charakterisierende Lagrangedichte. Für nichtwechselwirkende (freie) Elektronen lautet sie in ihrer einfachsten Form

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi(x) \quad . \quad (1.1)$$

Dabei wurde die Notation

$$\begin{aligned} \hbar &= c = 1 \\ \bar{\psi}(x) &= \psi^\dagger(x)\gamma^0 \\ \rlap{-}\not{\partial} &= \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

verwendet, wobei die γ^μ die Standard-Dirac-Matrizen sind. Bei ψ und $\bar{\psi}$ handelt es sich zunächst noch um klassische Felder. Sie sind bekanntlich Viererspinoren. Auf eine Ankopplung

der Elektronen an ein klassisches externes Feld wurde verzichtet. Die wichtigste Konsequenz dessen ist die Translationsinvarianz des Systems bezüglich aller vier Raum-Zeit-Koordinaten. Daraus folgt letztlich die Erhaltung aller vier Impulskomponenten.

Die Feldgleichung des Systems erhält man aus der Variation der Wirkung,

$$S = \int d^4x \mathcal{L}[\psi(x), \bar{\psi}(x)] \quad .$$

Die Feldkonfiguration, die S extremal werden läßt, ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} S[\psi, \bar{\psi}] &= 0 \\ \frac{\delta}{\delta \psi} S[\psi, \bar{\psi}] &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Das ist im Fall freier Fermionen die freie Dirac-Gleichung,

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = (i\cancel{\partial} - m)\psi(x) \quad .$$

Aus ihr resultiert als Definition der Viererstromdichte,

$$j_\mu(x) = -e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \quad , \quad (1.2)$$

wobei $e = |e|$ stets nur die Einheit der Ladung meint und die Ladung der Elektronen als negativ definiert wurde. Dieser Viererstrom erfüllt die Stromerhaltungsrelation

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0 \quad . \quad (1.3)$$

1.1.2 2. Quantisierung

Die 2. Quantisierung der Theorie erfolgt über Gleichzeit-Kommutatoren, genauer Gleichzeit-Antikommutatoren bei Fermionen, der Feldoperatoren,

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_\alpha(t, \underline{x}), \hat{\psi}_\beta(t, \underline{y})\} &= 0 \\ \{\hat{\bar{\psi}}_\alpha(t, \underline{x}), \hat{\bar{\psi}}_\beta(t, \underline{y})\} &= 0 \\ \{\hat{\psi}_\alpha(t, \underline{x}), \hat{\bar{\psi}}_\beta(t, \underline{y})\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \quad . \end{aligned} \quad (1.4)$$

α und β sind die Spinorindices der Felder. Die geschweiften Klammern stellen wie üblich den Antikommutator dar.

Zur Konstruktion des Fockraums entwickelt man diese Feldoperatoren nach den klassischen Eigenzuständen der Feldgleichung. Die entsprechenden operatorwertigen Entwicklungskoeffizienten sind dann die Erzeuger bzw Vernichter von Teilchen in diesen Zuständen. Die Entwicklung der Feldoperatoren soll hier direkt im Elektron-Positron-Bild vorgenommen werden, die Umdefinition der negativen Energiezustände wird als bekannt vorausgesetzt. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\hat{b}_\alpha(p) u^\alpha(p) e^{-ipx} + \hat{d}_\alpha^\dagger(p) v^\alpha(p) e^{ipx} \right] \\ \hat{\bar{\psi}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\hat{b}_\alpha^\dagger(p) \bar{u}^\alpha(p) e^{ipx} + \hat{d}_\alpha(p) \bar{v}^\alpha(p) e^{-ipx} \right] \quad , \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei die Teilchen auf der Massenschale liegen,

$$p^0 = \sqrt{\underline{p}^2 + m^2} \quad .$$

Zu diesen Gleichungen sind mehrere Anmerkungen, die Notation betreffend, nötig:

1. Bei $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0}$ handelt es sich um das Lorentz-invariante Maß im Impulsraum. Die Lorentz-Invarianz bedingt den Nenner $1/p^0$. Der Faktor m entspricht der Konvention für Fermionen.
2. α ist hier der Spinindex. Im Ruhesystem der Elektronen unterscheidet er zwischen Spin-up und Spin-down.
3. u_α und v_α sind die Standard-Viererspinoren für freie Teilchen. Dabei resultiert u_α aus den Lösungen der Dirac-Gleichung zu positiver Energie, v_α aus denen zu negativer Energie.
4. Hier wie im weiteren wird stets $px = p_\nu x^\nu$ abgekürzt werden.

Die Operatoren $\hat{b}_\alpha^+(p)$ sind die Erzeuger von Elektronen mit Viererimpuls p und Spin α , $\hat{d}_\alpha^+(p)$ die Erzeuger von Positronen mit Viererimpuls p und Spin α . Entsprechend vernichten $\hat{b}_\alpha(p)$ und $\hat{d}_\alpha(p)$ die beiden Teilchensorten. Aus dieser Sicht erhöht also $\hat{\psi}$ die Ladung um eine Einheit (gemäß der Definition der Ladung von Elektronen) und $\hat{\bar{\psi}}$ erniedrigt sie bei Anwendung auf einen beliebigen Zustand. Die Feldoperatoren sind also keine Erzeuger von Teilchen am Ort x , sondern Erzeuger von Ladung.

Aus den Kommutationsrelationen für die Feldoperatoren und der Translationsinvarianz des Systems kann man die Kommutationsrelationen der Erzeuger und Vernichter gewinnen,

$$\begin{aligned}
\{\hat{b}_\alpha^+(p), \hat{b}_\beta^+(k)\} &= 0 \\
\{\hat{b}_\alpha(p), \hat{b}_\beta(k)\} &= 0 \\
\{\hat{d}_\alpha^+(p), \hat{d}_\beta^+(k)\} &= 0 \\
\{\hat{d}_\alpha(p), \hat{d}_\beta(k)\} &= 0 \\
\{\hat{b}_\alpha(p), \hat{b}_\beta^+(k)\} &= \frac{p^0}{m} \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\underline{p} - \underline{k}) \\
\{\hat{d}_\alpha(p), \hat{d}_\beta^+(k)\} &= \frac{p^0}{m} \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\underline{p} - \underline{k}) \quad .
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Zusätzlich verschwinden alle Antikommutatoren von $\hat{b}^{(+)}$ und $\hat{d}^{(+)}$. Der Faktor $\frac{p^0}{m}$ ist eine Konsequenz des Lorentz-invarianten Maßes bei der Entwicklung der Feldoperatoren.

Über die Erzeuger und Vernichter kann man den Fockraum des Systems konstruieren. Zunächst ist das Vakuum $|0\rangle$ derjenige Zustand, der keine Teilchen enthalten soll. Daher muß die Anwendung der Vernichter auf $|0\rangle$ gerade Null ergeben,

$$\begin{aligned}
\hat{b}_\alpha(p) |0\rangle &= 0 \\
\hat{d}_\alpha(p) |0\rangle &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

1-Teilchen-Zustände erhält man aus dem Vakuum durch Anwenden der Erzeuger,

$$\begin{aligned}\hat{b}_\alpha^+(p) | 0 \rangle &= | e^-, p, \alpha \rangle \\ \hat{d}_\alpha^+(p) | 0 \rangle &= | e^+, p, \alpha \rangle \quad .\end{aligned}$$

Die Zustände $| e^\pm, p, \alpha \rangle$ repräsentieren freie Elektronen bzw Positronen mit Impuls p und Spin α . Durch Ausschmieren mit einer mathematisch geeigneten Verteilungsfunktion $f(p)$ erhält man normierbare 1-Teilchen-Zustände,

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p) \hat{b}_\alpha^+(p) | 0 \rangle \quad .$$

Analog konstruiert man Mehrteilchen-Zustände durch mehrfache Anwendung von Erzeugern auf das Vakuum,

$$\hat{b}_{\alpha_1}^+(p_1) \dots \hat{b}_{\alpha_n}^+(p_n) | 0 \rangle \quad .$$

Damit ist der Fockraum freier Elektronen wohldefiniert.

1.1.3 Stromoperator

Die naheliegendste Quantisierung des Stromoperators wäre die direkte Übertragung von Gl.(1.2) auf Operatoren,

$$\hat{j}_\mu(x) = - e \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \quad .$$

Diese stößt jedoch sehr schnell auf Schwierigkeiten. Betrachtet man etwa den Vakuumerwartungswert der so definierten Ladung,

$$\begin{aligned}Q_{vac} &= \langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle \\ &= -e \int d^3x \langle 0 | \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle \\ &= -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \langle 0 | \sum_{\alpha=1}^2 [\hat{b}_\alpha^+(p) \hat{b}_\alpha(p) + \hat{d}_\alpha(p) \hat{d}_\alpha^+(p)] | 0 \rangle \\ &= -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \langle 0 | \sum_{\alpha=1}^2 \hat{d}_\alpha(p) \hat{d}_\alpha^+(p) | 0 \rangle \quad ,\end{aligned}$$

so erkennt man, daß dieser auf Grund der Tatsache, daß $\hat{\psi}$ kein Teilchen-Vernichter ist, divergiert. Man erhält gerade die divergente Ladung aller überabzählbar vielen negativen Energiezustände der Dirac-Gleichung. Dieses Problem behebt man durch eine Redefinition des Stromoperators. Dazu gibt es zwei gängige Verfahren. Zum eine kann man den Stromoperator als Kommutator von Feldoperatoren definieren,

$$\hat{j}_\mu(x) \equiv - e \operatorname{tr} [\hat{\bar{\psi}}(x), \gamma_\mu \hat{\psi}(x)] \quad ,$$

was letztendlich zu einer Subtraktion der Fermi-See Beiträge führt. Das gleiche leistet die sogenannte Normalordnung,

$$\hat{j}_\mu(x) \equiv - e : \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) : \quad , \quad (1.7)$$

bei der die Reihenfolge der Erzeuger und Vernichter beim Einsetzen der Entwicklung der Feldoperatoren, Gl.(1.5), nach ihnen festgelegt wird: Alle Erzeuger sind unter Beachtung des Antikommutations-Vorzeichens links von den Vernichtern anzuordnen. Unter der Normalordnung antikommutieren also alle Erzeuger und Vernichter ohne Kommutationsrest. Diese Definition, die im weiteren verwendet werden soll, bedeutet für den Ladungsoperator,

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= -e \int d^3x : \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}(x) : \\ &= -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\hat{b}_{\alpha}^+(p) \hat{b}_{\alpha}(p) - \hat{d}_{\alpha}^+(p) \hat{d}_{\alpha}(p) \right] ,\end{aligned}\quad (1.8)$$

sodaß seine Anwendung auf das Vakuum wie gewünscht Null ergibt. Der Vorzeichenunterschied zwischen Elektronen- und Positronen-Operatoren ergibt gerade das korrekte Vorzeichen beim Ladungseigenwert der Zustände.

1.1.4 Freier Propagator für Fermionen

Wenn man sich nun das Elektronenfeld an ein externes klassisches Feld $V_{\mu}(x)$ angekoppelt vorstellt,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\rlap{/}\partial - m - e\rlap{/}\mathcal{V}(x)) \psi(x) \quad ,$$

so kann man formal die Lösung der zugehörigen Feldgleichung,

$$(i\rlap{/}\partial - m) \psi(x) = e\rlap{/}\mathcal{V}(x) \psi(x) \quad ,$$

über die Lösung der Gleichung

$$(i\rlap{/}\partial_x - m) G(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y) \quad (1.9)$$

gewinnen,

$$\psi(x) = \psi_0(x) - ie \int d^4y G(x-y) \rlap{/}\mathcal{V}(y) \psi(y) \quad .$$

Dabei ist ψ_0 eine Lösung der freien Feldgleichung.

Die Lösung der Feldgleichung mit δ -förmiger Inhomogenität nennt man Green'sche Funktion (oder kürzer Greensfunktion). Die möglichen Lösungen $G(x-y)$ unterscheiden sich in den Randbedingungen, die sie erfüllen. Während in der klassischen Physik meist die sogenannte retardierte Greensfunktion (sie propagiert alle Lösungen der freien Feldgleichung zeitlich kausal von kleineren Zeiten zu größeren) auftritt, benötigen wir hier die Feynman'schen Randbedingungen, damit sowohl Elektronen als auch die aus den negativen Energiezuständen durch Umdefinition hervorgegangenen Positronen kausal propagiert werden,

$$G(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\rlap{/}p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad . \quad (1.10)$$

Die physikalische Bedeutung wird aus einer alternativen Definition der Feynman'schen Greensfunktion deutlich,

$$G(x-y) = \langle 0 | T \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) | 0 \rangle \quad , \quad (1.11)$$

wobei die sogenannte Zeitordnung folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned}
T\hat{\psi}(x^0, \underline{x})\hat{\bar{\psi}}(y^0, \underline{y}) &= \begin{cases} \hat{\psi}(x^0, \underline{x})\hat{\bar{\psi}}(y^0, \underline{y}) & \text{falls } x^0 > y^0 \\ -\hat{\bar{\psi}}(y^0, \underline{y})\hat{\psi}(x^0, \underline{x}) & \text{falls } y^0 > x^0 \end{cases} \\
&= \Theta(x^0 - y^0)\hat{\psi}(x^0, \underline{x})\hat{\bar{\psi}}(y^0, \underline{y}) - \Theta(y^0 - x^0)\hat{\bar{\psi}}(y^0, \underline{y})\hat{\psi}(x^0, \underline{x})
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Der Operator mit dem größten Zeitargument ist also immer ganz nach links zu ordnen. Unter der Zeitordnung antikommutieren alle Fermionen-Feldoperatoren. Man weist leicht nach, daß das so definierte $G(x - y)$ die Differentialgleichung (1.9) erfüllt. Eine analoge Definition trifft man für zeitgeordnete Produkte von mehr als zwei Feldoperatoren.

Einsetzen der Entwicklung der Feldoperatoren nach Erzeugern und Vernichtern ergibt

$$\begin{aligned}
G(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 < 0 | \Theta(x^0 - y^0) u_\alpha(p) \bar{u}_\beta(k) e^{-ipx + ik y} \hat{b}_\alpha(p) \hat{b}_\beta^\dagger(k) \\
&\quad - \Theta(y^0 - x^0) \bar{v}_\beta(k) v_\alpha(p) e^{ipx - ik y} \hat{d}_\beta(k) \hat{d}_\alpha^\dagger(p) | 0 > .
\end{aligned}$$

$\hat{b}_\beta^\dagger(k)$ erzeugt zum Zeitpunkt y^0 ein Elektron, das zu dem späteren Zeitpunkt x^0 von $\hat{b}_\alpha(p)$ wieder vernichtet wird. Dabei muß selbstverständlich $p_\nu = k_\nu$ gelten. Analog erzeugt $\hat{d}_\alpha^\dagger(p)$ zum Zeitpunkt x^0 ein Positron, das zu dem späteren Zeitpunkt y^0 von $\hat{b}_\beta(k)$ wieder vernichtet wird. Beide Teilchensorten werden also kausal propagiert! Für $x^0 > y^0$ werden Elektronen propagiert, für $y^0 > x^0$ Positronen. Die kausale Vorwärtspropagation eines Positrons mit positiver Energie entspricht der akausalen Rückwärtspropagation eines Elektrons negativer Energie.

1.1.5 Anmerkungen zum Vakuum

Bis jetzt war das Vakuum so gewählt worden, daß es der energetisch niedrigste Zustand in dem Teil des Fockraums war, in dem der Erwartungswert der Ladung verschwindet,

$$< 0 | \hat{Q} | 0 > = 0 .$$

Das Vakuum enthielt keine Teilchen. Man kann als Referenzzustand zur Konstruktion der Theorie aber auch den energetisch niedrigsten Zustand jedes anderen Unterraums des Fockraums wählen, etwa

$$< ref | \hat{Q} | ref > = -Ne .$$

Das könnte zum Beispiel der Grundzustand eines homogenen Elektronengases sein, bei dem alle Zustände oberhalb m bis zu einer Fermi-Energie ϵ_F besetzt sind. Daraus folgt eine modifizierte Konstruktion von Erzeugern und Vernichtern dieses Referenzzustands sowie des zugehörigen Fockraums. An dieser Stelle sei nur der Propagator des homogenen Elektronengases angegeben,

$$G(x - y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi i (\not{p} + m) \frac{\delta(p^0 - E)}{2E} \Theta(\epsilon_F - p^0) \right] , \tag{1.13}$$

mit

$$E = \sqrt{\underline{p}^2 + m^2} .$$

Der entscheidende Punkt, auf den hier hingewiesen werden soll, ist, daß besetzte Elektronenzustände grundsätzlich nicht von unbesetzten Positronenzuständen unterschieden werden können.

1.2 Freie Photonen

Die feldtheoretische Behandlung der Photonen leidet unter einer prinzipiellen Schwierigkeit: Eine Theorie für Teilchen mit der Masse Null muß selbstverständlich kovariant sein. Daher müßte man als Feldoperator einen Lorentz-Skalar, -Vektor oder -Tensor verwenden. In Erweiterung der klassischen Elektrodynamik liegt es nahe, hierfür das Viererpotential zu benutzen. Allerdings hat das freie Strahlungsfeld auf Grund der Masselosigkeit des Photons nur zwei Freiheitsgrade, die beiden transversalen Polarisationsrichtungen. Eine Beschreibung über das Viererpotential gibt ihm aber zunächst 4 Freiheitsgrade. Man muß daher zwei Freiheitsgrade auf irgendeine Weise eliminieren.

Dazu werden üblicherweise zwei unterschiedliche Verfahren verwendet. Das eine benutzt Coulomb-Eichung und eliminiert dann die statische Nullkomponente des Viererpotentials als klassisches Feld. Der zweite Freiheitsgrad wird dem System dann durch

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0$$

entzogen. Dieses Verfahren hat den Nachteil, nicht manifest kovariant zu sein. Die zweite Methode, der sogenannte Gupta-Bleuler-Formalismus, eliminiert die überflüssigen Freiheitsgrade auf Kosten eines komplizierten Fockraums. Da sie aber manifest kovariant ist, wird sie hier im weiteren verwendet werden. Sie soll in diesem Kapitel kurz vorgestellt werden.

1.2.1 Die Lagrangedichte freier Photonen

Der Ausgangspunkt der Überlegungen ist die folgende Lagrangedichte für das Strahlungsfeld im Rahmen des Gupta-Bleuler-Formalismus,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2(x) - \frac{\lambda}{2}(\partial_\rho A^\rho(x))^2, \quad (1.14)$$

mit dem Standard-Feldtensor

$$F_{\rho\nu}(x) = \partial_\rho A_\nu(x) - \partial_\nu A_\rho(x) \quad .$$

Der erste Summand stimmt genau mit der Lagrangedichte der klassischen Elektrodynamik überein. Der zweite Term stellt als Nebenbedingung mit dem Lagrangeparameter λ die manifest kovariante Lorentz-Eichung

$$\partial_\nu A^\nu(x) = 0 \quad (1.15)$$

sicher. Beobachtbare Größen müssen selbstverständlich unabhängig von λ sein. Sobald dies garantiert ist, kann man auch mit einem festen geeignet gewählten Wert für λ (Eichung genannt – dieser Eichungsbegriff sollte nicht mit dem des Vektorpotentials selbst verwechselt werden) arbeiten. Üblicherweise findet man in der Literatur die Feynman-Eichung $\lambda = 1$ und die Landau-Eichung $\lambda = \infty$, die ihre jeweiligen Vor- und Nachteile besitzen.

Aus dem Wirkungsprinzip gewinnt man die verallgemeinerten Maxwell-Gleichungen

$$\left[\partial_\alpha \partial^\alpha g_{\rho\nu} - (1 - \lambda) \partial_\rho \partial_\nu \right] A^\nu(x) = 0 \quad . \quad (1.16)$$

Die konjugierten Impulse Π^ρ zum Viererpotential A^ρ sind durch

$$\Pi^\rho(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\rho)} = F^{\rho 0}(x) - \lambda g^{\rho 0}(\partial_\nu A^\nu(x))$$

gegeben.

1.2.2 2. Quantisierung

Die zweite Quantisierung erfolgt im kanonischen Formalismus wieder über Gleichzeit-Kommutatoren für die Felder A^ρ und die zugehörigen kanonischen Impulse Π^ρ ,

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= 0 \\ [\hat{\Pi}_\rho(t, \underline{x}), \hat{\Pi}_\nu(t, \underline{y})] &= 0 \\ [\hat{\Pi}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= -ig_{\rho\nu}\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \quad . \end{aligned}$$

Diese Beziehungen können mit Hilfe der Definition des konjugierten Impulses auf die folgenden Kommutationsrelationen zurückgeführt werden,

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= 0 \\ [\partial_0 \hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \partial_0 \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= 0 \\ [\partial_0 \hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= ig_{\rho\nu}\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \quad . \end{aligned} \tag{1.17}$$

An dieser Stelle ist es leicht einzusehen, daß die Lorentz-Eichung nicht für die Operatoren selbst gefordert werden kann,

$$\begin{aligned} [\partial_\rho^x \hat{A}^\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= [\partial_0^x \hat{A}^0(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] + \partial_j^x [\hat{A}^j(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] \\ &= [\partial_0^x \hat{A}^0(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] \\ &= ig_{0\nu}\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \\ &\neq 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Forderung

$$\partial_\rho \hat{A}^\rho(x) = 0$$

würde daher in einen Widerspruch führen. Im übernächsten Abschnitt wird gezeigt werden, in welcher Form man die Lorentz-Eichung fordern muß, um die unphysikalischen Freiheitsgrade zu eliminieren.

Die Konstruktion des Fockraums läuft zunächst nach dem gleichen Schema wie bei skalaren Bosonen und Fermionen. Man entwickelt zuerst die Feldoperatoren nach den klassischen Lösungen der Feldgleichung,

$$\hat{A}_\rho(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \sum_{\lambda=0}^3 [\hat{a}^\lambda(k) \epsilon_\rho^\lambda(k) e^{-ikx} + \hat{a}^{+\lambda}(k) \epsilon_\rho^{*\lambda}(k) e^{ikx}] \quad , \tag{1.18}$$

mit

$$k^0 = |\underline{k}| \quad .$$

Die in dieser Entwicklung auftretenden Größen haben die folgende Bedeutung:

1. Wie schon bei den Fermionen wird hier ein Lorentz-invariantes Maß für die Impulsintegration verwendet. Dabei entspricht $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0}$ der Konvention für masselose Bosonen.

2. λ unterscheidet die zunächst 4 möglichen Polarisationsrichtungen, die durch die Polarisationsvektoren $\epsilon_\rho^\lambda(k)$ gegeben sind. Das System der Polarisationsvektoren soll 'orthonormal',

$$\epsilon_\rho^\lambda(k) \epsilon^{*\rho,\tau}(k) = g^{\lambda\tau} \quad ,$$

und 'vollständig',

$$\sum_{\lambda=0}^3 \frac{\epsilon_\rho^\lambda(k) \epsilon_\nu^{*\lambda}(k)}{\epsilon_\rho^\lambda(k) \epsilon^{*\rho,\lambda}(k)} = g_{\rho\nu} \quad ,$$

sein. Dabei wird der Minkowski-Struktur des Raumes über die Normierung auf $g_{\rho\nu}$ Rechnung getragen. Die Zeitkomponente wird also gegenüber den räumlichen Komponenten ausgezeichnet. Die Konsequenzen dieses Vorgehens werden gleich noch zu diskutieren sein.

Die einfachste (reelle) Wahl der $\epsilon_\rho^\lambda(k)$ ist die folgende:

$$\epsilon^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_x^{1,2} \\ e_y^{1,2} \\ e_z^{1,2} \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon^3 = \frac{1}{|\underline{k}|} \begin{pmatrix} 0 \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad , \quad (1.19)$$

wobei $\underline{e}^{1,2}$ und $\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$ ein rechtwinkeliges Dreibein bilden,

$$\begin{aligned} \underline{e}^{1,2} \cdot \hat{\underline{k}} &= 0 \\ \underline{e}^1 \cdot \underline{e}^2 &= 0 \\ \underline{e}^1 \cdot \underline{e}^1 &= 1 \\ \underline{e}^2 \cdot \underline{e}^2 &= 1 \quad . \end{aligned}$$

3. Die $\hat{a}^{(+),\lambda}(k)$ sind die Erzeuger bzw Vernichter von Photonen der Polarisation λ und des Impulses k . Man bezeichnet die Photonen zur Polarisation $\lambda = 0$ als skalare, die zu $\lambda = 3$ als longitudinale und die zu $\lambda = 1, 2$ als transversale Photonen. Nur letztere entsprechen auch physikalischen Freiheitsgraden.

Aus den Kommutationsrelationen der Feldoperatoren erhält man wieder die für die Erzeuger und Vernichter,

$$\begin{aligned} [\hat{a}^{+,\lambda}(p), \hat{a}^{+,\tau}(k)] &= 0 \\ [\hat{a}^\lambda(p), \hat{a}^\tau(k)] &= 0 \\ [\hat{a}^\lambda(p), \hat{a}^{+,\tau}(k)] &= -2k^0 g^{\lambda\tau} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\underline{p} - \underline{k}) \quad . \end{aligned} \quad (1.20)$$

Aufgrund der kovarianten Vorgehensweise unterscheidet sich der Kommutationsrest bei skalaren Photonen von den anderen um ein Minuszeichen.

Die Interpretation der Erzeuger und Vernichter resultiert aus der zugehörigen Definition des Vakuums. Zunächst fordert man

$$\hat{a}^\lambda(k) | 0 \rangle = 0 \quad . \quad (1.21)$$

Zustände mit einem oder mehreren Photonen erhält man wieder durch die Anwendung von Erzeugern auf dieses Vakuum,

$$|k_1, \lambda_1; \dots k_n, \lambda_n\rangle = \hat{a}^{+, \lambda_1}(k_1) \dots \hat{a}^{+, \lambda_n}(k_n) |0\rangle, \quad ,$$

wobei normierbare Zustände durch Ausschmieren im Impulsraum konstruiert werden,

$$|k, \lambda\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} f(k) \hat{a}^{+, \lambda}(k) |0\rangle \quad .$$

Betrachtet man die Norm der so konstruierten Zustände, so stellt man sofort fest, daß die skalaren Photonen eine negative Norm besitzen,

$$\begin{aligned} \langle k, 0 | k, 0 \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} f^*(k) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} f(p) \langle 0 | \hat{a}^0(k) \hat{a}^{+, 0}(p) | 0 \rangle \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} |f(k)|^2 \quad . \end{aligned}$$

Das ist eine direkte Konsequenz der kovarianten Kommutationsrelationen, d.h. der indefiniten Metrik. Der Fockraum scheint also keine positive Norm zu besitzen.

An dieser Stelle greift man auf die Lorentz-Eichung zurück. Anstatt sie für die Operatoren selbst zu fordern, was wie gezeigt auf einen Widerspruch führt, verlangt man ihre Gültigkeit für den Erwartungswert jedes beliebigen Zustands im Fockraum,

$$\langle \Phi | \partial_\mu \hat{A}^\mu(x) | \Phi \rangle = 0 \quad .$$

Sie schränkt also im Gupta-Bleuler-Formalismus den Zustandsraum ein, nicht die Feldoperatoren. Dabei genügt es, wenn der Erzeugungsanteil in $\partial_\mu \hat{A}^\mu(x)$ betrachtet wird,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{A}^\mu(x) | \Phi \rangle &= \partial_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}^{+, \lambda}(k) \epsilon^{*, \lambda, \mu}(k) e^{ikx} | \Phi \rangle \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}^{+, \lambda}(k) e^{ikx} | \Phi \rangle [k_\mu \epsilon^{*, \lambda, \mu}(k)] \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} [k^0 \hat{a}^{+, 0}(k) - |\underline{k}| \hat{a}^{+, 3}(k)] e^{ikx} | \Phi \rangle \quad . \end{aligned}$$

Die letzte Umformung vollzieht man am leichtesten in der oben angegebenen Wahl für die Polarisationsvektoren, Gl.(1.19), nach. Die Forderung

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu(x) | \Phi \rangle = 0 \quad (1.22)$$

bedingt daher

$$\begin{aligned} [k^0 \hat{a}^{+, 0}(k) - |\underline{k}| \hat{a}^{+, 3}(k)] | 0 \rangle &= 0 \\ \Rightarrow [\hat{a}^{+, 0}(k) - \hat{a}^{+, 3}(k)] | 0 \rangle &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.23)$$

Spaltet man daher den Fockraum in einen Teil auf, der die skalaren und longitudinalen Photonen enthält, und einen, der die transversalen Photonen enthält (was wegen der Linearität des Fockraumes möglich ist),

$$| \Phi \rangle = | \Phi_T \rangle | \Phi_{S,L} \rangle \quad , \quad (1.24)$$

so beschreibt $|\Phi_T\rangle$ die realen physikalischen Zustände und $|\Phi_{S,L}\rangle$ die unphysikalischen Freiheitsgrade. Die Lorentz-Bedingung, Gl.(1.22), schränkt nun die möglichen $|\Phi_{S,L}\rangle$ ein, während die physikalischen Freiheitsgrade unverändert bleiben. Jeder erlaubte Zustand enthält gleich viele skalare wie longitudinale Photonen. Als Konsequenz heben sich ihre Beiträge zu Observablen wie der Energie gerade heraus. Alle meßbaren Größen sind von den beiden unphysikalischen Freiheitsgraden unabhängig. Schließlich ergibt sich als Norm

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Phi \rangle &= \langle \Phi_T | \Phi_T \rangle \langle \Phi_{S,L} | \Phi_{S,L} \rangle \\ &= \langle \Phi_T | \Phi_T \rangle \langle 0, (S, L) | 0, (S, L) \rangle \\ &= \langle \Phi_T | \Phi_T \rangle \\ &> 0 \end{aligned}$$

Der eingeschränkte Fockraum hat eine positive Norm, weil sich die Beiträge der skalaren Photonen exakt mit denen der longitudinalen wegheben.

Jeder physikalische Zustand besteht letztlich aus einem einzigen Zustandsvektor $|\Phi_T\rangle$ und dem gesamten Raum der $|\Phi_{S,L}\rangle$, also einer ganzen Klasse von Zuständen im vollen Fockraum.

1.2.3 Massive Vektorfelder

An dieser Stelle ist es sinnvoll, noch ein weiteres Konzept zur Behandlung von masselosen Vektorbosonen einzuführen. Da sich die Masselosigkeit der Photonen an einigen Stellen in sogenannten Infrarotdivergenzen äußert, gibt man den Photonen zunächst künstlich eine Masse μ . Diese soll viel kleiner als die Elektronenmasse m sein. Sie dient dazu, Infrarotdivergenzen in allen Zwischenrechnungen zu unterdrücken. Um in einem Endergebnis zu realen physikalischen Aussagen zu kommen, nimmt man dann den Grenzwert $\mu \rightarrow 0$. Die zugehörige Stückelberg'sche Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2(x) + \frac{\mu^2}{2}A_\rho(x)A^\rho(x) - \frac{\lambda}{2}(\partial_\rho A^\rho(x))^2 \quad . \quad (1.25)$$

Mit dieser Lagrangedichte kann man mit endlichen μ und $\lambda = 0$ auch massive Vektorbosonen beschreiben.

Die Feldgleichung nimmt die folgende Gestalt an,

$$\left[(\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2)g_{\rho\nu} - (1 - \lambda)\partial_\rho \partial_\nu \right] A^\nu(x) = 0 \quad . \quad (1.26)$$

Die Quantisierung der Theorie erfolgt wie bisher. Allerdings muß man wegen der Inkonsistenz, jetzt die Lorentz-Eichung für massive Vektorbosonen zu fordern, in Kauf nehmen, daß sich die Masse der skalaren Bosonen von der der anderen unterscheidet,

$$\begin{aligned} \hat{A}_\rho(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2k^0} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}^\lambda(k) \epsilon_\rho^\lambda(k) e^{-ikx} + \hat{a}^{+\lambda}(k) \epsilon_\rho^{*\lambda}(k) e^{ikx} \right] \right\}_{k^0 = \sqrt{k^2 + \mu^2}} \\ &+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2k^0} \frac{\sqrt{\lambda} k_\rho}{\mu} \left[\hat{a}^0(k) e^{-ikx} + \hat{a}^{+,0}(k) e^{ikx} \right] \right\}_{k^0 = \sqrt{k^2 + \frac{\mu^2}{\lambda}}} \quad . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Dabei wurde für die Polarisationsvektoren der skalaren Bosonen bereits eine spezielle Wahl getroffen. Als Konsequenz sind auch die Kommutationsrelationen der Erzeuger und Vernichter modifiziert,

$$\begin{aligned}
[\hat{a}^{+, \lambda}(p), \hat{a}^{+, \tau}(k)] &= 0 \\
[\hat{a}^\lambda(p), \hat{a}^\tau(k)] &= 0 \\
[\hat{a}^i(p), \hat{a}^{+, 0}(k)] &= 0 \\
[\hat{a}^0(p), \hat{a}^{+, 0}(k)] &= -2\sqrt{\underline{k}^2 + \frac{\mu^2}{\lambda}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\underline{p} - \underline{k}) \\
[\hat{a}^i(p), \hat{a}^{+, j}(k)] &= 2\sqrt{\underline{k}^2 + \mu^2} \delta_{ij} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\underline{p} - \underline{k}) \quad .
\end{aligned} \tag{1.28}$$

1.2.4 Freier Propagator für Photonen

Der Propagator kann wieder auf zweierlei Weise eingeführt werden. Zum einen ergibt er sich als zeitgeordneter Vakuumerwartungswert der Feldoperatoren,

$$D_{\rho\nu}(x-y) = \langle 0 | T \hat{A}_\rho(x) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle \quad , \tag{1.29}$$

wobei die Zeitordnung im Fall von Bosonen gemäß den Vertauschungsrelationen kein Vorzeichen enthält,

$$T \hat{A}_\rho(x) \hat{A}_\nu(y) \equiv \Theta(x^0 - y^0) \hat{A}_\rho(x) \hat{A}_\nu(y) + \Theta(y^0 - x^0) \hat{A}_\nu(y) \hat{A}_\rho(x) \quad . \tag{1.30}$$

Die andere Definition verwendet die Feldgleichung mit einer δ -förmigen Inhomogenität,

$$[(\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2) g^{\tau\rho} - (1-\lambda) \partial^\tau \partial^\rho] D_{\rho\nu}(x-y) = i g_\nu^\tau \delta^{(4)}(x-y) \quad , \tag{1.31}$$

unter geeigneten Randbedingungen. Beide Definitionen sind äquivalent. Das Resultat lautet

$$\begin{aligned}
D_{\rho\nu}(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_{\rho\nu}(k) \\
D_{\rho\nu}(k) &= -i \left[\frac{g_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\rho k_\nu}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} + i\epsilon)} \right] \quad .
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Drei Spezialfälle sollen hier noch explizit aufgeführt werden:

$$\lambda = 1 : \quad D_{\rho\nu}(k) = \frac{-i g_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{k^2} \tag{1.33}$$

$$\lambda = \infty : \quad D_{\rho\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{k^2} \tag{1.34}$$

$$\lambda = 0 : \quad D_{\rho\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sim \text{const} \tag{1.35}$$

Zusätzlich zu den beiden gebräuchlichsten Eichungen, der Feynman-Eichung mit $\lambda = 1$ und der Landau-Eichung mit $\lambda = \infty$, ist hier auch der Propagator für massive Vektorbosonen aufgeführt, der nicht mehr äquivalent zu allen anderen Werten von λ ist. Das äußert sich in seiner grundsätzlich verschiedenen Tensorstruktur, die bewirkt, daß der Propagator für $k \rightarrow \infty$ nicht abfällt. Dies wird zur Konsequenz haben, daß eine Quantenfeldtheorie mit massiven Vektorbosonen nicht renormierbar ist.

1.3 Minimale Kopplung: Eichinvarianz

Die Lagrangedichte freier Fermionen,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\rlap{/}\partial - m)\psi(x) \quad ,$$

ist invariant gegen globale Eichtransformationen,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) \quad .$$

Daraus folgt über das Theorem von Noether die Stromerhaltung der wechselwirkungsfreien Theorie.

Fordert man Invarianz gegen lokale Eichtransformationen,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad ,$$

muß ψ derart an ein Eichfeld gekoppelt werden, daß dessen Transformationsverhalten unter der Eichtransformation den die Eichinvarianz störenden Term

$$\bar{\psi}(x)(-i\rlap{/}\partial\alpha(x))\psi(x)$$

gerade kompensiert. Die einfachste und übliche Wahl ist die sogenannte minimale Kopplung an das Eichfeld A_μ ,

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e \bar{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu(x)\psi(x) \quad , \quad (1.36)$$

wobei sich A_μ wie

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

transformieren muß. Das Eichfeld ist gerade das Photonfeld. Dieses erfüllt ja genau die obige Transformationsvorschrift. Auf Grund der eichinvarianten Ankopplung erhält man auch für die wechselwirkende Theorie einen erhaltenen Strom,

$$\begin{aligned} j_\nu(x) &= -e \bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x) \\ \partial^\nu j_\nu(x) &= 0 \quad , \end{aligned}$$

der hier die gleiche Form wie im wechselwirkungsfreien Fall hat. Fordert man umgekehrt die Erhaltung dieses Stromes, so stellt die minimale Kopplung das einzige bekannte Kopplungsschema dar, welches sie garantiert. Die Forderung nach Eichinvarianz ist daher nur eine alternative Formulierung der Forderung nach Stromerhaltung in der wechselwirkenden Theorie. Beide Aussagen sind äquivalent.

Die Gesamt-Lagrangedichte des wechselwirkenden Elektron-Photon-Systems lautet damit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m - e\rlap{/}A)\psi - \frac{1}{4}F^2 + \frac{\mu^2}{2}A_\nu A^\nu - \frac{\lambda}{2}(\partial_\nu A^\nu)^2 \quad . \quad (1.37)$$

Es sei angemerkt, daß der Masseterm des Photon-Feldes erwartungsgemäß nicht eichinvariant ist. Im Limes $\mu \rightarrow 0$ ist die Eichinvarianz aller aus diesem \mathcal{L} folgenden Aussagen aber sichergestellt.

Aus dieser Lagrangedichte erhält man die gekoppelten Feldgleichungen

$$(i\cancel{\partial} - m - eA(x))\psi(x) = 0 \quad (1.38)$$

$$[(\partial_\alpha\partial^\alpha + \mu^2)g_{\rho\nu} - (1 - \lambda)\partial_\rho\partial_\nu]A^\nu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\psi(x) = -j_\rho(x) \quad (1.39)$$

Zur Quantisierung fordert man dieselben Gleichzeit-(Anti)Kommutationsrelationen wie für freie Feldoperatoren,

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_\alpha(t, \underline{x}), \hat{\psi}_\beta(t, \underline{y})\} &= 0 \\ \{\hat{\bar{\psi}}_\alpha(t, \underline{x}), \hat{\bar{\psi}}_\beta(t, \underline{y})\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_\alpha(t, \underline{x}), \hat{\bar{\psi}}_\beta(t, \underline{y})\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \\ [\hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= 0 \\ [\partial_0\hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \partial_0\hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= 0 \\ [\partial_0\hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= ig_{\rho\nu}\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \quad . \end{aligned} \quad (1.41)$$

Zusätzlich verlangt man noch, daß Fermionen- und Bosonen-Operatoren vertauschen,

$$[\hat{\psi}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] = 0 \quad (1.42)$$

Entsprechend der Redefinition des Stromes in Gl.(1.7) wird bei der Quantisierung auch in der Wechselwirkungs-Lagrangedichte die Normalordnung eingeführt, da in ihr letztlich der Strom an das Eichfeld gekoppelt werden soll,

$$\mathcal{L}_{int}(x) = - e : \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{A}(x) \hat{\psi}(x) : \quad (1.43)$$

Das weitere Vorgehen zur Quantisierung kann aber nicht mehr von den freien Feldern übernommen werden. Zum einen kennt man schon die klassischen Lösungen zu dem gekoppelten System von Feldgleichungen, Gl.(1.38,1.39), nicht. Daher entfällt die Einführung von Erzeugern und Vernichtern der entsprechenden Zustände. Damit ist andererseits aber auch der Fockraum völlig unklar. Man versucht daher, das wechselwirkende System auf die bekannten nichtwechselwirkenden Systeme von Elektronen und Photonen zurückzuführen. Die dabei verwendete Methode beruht auf Störungstheorie in der Kopplungskonstanten $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137,0\dots}$. Der formale Zusammenhang zwischen den beiden Systemen wird im nächsten Kapitel kurz umrissen.

1.4 Idee der Störungstheorie

Der Lösungsansatz der Störungstheorie besteht darin, das wechselwirkende System auf ein nichtwechselwirkendes zurückzuführen. Die Formalisierung dieses Prinzips leistet in unserem Fall das asymptotische Ausschalten der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Photonen. Dabei ist asymptotisch hier im zeitlichen Sinn gemeint: Man stellt sich vor, für $t \rightarrow \pm\infty$ sei die Wechselwirkung nicht vorhanden. Eine vage Vorstellung vermittelt dazu der Vergleich mit der Streuung von zwei Elektronen. Sind die streuenden Elektronen für asymptotische Zeiten weit voneinander entfernt, ist ihre Wechselwirkung praktisch verschwindend. Diese Vorstellung ist

aber nicht korrekt: Die beiden Elektronen wechselwirken zwar untereinander nicht, wohl aber mit dem Strahlungsfeld, was zu einer Modifikation ihrer Eigenschaften führt.

Die mathematische Umsetzung des Ausschaltens erfolgt über das Einführen einer Ausschaltfunktion in die Wechselwirkungs-Lagrangedichte,

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -e : \hat{\psi}(x) \hat{A}(x) \hat{\psi}(x) : e^{-\epsilon x^0} \quad . \quad (1.44)$$

Das Ausschalten soll natürlich sehr langsam erfolgen, weswegen man $0 < \epsilon \ll 1$ (in geeigneten Einheiten) fordert. Dieses Vorgehen leistet gerade das Gewünschte:

1. Für $t = x^0 \rightarrow \pm\infty$ liegen die Lagrangedichten von freien Elektronen und Photonen vor. Daher ist die Quantisierung und damit der Fockraum dieses Systems klar.
2. Für $\epsilon \rightarrow 0$ gewinnt man das ursprüngliche wechselwirkende System zurück. Alle realen Erwartungswerte ergeben sich im Limes $\epsilon \rightarrow 0$.

Das Theorem von Gell-Mann und Low garantiert dann, daß bei einem langsamen Einschalten der Wechselwirkung Eigenzustände des nichtwechselwirkenden Systems in solche des wechselwirkenden Systems übergehen (allerdings ist im allgemeinen nicht sicher, ob die jeweiligen Grundzustände ineinander übergehen).

Man kann dann eine Transformation finden, die zu jedem Zeitpunkt die Feldoperatoren des wechselwirkenden Systems auf nichtwechselwirkende Feldoperatoren zurückführt,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \hat{U}_\epsilon^{-1}(x^0) \hat{\psi}_0(x) \hat{U}_\epsilon(x^0) \\ \hat{A}_\rho(x) &= \hat{U}_\epsilon^{-1}(x^0) \hat{A}_{0\rho}(x) \hat{U}_\epsilon(x^0) \quad . \end{aligned}$$

Der dem Zeitentwicklungsoperator verwandte Operator \hat{U}_ϵ hat die folgende Form, die hier ohne Beweis angegeben werden soll,

$$\begin{aligned} \hat{U}_\epsilon(t) &= T \exp \left\{ i \int_{-\infty}^t dx^0 \int d^3x \mathcal{L}_{int}[\hat{\psi}_0(x), \hat{A}_{0\rho}(x)] \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} T \int_{-\infty}^t dx_1^0 \int d^3x_1 \dots \int_{-\infty}^t dx_n^0 \int d^3x_n \mathcal{L}_{int}(x_1) \dots \mathcal{L}_{int}(x_n) \quad . \end{aligned}$$

Dabei definiert die zweite Zeile nur die Zeitordnung der Exponentialfunktion über ihre Reihendarstellung.

Mit Hilfe von \hat{U}_ϵ kann man die folgende zentrale Beziehung zwischen zeitgeordneten Vakuumerwartungswerten von wechselwirkenden Feldoperatoren und denen von nichtwechselwirkenden Feldoperatoren aufstellen,

$$\begin{aligned} &\langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_m) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}(y_n) \hat{A}_{\rho_1}(z_1) \dots \hat{A}_{\rho_l}(z_l) | 0 \rangle \\ &= \frac{\langle 0_0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \dots \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \dots \exp \{ i \int_{-\infty}^{+\infty} du^0 \int d^3u \mathcal{L}_{int}[\hat{\psi}_0(u), \hat{A}_{0\rho}(u)] \} | 0_0 \rangle}{\langle 0_0 | \exp \{ i \int_{-\infty}^{+\infty} du^0 \int d^3u \mathcal{L}_{int}[\hat{\psi}_0(u), \hat{A}_{0\rho}(u)] \} | 0_0 \rangle} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Der Nenner resultiert aus der Tatsache, daß das Vakuum des wechselwirkenden Systems $| 0 \rangle$ nur bis auf eine Phase mit dem des nichtwechselwirkenden Systems $| 0_0 \rangle$ identisch ist.

Die Bedeutung dieser zeitgeordneten Vakuumerwartungswerte soll im nächsten Kapitel geklärt werden.

1.5 Green'sche Funktionen, Wick'sches Theorem, Feynman-Regeln

1.5.1 Green'sche Funktionen

Einen zeitgeordneten Vakuumerwartungswert einer beliebigen Menge von Feldoperatoren,

$$G_{\rho_1 \dots \rho_l}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) = \langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_m) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}(y_n) \hat{A}_{\rho_1}(z_1) \dots \hat{A}_{\rho_l}(z_l) | 0 \rangle ,$$

bezeichnet man in Erweiterung der Definitionen (1.11, 1.29) man als Green'sche Funktion, bzw kurz Greensfunktion. Es sei darauf hingewiesen, daß einige gerinfügig andere Definitionen ebenfalls üblich sind. Sie unterscheiden sich durch die Zuordnung von i 's und Vorzeichen sowie eventuell noch Einheiten der Ladung e . Auch die Reihenfolge der Fermion-Feldoperatoren ist reine Konvention. Die obige Konvention erlaubt aber die direkteste Übersetzung einer Greensfunktion nach den in diesem Kapitel zu diskutierenden Feynman-Regeln.

Zu dieser allgemeinen Form seien jetzt zunächst einige Anmerkungen gemacht:

1. Es muß $m = n$ gelten, damit der Erwartungswert nicht verschwindet. Die Feldoperatoren müssen genauso viel Ladung erzeugen wie sie vernichten. Dabei erhöht $\hat{\psi}$ die Ladung in unserer Definition des Ladungsoperators und $\hat{\bar{\psi}}$ erniedrigt sie. Einen expliziten Beweis dieser Aussage liefert der nächste Abschnitt.
2. Die für $m = n$ und $l = 0$ auftretende Greensfunktion nennt man n -Teilchen-Greensfunktion $G^{(2n,0)}$. Die einfachsten Beispiele sind:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) | 0 \rangle &= G^{(2,0)}(x - y) \equiv G^{(2)}(x - y) \equiv G(x - y) \quad (1.46) \\ &\equiv \text{1-Teilchen-Greensfunktion} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{\bar{\psi}}(y_2) | 0 \rangle &= G^{(4,0)}(x_1, x_2, y_1, y_2) \equiv G^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (1.47) \\ &\equiv \text{2-Teilchen-Greensfunktion} \end{aligned}$$

Dabei wurde angedeutet, daß insbesondere für die 1-Teilchen-Greensfunktion (den Elektron-Propagator) häufig eine vereinfachte Notation verwendet wird. Auch hier wird in Zukunft die Abkürzung $G(x - y)$ benutzt werden.

3. Analog gibt es die reinen Photon-Greensfunktionen, deren einfachste der Photon-Propagator ist:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{A}_\rho(x) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle &= G_{\rho\nu}^{(0,2)}(x - y) \equiv D_{\rho\nu}(x - y) \quad (1.48) \\ &\equiv \text{Photon-Propagator} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{A}_\rho(x) \hat{A}_\nu(y) \hat{A}_\mu(z) \hat{A}_\lambda(u) | 0 \rangle &= G_{\rho\nu\mu\lambda}^{(0,4)}(x, y, z, u) \quad (1.49) \\ &\equiv \text{Photon-Photon-Streuamplitude} \end{aligned}$$

Dabei wurde bereits benutzt, daß die Vakuumerwartungswerte von ungeradzahlig vielen Photon-Feldoperatoren verschwinden,

$$\langle 0 | T \hat{A}_{\rho_1}(z_1) \dots \hat{A}_{\rho_{2l+1}}(z_{2l+1}) | 0 \rangle = 0 \quad . \quad (1.50)$$

Das wird im nächsten Abschnitt bewiesen werden.

4. Die einfachste Greensfunktion, die sowohl Elektronen- als auch Photon-Feldoperatoren enthält, ist die sogenannte Vertexfunktion (dieser Begriff wird gelegentlich nur für den Kern der unten folgenden Funktion verwendet – dieser Kern soll hier Vertexkorrektur heißen),

$$\langle 0 | T \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \hat{A}_\nu(z) | 0 \rangle = G_\nu^{(2,1)}(x, y, z) \equiv G_\nu^{(3)}(x, y, z) \equiv \text{Vertexfunktion} \quad . \quad (1.51)$$

Warum sind diese Funktionen wichtig? Sie sind die zentralen Größen einer relativistischen Quantenfeldtheorie ! Als Beispiel sei hier ohne Ableitung die Streuamplitude bei der Elektron-Positron-Streuung angegeben:

$$\begin{aligned} & \langle 0, out | \hat{d}_{out}(q_1) \hat{b}_{out}(q_2) \hat{b}_{in}^\dagger(k_2) \hat{d}_{in}^\dagger(k_1) | 0, in \rangle \\ &= \langle 0, in | \hat{d}_{in}(q_1) \hat{b}_{in}(q_2) \hat{S} \hat{b}_{in}^\dagger(k_2) \hat{d}_{in}^\dagger(k_1) | 0, in \rangle \\ &= \text{'disconnected term'} \\ &+ (-iZ_2^{-\frac{1}{2}})^2 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + iq_1y_1 + iq_2y_2} \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} & \left[\bar{u}(q_2)(i\vec{\not{\partial}}_{y_2} - m) \right]_{\alpha_1} \left[\bar{v}(k_1)(i\vec{\not{\partial}}_{x_1} - m) \right]_{\alpha_2} \\ & \langle 0 | T \hat{\psi}_{\alpha_1}(y_2) \hat{\psi}_{\alpha_2}(x_1) \hat{\bar{\psi}}_{\beta_1}(x_2) \hat{\bar{\psi}}_{\beta_2}(y_1) | 0 \rangle \\ & \left[(-i\vec{\not{\partial}}_{x_2} - m)u(k_2) \right]_{\beta_1} \left[(-i\vec{\not{\partial}}_{y_1} - m)v(q_1) \right]_{\beta_2} \end{aligned}$$

Hier laufen ein Elektron mit dem Impuls k_2 und ein Positron mit Impuls k_1 ein, streuen aneinander und verlassen die Wechselwirkungszone als Elektron mit Impuls q_2 sowie Positron mit Impuls q_1 . Dabei beschreibt der 'disconnected term' die Propagation des Elektrons und des Positrons, ohne daß untereinander eine Wechselwirkung stattfindet. Die eigentliche Streuamplitude ist der zweite Term, dessen Kern gerade die 2-Teilchen-Greensfunktion darstellt. Der Vorfaktor Z_2 resultiert daraus, daß im Limes $t \rightarrow -\infty$ ein voller wechselwirkender Feldoperator $\hat{\psi}$ nur bis auf einen Normierungsfaktor in einen freien Feldoperator $\hat{\psi}_0$ übergehen muß,

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \hat{\psi}(x) = Z_2^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_0(x) \quad . \quad (1.53)$$

Schließlich bedeuten die Vektorpfeile über den Differentiationen, daß die jeweiligen Differentialoperatoren nach hinten bzw vorn wirken. An dieser Stelle sollen keine Details zur S-Matrix ausgeführt werden. Der entscheidende Punkt ist die Aussage: Die Greensfunktionen enthalten alle physikalische Information über das System.

Die Auswertung einer Greensfunktion erfolgt in Störungstheorie über Gl.(1.45). Daher muß als nächstes ein Werkzeug bereitgestellt werden, mit dem beliebige Vakuumerwartungswerte von freien Feldoperatoren zumindest im Prinzip berechnet werden können. Dies geschieht über das Wick'sche Theorem.

1.5.2 Wick'sches Theorem

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Reduktion eines beliebigen zeitgeordneten Vakuumerwartungswerts von freien Feldoperatoren,

$$\langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\psi}_0(x_n) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}_0(y_n) \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \dots \hat{A}_{0\rho_l}(z_l) | 0 \rangle \quad ,$$

auf Produkte von 1-Teilchen-Propagatoren

$$\langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(y_i) | 0 \rangle \dots \langle 0 | T \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \hat{A}_{0\rho_j}(z_j) | 0 \rangle \dots \quad .$$

Diese freien Propagatoren sind wohlbekannt.

Die entscheidende Aussage dazu liefert das Wick'sche Theorem, das hier ohne Beweis angegeben werden soll. Lediglich eine Erläuterung an Beispielen soll vorgenommen werden.

Definiert man zunächst zur Abkürzung eine Multivariable i so, daß in ihr neben den Raum-Zeit-Koordinaten eines Feldoperators auch dessen Spinorindex und schließlich die Tatsache steckt, ob es sich um $\hat{\psi}_0$ oder $\hat{\bar{\psi}}_0$ handelt,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{0,\alpha}(x_i) &\equiv \hat{\psi}_0(i) \\ \hat{\bar{\psi}}_{0,\beta}(y_j) &\equiv \hat{\bar{\psi}}_0(j) \quad , \end{aligned}$$

so kann man das Wick'sche Theorem für Fermionen-Feldoperatoren folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} T[\hat{\psi}_0(1) \dots \hat{\psi}_0(n)] &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) : \hat{\psi}_0(1) \dots \hat{\psi}_0(k_1) \dots \hat{\psi}_0(k_{2l}) \dots \hat{\psi}_0(n) : & (1.54) \\ &\cdot \langle 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(k_1)) \hat{\psi}_0(\sigma(k_2)) | 0 \rangle \dots \\ &\cdot \langle 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(k_{2l-1})) \hat{\psi}_0(\sigma(k_{2l})) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $\hat{\mathcal{V}}_0$, daß der entsprechende Operator im normalgeordneten Produkt wegzulassen ist. σ durchläuft all diejenigen Permutationen, die von den vorgegebenen n Operatoren $2l$ auswählen, diese hintereinander anordnen (etwa rechts von den verbleibenden $n - 2l$) und schließlich auf verschiedene Kombinationen von 1-Teilchen-Propagatoren (Kontraktionen genannt) führen, wenn die jeweils benachbarten Feldoperatoren zu einem Propagator zusammengefaßt werden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & n &) \\ & & & & & & & \downarrow & & & & \\ (& 1 & \cdot & k_1 & \cdot & k_{2l} & \cdot & n & \sigma(k_1) & \cdot & \sigma(k_{2l}) &) \end{array}$$

Für einen festen Satz von $2l$ Feldoperatoren durchläuft σ also nur all die Subpermutationen der $2l$ Variablen, die auf voneinander verschiedene Produkte von freien Propagatoren

$$\langle 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(k_1)) \hat{\psi}_0(\sigma(k_2)) | 0 \rangle \dots \langle 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(k_{2l-1})) \hat{\psi}_0(\sigma(k_{2l})) | 0 \rangle$$

führen. Wieviele Permutationen ergeben das gleiche Produkt von Kontraktionen? Zunächst ändert sich durch Vertauschung von zwei miteinander kontrahierten Variablen nichts am Produkt. Das ergibt 2^l gleichwertige Permutationen. Weiterhin verändert eine Permutation der Propagatoren als ganze nichts am Resultat, was auf eine Multiplizität von $(l)!$ führt. Es gibt daher insgesamt $2^l (l)!$ Permutationen, die die gleiche Kontraktion ergeben.

Das Vorzeichen resultiert aus den Antikommutationsrelationen der Fermionen-Operatoren. Die Summe über l läuft gemäß der Definition der Gauss-Klammer für geradzahliges n bis $n/2$, für ungeradzahliges n bis $(n - 1)/2$.

Zur Illustration dieser Aussage seien die beiden einfachsten Fälle explizit aufgeführt:

1.

$$\begin{aligned}
T[\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3)] &= \quad : \hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3) : \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(3) : \\
&- \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(3) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(2) : \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(1) :
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T[\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3)\hat{\psi}_0(4)] &= \quad : \hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3)\hat{\psi}_0(4) : \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(3)\hat{\psi}_0(4) : \\
&- \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(3) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(4) : \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(4) : \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(4) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3) : \\
&- \langle 0 | T\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(4) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(3) : \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(3)\hat{\psi}_0(4) | 0 \rangle : \hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2) : \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(2) | 0 \rangle \langle 0 | T\hat{\psi}_0(3)\hat{\psi}_0(4) | 0 \rangle \\
&- \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(3) | 0 \rangle \langle 0 | T\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(4) | 0 \rangle \\
&+ \langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\hat{\psi}_0(4) | 0 \rangle \langle 0 | T\hat{\psi}_0(2)\hat{\psi}_0(3) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Für Boson-Feldoperatoren gibt es eine analoge Relation, nur daß in diesem Fall keine Vorzeichen aus Vertauschungen von Feldoperatoren resultieren,

$$\begin{aligned}
T[\hat{A}_0(1)\dots\hat{A}_0(n)] &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\sigma} : \hat{A}_0(1)\dots\hat{A}_0(k_1)\dots\hat{A}_0(k_{2l})\dots\hat{A}_0(n) : \\
&\cdot \langle 0 | T\hat{A}_0(\sigma(k_1))\hat{A}_0(\sigma(k_2)) | 0 \rangle \dots \\
&\cdot \langle 0 | T\hat{A}_0(\sigma(k_{2l-1}))\hat{A}_0(\sigma(k_{2l})) | 0 \rangle \quad .
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Auch hier faßt die Multivariable die Raum-Zeit-Koordinaten mit dem Lorentz-Index zusammen und die Permutationen σ laufen über alle (topologisch) verschiedenen Kontraktionen.

Diese Ausdrücke reduzieren sich drastisch, wenn man die eigentlich interessierenden Vakuumerwartungswerte betrachtet, weil dann alle normalgeordneten Terme nichts beitragen,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | : \hat{\psi}_0(1)\dots\hat{\psi}_0(n) : | 0 \rangle &= 0 \\
\langle 0 | : \hat{A}_0(1)\dots\hat{A}_0(n) : | 0 \rangle &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Man erhält zunächst das aus Ladungserhaltungsgründen bereits bekannte Resultat, daß Vakuumerwartungswerte von ungeradzahlig vielen Fermionen-Operatoren verschwinden,

$$\langle 0 | T\hat{\psi}_0(1)\dots\hat{\psi}_0(2n+1) | 0 \rangle = 0 \quad , \tag{1.56}$$

weil in diesem Fall stets mindestens ein einzelner 'normalgeordneter' Feldoperator übrig bleibt. Dieses Resultat gilt dann wegen der Darstellung Gl.(1.45) auch für die Vakuumerwartungswerte wechselwirkender Feldoperatoren, weil ihre Störungsentwicklung nur aus Erwartungswerten von ungeradzahlig vielen freien Feldoperatoren aufgebaut ist. In der Reihenentwicklung

nach Potenzen der Wechselwirkungs-Lagrangedichte kommen nur geradzahlig viele Fermion-Feldoperatoren zu den ungeradzahlig vielen äußeren dazu.

Die gleiche Aussage trifft auch für Vakuumerwartungswerte von ungeradzahligem Boson-Feldoperatoren zu,

$$\langle 0 | T \hat{A}_0(1) \dots \hat{A}_0(2n+1) | 0 \rangle = 0 \quad , \quad (1.57)$$

woraus dann über Gl.(1.45) und Furry's Theorem eine entsprechende Aussage für wechselwirkende Operatoren abgeleitet werden kann. In der Störungsentwicklung kommen hier zwar auch Terme mit geradzahlig vielen Boson-Operatoren vor, diese sind dann aber an einen Fermion-Loop mit ungeradzahlig vielen Vertices angeschlossen, der wiederum verschwindet (siehe später).

Bei den Vakuumerwartungswerten geradzahlig vieler Feldoperatoren reduziert sich die Summe über l auf den letzten Term mit $l = n$,

$$\langle 0 | T \hat{\psi}_0(1) \dots \hat{\psi}_0(2n) | 0 \rangle = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \langle 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(k_1)) \hat{\psi}_0(\sigma(k_2)) | 0 \rangle \dots \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} & \dots \langle 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(k_{2n-1})) \hat{\psi}_0(\sigma(k_{2n})) | 0 \rangle \\ \langle 0 | T \hat{A}_0(1) \dots \hat{A}_0(2n) | 0 \rangle & = \sum_{\sigma} \langle 0 | T \hat{A}_0(\sigma(k_1)) \hat{A}_0(\sigma(k_2)) | 0 \rangle \dots \quad (1.59) \\ & \dots \langle 0 | T \hat{A}_0(\sigma(k_{2n-1})) \hat{A}_0(\sigma(k_{2n})) | 0 \rangle \quad . \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x) \hat{\psi}_0(y) | 0 \rangle & = 0 \\ \langle 0 | T \hat{\bar{\psi}}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(y) | 0 \rangle & = 0 \end{aligned}$$

müssen, wie bereits aus Ladungserhaltungsgründen gefordert, in Vakuumerwartungswerten stets gleich viele $\hat{\psi}$ wie $\hat{\bar{\psi}}$ auftreten. Auf der rechten Seite von Gl.(1.58) fallen alle Kontraktionen von $\hat{\psi}_0$ mit $\hat{\psi}_0$ bzw $\hat{\bar{\psi}}_0$ mit $\hat{\bar{\psi}}_0$ automatisch heraus.

Schließlich stellen Ausdrücke, die sowohl aus freien Fermion- als auch aus freien Boson-Operatoren aufgebaut sind, kein zusätzliches Problem dar, weil die Erwartungswerte faktorisieren,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{\psi}_0(1) \dots \hat{\psi}_0(2n) \hat{A}_0(1) \dots \hat{A}_0(p) | 0 \rangle & = \langle 0 | T \hat{\psi}_0(1) \dots \hat{\psi}_0(2n) | 0 \rangle \quad (1.60) \\ & \cdot \langle 0 | T \hat{A}_0(1) \dots \hat{A}_0(p) | 0 \rangle \quad . \end{aligned}$$

Das ergibt sich aus der Formulierung des Wick'schen Theorems für beliebige Feldoperatoren (Fermionen und Bosonen äußern sich ja nur im Vorzeichen) und Verwendung von

$$\langle 0 | T \hat{\psi}_0(1) \hat{A}_0(2) | 0 \rangle = 0 \quad . \quad (1.61)$$

Damit steht das benötigte Werkzeug zur Auswertung von Gl.(1.45) zur Verfügung.

Abschließend soll noch angemerkt werden, daß Kontraktionen von zueinander normalgeordneten Feldoperatoren verschwinden, weil

$$\langle 0 | T : \hat{\psi}_0(1) \hat{\psi}_0(2) : | 0 \rangle = \langle 0 | : \hat{\psi}_0(1) \hat{\psi}_0(2) : | 0 \rangle = 0 \quad (1.62)$$

gilt.

1.5.3 Feynman-Regeln

Jetzt soll der Ausgangspunkt unserer Überlegungen weiter verfolgt werden. Betrachtet man etwa den Zähler von Gl.(1.45),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4u_1 \dots d^4u_n < 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\psi}_0(y_1) \dots \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \dots : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots | 0 > ,$$

so kann man all die Kontraktionen abspalten, bei denen einige der $: \hat{\psi}_0(u_i) \hat{A}_0(u_i) \hat{\psi}_0(u_i) :$ unter sich kontrahiert sind, ohne daß in irgendeiner Form ein Anschluß an einen der äußeren Feldoperatoren besteht: Angenommen, k der u_i seien in irgendeiner Weise an die x_j, y_l oder z_m gekoppelt, die verbleibenden $n - k$ dagegen ausschließlich untereinander kontrahiert. Dann gibt es dazu bei jeder gegebenen Gesamtkontraktion aller u_i genau

$$\binom{n}{k}$$

Möglichkeiten, Sätze von k der u_i aus den n vorliegenden auszuwählen und mit diesen k die Kontraktionen mit den x_j, y_l und z_m zu bilden und mit dem Rest der u_i den losgelösten Teil der Gesamtkontraktion. Alle diese Möglichkeiten sind gleichwertig, da über die u_i integriert wird. Natürlich ist k beliebig zwischen 0 und n . Man erhält so

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4u_1 \dots d^4u_n < 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\psi}_0(y_1) \dots \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \dots : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots | 0 > \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4u_1 \dots d^4u_n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} < 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\psi}_0(y_1) \dots \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \dots \\ & : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots : \hat{\psi}_0(u_k) \hat{A}_0(u_k) \hat{\psi}_0(u_k) : | 0 >_d \\ & \cdot < 0 | T : \hat{\psi}_0(u_{k+1}) \hat{A}_0(u_{k+1}) \hat{\psi}_0(u_{k+1}) : \dots : \hat{\psi}_0(u_n) \hat{A}_0(u_n) \hat{\psi}_0(u_n) : | 0 > \\ = & < 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\psi}_0(y_1) \dots \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \dots \exp\{-ie \int d^4u : \hat{\psi}_0(u) \hat{A}_0(u) \hat{\psi}_0(u) : \} | 0 >_d \\ & \cdot < 0 | T \exp\{-ie \int d^4u : \hat{\psi}_0(u) \hat{A}_0(u) \hat{\psi}_0(u) : \} | 0 > , \end{aligned}$$

wobei der Index d sagen soll, daß in dem entsprechenden Erwartungswert nur solche Kontraktionen zu nehmen sind, bei denen alle $: \hat{\psi}_0(u_i) \hat{A}_0(u_i) \hat{\psi}_0(u_i) :$ in irgendeiner Form mit einem äußeren Feldoperator verbunden sind. Damit entfällt der Nenner in Gl.(1.45) und man erhält die zentrale Formel

$$\begin{aligned} & G^{(2n,l)}(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) \\ = & < 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\psi}_0(y_1) \dots \hat{A}_{0\rho_1}(z_1) \dots \exp\{-ie \int d^4u : \hat{\psi}_0(u) \hat{A}_0(u) \hat{\psi}_0(u) : \} | 0 >_d \quad (1.63) \\ = & (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ie)^k}{k!} \int d^4u_1 \dots d^4u_k \sum_{\sigma_1 \in S_{2(n+k)}} \text{sign}(\sigma_1) \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_k} \\ & < 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(x_1)) \hat{\psi}_0(\sigma(y_1)) | 0 > \dots \\ & \dots < 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(u_k)) \hat{\psi}_0(\sigma(u_k)) | 0 > \\ & \sum_{\sigma_2 \in S_{l+k}} < 0 | T \hat{A}_0(\sigma(z_1)) \hat{A}_0(\sigma(z_2)) | 0 > \dots \\ & \dots < 0 | T \hat{A}_0(\sigma(u_{k-1})) \hat{A}_0(\sigma(u_k)) | 0 > . \end{aligned}$$

Dabei sind die Spinor und Lorentz-Indices entsprechend summiert zu denken. Die Permutationen umfassen nur die wesentlich verschiedenen (siehe oben), von denen obendrein nur die zu berücksichtigen sind, bei denen alle Wechselwirkungsteile an mindestens einen äußeren Feldoperator angeschlossen sind. Dabei ergeben sich je $k!$ Kontraktionen, die sich nur in der Auswahl der u_i unterscheiden. Da die u_i nur Integrationsvariablen sind, kann man sie jederzeit umbenennen, sodaß letztlich jede topologisch verschiedene Kontraktion gerade $k!$ -mal auftritt. Daraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
G^{(2n,l)}(x_1, ..y_1, ..z_1, ..) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-ie)^k \int d^4u_1 \dots d^4u_k \sum_{\sigma_1 \in S_{2(n+k)}} \text{sign}(\sigma_1) \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_k} \quad (1.64) \\
&\quad < 0 | T \hat{\psi}_0(\sigma(x_1)) \hat{\bar{\psi}}_0(\sigma(y_1)) | 0 > \dots \\
&\quad \dots < 0 | T \hat{\bar{\psi}}_0(\sigma(u_k)) \hat{\psi}_0(\sigma(u_k)) | 0 > \\
&\quad \sum_{\sigma_2 \in S_{l+k}} < 0 | T \hat{A}_0(\sigma(z_1)) \hat{A}_0(\sigma(z_2)) | 0 > \dots \\
&\quad \dots < 0 | T \hat{A}_0(\sigma(u_{k-1})) \hat{A}_0(\sigma(u_k)) | 0 > \quad ,
\end{aligned}$$

wobei jetzt jede topologisch verschiedene Kontraktion nur einmal zu nehmen ist. Es sei noch angemerkt, daß der Vorfaktor $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ konventionsbedingt ist. Er entsteht bei der Umordnung der äußeren Feldoperatoren,

$$\begin{aligned}
&T \left[\hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(x_2) \dots \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \hat{\bar{\psi}}_0(y_2) \dots \hat{A}_0(z_1) \hat{A}_0(z_2) \dots \right] \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} T \left[\hat{\psi}_0(x_1) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\bar{\psi}}_0(y_2) \dots \hat{A}_0(z_1) \hat{A}_0(z_2) \dots \right] \quad .
\end{aligned}$$

Aus diesen Überlegungen folgen nun die Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik. Sie beruhen auf der Grunderkenntnis, daß die Menge aller verschiedenen Kontraktionen graphisch darstellbar ist. Man ordnet dazu den Elementen des Wick'schen Theorems, also den freien Propagatoren zwischen zwei Orten und den Integrationen über Orte, gewisse graphische Entsprechungen zu. Mit diesen bildet man dann die Gesamtkontraktionen auf mehr oder weniger komplizierte Graphen ab.

Im Ortsraum erhält man die Beiträge zu beliebigen Greensfunktionen aus den folgenden Feynman-Regeln:

1. Ordne jedem Fermion-Propagator eine gerade gerichtete Linie zu:

$$y \longrightarrow x = < 0 | T \hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(y) | 0 > = G^0(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.65)$$

Die Linie entspricht einem von y nach x laufenden freien Elektron.

2. Ordne jedem Boson-Propagator eine geschlängelte, nicht gerichtete Linie zu:

$$\begin{aligned}
y, \nu \rightsquigarrow x, \rho &= < 0 | T \hat{A}_{0,\rho}(x) \hat{A}_{0,\nu}(y) | 0 > = D_{\rho\nu}^0(x-y) \quad (1.66) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{-ik_\rho k_\nu}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} + i\epsilon)} \right]
\end{aligned}$$

Die Photon-Linie ist ungerichtet, weil der Propagator sich bei Vertauschung der Argumente und Indices nicht ändert,

$$D_{\rho\nu}^0(x-y) = D_{\nu\rho}^0(x-y) = D_{\rho\nu}^0(y-x) = D_{\nu\rho}^0(y-x) \quad . \quad (1.67)$$

Sie entspricht einem von y nach x propagierenden freien Photon.

3. Ordne jedem der inneren Raum-Zeit-Punkte u_i einen Punkt (Vertex) zu:



$$\begin{array}{c} \nu \\ \text{wavy line} \\ \swarrow \text{---} u \text{---} \searrow \\ \alpha \quad \quad \quad \beta \end{array} = -ie\gamma_{\beta\alpha}^\nu \quad (1.68)$$

Der Faktor resultiert aus dem Vorfaktor der Wechselwirkungs-Lagrangedichte. In einem Vertex enden stets zwei Fermion-Linien (eine einlaufende und eine auslaufende) sowie eine Boson-Linie.

4. Summiere über alle inneren Spinor- und Lorentz-Indices und integriere über alle inneren Raum-Zeit-Punkte.
5. Ordne jedem Elektron-Loop (siehe unten) in einem Graphen ein Minuszeichen zu. Außerdem treten je nach Definition der zu berechnenden Funktion globale Vorzeichen auf.
6. Zeichne zu einem gegebenen Satz von äußeren Linien, die aus den Kontraktionen der $\hat{\psi}_0(x_i)$, $\hat{\bar{\psi}}_0(y_i)$ und $\hat{A}_0(z_i)$ mit inneren Feldoperatoren resultieren, alle topologisch verschiedenen Graphen mit der gewünschten Zahl von Vertices (sie entspricht der Ordnung der Greensfunktion).

Nun soll zunächst der Begriff Elektron-Loop geklärt werden. Man bezeichnet eine Kontraktion von mehreren inneren Wechselwirkungs-Lagrangedichten dann als Loop, wenn sich aus den aufeinanderfolgenden Propagatoren ein Ring bilden läßt, der nur über Photon-Linien mit dem Rest des Diagramms zusammenhängt. Man hat also den folgenden Satz von Feldoperatoren,

$$\dots [\hat{\psi}_0(u_1)\hat{\psi}_0(u_1)\dots\hat{\bar{\psi}}_0(u_n)\hat{\psi}_0(u_n)] \dots$$

untereinander zu einem Ring zu kontrahieren. Dazu ist immer eine ungerade Zahl von Permutationen der Operatoren nötig. Man kann zum Beispiel $\hat{\bar{\psi}}_0(u_1)$ an allen anderen $2n - 1$ Operatoren vorbeiziehen,

$$\dots [\hat{\psi}_0(u_1)\hat{\bar{\psi}}_0(u_2)\dots\hat{\bar{\psi}}_0(u_n)\hat{\psi}_0(u_n)\hat{\bar{\psi}}_0(u_1)] \dots \quad .$$

Kontrahiert man jetzt die benachbarten Feldoperatoren und erzeugt so einen Loop, hat die zugehörige Permutation ein negatives Vorzeichen.

Die häufiger anzutreffende Form der Feynman-Regeln ist die Impulsraum-Form. Hier soll die allgemeine Konvention für die Fourier-Transformation,

$$G(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 q_n}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_l}{(2\pi)^4} \quad (1.69)$$

$$\exp\left\{-i \sum_{j=1}^n (p_j x_j - q_j y_j) + i \sum_{r=1}^l k_r z_r\right\} G(p_1, \dots, q_1, \dots, k_1, \dots) \quad ,$$

mit der zugehörigen Rücktransformation,

$$G(p_1, \dots, q_1, \dots, k_1, \dots) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n \int d^4y_1 \dots d^4y_n \int d^4z_1 \dots d^4z_l \quad (1.70)$$

$$\exp\left\{i \sum_{j=1}^n (p_j x_j - q_j y_j) - i \sum_{r=1}^l k_r z_r\right\} G(x_1, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots) \quad ,$$

verwendet werden. Dann kann man sich überlegen, was an einem Vertex geschieht: Nach den Feynman-Regeln im Ortsraum ergibt sich an jedem Vertex die folgende Struktur,

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \nu \\ k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \alpha \quad \beta \end{array} &= (-ie) \int d^4u \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp\{-ip(u-y) - iq(x-u) - ik(u-z)\} \\ &\quad D_{\rho\nu}^0(k) G(p) \gamma^\nu G(q) \\ &= (-ie) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q+k) D_{\rho\nu}^0(k) G(p) \gamma^\nu G(q) \quad . \end{aligned}$$

Diese Struktur entsteht sowohl an Vertices, an denen nur innere Linien anschließen, als auch an solchen mit äußeren Linien. Es resultiert daher an jedem Vertex eine Viererdeltafunktion, die die Impulserhaltung sicherstellt. Dabei ergibt sich auch eine δ -Funktion, die die Über-Alles-Impulserhaltung eines Graphen (bzw einer ganzen Greensfunktion) garantiert. Diese erkennt man zum Beispiel beim Vergleich der freien Propagatoren Gl.(1.65,1.66) mit der obigen allgemeinen Fourier-Darstellung, Gl.(1.69). Eine der Impulsintegrationen ist auf Grund der Impulserhaltung weggefallen. Daraus liest man sehr direkt die Feynman-Regeln im Impulsraum ab:

1. Ordne jedem Fermion-Propagator eine gerade gerichtete Linie zu:

$$p \longrightarrow p = G^0(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.71)$$

Die Linie entspricht einem freien Elektron mit Impuls p_ν .

2. Ordne jedem Boson-Propagator eine geschlängelte, nicht gerichtete Linie zu:

$$k, \nu \text{---} k, \rho = D_{\rho\nu}^0(k) = \left[\frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{-ik_\rho k_\nu}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} + i\epsilon)} \right] \quad (1.72)$$

Die Photon-Linie ist ungerichtet, weil der Propagator sich bei Vertauschung der Argumente und Indices nicht ändert,

$$D_{\rho\nu}^0(k) = D_{\nu\rho}^0(k) = D_{\rho\nu}^0(-k) = D_{\nu\rho}^0(-k) \quad . \quad (1.73)$$

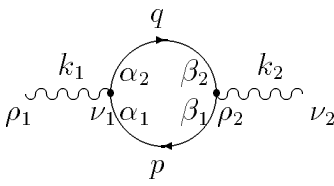
Sie entspricht der Propagation eines freien Photons mit Impuls k_ν .

3. Ordne jedem Vertex eine impulserhaltende δ -Funktion zu:

$$\begin{array}{c} \nu \\ k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \alpha \quad \beta \end{array} = -ie \gamma_{\beta\alpha}^\nu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q+k) \quad (1.74)$$

4. Summiere über alle inneren Spinor- und Lorentz-Indices und integriere über alle inneren Impulse.
5. Ordne jedem Elektron-Loop in einem Graphen ein Minuszeichen zu. Außerdem treten je nach Definition der zu berechnenden Funktion globale Vorzeichen auf.
6. Zeichne zu einem gegebenen Satz von äußeren Linien alle topologisch verschiedenen Graphen mit der gewünschten Zahl von Vertices.

Abschließend sollen diese Regeln noch an einem einfachen Beispiel vorgeführt werden. Dazu übersetzen wir einen einfachen Loop:



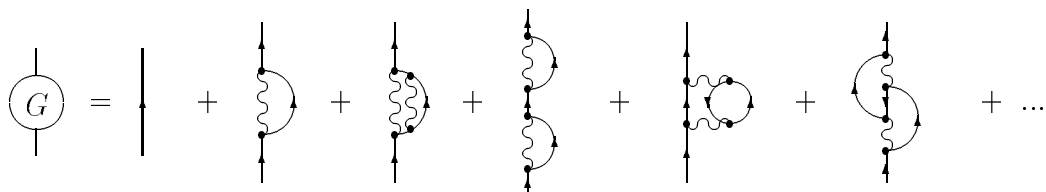
The diagram shows a loop with two external wavy lines (representing photons) and two internal fermion lines. The external momenta are \$k_1\$ and \$k_2\$. The internal fermion momenta are \$p\$ and \$q\$. The vertices are labeled with spinor indices \$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\$ and Lorentz indices \$\nu_1, \nu_2\$.

$$\begin{aligned}
&= -(-ie)^2 D_{\rho_1 \nu_1}^0(k_1) D_{\rho_2 \nu_2}^0(k_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_{\alpha_1 \beta_1}^0(p) \gamma_{\beta_1 \beta_2}^{\rho_2} G_{\beta_2 \alpha_2}^0(q) \gamma_{\alpha_2 \alpha_1}^{\nu_1} \\
&\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - p + q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_2 + p - q) \\
&= e^2 D_{\rho_1 \nu_1}^0(k_1) D_{\rho_2 \nu_2}^0(k_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{tr} [G^0(p) \gamma^{\nu_1} G^0(q) \gamma^{\rho_2}] \\
&\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - k_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - p + q) \\
&= e^2 D_{\rho_1 \nu_1}^0(k_1) D_{\rho_2 \nu_2}^0(k_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - k_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [G^0(p) \gamma^{\nu_1} G^0(p - k) \gamma^{\rho_2}]
\end{aligned}$$

Auch hier stellt sich automatisch die Impulserhaltung $k_1 = k_2$ ein. Diese globale Impulserhaltung wird im weiteren (fast) immer weggelassen werden.

1.6 Klassifikationen, Integralgleichungen

Mit den im letzten Abschnitt entwickelten Feynman-Regeln ist es im Prinzip möglich, die verschiedensten Greensfunktionen bis zu beliebiger Ordnung in störungstheoretischer Form anzugeben. Die mit der Ordnung schnell wachsende Vielfalt und Komplexität der Diagramme macht jedoch sofort klar, daß eine explizite Berechnung der entsprechenden Feynman-Integrale nur in den niedrigsten Ordnungen durchführbar sein wird. Betrachtet man etwa die Beiträge zum Elektron-Propagator,



The diagram shows the expansion of the electron propagator \$G\$ as a sum of diagrams. It starts with a simple fermion line, followed by diagrams with one photon loop, two photon loops, and a fermion loop, and so on.

(1.75)

so sehen bereits einige Beiträge zweiter Ordnung relativ kompliziert aus. Andererseits stellt man aber fest, daß sich gewisse Grundstrukturen in den verschiedenen Graphen wiederholen. Das legt es nahe, die gesamte Menge der auftretenden Graphen nach gewissen Kriterien zu klassifizieren, insbesondere um sich wiederholende Typen von Teilgraphen (Subgraphen) zusammenzufassen.

Die übliche Klassifikation von Greensfunktionen soll nun am Beispiel der 2-Teilchen-Greensfunktion $G^{(4,0)}$,

$$G^{(4,0)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{\bar{\psi}}(y_2) | 0 \rangle \quad (1.76)$$

vorgeführt werden. Sie eignet sich dafür besonders, da sie die einfachste Greensfunktion ist, bei der alle Unterscheidungen auch tatsächlich zur Aufteilung der diagrammatischen Beiträge führen.

Um die nachfolgende Klassifikation besonders anschaulich zu machen, sind in Gl.(1.78) zunächst einmal eine Reihe von Graphen niedriger Ordnung aufgeführt, an denen die Einteilungen unmittelbar eingesehen werden können.

$$\begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \hline \hline G^{(4,0)} \\ \hline \hline q_1 \quad q_2 \end{array} = - \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_2 \quad p_1 \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 2} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \dots$$

Typ I

$$- \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ | \quad | \\ \text{diagram 1} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_2 \quad p_1 \\ | \quad | \\ \text{diagram 2} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 4} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \dots$$

Typ II

$$+ \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 2} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \dots$$

Typ III

$$+ \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 2} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} + \dots$$

Typ IV

(1.77)

In der gewählten Impulsdarstellung beschreibt $G^{(4,0)}$ die Streuung zweier mit den Impulsen q_1 und q_2 einlaufender Teilchen (vgl. Reduktionsformel (1.52) in Kapitel 1.5). Nach dem Streuprozess laufen zwei Teilchen mit den Impulsen p_1 und p_2 aus. Dabei gilt natürlich Impulserhaltung,

$$p_1 + p_2 = q_1 + q_2 \quad ,$$

die sich in einer δ -Funktion manifestiert. An einer Reihe von Graphen in Gl.(1.77) sind die äußeren Impulse explizit aufgeführt. Damit soll klargestellt werden, daß jeder topologisch verschiedene Graph mit zwei eingehenden und zwei ausgehenden Linien gerade zweimal auftritt, wobei in den beiden Fällen die ausgehenden Impulse genau vertauscht sind. Die dazu bei der Auswertung mit dem Wick'schen Theorem nötigen Kontraktionen führen auf ein relatives Minuszeichen, welches in niedrigster Ordnung unmittelbar klar wird. Entwicklung von Gl.(1.76) nach freien Feldoperatoren führt auf

$$G^{(4,0)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4u_1 \dots \int d^4u_n \quad (1.78)$$

$$\langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \hat{\bar{\psi}}_0(y_2) : \hat{\bar{\psi}}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots : \hat{\bar{\psi}}_0(u_n) \hat{A}_0(u_n) \hat{\psi}_0(u_n) : | 0 \rangle_d .$$

Auswertung mit dem Wick'schen Theorem ergibt in niedrigster Ordnung

$$\begin{aligned} G^{(4,0)}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \hat{\bar{\psi}}_0(y_2) | 0 \rangle + \dots \\ &= - \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) | 0 \rangle \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\bar{\psi}}_0(y_2) | 0 \rangle \quad (1.79) \\ &\quad + \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\bar{\psi}}_0(y_2) | 0 \rangle \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) | 0 \rangle + \dots , \end{aligned}$$

wobei das Minuszeichen aus der ungeraden Permutation resultiert, die im ersten Fall für das Vorbeiziehen von $\hat{\bar{\psi}}_0(y_1)$ an $\hat{\psi}_0(x_2)$ nötig ist.

Betrachtet man die Graphen vom Typ I, erkennt man sofort, daß es sich bei ihnen um die unabhängige Propagation von zwei Teilchen handelt. Beide wechselwirken mit dem Strahlungsfeld, aber nicht untereinander. Es gilt daher für beide getrennt Impulserhaltung, d.h. je nachdem, ob $\hat{\bar{\psi}}_0(y_1)$ letztlich mit $\hat{\psi}_0(x_1)$ oder mit $\hat{\psi}_0(x_2)$ kontrahiert wird, gilt $p_1 = q_1, p_2 = q_2$ oder $p_1 = q_2, p_2 = q_1$. Man erhält genau die Graphen von zwei 1-Teilchen-Propagatoren. Es liegt daher nahe, all diese Diagramme in eine Klasse zusammenzufassen. Man nennt sie unzusammenhängend, weil nicht jede äußere Linie auf irgendeine Weise mit jeder anderen äußeren Linie verbunden ist. Daß bei dieser Klassifikation gerade das Produkt zweier voll wechselwirkender Greensfunktionen entsteht, kann man wieder über das Wick'sche Theorem zeigen. In Gl.(1.78) separiert man in der n-ten Ordnung all die Kontraktionen, bei denen $\hat{\bar{\psi}}_0(y_1)$ letztlich mit $\hat{\psi}_0(x_1)$ aber über keine innere Linie mit $\hat{\psi}_0(x_2)$ verbunden ist, ab. In dem Erwartungswert

$$\langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \hat{\bar{\psi}}_0(y_2) : \hat{\bar{\psi}}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots : \hat{\bar{\psi}}_0(u_n) \hat{A}_0(u_n) \hat{\psi}_0(u_n) : | 0 \rangle_d$$

gibt es gerade

$$\binom{n}{k}$$

Möglichkeiten, das Paar $\hat{\bar{\psi}}_0(y_1), \hat{\psi}_0(x_1)$ mit k der $: \hat{\bar{\psi}}_0(u_i) \hat{A}_0(u_i) \hat{\psi}_0(u_i) :$ zu verbinden, da alle Auswahlen von k Wechselwirkungs-Lagrangians aus den n vorliegenden möglich und gleichwertig sind. Durch entsprechende Umbenennung der Integrationsvariablen u_i gehen sie ineinander

über. Man erhält daher

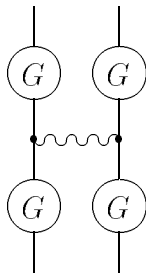
$$\begin{aligned}
G^{(4,0)}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4 u_1 \dots \int d^4 u_n \quad (1.80) \\
&\left\{ - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(y_1) : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots : \hat{\psi}_0(u_k) \hat{A}_0(u_k) \hat{\psi}_0(u_k) : | 0 \rangle_d \right. \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\psi}_0(y_2) : \hat{\psi}_0(u_{k+1}) \hat{A}_0(u_{k+1}) \hat{\psi}_0(u_{k+1}) : \dots : \hat{\psi}_0(u_n) \hat{A}_0(u_n) \hat{\psi}_0(u_n) : | 0 \rangle_d \\
&+ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(y_2) : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots : \hat{\psi}_0(u_k) \hat{A}_0(u_k) \hat{\psi}_0(u_k) : | 0 \rangle_d \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\psi}_0(y_1) : \hat{\psi}_0(u_{k+1}) \hat{A}_0(u_{k+1}) \hat{\psi}_0(u_{k+1}) : \dots : \hat{\psi}_0(u_n) \hat{A}_0(u_n) \hat{\psi}_0(u_n) : | 0 \rangle_d \\
&\left. + \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \hat{\psi}_0(x_2) \hat{\psi}_0(y_1) \hat{\psi}_0(y_2) : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots : \hat{\psi}_0(u_n) \hat{A}_0(u_n) \hat{\psi}_0(u_n) : | 0 \rangle_c \right\},
\end{aligned}$$

wobei die analogen unzusammenhängenden Kontraktionen von $\hat{\psi}_0(y_1)$ mit $\hat{\psi}_0(x_2)$ ebenfalls abgespalten wurden. Das Vorzeichen der entsprechenden Terme ist identisch mit dem in nullter Ordnung, Gl.(1.79), da die Vertauschung von $: \hat{\psi}_0(u_i) \hat{A}_0(u_i) \hat{\psi}_0(u_i) :$ mit einem beliebigen anderen Operator unter der Zeitordnung stets ein positives Vorzeichen ergibt. Das Symbol $| 0 \rangle_c$ bedeutet, daß bei der Auswertung des Erwartungswertes nur zusammenhängende (connected) Diagramme zu berücksichtigen sind. Man kann die so entstandenen Produkte wieder resumieren und erhält in graphischer Form

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} G^{(4,0)} = \begin{array}{c} p_2 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ q_1 \end{array} G \begin{array}{c} p_1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ q_2 \end{array} G - \begin{array}{c} p_1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ q_1 \end{array} G \begin{array}{c} p_2 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ q_2 \end{array} G + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ q_1 \quad q_2 \end{array} G_c^{(4,0)} \quad . \quad (1.81)
\end{aligned}$$

$G_c^{(4,0)}$ bezeichnet man als die zusammenhängende 2-Teilchen-Greensfunktion. Sie enthält also gerade die Graphen vom Typ I nicht mehr.

Betrachtet man nun die Graphen vom Typ II in Gl.(1.78), so erkennt man, daß sie stets nur eine Wechselwirkungslinie enthalten. Sie unterscheiden sich nur durch Modifikationen der ein- und auslaufenden Linien. All diese Graphen sollen als nächstes zusammengefaßt werden. So entspricht die Menge der Graphen vom Typ II gerade



Es laufen also mit dem Strahlungsfeld wechselwirkende Teilchen ein und aus, während die eigentliche Wechselwirkung untereinander hier nur im Austausch eines Photons besteht. Diese Abspaltung von vollen wechselwirkenden 1-Teilchen-Propagatoren an den äußeren Enden nimmt man ganz allgemein vor. Man bezeichnet ein Diagramm bzw die entsprechende Greensfunktion als beschnitten (truncated), falls an allen äußeren Enden kein 1-Teilchen-Subgraph (d.h. ein Graph, der zum Elektron- oder Photon-Propagator beiträgt) mehr abgetrennt werden kann. Im Falle einer reinen Elektron-Greensfunktion wie $G_c^{(4,0)}$ ist das zu der Aussage äquivalent, daß beim Zerschneiden einer beliebigen Elektron-Linie eines Diagramms dieses nicht in zwei Teile zerfällt. Diese Definition trifft bei reinen Photon-Greensfunktionen oder gar gemischten Greensfunktionen natürlich nicht mehr zu und sollte daher nicht verwendet werden. Die daraus resultierende Greensfunktion $G_{c,tr}^{(2n,l)}$ nennt man $(2n, l)$ -Punkt-Funktion, da sie anstelle der ursprünglichen äußeren Linien äußere Vertices als Anschlüsse besitzt. In unserem Fall ergibt sich

$$G_c^{(4,0)} = G_{c,tr}^{(4,0)} \quad (1.82)$$

Daß diese Gleichung auch was Faktoren und Vorzeichen anbetrifft korrekt ist, kann man wieder über das Wick'sche Theorem einsehen. Darauf soll hier aber verzichtet werden. Das schon früher benutzte Schema wiederholt sich dabei nur. Für die in Gl(1.78) aufgeführten Graphen benötigt man von $G_{c,tr}^{(4,0)}$ die Diagramme

$$G_{c,tr}^{(4,0)} = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots \quad (1.83)$$

Hier wurden, wie es auch im weiteren verwendet werden soll, die äußeren Anschlüsse als dicke Punkte dargestellt im Gegensatz zu inneren Vertices.

Die Graphen vom Typ III unterscheiden sich vom Typ II einerseits dadurch, daß bei ihnen die zentrale Photon-Linie nicht einfach über einen puren Vertex an die Elektron-Linien angekoppelt ist. Die Vertexstruktur ist komplizierter und außerdem können auch virtuelle Elektron-Positron-Paare bei der Propagation des Wechselwirkungs-Photons als Zwischenzustände gebildet werden. Allerdings erfolgt die Wechselwirkung letztlich doch über eine einzige wechselwirkende Photon-Linie. Das führt auf die letzte Klassifikation: Graphen, die beim Zerschneiden einer beliebigen inneren Linie in zwei unverbundene Teile zerfallen, nennt man *reduzibel*. Die Diagramme vom Typ III sind daher *reduzibel*, die vom Typ IV dagegen *irreduzibel*.

An dieser Stelle soll nicht unerwähnt bleiben, daß diese Definition nicht generell so getroffen wird. Zum einen kann man Irreduzibilität bezüglich Zerschneiden von Elektron- und Photon-Linien unterscheiden. Andererseits ist es häufig nützlich (speziell im Fall der 2-Teilchen-Greensfunktion), eine wesentlich verschiedene Definition von Irreduzibilität einzuführen. Dabei nennt man Graphen *reduzibel*, wenn das Diagramm als Zwischenzustand im Laufe der Propagation gerade zwei Elektron-Propagatoren enthält, deren Impulssumme genau der der einlaufenden Elektronen entspricht. Nach dieser Definition wären alle Diagramme vom Typ IV *reduzibel*, der Typ III dagegen *irreduzibel*. Allgemein ist eine Funktion in diesem Sinne dann *reduzibel*, wenn sie sich wie in Gl.(1.84) darstellen läßt,

$$k_1 + k_2 = p_1 + p_2 = q_1 + q_2$$

(1.84)

Für die Diskussion der Renormierung einer relativistischen Quantenfeldtheorie ist die oben gewählte Definition aber sinnvoller. Man erhält so als Darstellung der 4-Punkt-Funktion:

(1.85)

Die Funktionen $\Gamma^{(2n,l)}$ bezeichnet man als irreduzible $(2n, l)$ -Funktionen. Zu unseren Graphen aus Gl.(1.83) tragen die folgenden Diagramme von $\Gamma^{(2,1)}$ und $\Gamma^{(4,0)}$ bei:

$$\Gamma^{(2,1)} = \bullet + \text{triangle with wavy line} + \text{triangle with wavy line and loop} + \dots$$

$$\Gamma^{(4,0)} = \text{square with wavy lines, p1 p2 top, q1 q2 bottom} - \text{square with wavy lines, p2 p1 top, q1 q2 bottom} + \text{square with wavy lines and loop on right} + \dots$$

Während bei den reduzierbaren Teilen von $G_{c,tr}^{(4,0)}$ die Graphen, die durch Vertauschung der Ausgangsimpulse entstehen, jetzt explizit auftreten, beinhaltet die irreduzible 4-Punkt-Funktion noch beide Klassen mit dem entsprechenden Vorzeichen.

Anschließend sollen noch die Relationen zwischen den verschiedenen Funktionen für die 3-Punkt-Funktion angegeben werden:

$$G^{(2,1)} = G_c^{(2,1)} = \text{diagram with } G, G, D \text{ circles} = G_{c,tr}^{(2,1)} = \Gamma^{(2,1)}$$

(1.86)

Kapitel 2

Der Photon-Propagator: 1. Teil

In diesem Kapitel soll die einfachste Greensfunktion, der Photon-Propagator, etwas näher untersucht werden. Dazu wird er zunächst mit Hilfe der Dyson-Gleichung durch seinen irreduziblen Kern, die irreduzible (0,2)-Punkt-Funktion (Vakuumpolarisation genannt) dargestellt. Anschließend wird eine alternative Darstellung über die (2,1)-Punkt-Funktion abgeleitet, die insbesondere im Hinblick auf die Diskussion von Ward-Identitäten benötigt wird. Außerdem verdeutlicht das dabei verwendete Vorgehen noch einmal die Behandlung von Integralgleichungen mit dem Wick'schen Theorem.

2.1 Die Dyson-Gleichung

Nach den allgemeinen Betrachtungen von Kapitel 1.6 soll jetzt die einfachste Greensfunktion, der Photon-Propagator, etwas näher untersucht werden. Zunächst ist diese Greensfunktion selbstverständlich zusammenhängend,

$$G_{c,\rho\nu}^{(0,2)} = G_{\rho\nu}^{(0,2)} \equiv D_{\rho\nu} \quad ,$$

da der Vakuumerwartungswert eines einzelnen Photon-Operators verschwindet,

$$\langle 0 | \hat{A}_\nu(x) | 0 \rangle = 0 \quad .$$

Ein einlaufendes Photon kann nicht spurlos absorbiert werden. Sein Vierer-Impuls muß in irgendeiner Form erhalten bleiben. Das Abspalten von zwei vollen Photon-Propagatoren an den beiden äußeren Enden ist in diesem Fall definiert auch hier die reduzible (0,2)-Punkt-Funktion, die dann einfach dem inversen Photon-Propagator entspricht,

$$D_{\rho\nu}^{-1} = G_{c,tr}^{(0,2)} \quad .$$

Die irreduzible (0,2)-Punkt-Funktion $\Gamma^{(0,2)}$ ist wieder der Kern von $G_{c,tr}^{(0,2)}$. Um die Relation zwischen den beiden Funktionen zu untersuchen, betrachtet man am besten wieder einige Diagramme niedriger Ordnung des Photon-Propagators,

$$(2.1)$$

Wie im Fall des Elektron-Propagators, Gl.(1.75), wiederholen sich in $D_{\rho\nu}$ bestimmte Grundgraphen beliebig oft. Sie sind jeweils über eine freie Photon-Linie miteinander verbunden. Die Menge aller dieser Diagramme erhält man, wenn man fordert, daß die zugehörigen Graphen irreduzibel sein sollen. Da beim Photon-Propagator aus Gründen der Ladungserhaltung keine einzelne Fermion-Linie auftreten kann, betrifft die Irreduzibilität hier nur das Durchschneiden von Photon-Linien. Die so entstehenden Funktionen sind genau die irreduziblen 2-Punkt-Funktionen $\Gamma_{\rho\nu}^{(0,2)}$, die im weiteren mit $\omega_{\rho\nu}$ bezeichnet werden sollen,

$$(2.2)$$

Dabei wurde in der zweiten Zeile benutzt, daß sich nach dem ersten Polarisationsanschub die gesamte Struktur wiederholt. Man nennt diese Relation die Dyson-Gleichung für den Photon-Propagator. Die analytische Übersetzung von Gl.(2.1,2.2) im Impulsraum lautet

$$\begin{aligned}
D_{\rho\nu}(k) &= D_{\rho\nu}^0(k) + D_{\rho\lambda}^0(k) \left[e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [G(p+k) \gamma^\lambda G(p) \gamma^\tau] \right] D_{\tau\nu}^0(k) + \dots \\
&= D_{\rho\lambda_1}^0(k) \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{\lambda_1 \tau_1}(k) D_{\tau_1 \lambda_2}^0(k) \dots \omega^{\lambda_n \tau_n}(k) D_{\tau_n \nu}^0(k) \\
&= D_{\rho\nu}^0(k) + D_{\rho\lambda}^0(k) \omega^{\lambda\tau}(k) D_{\tau\nu}(k) \quad .
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

Die Reihe (2.3) sieht fast wie eine geometrische Reihe aus. Lediglich die Tensorindices erlauben zunächst keine explizite Resummation. Während die Tensorstruktur von $D_{\rho\nu}^0$ bekannt und relativ einfach ist,

$$D_{\rho\nu}^0(k) = -i \left(g_{\rho\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\rho k_\nu}{k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} + i\epsilon} \right) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad , \tag{2.4}$$

wissen wir bis jetzt noch nichts über die von $\omega_{\rho\nu}(k)$. Die einzigen Lorentz-Tensoren, die zum Aufbau von $\omega_{\rho\nu}(k)$ zur Verfügung stehen, sind $g_{\rho\nu}$ und $k_\rho k_\nu$. Andere Lorentz-Vektoren als k_ν treten nicht auf. Daher kann $\omega_{\rho\nu}(k)$ nur die Form

$$\omega_{\rho\nu} = \omega_1(k^2)g_{\rho\nu} + \omega_2(k^2)k_\rho k_\nu$$

haben. Aus Gründen der Eichinvarianz muß, wie im nächsten Kapitel gezeigt werden wird, aber

$$k^\rho \omega_{\rho\nu}(k) = k^\nu \omega_{\rho\nu}(k) = 0$$

gelten, was sofort auf

$$\omega_1(k^2) = -k^2 \omega_2(k^2)$$

führt. Daher hat $\omega_{\rho\nu}(k)$ die Tensorstruktur

$$\omega_{\rho\nu} = -i(g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu)\omega(k^2) \quad . \quad (2.5)$$

Das Herausziehen des Faktors $-i$ ist reine Konvention. Der Tensorfaktor erfüllt wie gewünscht

$$k^\rho (g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu) = k^\nu (g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu) = 0 \quad .$$

Er ist eine Konsequenz der Transversalität des Photon-Feldes.

Damit läßt sich die Dyson-Reihe für den Photon-Propagator resumieren:

1. Feynman-Eichung:

In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} D_{\rho\nu}(k) = & -i \frac{g_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2} \\ & -i \frac{g_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2} \left[\begin{aligned} & (-i)^2 \left(g^{\nu_1 \rho_1} - \frac{k_{\nu_1} k_{\rho_1}}{k^2} \right) k^2 \omega(k^2) \frac{g^{\rho_1 \nu_1}}{k^2 - \mu^2} \\ & + (-i)^4 \left(g^{\nu_1 \rho_1} - \frac{k_{\nu_1} k_{\rho_1}}{k^2} \right) g^{\rho_1 \nu_2} \left(g^{\nu_2 \rho_2} - \frac{k_{\nu_2} k_{\rho_2}}{k^2} \right) g^{\rho_2 \nu_2} \left(\frac{k^2 \omega(k^2)}{k^2 - \mu^2} \right)^2 \\ & + \dots \end{aligned} \right] . \end{aligned}$$

Jetzt benutzt man, daß sich der Tensorfaktor nur stets selbst reproduziert,

$$\left(g_\rho^\nu - \frac{k_\rho k^\nu}{k^2} \right) \left(g_\nu^\mu - \frac{k_\nu k^\mu}{k^2} \right) = \left(g_\rho^\mu - \frac{k_\rho k^\mu}{k^2} \right) \quad .$$

Beliebige häufige Wiederholungen des Tensorfaktors lassen sich daher auf einen einzelnen kontrahieren,

$$\begin{aligned} D_{\rho\nu}(k) &= \frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{-i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{k^2 \omega(k^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right)^n \\ &= -i \frac{k_\rho k_\nu}{k^2(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} + \frac{-i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{k^2 \omega(k^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right)^n . \end{aligned}$$

Nun verwendet man die Resummation der geometrischen Reihe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1 \quad ,$$

die wegen $\alpha = \frac{\epsilon^2}{4\pi} = \frac{1}{137.0\dots}$ legitim sein sollte. Somit ergibt sich schließlich für den Photon-Propagator in Feynman-Eichung,

$$D_{\rho\nu}^F(k) = -i \frac{k_\rho k_\nu}{k^2(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} - i \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2(1 + \omega(k^2)) - \mu^2 + i\epsilon} \quad . \quad (2.6)$$

2. Landau-Eichung:

Hier besitzt $D_{\rho\nu}^0(k)$ die gleiche Tensorstruktur wie $\omega_{\rho\nu}(k)$, was die Resummation noch einfacher macht,

$$D_{\rho\nu}^L(k) = -i \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2(1 + \omega(k^2)) - \mu^2 + i\epsilon} \quad . \quad (2.7)$$

3. Allgemein erhält man

$$D_{\rho\nu}(k) = -i \frac{k_\rho k_\nu}{k^2(\lambda k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} - i \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2(1 + \omega(k^2)) - \mu^2 + i\epsilon} \quad . \quad (2.8)$$

Dabei ist zu beachten, daß in $\omega(k^2)$ auch λ noch eingeht.

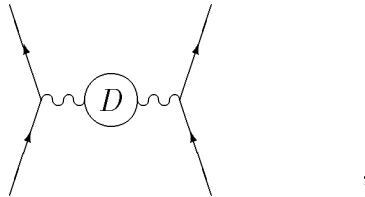
Verschiedene Eichungen unterscheiden sich also in einem Term proportional $k_\rho k_\nu$ von niedrigster Ordnung in α . Dieser Term führt aber nicht auf unterschiedliche physikalische Aussagen, weil der Photon-Propagator immer nur als Wechselwirkung zwischen zwei erhaltenen Strömen,

$$\partial_\nu j^\nu(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\nu j^\nu(k) = 0 \quad ,$$

auftritt,

$$j^\rho(k) D_{\rho\nu}(k) j^\nu(k) \quad ,$$

bzw graphisch,



wie etwa bei der Elektron-Elektron-Streuung. Daher tragen alle Anteile proportional $k_\rho k_\nu$ in $D_{\rho\nu}(k)$ nichts zu Erwartungswerten bei.

Den inversen Photon-Propagator berechnet man aus Gl.(2.8) zu

$$D_{\rho\nu}^{-1}(k) = i \left[\left(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu \right) \left(1 + \omega(k^2) \right) - \mu^2 g_{\rho\nu} + \lambda k_\rho k_\nu \right] \quad . \quad (2.9)$$

Die reduzierbare (0,2)-Punkt-Funktion unterscheidet sich von der irreduziblen also nur um den inversen freien Propagator.

Es sei an dieser Stelle aber angemerkt, daß man häufig noch eine andere Größe als reduzierbaren Polarisationsanschub bezeichnet, die hier $\Pi_{\rho\nu}$ abgekürzt werden soll,

The image shows two equations of Feynman diagrams. The first equation shows a loop with two external lines and a vertex labeled Π equal to the sum of a loop with two external lines and a vertex labeled $\Gamma^{(0,2)}$, and a loop with two external lines and a vertex labeled Π connected to another loop with two external lines and a vertex labeled $\Gamma^{(0,2)}$. The second equation shows a wavy line with a loop and a vertex labeled D equal to the sum of a wavy line and a wavy line connected to a loop with two external lines and a vertex labeled Π .

Sie stellt gerade den Photon-Propagator ohne die beiden äußersten freien Propagatoren dar.

Als Vorarbeit zum Nachweis der Transversalität des irreduziblen Polarisations-einschubs soll jetzt eine Integraldarstellung für den vollen Photon-Propagator hergeleitet werden.

2.2 Alternative Integralgleichungen

Ausgangspunkt der Überlegungen ist wieder die Entwicklung des vollen Propagators nach freien Propagatoren im Sinne des Wick'schen Theorems,

$$\begin{aligned}
D_{\rho\nu}(x-y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int d^4u_1 \dots \int d^4u_n \langle 0 | T \hat{A}_{0,\rho}(x) \hat{A}_{0,\nu}(y) : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots | 0 \rangle_d \\
&= D_{\rho\nu}^0(x-y) \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ie)^{m+1}}{(m+1)!} \int d^4u_1 \dots \int d^4u_{m+1} \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \hat{A}_{0,\rho}(x) \hat{A}_{0,\nu}(y) : \hat{\psi}_0(u_1) \hat{A}_0(u_1) \hat{\psi}_0(u_1) : \dots | 0 \rangle_d ,
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die nullte Ordnung abgespalten und $m = n - 1$ substituiert wurde. Bei der Auswertung des Vakuumerwartungswerts $(m+1)$ -ter Ordnung wird $\hat{A}_{0,\rho}(x)$ mit irgendeinem der $\hat{A}_{0,\alpha_i}(u_i)$ kontrahiert. Die zugehörige Wechselwirkungs-Lagrangedichte kann ohne Vorzeichenwechsel nach vorn gezogen werden,

$$\begin{aligned}
D_{\rho\nu}(x-y) &= D_{\rho\nu}^0(x-y) \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ie)^{m+1}}{(m+1)!} \int d^4u_1 \dots \int d^4u_{m+1} \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \hat{A}_{0,\rho}(x) \hat{A}_{0,\alpha_i}(u_i) \hat{A}_{0,\nu}(y) : \hat{\psi}_0(u_i) \gamma^{\alpha_i} \hat{\psi}_0(u_i) :: \hat{\psi}_0(u_1) \dots | 0 \rangle_d ,
\end{aligned}$$

da stets gleich zwei Fermionen-Operatoren kommutiert werden müssen. Es entsteht bei jeder beliebigen Kontraktion von $\hat{A}_{0,\rho}(x)$ mit einem der $\hat{A}_{0,\alpha_i}(u_i)$ immer das gleiche Resultat, da man anschließend die u_i als Integrationsvariablen wieder entsprechend umbenennen kann. Insgesamt gibt es also $m+1$ gleiche Terme. Wählt man als Kontraktionspartner von $\hat{A}_{0,\rho}(x)$ etwa $\hat{A}_{0,\alpha_{m+1}}(u_{m+1})$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
D_{\rho\nu}(x-y) &= D_{\rho\nu}^0(x-y) \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ie)^{m+1}}{m!} \int d^4u_{m+1} \langle 0 | T \hat{A}_{0,\rho}(x) \hat{A}_{0,\alpha_{m+1}}(u_{m+1}) | 0 \rangle \int d^4u_1 \dots \int d^4u_m \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \hat{A}_{0,\nu}(y) : \hat{\psi}_0(u_{m+1}) \gamma^{\alpha_{m+1}} \hat{\psi}_0(u_{m+1}) :: \hat{\psi}_0(u_1) \dots | 0 \rangle_d .
\end{aligned}$$

Mit $z = u_{m+1}, \mu = \alpha_{m+1}$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
D_{\rho\nu}(x-y) &= D_{\rho\nu}^0(x-y) \\
&\quad - ie \int d^4z D_{\rho\mu}^0(x-z) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ie)^m}{m!} \int d^4u_1 \dots \int d^4u_m \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \hat{A}_{0\nu}(y) : \hat{\psi}_0(z) \gamma^\mu \hat{\psi}_0(z) :: \hat{\psi}_0(u_1) \dots | 0 \rangle_d \\
&= D_{\rho\nu}^0(x-y) - ie \int d^4z D_{\rho\mu}^0(x-z) \langle 0 | T : \hat{\psi}(z) \gamma^\mu \hat{\psi}(z) : \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle \quad (2.10) \\
&= D_{\rho\nu}^0(x-y) + i \int d^4z D_{\rho\mu}^0(x-z) \langle 0 | T \hat{j}^\mu(z) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Bevor wir diese Gleichung weiter auswerten, soll noch eine weitere Darstellung für den Photon-Propagator festgehalten werden. Dazu bedient man sich der Definition der von $G^{(2,1)}$,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T : \hat{\psi}(z) \gamma^\mu \hat{\psi}(z) : \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu \lim_{u \rightarrow z} \langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(z) \gamma^\mu \hat{\psi}_\beta(u) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle \\
&= - \gamma_{\alpha\beta}^\mu \lim_{u \rightarrow z} G_{\nu,\beta\alpha}^{(2,1)}(u, z, y) \quad . \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Dabei ist automatisch garantiert, daß die direkte Kontraktion von $\hat{\psi}_0(u)$ und $\hat{\psi}_0(z)$ nicht auftritt, da

$$\langle 0 | \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle = 0$$

gilt. Einsetzen in Gl.(2.10) ergibt

$$D_{\rho\nu}(x-y) = D_{\rho\nu}^0(x-y) + ie \gamma_{\alpha\beta}^\mu \int d^4z D_{\rho\mu}^0(x-z) \lim_{u \rightarrow z} G_{\nu,\beta\alpha}^{(2,1)}(u, z, y) \quad , \quad (2.13)$$

bzw graphisch (die Loop-Regel erzeugt automatisch das fehlende Minuszeichen),

$$\text{---} \circlearrowleft (D) \text{---} = \text{---} + \text{---} \bullet \left(\text{---} \circlearrowleft (G^{(2,1)}) \text{---} \right) \text{---} \quad .$$

Unter Verwendung der Darstellung von $G^{(2,1)}$ durch die irreduzible 3-Punkt-Funktion $\Gamma^{(2,1)}$, Gl.(1.86), erhält man weiter

$$\text{---} \circlearrowleft (D) \text{---} = \text{---} + \text{---} \bullet \left(\text{---} \circlearrowleft (G) \text{---} \circlearrowleft (G) \text{---} \right) \bullet \left(\text{---} \circlearrowleft (\Gamma^{(2,1)}) \text{---} \right) \bullet \text{---} \circlearrowleft (D) \text{---} \quad .$$

Durch Vergleich mit der Dyson-Gleichung,

$$\text{---} \circlearrowleft (D) \text{---} = \text{---} + \text{---} \bullet \left(\text{---} \circlearrowleft (\omega) \text{---} \right) \bullet \text{---} \circlearrowleft (D) \text{---} \quad ,$$

ergibt sich schließlich eine exakte Relation für die irreduzible Vakuumpolarisation,

Nach diesem Einschub soll das eigentliche Problem weiter bearbeitet werden. Dazu differenziert man Gl.(2.11) nach x ,

$$\partial_x^\rho D_{\rho\nu}(x-y) = \partial_x^\rho D_{\rho\nu}^0(x-y) + i \int d^4z \left[\partial_x^\rho D_{\rho\mu}^0(x-z) \right] \langle 0 | T \hat{j}^\mu(z) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle .$$

Nun benutzt man

$$\partial_x^\rho D_{\rho\mu}^0(x-z) = -\partial_z^\rho D_{\rho\mu}^0(x-z) .$$

Außerdem wird im weiteren die Feynman-Eichung verwendet (die Landau-Eichung führt selbstverständlich auf dasselbe Resultat, erschwert aber die Überlegung). Partielle Integration sowie die Notation

$$D_{\rho\nu}^0(x-y) = g_{\rho\nu} D^0(x-y)$$

ergeben

$$\partial_x^\rho D_{\rho\nu}(x-y) = \partial_x^\rho D_{\rho\nu}^0(x-y) + i \int d^4z D^0(x-z) \partial_\mu^z \langle 0 | T \hat{j}^\mu(z) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle . \quad (2.14)$$

Der Ausdruck

$$\partial_\mu^z \langle 0 | T \hat{j}^\mu(z) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle$$

erinnert sofort an die Stromerhaltung,

$$\partial_\mu^z \langle 0 | \hat{j}^\mu(z) | 0 \rangle = 0 .$$

In dem vorliegenden Erwartungswert verhindert jedoch die Zeitordnung die direkte Verwendung der Stromerhaltungsrelation. Der Auswertung derartiger Erwartungswerte ist das nächste Kapitel gewidmet, wozu wir die Betrachtung des Photon-Propagators erst einmal unterbrechen.

Kapitel 3

Eichinvarianz und Ward-Takahashi-Identitäten

Bereits im vorangegangenen Kapitel wurde eine besondere Eigenschaft der Vakuumpolarisation, ihre Transversalität, zur Resummation der Dyson-Gleichung des Photon-Propagators benutzt. Diese Eigenschaft ist ein Spezialfall von viel allgemeiner gültigen Relationen, den Ward-Takahashi-Identitäten. Diese sind eine Konsequenz der Stromerhaltung oder, äquivalent dazu, der Eichinvarianz der Theorie. Da sie in einer Eichtheorie (wie etwa der QED) eine ganz zentrale Rolle spielen, sollen sie hier in aller Allgemeinheit abgeleitet werden. Danach werden diese Identitäten für die drei wesentlichen Fälle, den Photon-Propagator, die Vertexkorrektur und die Photon-Photon-Streuamplitude explizit ausgewertet werden.

3.1 Ward-Takahashi-Identitäten

Im letzten Kapitel waren wir auf das Problem gestoßen, die Divergenz eines Erwartungswerts des Typs

$$\partial_x^\rho \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(y_n) \hat{A}_{\nu_1}(z_1) \dots \hat{A}_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle \quad (3.1)$$

zu berechnen, die sehr an die Stromerhaltung erinnert. Ausschreiben der Zeitordnung führt auf

$$\begin{aligned} &= \partial_x^\rho \{ \\ &\quad \langle 0 | \Theta(x^0 - x_1^0) \Theta(x_1^0 - y_1^0) \Theta(y_1^0 - x_2^0) \dots \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{\psi}(x_2) \dots | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | \Theta(x_1^0 - x^0) \Theta(x^0 - y_1^0) \Theta(y_1^0 - x_2^0) \dots \hat{\psi}(x_1) \hat{j}_\rho(x) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{\psi}(x_2) \dots | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | \Theta(x_1^0 - y_1^0) \Theta(y_1^0 - x^0) \Theta(x^0 - x_2^0) \dots \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_2) \dots | 0 \rangle \\ &\quad + \dots \\ &\quad - \langle 0 | \Theta(x^0 - y_1^0) \Theta(y_1^0 - x_1^0) \Theta(x_1^0 - x_2^0) \dots \hat{j}_\rho(x) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \dots | 0 \rangle \\ &\quad + \dots \} \end{aligned}$$

In dieser Summe treten alle möglichen Zeitordnungen auf, d.h. zu jeder Platzierung von $\hat{j}_\rho(x)$ vor oder nach einem beliebigen $\hat{\psi}(x_i)$ bzw. $\hat{\bar{\psi}}(y_i)$ gibt es einen vollen Satz von Zeitordnungen aller anderen Feldoperatoren. Benutzt man nun beim Ausführen der Differentiation Stromerhaltung

$$\partial_x^\rho \hat{j}_\rho(x) | 0 \rangle = 0 \quad (3.2)$$

sowie

$$\begin{aligned}\partial_x^\rho \Theta(x^0 - x_i^0) &= g^{\rho 0} \delta(x^0 - x_i^0) \\ \partial_x^\rho \Theta(x_i^0 - x^0) &= -g^{\rho 0} \delta(x^0 - x_i^0) \quad ,\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \langle 0 | T \left\{ \delta(x^0 - x_i^0) [\hat{j}_0(x), \hat{\psi}(x_i)] \hat{\bar{\psi}}(y_i) + \hat{\psi}(x_i) \delta(x^0 - y_i^0) [\hat{j}_0(x), \hat{\bar{\psi}}(y_i)] \right\} \\ &\quad \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}(x_i) \hat{\psi}(y_i) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(y_n) \hat{A}_{\nu_1}(z_1) \dots | 0 \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^p \langle 0 | T \delta(x^0 - z_i^0) [\hat{j}_0(x), \hat{A}_{\nu_i}(z_i)] \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\bar{\psi}}(y_n) \hat{A}_{\nu_1}(z_1) \dots \hat{A}_{\nu_i}(z_i) \dots \hat{A}_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle .\end{aligned}$$

Dabei sind die durchgestrichenen Operatoren wegzulassen. Die Zeitordnung setzt die Kommutatoren mit $\hat{j}_0(x)$ jeweils an die richtige Stelle: Es traten ja, mit dem Vorzeichen gemäß der Zeitordnung, alle Reihenfolgen auf. Jetzt verwendet man die Gleichzeitkommutatoren

$$\begin{aligned}\delta(x^0 - y^0) [\hat{j}_0(x), \hat{\psi}(y)] &= e \hat{\psi}(x) \delta^{(4)}(x - y) \\ \delta(x^0 - y^0) [\hat{j}_0(x), \hat{\bar{\psi}}(y)] &= -e \hat{\bar{\psi}}(x) \delta^{(4)}(x - y) \\ \delta(x^0 - y^0) [\hat{j}_0(x), \hat{A}_\nu(y)] &= 0 \quad .\end{aligned} \tag{3.3}$$

In unserem Fall ergibt sich also

$$\begin{aligned}\delta(x^0 - x_i^0) [\hat{j}_0(x), \hat{\psi}(x_i)] \hat{\bar{\psi}}(y_i) &= e \hat{\psi}(x_i) \hat{\bar{\psi}}(y_i) \delta^{(4)}(x - x_i) \\ \delta(x^0 - y_i^0) \hat{\psi}(x_i) [\hat{j}_0(x), \hat{\bar{\psi}}(y_i)] &= -e \hat{\bar{\psi}}(x_i) \hat{\psi}(y_i) \delta^{(4)}(x - y_i) \quad ,\end{aligned}$$

was letztlich zu

$$\begin{aligned} &\partial_x^\rho \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(y_n) \hat{A}_{\nu_1}(z_1) \dots \hat{A}_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle \\ &= e \langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(y_n) \hat{A}_{\nu_1}(z_1) \dots \hat{A}_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle \sum_{i=1}^n [\delta^{(4)}(x - x_i) - \delta^{(4)}(x - y_i)]\end{aligned} \tag{3.4}$$

führt. Diese Relationen heißen Ward-Takahashi-Identitäten. Sie sind eine unmittelbare Folge der Stromerhaltung bzw Eichinvarianz.

3.2 Konsequenzen für Greensfunktionen

Die allgemeinen Ward-Takahashi-Identitäten sollen jetzt für die drei einfachsten Fälle ausgewertet werden:

$n = 0 \quad p = 1$ Irreduzible Photon-2-Punkt-Funktion (Vakuumpolarisation)

$n = 1 \quad p = 0$ Irreduzible 3-Punkt-Funktion (Vertexkorrektur)

$n = 0 \quad p = 3$ Irreduzible Photon-4-Punkt-Funktion (Photon-Photon-Streuamplitude)

3.2.1 Vakuumpolarisation

Für $n = 0$ und $p = 1$ lautet die Ward-Takahashi-Identität:

$$\partial_x^\rho \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{A}_\nu(y) | 0 \rangle = 0 \quad (3.5)$$

Einsetzen in Gl.(2.14) ergibt wie erhofft

$$\partial_x^\rho D_{\rho\nu}(x-y) = \partial_x^\rho D_{\rho\nu}^0(x-y) \quad . \quad (3.6)$$

Analog erhält man natürlich auch

$$\partial_y^\nu D_{\rho\nu}(x-y) = \partial_y^\nu D_{\rho\nu}^0(x-y) \quad . \quad (3.7)$$

Transformation in den Impulsraum,

$$\begin{aligned} \partial_x^\rho \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_{\rho\nu}(k) &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(x-y)k} k^\rho D_{\rho\nu}(k) \\ &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(x-y)k} k^\rho D_{\rho\nu}^0(k) \quad , \end{aligned}$$

hat zur Folge

$$k^\rho D_{\rho\nu}(k) = k^\rho D_{\rho\nu}^0(k) \quad , \quad (3.8)$$

und entsprechend aus Gl.(3.7)

$$k^\nu D_{\rho\nu}(k) = k^\nu D_{\rho\nu}^0(k) \quad . \quad (3.9)$$

Unter Verwendung der Dyson-Gleichung für den Photon-Propagator erhält man schließlich (es sei daran erinnert, daß die gesamte Überlegung in Feynman-Eichung durchgeführt wurde)

$$\overline{k^\rho D_{\rho\nu}(k)} = k^\rho D_{\rho\nu}^0(k) + k^\rho D_{\rho\nu}^0(k) \omega^{\mu\lambda}(k) D_{\lambda\nu}(k) \quad ,$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= k^\rho D_{\rho\nu}^0(k) \omega^{\mu\lambda}(k) D_{\lambda\nu}(k) \\ &= \frac{-i}{k^2 - \mu^2} k^\rho \omega^{\rho\lambda}(k) D_{\lambda\nu}(k) \quad . \end{aligned}$$

Daher muß

$$k^\rho \omega_{\rho\nu}(k) = 0 \quad (3.10)$$

gelten. Analog leitet man

$$k^\nu \omega_{\rho\nu}(k) = 0 \quad (3.11)$$

her. Auf diese Relationen war bereits in Kapitel 2.1 zurückgegriffen worden.

3.2.2 Vertexkorrektur

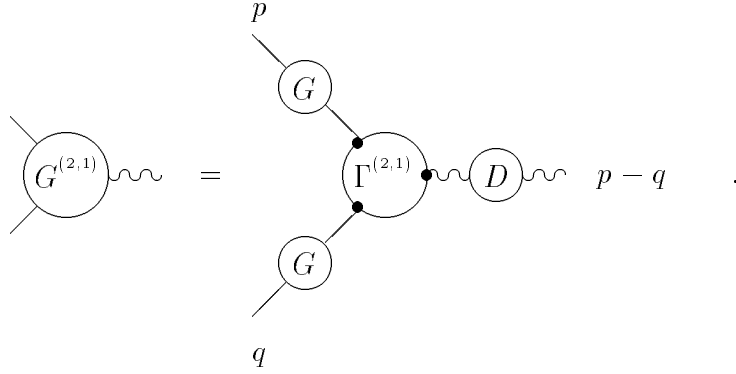
In diesem Fall soll die Ward-Takahashi-Identität

$$\partial_x^\rho \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) | 0 \rangle = e G(x_1 - y_1) [\delta^{(4)}(x - x_1) - \delta^{(4)}(x - y_1)] \quad (3.12)$$

angewendet werden. Der Ausgangspunkt dafür ist wieder eine Integralgleichung ähnlich (2.11) für den Photon-Propagator. Diesmal separiert man einen freien Photon-Propagator von dem Erwartungswert der Vertexfunktion $G^{(2,1)}$,

$$\begin{aligned} G_\nu^{(2,1)}(x_1, y_1, z) &= \langle 0 | T \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \hat{A}_\nu(z) | 0 \rangle \\ &= i \int d^4x D_{\nu\rho}^0(x - z) \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) | 0 \rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Alternativ kann man $G^{(2,1)}$ aber auch über die irreduzible 3-Punkt-Funktion (1.86) darstellen,



Die Übersetzung dieser graphischen Gleichung in den Impulsraum lautet

$$G_\nu^{(2,1)}(p, q) = D_{\nu\rho}(p - q) G(p) \Lambda^\rho(p, q) G(q) \quad , \quad (3.14)$$

wobei der Kürze wegen von jetzt ab

$$\Lambda_\rho(p, q) \equiv \Gamma_\rho^{(2,1)}(p, q)$$

verwendet werden soll. In dieser Gleichung wurde konventionsgemäß die Viererdeltafunktion, die die Über-Alles-Impulserhaltung sicherstellt, weggelassen. Als vollständige Fouriertransformierte von Gl.(3.3) erhält man daher

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q) D_{\nu\rho}(p - q) G(p) \Lambda^\rho(p, q) G(q) \\ &= i \int d^4x_1 d^4y_1 d^4z e^{ipx_1 - iqy_1 - ikz} \int d^4x D_{\nu\rho}^0(x - z) \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) | 0 \rangle \quad . \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = x - z$ kann man einen freien Photon-Propagator abspalten,

$$\begin{aligned} &= i \int d^4x_1 d^4y_1 d^4x d^4u e^{ipx_1 - iqy_1 - ikx + iku} D_{\nu\rho}^0(u) \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) | 0 \rangle \\ &= i D_{\nu\rho}^0(k) \int d^4x_1 d^4y_1 d^4x e^{ipx_1 - iqy_1 - ikx} \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) | 0 \rangle \quad . \end{aligned}$$

Jetzt wird mit k^ν kontrahiert und auf der linken Seite

$$k^\nu D_{\nu\rho}(k) = k^\nu D_{\nu\rho}^0(k)$$

benutzt. Erneute Verwendung von Feynman-Eichung ergibt

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q) G(p) k_\rho \Lambda^\rho(p, q) G(q) \\ = & i \int d^4x_1 d^4y_1 d^4x e^{ipx_1 - iqy_1} \left[i \partial_\rho^x e^{-ikx} \right] \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Nach partieller Integration kann man die Ward-Identität Gl.(3.12) anwenden,

$$\begin{aligned} & = \int d^4x_1 d^4y_1 d^4x e^{ipx_1 - iqy_1 - ikx} \left[\partial_\rho^x \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(y_1) | 0 \rangle \right] \\ & = e \int d^4x_1 d^4y_1 d^4x e^{ipx_1 - iqy_1 - ikx} G(x_1 - y_1) \left[\delta^{(4)}(x - x_1) - \delta^{(4)}(x - y_1) \right] \\ & = e \int d^4x_1 d^4y_1 G(x_1 - y_1) \left[e^{ipx_1 - iqy_1 - ikx_1} - e^{ipx_1 - iqy_1 - iky_1} \right] . \end{aligned}$$

Schließlich substituiert man im ersten Term $z = x_1, u = x_1 - y_1$, im zweiten $z = y_1, u = x_1 - y_1$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow & = e \int d^4u d^4z \left[e^{ipz - ikz + iqu - iqz} - e^{ipu + ipz - ikz - iqz} \right] G(u) \\ & = e (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q) \left[G(q) - G(p) \right] , \end{aligned}$$

sodaß man insgesamt die Relation

$$G(p)(p_\rho - q_\rho) \Lambda^\rho(p, q) G(q) = e \left[G(q) - G(p) \right] \quad (3.15)$$

erhält. Multiplikation mit $G^{-1}(p)$ von links und $G^{-1}(p)$ von rechts führt auf

$$(p_\rho - q_\rho) \Lambda^\rho(p, q) = e \left[G^{-1}(p) - G^{-1}(q) \right] ,$$

und nach Differentiation nach p ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left[(p_\rho - q_\rho) \Lambda^\rho(p, q) \right] & = \Lambda_\nu(p, q) + (p_\rho - q_\rho) \frac{\partial}{\partial p^\nu} \Lambda^\rho(p, q) \\ & = e \frac{\partial}{\partial p^\nu} G^{-1}(p) . \end{aligned}$$

An der Stelle $p_\nu = q_\nu$ bleibt schließlich

$$\Lambda_\nu(p, p) = e \frac{\partial}{\partial p^\nu} G^{-1}(p) . \quad (3.16)$$

Dies ist die Ward-Identität für die Vertexkorrektur. In niedrigster Ordnung besteht $\Lambda_\nu(p, q)$ gerade aus einem reinen Vertex, was mit der niedrigsten Ordnung von $G^{-1}(p)$ konsistent ist,

$$\Lambda_\nu^{(0)}(p, p) = -ie\gamma_\nu = e \frac{\partial}{\partial p^\nu} G^{-1, (0)}(p) = -ie \frac{\partial}{\partial p^\nu} (\not{p} - m) .$$

3.2.3 Photon-Photon-Streuamplitude

In diesem Fall soll

$$\partial_x^\rho \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{A}_{\nu_2}(z_2) \hat{A}_{\nu_3}(z_3) \hat{A}_{\nu_4}(z_4) | 0 \rangle = 0 \quad (3.17)$$

ausgewertet werden. Dazu benutzt man wieder das gleiche Schema wie schon in den beiden vorangegangenen Fällen. Zunächst stellt man die Photon-Photon-Streuamplitude einmal über den obigen Erwartungswert,

$$\begin{aligned} G_{c,\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{(0,4)}(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \langle 0 | T \hat{A}_{\nu_1}(z_1) \hat{A}_{\nu_2}(z_2) \hat{A}_{\nu_3}(z_3) \hat{A}_{\nu_4}(z_4) | 0 \rangle \\ &= i \int d^4x D_{\nu_1\rho}^0(x - z_1) \langle 0 | T \hat{j}^\rho(x) \hat{A}_{\nu_2}(z_2) \hat{A}_{\nu_3}(z_3) \hat{A}_{\nu_4}(z_4) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.18)$$

dann über die irreduzible Photon-4-Punkt-Funktion $\Gamma^{(0,4)}$ dar,

$$G_c^{(0,4)} = \Gamma^{(0,4)} \cdot \quad (3.19)$$

Im Impulsraum bedeutet das:

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) D_{\nu_1\rho_1}(q_1) D_{\nu_2\rho_2}(q_2) D_{\nu_3\rho_3}(q_3) D_{\nu_4\rho_4}(q_4) \Gamma^{(0,4),\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\ &= i D_{\nu_1\rho}^0(q_1) \int d^4x d^4z_2 d^4z_3 d^4z_4 e^{-iq_1x - iq_2z_2 - iq_3z_3 - iq_4z_4} \langle 0 | T \hat{j}^\rho(x) \hat{A}_{\nu_2}(z_2) \hat{A}_{\nu_3}(z_3) \hat{A}_{\nu_4}(z_4) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Multiplikation mit $q_1^{\nu_1}$, Verwendung von Gl.(3.8) sowie Feynman-Eichung und anschließende partielle Integration führt zu

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) q_{1,\rho_1} D_{\nu_2\rho_2}(q_2) D_{\nu_3\rho_3}(q_3) D_{\nu_4\rho_4}(q_4) \Gamma^{(0,4),\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\ &= \int d^4x d^4z_2 d^4z_3 d^4z_4 e^{-iq_1x - iq_2z_2 - iq_3z_3 - iq_4z_4} \partial_{\rho_1}^x \langle 0 | T \hat{j}_\rho(x) \hat{A}_{\nu_2}(z_2) \hat{A}_{\nu_3}(z_3) \hat{A}_{\nu_4}(z_4) | 0 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei noch Gl.(3.17) eingesetzt wurde. Das gleiche Vorgehen ist bei den anderen drei äußeren Linien möglich. Man erhält daraus die transversale Struktur der irreduziblen Photon-4-Punkt-Funktion bezüglich aller äußerer Anschlüsse,

$$q_{1,\rho_1} \Gamma^{(0,4),\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0, \quad (3.20)$$

was, ähnlich wie im Fall der Vakuumpolarisation,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(0,4),\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) &= q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} q_3^{\nu_3} q_4^{\nu_4} \Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) & (3.21) \\
\Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) &= -\Phi_{\rho_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\nu_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\
\Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) &= -\Phi_{\nu_1\rho_2\nu_3\nu_4}^{\rho_1\nu_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\
\Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) &= -\Phi_{\nu_1\nu_2\rho_3\nu_4}^{\rho_1\rho_2\nu_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \\
\Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) &= -\Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3\rho_4}^{\rho_1\rho_2\rho_3\nu_4}(q_1, q_2, q_3, q_4)
\end{aligned}$$

bedingt. Auch hier können aufgrund der transversalen Struktur äußere Impulse faktorisiert werden.

Kapitel 4

Regularisierung

In diesem Kapitel beginnt die eigentliche Diskussion des Problems der Renormierung. Bei der Berechnung der 1-Loop-Beiträge zur Vakuumpolarisation (die hier explizit berechnet wird), Selbstenergie und Vertexkorrektur stellt man fest, daß die zugehörigen Feynman-Integrale so nicht existieren. Allerdings zeigt sich, daß die Divergenzen der Integrale auf ganz bestimmte Teile der untersuchten irreduziblen Funktionen entfallen. Diese erweisen sich im weiteren als physikalisch irrelevant, sie gehen nur in Normierungsfaktoren ein. Daher muß zunächst ein Verfahren, Regularisierung genannt, entwickelt werden, daß die Behandlung dieser partiell divergenten Integrale erlaubt. Man nimmt eine Modifikation des Integrals vor, die die Divergenzen unterdrückt, genauer gesagt in neu eingeführte Parameter umsetzt. In dem Grenzfall der Parameter, in dem man die ursprüngliche Theorie zurückgewinnt, divergieren die so regularisierten Integrale. Dabei ist außerdem zu beachten, daß die Regularisierung die innere Struktur der Theorie also Kovarianz und Eichinvarianz nicht zerstört. Insbesondere wird darauf hingewiesen, daß eine Regularisierung stets auch eine neue Massenskala in die Theorie einführt.

Nach dem Aufzeigen des Problems anhand der Vakuumpolarisation erster Ordnung werden in diesem Kapitel die beiden üblichsten Regularisierungen, das Verfahren von Pauli und Villars und die dimensionale Regularisierung von t'Hooft und Veltman vorgestellt. Zur Veranschaulichung und zum Vergleich beider Methoden wird mit beiden Regularisierungen das 1-Loop-Integral der Vakuumpolarisation explizit ausgewertet. Schließlich folgen eine Reihe von Ergebnissen für Vakuumpolarisation, Selbstenergie und Vertexkorrektur erster und zweiter Ordnung im Rahmen der dimensional Regularisierung, auf die im weiteren zurückgegriffen werden wird.

4.1 Die irreduzible Vakuumpolarisation in niedrigster Ordnung von α

In diesem Kapitel soll der einfachste Beitrag zur irreduziblen (0,2)-Punkt-Funktion $\omega_{\rho\nu}(k)$ ausgewertet werden. Er war schon am Anfang von Kapitel 2.1 angegeben worden,

$$\begin{array}{c} p+k \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ p \end{array} = \omega^{(1),\rho\nu}(k) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[G^0(p+k) \gamma^\rho G^0(p) \gamma^\nu \right] .$$

Es sei zunächst angemerkt, daß die Näherung

$$\omega_{\rho\nu}(k) \approx \omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) ,$$

die wegen $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ physikalisch gut begründet ist, für den Photon-Propagator bereits die Mitnahme einer ganzen Reihe bedeutet,

$$\begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ D \end{array} = \text{---} \text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \text{---} + \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \text{---} + \dots .$$

(4.1)

Einsetzen der freien Greensfunktion $G(p)$ führt auf

$$\omega^{(1),\rho\nu}(k) = -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} \left[(\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^\nu \right]}{\left[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[p^2 - m^2 + i\epsilon \right]} .$$

Jetzt muß zuerst die Spur berechnet werden. Allgemein gilt

$$\text{tr} \left[\gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_{2n+1}} \right] = 0 \tag{4.2}$$

$$\text{tr} \left[\gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_{2n}} \right] = 4 \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) g^{\sigma(\nu_1)\sigma(\nu_2)} \dots g^{\sigma(\nu_{2n-1})\sigma(\nu_{2n})} , \tag{4.3}$$

wobei die Summe all die Permutationen der ν_i umfaßt, die echt verschiedene Paarungen $\sigma(\nu_{2i-1})\sigma(\nu_{2i})$ ergeben. Davon gibt es gerade $(2n-1)!!$, denn γ^{ν_1} kann noch mit allen anderen $2n-1$ γ^{ν_i} kontrahiert werden, von den dann $2n-2$ verbleibenden γ 's kann das nächste nur noch mit $2n-3$ verschiedenen kontrahiert werden, und so weiter. Die beiden einfachsten Fälle die hier benötigt werden, lauten:

$$\text{tr} \left[\gamma^\rho \gamma^\nu \right] = 4 g^{\rho\nu} \tag{4.4}$$

$$\text{tr} \left[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \right] = 4 \left(g^{\rho\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\rho\beta} g^{\nu\alpha} \right) \tag{4.5}$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[(\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^\nu \right] &= \text{tr} \left[(\not{p} + \not{k}) \gamma^\rho \not{p} \gamma^\nu + m^2 \gamma^\rho \gamma^\nu \right] \\ &= 4 \left[(p^\rho + k^\rho) p^\nu - (p+k) \cdot p g^{\rho\nu} + (p^\nu + k^\nu) p^\rho + m^2 g^{\rho\nu} \right] \\ &= 4 \left[(m^2 - p^2 - pk) g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho \right] , \end{aligned}$$

bzw

$$\omega^{(1),\rho\nu}(k) = -4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\left[(m^2 - p^2 - pk) g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho \right]}{\left[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[p^2 - m^2 + i\epsilon \right]} .$$

Bei näherer Betrachtung dieser Relation ergeben sich sofort mehrere Fragen:

1. Wo steckt die in Gl.(2.5) erwartete Tensorstruktur?
2. Was geschieht in dem Integral für große Loop-Impulse p ? Stellt man sich das gleiche Integral mit einer euklidischen Metrik vor, wird einem sehr schnell klar, daß es divergiert: Für große Loop-Impulse kann man k und m vernachlässigen und erhält asymptotisch Integrale der Form

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} = \int d\Omega_p \int_0^\infty p^3 dp \frac{1}{p^2} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int d\Omega_p \int_0^\lambda p dp \sim \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 \quad .$$

Man bezeichnet dieses Verhalten als quadratische Divergenz. Das Loop-Integral und damit auch alle Greensfunktionen, in denen es vorkommt, sind mathematisch nicht korrekt definiert. Das liegt an der mathematisch unsauberen Formulierung der Störungstheorie: Sie baut sich aus Produkten von hochgradig singulären Distributionen (den freien Propagatoren) auf.

3. Daran schließt sich sofort die Frage an, ob es nicht doch eine Möglichkeit gibt, die physikalisch relevante Information aus den Greensfunktionen zu gewinnen. Anders gesagt: Treten die mathematischen Probleme vielleicht nur in physikalisch irrelevanten Teilen der Greensfunktionen auf und lassen sich ignorieren oder eliminieren? Wir hatten ja beim Photon-Propagator in einem ganz anderen Zusammenhang gesehen, daß durchaus nicht die gesamte Greensfunktion von realer Bedeutung ist.

Die letzte Frage deutet bereits vage an, wie ein Ausweg aus dem vorliegenden Dilemma aussehen kann. Die Ausformulierung des dazu nötigen Konzepts, der Renormierung der Greensfunktionen, ist der Gegenstand des gesamten Restes der Vorlesung. An dieser Stelle soll jedoch schon einmal die zugrunde liegende Idee ganz knapp skizziert werden.

Betrachtet man etwa den voll wechselwirkenden Photon-Propagator, Gl.(2.6-2.8), so ist davon zunächst nur der Grenzwert $\mu \rightarrow 0$ physikalisch relevant,

$$D_{\rho\nu}(k) = \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \frac{-i}{k^2 [1 + \omega(k^2)] + i\epsilon} \quad .$$

Auch die Anteile proportional $k_\rho k_\nu$ sind nicht von Bedeutung (siehe Kapitel 2.1),

$$D_{\rho\nu}^{phys}(k) = g_{\rho\nu} \frac{-i}{k^2 [1 + \omega(k^2)] + i\epsilon} \quad .$$

Ein reales Photon, das ja durch diesen Propagator beschrieben werden soll, ist masselos. Der Propagator müßte daher auf der Massenschale $k^0 = |\underline{k}|$, d.h. $k^2 = 0$, auf der sich ein reales Photon bewegt, einen Pol erster Ordnung mit Residuum $-i$ besitzen. Die Pole der Greensfunktion geben gerade das Spektrum der möglichen Zustände wieder. Die obige Greensfunktion besitzt zwar einen Pol bei $k^2 = 0$, aber mit dem Residuum $-i/[1 + \omega(k^2 = 0)]$. Daher müßte $\omega(k^2 = 0) = 0$ gelten. Das ist aber nicht der Fall, wie noch gezeigt werden wird. Dabei ist es unerheblich, ob $\omega(k^2 = 0)$ einen endlichen, von Null verschiedenen Wert annimmt oder wie hier divergiert. In jedem Fall muß eine Umdefinition, Renormierung genannt, der Vakuumpolarisation vorgenommen werden, weil das bisher berechnete $\omega(k^2)$ nicht das physikalisch

richtige ist. Im Fall der Vakuumpolarisation erhält man die Funktion, die allen physikalischen Anforderungen gerecht wird, in niedrigster Ordnung durch Subtraktion von $\omega^{(1)}(k^2 = 0)$,

$$\omega_{phys}^{(1)}(k^2) = \omega_R^{(1)}(k^2) = \omega^{(1)}(k^2) - \omega^{(1)}(k^2 = 0) \quad . \quad (4.6)$$

Der entscheidende Punkt ist nun, daß dabei auch alle divergenten Anteile, die wir oben festgestellt hatten, herausfallen ! Das wird später bewiesen werden. Als renormierter Photon-Propagator ergibt sich dann (allgemein)

$$D_{R,\rho\nu}(k) = g_{\rho\nu} \frac{-i}{k^2[1 + \omega_R(k^2)] + i\epsilon} \quad . \quad (4.7)$$

Er hat alle gewünschten Eigenschaften. Eine formale Begründung und eine ausführliche Beschreibung des Renormierungsschemas folgt in den späteren Kapiteln.

Da man also die Hoffnung hat, die oben aufgedeckten Divergenzen durch physikalische Argumente wieder eliminieren zu können, braucht man zunächst eine Technik, um mit den divergenten Integralen bis zur Renormierung der Funktionen, in denen sie auftreten, umgehen zu können. Sie muß die auftretenden Divergenzen in irgendeiner Weise endlich halten und damit handhabbar machen. Ein solches Verfahren nennt man Regularisierung. Ihre Funktionsweise und Eigenschaften sind die folgenden:

1. Man führt einen oder mehrere Parameter in die Theorie ein, die auf irgendeine Weise die divergenten Integrale in wohldefinierter Weise endlich halten.
2. Für einen Grenzfall des oder der Parameter muß sich die ursprüngliche Theorie ergeben.
3. Die Parametrisierung der Integrale darf konvergente Integrale in diesem Grenzfall nicht verändern.
4. Die Einführung der Parameter muß die innere Struktur der Theorie (etwa Eichinvarianz, d.h. Ward-Takahashi-Identitäten) unverändert lassen.
5. Die Regularisierung muß die Kovarianz der Theorie erhalten.
6. Nach Ausführen eines regularisierten Loop-Integrals hängt das Ergebnis von den zusätzlich eingeführten Parametern ab: In dem Grenzfall, der die ursprüngliche Theorie ergibt, divergiert es.
7. Mit den regularisierten Integralen kann wie mit konvergenten Integralen gearbeitet werden.
8. Nach der Renormierung aller Greensfunktionen kann der Grenzwert, der auf die ursprüngliche Theorie führt, genommen werden, ohne daß noch Divergenzen auftreten (Beweis folgt später). Das Endergebnis sind die gewünschten, alle physikalischen Forderungen erfüllenden Greensfunktionen und Erwartungswerte.

Vor der Diskussion des Renormierungsschemas muß daher der technische Punkt Regularisierung behandelt werden.

In der Literatur findet man im wesentlichen zwei gängige Regularisierungen: Das ältere Verfahren von Pauli und Villars und die modernere dimensionale Regularisierung von t'Hooft und Veltman. Sie sollen in den beiden folgenden Kapiteln vorgestellt werden.

4.2 Das Verfahren von Pauli und Villars

Die Grundidee des Verfahrens von Pauli und Villars ist ganz einfach: Man führt eine Anzahl (N) von weiteren Fermionen mit den Massen $m_s \gg m$ zusätzlich zum Elektron in die Theorie ein. Diese sollen mit der Stärke $\sqrt{C_s}e$ an das Photon-Feld angekoppelt sein. Man verwendet dabei die minimale Kopplung, um die Eichinvarianz der Theorie zu erhalten. Es sei aber an dieser Stelle angemerkt, daß die Vorstellung einer Theorie mit weiteren Fermionen nicht zu ernst genommen werden sollte.

Die Wirkung dieses Schemas soll jetzt an dem einfachen Vakuumpolarisations-Loop ausführlich vorgeführt werden.

Zunächst tragen zur Vakuumpolarisation in niedrigster Ordnung von α jetzt Loops von allen $N + 1$ Fermionen in der Theorie bei. Dabei können Loops, in denen gleichzeitig verschiedene der Fermionen umlaufen, nicht auftreten, weil sich die Fermionen nicht ineinander umwandeln können sollen. Mit der Notation $C_0 = 1, m_0 = m$ für den Elektronen-Loop erhält man für $\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k)$,

$$\begin{aligned}\omega^{(1),\rho\nu}(k) &= \sum_{s=0}^N C_s \left\{ -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} \left[(\not{p} + \not{k} + m_s) \gamma^\rho (\not{p} + m_s) \gamma^\nu \right]}{\left[(p+k)^2 - m_s^2 + i\epsilon \right] \left[p^2 - m_s^2 + i\epsilon \right]} \right\} \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_{s=0}^N C_s \frac{\left[(m_s^2 - p^2 - pk) g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho \right]}{\left[(p+k)^2 - m_s^2 + i\epsilon \right] \left[p^2 - m_s^2 + i\epsilon \right]} .\end{aligned}\quad (4.8)$$

Vor der expliziten Auswertung dieses Integrals sei der Effekt der zusätzlichen Fermionen an einem einfachen Beispiel demonstriert: Angenommen, man würde nur ein einziges Hilfsfermion mit der Masse M einführen, so ergäbe eine Ankopplung mit der Stärke $C_1 = -1$ bereits eine Reduktion der Divergenz des Loop-Integrals. Der Integrand lautet für diesen einfachen Fall

$$\frac{\left[(m^2 - p^2 - pk) g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho \right]}{\left[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[p^2 - m^2 + i\epsilon \right]} - \frac{\left[(M^2 - p^2 - pk) g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho \right]}{\left[(p+k)^2 - M^2 + i\epsilon \right] \left[p^2 - M^2 + i\epsilon \right]} .$$

Das Verhalten für große Loop-Impulse p erhält man durch Entwicklung nach $1/p^2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p+k)^2 - m^2} &= \frac{1}{p^2} \left(1 - 2\frac{pk}{p^2} + \frac{m^2 - k^2}{p^2} + 4\frac{(pk)^2}{p^4} + \mathcal{O}(1/p^3) \right) \\ \frac{1}{\left[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[p^2 - m^2 + i\epsilon \right]} &= \frac{1}{p^4} \left(1 - 2\frac{pk}{p^2} + \frac{2m^2 - k^2}{p^2} + 4\frac{(pk)^2}{p^4} + \mathcal{O}(1/p^3) \right) .\end{aligned}$$

Für den Integranden folgt so

$$\begin{aligned}&= \left[(-p^2 - pk) g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho \right] \frac{1}{p^4} \left(2\frac{m^2 - M^2}{p^2} + \mathcal{O}(1/p^3) \right) \\ &+ g^{\rho\nu} (m^2 - M^2) \frac{1}{p^4} \left(1 - 2\frac{pk}{p^2} + \mathcal{O}(1/p^2) \right) \\ &= \frac{m^2 - M^2}{p^4} \left[\left(-1 - 4\frac{pk}{p^2} \right) g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho \right] + \mathcal{O}(1/p^5) .\end{aligned}$$

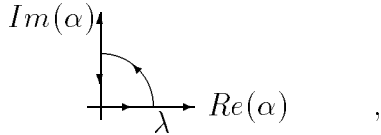
Statt des ursprünglichen Abfalls mit $1/p^2$ erhält man jetzt eine Proportionalität zu $1/p^4$. Durch das Hinzufügen weiterer Hilfsfermionen mit geeignet gewählten Kopplungsstärken C_s läßt sich so ein beliebig schnelles Abfallen des Integranden erzeugen.

Andererseits läßt sich die ursprüngliche Theorie leicht wiedergewinnen, indem man die Hilfsmassen m_s^2 gegen Unendlich gehen läßt. Dann verschwinden alle Propagatoren der Hilfsfermionen und damit z.B. auch der zweite Summand in dem obigen einfachen Beispiel.

Nun soll Gl.(4.8) explizit ausgewertet werden. Dazu sind eine Reihe von technischen Tricks nötig. Als ersten verwendet man die sogenannte Feynman-Darstellung für den Nenner des Integranden,

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = -i \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad . \quad (4.9)$$

Dabei sichert $i\epsilon$ die Konvergenz des Integrals für große α . Diese Darstellung soll zunächst durch Residuenintegration bewiesen werden. Der Integrand hat nirgendwo in der komplexen α -Ebene einen Pol, weswegen für $p^2 > m^2$ das Residuenintegral über die in der Figur angegebene geschlossene Kurve,



verschwindet. Daher ergibt sich in diesem Fall:

$$\begin{aligned} 0 &= -i \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_0^{\pi/2} d\phi e^{i\phi} e^{\lambda(i \cos \phi - \sin \phi)(p^2 - m^2 + i\epsilon)} + \int_\infty^0 d\alpha e^{-\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ &= -i \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} - \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ &= -i \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} - \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Dabei verschwindet der Bogenanteil des Kurvenintegrals im Grenzwert $\lambda \rightarrow \infty$. Für $p^2 < m^2$ schließt man das Residuenintegral entsprechend unten herum und erhält das gleiche Resultat.

Unter Verwendung der Feynman-Darstellung ergibt sich für die Vakuumpolarisation,

$$\omega^{(1),\rho\nu}(k) = 4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \sum_{s=0}^N C_s [(m_s^2 - p^2 - pk)g^{\rho\nu} + 2p^\rho p^\nu + p^\rho k^\nu + p^\nu k^\rho] \cdot e^{i\alpha[p^2 - m_s^2 + i\epsilon]} e^{i\beta[(p+k)^2 - m_s^2 + i\epsilon]} \quad .$$

Als nächstes stellt man den ursprünglichen Zähler über Hilfsvierervektoren z_1 und z_2 dar,

$$\begin{aligned} p_\nu &= -i \frac{\partial}{\partial z_1^\nu} e^{iz_1 \cdot p} \Big|_{z_1=0} \\ p_\nu + k_\nu &= -i \frac{\partial}{\partial z_2^\nu} e^{iz_2 \cdot (p+k)} \Big|_{z_2=0} \quad , \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) &= 4e^2 \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{s=0}^N C_s \left[(m_s^2 + \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2}) g_{\rho\nu} - \frac{\partial}{\partial z_1^\rho} \frac{\partial}{\partial z_2^\nu} - \frac{\partial}{\partial z_1^\nu} \frac{\partial}{\partial z_2^\rho} \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[i\alpha[p^2 - m_s^2 + i\epsilon] + i\beta[(p+k)^2 - m_s^2 + i\epsilon] + iz_1 p + iz_2(p+k) \right] \Big|_{z_1=z_2=0} \end{aligned}$$

folgt. Jetzt kann man die p -Integration mittels quadratischer Ergänzung,

$$q^\nu = p^\nu + \frac{2\beta k^\nu + z_1^\nu + z_2^\nu}{2(\alpha + \beta)} \quad ,$$

und Verwendung des Fresnel Integrals

$$\int \frac{dq}{2\pi} e^{i\alpha q^2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\alpha}} \quad (4.10)$$

bzw

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i(\alpha+\beta)(q_0^2 - \underline{q}^2)} = \frac{-i}{16\pi^2(\alpha + \beta)^2}$$

lösen,

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp \left[i(\alpha + \beta)p^2 + i(2\beta k^\nu + z_1^\nu + z_2^\nu)p_\nu - i(\alpha + \beta)m_s^2 + i\beta k^2 + iz_2 \cdot k \right] \\ = & \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp \left[i(\alpha + \beta)q^2 - i\frac{(2\beta k + z_1 + z_2)^2}{4(\alpha + \beta)} - i(\alpha + \beta)m_s^2 + i\beta k^2 + iz_2 \cdot k \right] \\ = & -i \frac{\exp \left[-i\frac{\beta^2 k^2}{(\alpha + \beta)} - i\frac{\beta k \cdot (z_1 + z_2)}{(\alpha + \beta)} - i\frac{(z_1 + z_2)^2}{4(\alpha + \beta)} - i(\alpha + \beta)m_s^2 + i\beta k^2 + iz_2 \cdot k \right]}{16\pi^2(\alpha + \beta)^2} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) &= \frac{-ie^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \sum_{s=0}^N C_s \left[\left(m_s^2 + \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} \right) g_{\rho\nu} - \frac{\partial}{\partial z_1^\rho} \frac{\partial}{\partial z_2^\nu} - \frac{\partial}{\partial z_1^\nu} \frac{\partial}{\partial z_2^\rho} \right] \\ & \quad \cdot \frac{\exp \left[-i\frac{\beta^2 k^2}{(\alpha + \beta)} - i\frac{\beta k \cdot (z_1 + z_2)}{(\alpha + \beta)} - i\frac{(z_1 + z_2)^2}{4(\alpha + \beta)} - i(\alpha + \beta)m_s^2 + i\beta k^2 + iz_2 \cdot k \right]}{(\alpha + \beta)^2} \Big|_{z_1=z_2=0} \\ &= \frac{-ie^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^2} \sum_{s=0}^N C_s \left[\left(m_s^2 + \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} k^2 - \frac{i}{(\alpha + \beta)} \right) g_{\rho\nu} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} k_\rho k_\nu \right] \\ & \quad \cdot \exp \left[i\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)} k^2 - i(\alpha + \beta)m_s^2 \right] \quad . \end{aligned}$$

Als nächstes soll die erwartete Tensorstruktur herausgearbeitet werden. Dazu zerlegt man den Integranden in zwei Teile,

$$\begin{aligned} & \left[\left(m_s^2 + \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} k^2 - \frac{i}{(\alpha + \beta)} \right) g_{\rho\nu} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} k_\rho k_\nu \right] \\ = & \left(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu \right) \left(\frac{2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \right) + g_{\rho\nu} \left(m_s^2 - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} k^2 - \frac{i}{(\alpha + \beta)} \right) \quad . \end{aligned}$$

Der Beitrag des zweiten Summanden muß verschwinden. Das sieht man folgendermaßen ein: Bezeichnet man seinen Beitrag als $\Delta\omega_{\rho\nu}(k)$, so ist er gerade durch

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) &= \frac{-i\alpha}{\pi} g_{\rho\nu} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^3} \sum_{s=0}^N C_s \left[(\alpha + \beta)m_s^2 - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)} k^2 - i \right] \\ & \quad \cdot \exp \left[i\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)} k^2 - i(\alpha + \beta)m_s^2 \right] \end{aligned}$$

gegeben. Jetzt erkennt man, daß sich der Ausdruck in der Klammer als Ableitung der Exponentialfunktion schreiben läßt,

$$\begin{aligned}
& i\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \exp\left[i\rho\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - (\alpha+\beta)m_s^2\right)\right] \Big|_{\rho=1} \\
&= \frac{-i}{\rho} \exp\left[i\rho\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - (\alpha+\beta)m_s^2\right)\right] \Big|_{\rho=1} \\
&\quad - \left[-(\alpha+\beta)m_s^2 + \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 \right] \exp\left[i\rho\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - (\alpha+\beta)m_s^2\right)\right] \Big|_{\rho=1} \\
&= \left[(\alpha+\beta)m_s^2 - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - i \right] \exp\left[i\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - (\alpha+\beta)m_s^2\right)\right] \quad ,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\Delta\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) = \frac{\alpha}{\pi} g_{\rho\nu} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha+\beta)^3} \sum_{s=0}^N C_s \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \exp\left[i\rho\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - (\alpha+\beta)m_s^2\right)\right] \Big|_{\rho=1} \quad .$$

Dabei wird die Konvergenz der α - und β -Integrale durch geeignete Wahl der C_s sichergestellt. Man kann diese so wählen, daß für $\alpha, \beta \rightarrow 0$ ein konvergenter Integrand entsteht. Die einfachste, unmittelbar einleuchtende Bedingung, die die C_s erfüllen müssen, ist

$$\sum_{s=0}^N C_s = 0 \quad .$$

Auf eine weitere Diskussion dieses Punktes soll an dieser Stelle verzichtet werden. Später wird sich zeigen, daß diese eine Forderung bereits ausreicht. Außerdem konvergieren die α - und β -Integrale auch für $\alpha, \beta \rightarrow \infty$, weil jedes m_s^2 eigentlich $m_s^2 - i\epsilon$ bedeutet,

$$\exp\left[-i(\alpha+\beta)m_s^2\right] \equiv \exp\left[-i(\alpha+\beta)m_s^2 - (\alpha+\beta)\epsilon\right] \quad .$$

Generell ist die Konvergenz der regularisierten Integrale die Legitimation für alle möglichen Vertauschungen von Integrationsreihenfolgen und der Vertauschung der Differentiation nach ρ mit den Integrationen über α und β ,

$$\Delta\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) = \frac{\alpha}{\pi} g_{\rho\nu} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha+\beta)^3 \rho} \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i\rho\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - (\alpha+\beta)m_s^2\right)\right] \Big|_{\rho=1} \quad .$$

Jetzt substituiert man $x = \rho\alpha$ und $y = \rho\beta$, was wegen $\rho \neq 0$ erlaubt ist,

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) &= \frac{\alpha}{\pi} g_{\rho\nu} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{dx dy}{(x+y)^3} \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i\left(\frac{xy}{(x+y)}k^2 - (x+y)m_s^2\right)\right] \Big|_{\rho=1} \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Das Integral hängt nach der Substitution nicht mehr von ρ ab, sodaß seine Ableitung nach ρ verschwindet. Daher tritt kein nichttransversaler Anteil in $\omega_{\rho\nu}(k)$ auf.

Der Rest lautet wie erwartet

$$\begin{aligned}
\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) &= \frac{-2i\alpha}{\pi} (k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu) \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha+\beta)^4} \alpha\beta \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}k^2 - i(\alpha+\beta)m_s^2\right] \\
&= -i(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu) \omega^{(1)}(k^2) \quad .
\end{aligned}$$

Zur Berechnung dieses Integrals benutzt man einen weiteren Trick. Man führt in den Integranden die 1 in der Form

$$1 = \int_0^\infty d\rho \delta(\rho - \alpha - \beta)$$

ein, was wegen $\alpha + \beta > 0$ legitim ist:

$$\omega^{(1)}(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^4} \alpha \beta \int_0^\infty d\rho \delta(\rho - \alpha - \beta) \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)} k^2 - i(\alpha + \beta)m_s^2\right]$$

Mit den Substitutionen $x = \frac{\alpha}{\rho}$ und $y = \frac{\beta}{\rho}$ wird daraus

$$\begin{aligned} \omega^{(1)}(k^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx dy}{(x + y)^4} xy \int_0^\infty d\rho \frac{\delta(1 - x - y)}{\rho} \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i\rho \left(\frac{xy}{(x + y)} k^2 - (x + y)m_s^2\right)\right] \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx dy x y \delta(1 - x - y) \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i\rho(xy k^2 - m_s^2)\right] . \end{aligned}$$

Dabei können die oberen Schranken der x, y -Integrale auf 1 gesetzt werden, weil die δ -Funktion keine x, y -Werte größer als 1 erlaubt.

Es sei angemerkt, daß das ρ -Integral ohne Regularisierung am Ursprung divergieren würde. Nur die geeignete Wahl der C_s verhindert eine Divergenz. Allerdings wäre diese von logarithmischer Natur im Gegensatz zu der des Ausgangspunktes. Der 'Divergenzgrad' hat sich also um zwei Potenzen erniedrigt. Das ist ein Verdienst der Faktorisierung von

$$(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu) .$$

Die Erniedrigung des Divergenzgrades folgt automatisch aus einer Dimensionsbetrachtung. Da man mit dem Transversalitätsfaktor zwei Potenzen der Energie aus dem Integranden herauszieht, muß sich dessen Dimension um zwei erniedrigen. Für hohe Loop-Impulse p spielen der äußere Impuls k und die Masse m keine Rolle mehr, man kann sie auf Null setzen. Dann muß aber der Loop-Impuls mit einer um zwei erniedrigten Potenz im Integranden stehen, weswegen die Konvergenz des Integrals um zwei Potenzen verbessert wird. Die Eichinvarianz der Theorie, die zum Abspalten des Transversalitätsfaktors führt, hat daher eine Reduktion des Divergenzgrades zur Folge. Diese wichtige Eigenschaft wird uns auch an anderer Stelle wieder begegnen.

In unserem Fall wählt man zur Konvergenz des ρ -Integrals am Ursprung natürlich

$$\sum_{s=0}^N C_s = 0 .$$

Große ρ sind wegen der $i\epsilon$ -Vorschrift unkritisch. Das ρ -Integral kann man nun auswerten. Zunächst verlegt man die kritische untere Grenze in einen Grenzwert,

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i\rho(xy k^2 - m_s^2)\right] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^\infty \frac{d\rho}{\rho} \sum_{s=0}^N C_s \exp\left[i\rho(xy k^2 - m_s^2)\right] .$$

Die weitere Rechnung wird nur für $k^2 < 4m^2$ vorgeführt. Dieser Energiewert entspricht genau dem Schwellwert für reale Elektron-Positron-Paarzeugung. Technisch hat das zur Folge, daß wegen

$$x + y = 1 \quad \Rightarrow \quad xy = x(1 - x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

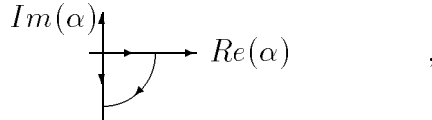
auch

$$xyk^2 < m^2 \leq m_s^2$$

gilt. Dann aber kann man eine Residuenintegration durchführen. Weil in der unteren imaginären Halbebene für den Realteil des Exponenten des ρ -Integrals

$$-Im(\rho)(xyk^2 - m_s^2) < 0$$

gilt, kann man den Integrationsweg wie in der folgenden Figur schließen,



wobei der Bogenbeitrag wieder verschwindet:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \sum_{s=0}^N C_s \exp[i\rho(xyk^2 - m_s^2 + i\epsilon)] \\
&= -\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{d(i\rho)}{(i\rho)} \sum_{s=0}^N C_s \exp[-\rho(xyk^2 - m_s^2 + i\epsilon)] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} \sum_{s=0}^N C_s \exp[\rho(xyk^2 - m_s^2)] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=0}^N C_s \int_{\eta(m_s^2 - xyk^2)}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} e^{-\rho} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=0}^N C_s \left\{ \ln(\rho) e^{-\rho} \Big|_{\eta(m_s^2 - xyk^2)}^{\infty} + \int_{\eta(m_s^2 - xyk^2)}^{\infty} d\rho \ln(\rho) e^{-\rho} \right\} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{s=0}^N C_s \left\{ -\ln(\eta) e^{-\eta(m_s^2 - xyk^2)} - \ln(m_s^2 - xyk^2) e^{-\eta(m_s^2 - xyk^2)} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\eta(m_s^2 - xyk^2)}^{\infty} d\rho \ln(\rho) e^{-\rho} \right\} . \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Jetzt kann der Limes $\eta \rightarrow 0$ genommen werden. Im ersten Summanden kann die Exponentialfunktion entwickelt werden,

$$e^{-\eta(m_s^2 - xyk^2)} = 1 - \eta(m_s^2 - xyk^2) + \dots$$

Ihr erster Term trägt wegen

$$\sum_{s=0}^N C_s = 0$$

nichts bei. Damit ist die kritische logarithmische Divergenz mit Hilfe der Regularisierung eliminiert worden. Die höheren Glieder der Exponentialfunktion tragen wegen

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^n \ln(\eta) = 0$$

nicht bei. In den anderen beiden Summanden von Gl.(4.11) ist der Limes unkritisch. Man erhält so

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &= - \sum_{s=0}^N C_s \ln(m_s^2 - xyk^2) \\
&= - \sum_{s=0}^N C_s \left[\ln\left(1 - \frac{xyk^2}{m_s^2}\right) + \ln(m_s^2) \right] \\
&= - \sum_{s=0}^N C_s \left[\ln\left(1 - \frac{xyk^2}{m_s^2}\right) + \ln\left(\frac{m_s^2}{m^2}\right) + \ln(m^2) \right] \\
&= - \sum_{s=0}^N C_s \ln\left(1 - \frac{xyk^2}{m_s^2}\right) - \sum_{s=1}^N C_s \ln\left(\frac{m_s^2}{m^2}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Man definiert nun eine Art Gesamtmasse Λ der zusätzlich eingeführten Fermionen,

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \equiv - \sum_{s=1}^N C_s \ln\left(\frac{m_s^2}{m^2}\right) \quad , \quad (4.12)$$

bzw

$$\Lambda^2 = m^2 \exp\left[- \sum_{s=1}^N C_s \ln\left(\frac{m_s^2}{m^2}\right)\right] = m^2 \exp\left[\sum_{s=1}^N \ln\left(\frac{m_s^2}{m^2}\right)^{-C_s}\right] = m^2 \prod_{s=1}^N \left(\frac{m_s^2}{m^2}\right)^{-C_s} \quad . \quad (4.13)$$

Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned}
\omega^{(1)}(k^2) &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx dy x y \delta(1-x-y) \left[\sum_{s=0}^N C_s \ln\left(1 - \frac{xyk^2}{m_s^2}\right) - \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\sum_{s=0}^N C_s \ln\left(1 - \frac{x(1-x)k^2}{m_s^2}\right) - \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \quad .
\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral kann mit Hilfe der Formel 2.731.3 aus der Integraltafel von Gradshteyn/Ryshik berechnet werden,

$$\omega^{(1)}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \sum_{s=0}^N C_s \left[\frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m_s^2}{k^2}\right) \left(\left(\frac{4m_s^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccot}\left(\frac{4m_s^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right] \right\} \quad .$$

Eine analoge Rechnung kann man für $k^2 > 4m^2$ durchführen. Nun soll untersucht werden, was im physikalisch relevanten Limes

$$m_s^2 \rightarrow \infty \quad , \quad s = 1, \dots, N \quad ,$$

in dem die Beiträge der Hilfsfermionen eliminiert werden, mit $\omega^{(1)}(k^2)$ geschieht:

1. Für $m_s^2 \rightarrow \infty$ divergiert gemäß der Definition Gl.(4.11,4.12) der erste Summand in $\omega^{(1)}(k^2)$,

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \rightarrow \pm\infty \quad ,$$

je nachdem, wie die Vorzeichen der C_s aussehen. Da diese im wesentlichen negativ sein werden (siehe das oben diskutierte Beispiel einer einzigen Hilfsmasse, das bei unserem einfachen Loop ausreichen würde), soll im weiteren angenommen werden, daß eine Divergenz gegen $+\infty$ vorliegt. Sie ist erwartungsgemäß logarithmischer Natur. In ihr steckt die ursprüngliche Divergenz des Loop-Integrals.

2. Der zweite Summand muß ebenfalls für $m_s^2 \rightarrow \infty$ untersucht werden. Mit

$$x^2 \equiv \frac{4m_s^2}{k^2}$$

ergibt sich im Limes $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left((x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccot}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ = & \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left\{ x\left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \dots\right) \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + \dots\right)\right] - 1 \right\} \\ = & \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left\{ x\left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \dots\right) \left[\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + \dots\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3x^3}\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \dots\right)^3 + \frac{1}{5x^5} + \dots \right] - 1 \right\} \\ = & \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left\{ \left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{3}{40x^4} + \dots\right) - 1 \right\} \\ = & \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left(-\frac{1}{3x^2} - \frac{2}{15x^4} - \dots \right) \\ = & -\frac{4}{5x^2} + \mathcal{O}(1/x^4) \quad . \end{aligned}$$

Im Grenzwert $m_s^2 \rightarrow \infty$ verschwinden daher in der Summe über s alle Terme außer dem Elektronen-Beitrag $s = 0$. Dieser Grenzwert kann in diesem Teil der Vakuumpolarisation bereits jetzt, d.h. vor der Renormierung, ausgeführt werden. Generell wird im weiteren die Regularisierung stets sofort entfernt, wenn die entsprechenden Terme verschwinden.

Damit erhält man als regularisierte Vakuumpolarisation in niedrigster Ordnung

$$\begin{aligned} \omega_{reg,\rho\nu}^{(1)}(k) &= -i \left(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu \right) \omega_{reg}^{(1)}(k^2) \quad (4.14) \\ \omega_{reg}^{(1)}(k^2) &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ -\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \left[\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccot}\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\} . \end{aligned}$$

Sie weist die erwartete logarithmische Divergenz auf,

$$\omega_{reg}^{(1)}(k^2) \xrightarrow{m_s^2 \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \dots \quad , \quad (4.15)$$

und verschwindet bei $k^2 = 0$ nicht: Das sieht man unmittelbar ein, wenn man beachtet, daß $k^2 = 0$ in dem endlichen Teil der Vakuumpolarisation äquivalent zu $m^2 \rightarrow \infty$ ist,

$$\omega_{reg}^{(1)}(k^2 = 0) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \quad . \quad (4.16)$$

Der nach den Überlegungen des letzten Abschnitts störende Ausdruck $\omega^{(1)}(k^2 = 0)$ ist also gerade mit der Divergenz des Loop-Integrals identisch ! Was hier an einem einfachen Beispiel explizit herausgekommen ist, läßt sich auch ganz generell nachweisen. Dies wird in den folgenden Kapiteln geschehen.

Es sei betont, daß das Regularisierungsverfahren von Pauli und Villars die Transversalität der Vakuumpolarisation erhält. Es ist obendrein per Konstruktion manifest kovariant.

Das Verfahren soll jetzt noch auf einen beliebigen Fermionen-Loop erweitert werden. Für einen Loop aus beliebig vielen Elektron-Propagatoren, der über $2n$ Vertices an irgendwelche Photon-Propagatoren mit den Impulsen k_1 bis k_{2n} angekoppelt ist, ergibt sich als Loop-Integral (bis auf Faktoren)

$$I = \sum_{s=0}^N C_s \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{\not{p} + m_s}{p^2 - m_s^2} \gamma^{\mu_1} \frac{\not{p} + \not{k}_1 + m_s}{(p + k_1)^2 - m_s^2} \gamma^{\mu_2} \dots \frac{\not{p} + \not{k}_1 + \dots + \not{k}_{2n} + m_s}{(p + k_1 + \dots + k_{2n})^2 - m_s^2} \gamma^{\mu_{2n}} \right\} .$$

Nach Bilden der Spur und Ausmultiplikation des Nenners entstehen sowohl im Zähler als auch im Nenner Polynome in m_s^2 ,

$$I = \sum_{s=0}^N C_s \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{P_n(p^2, pk_i, k_i k_j) + m_s^2 P_{n-1}(p^2, pk_i, k_i k_j) + \dots + m_s^{2n} P_0}{Q_{2n}(p^2, pk_i, k_i k_j) + m_s^2 Q_{2n-1}(p^2, pk_i, k_i k_j) + \dots + m_s^{4n} Q_0} .$$

Dabei sind die P_n und Q_n Polynome in p vom Grad $2k$ (bzw in p^2 vom Grad k). Insbesondere ist gesichert, daß Q_{2n} als dominanten Term $(p^2)^{2n}$ enthält. Für große Loop-Impulse, die man zur Abschätzung der Konvergenz des Integrals betrachtet, dominiert p über alle m_s und k_i . Man entwickelt daher zur Untersuchung der Konvergenz den Integranden in eine Potenzreihe in m_s^2 ,

$$I = \sum_{s=0}^N C_s \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{P_n(p^2, pk_i, k_i k_j)}{Q_{2n}(p^2, pk_i, k_i k_j)} + m_s^2 \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{2n}} - \frac{P_n Q_{2n-1}}{Q_{2n}^2} \right) + \dots \right\} .$$

Die Koeffizienten der m_s^2 -Entwicklung fallen immer stärker mit $1/p^2$ ab:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(p^2, pk_i, k_i k_j)}{Q_{2n}(p^2, pk_i, k_i k_j)} &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{(p^2)^n} \\ \frac{P_{n-1}(p^2, pk_i, k_i k_j)}{Q_{2n}(p^2, pk_i, k_i k_j)} &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{(p^2)^{n+1}} \\ \frac{P_n(p^2, pk_i, k_i k_j) Q_{2n-1}(p^2, pk_i, k_i k_j)}{Q_{2n}^2(p^2, pk_i, k_i k_j)} &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{(p^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

Allgemein ist der Koeffizient von m_s^{2k} aus Dimensionsgründen für große p proportional zu $1/(p^2)^{n+k}$. Der für die Konvergenz ungünstigste Fall ist daher $n = 1$, d.h. die Vakuumpolarisation. Zu ihrer Konvergenz wird (ohne Berücksichtigung der Transversalität) mindestens $k = 2$ benötigt. Die Regularisierung muß also die beiden ersten Terme der Entwicklung des Integranden nach m_s^2 eliminieren. Dazu stellt man die Forderungen

$$\sum_{s=0}^N C_s = 0 \quad (4.17)$$

$$\sum_{s=0}^N C_s m_s^2 = 0 \quad . \quad (4.18)$$

Zu ihrer Erfüllung genügen zwei Hilfsmassen. Eine mögliche Realisierung wäre

$$\begin{aligned}
m_0^2 &= m^2 & C_0 &= 1 \\
m_1^2 &= m^2 + 2\Lambda^2 & C_1 &= \frac{m_2^2 - m^2}{m_1^2 - m_2^2} = 1 \\
m_2^2 &= m^2 + \Lambda^2 & C_2 &= \frac{m_1^2 - m^2}{m_2^2 - m_1^2} = -2 \quad .
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Damit ist jedes beliebige Fermionen-Loop-Integral konvergent. Die Regularisierung kann mit $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ wieder entfernt werden.

Zusätzlich wird zur Regularisierung beliebiger Loop-Integrale noch eine Modifikation des Photon-Propagators gebraucht, zum Beispiel für die Selbstenergie. In Analogie zur Behandlung von Fermionen-Loops ersetzt man den Photon-Propagator (in Feynman-Eichung) durch

$$D_{\rho\nu,reg}^0(k) = \frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2 - \mu_1^2 + i\epsilon} \quad . \tag{4.20}$$

Solange μ_1 endlich bleibt, fällt dieser Ausdruck für große k^2 wie $1/(k^2)^2$ ab und erzwingt dadurch die Konvergenz von Loop-Integralen, in denen $D_{\rho\nu,reg}^0$ auftritt. Mit $\mu_1^2 \rightarrow \infty$ wird die Regularisierung eliminiert.

Wie muß nun die regularisierte Lagrangedichte des wechselwirkenden Systems aussehen, damit aus ihr Feynman-Regeln folgen, die jeweils Fermionen-Loops aller Massen mit den gewünschten Kopplungsstärken und den obigen Photon-Propagator ergeben?

Die Summe über Loops aller Hilfsfermionen erhält man aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_\epsilon + \mathcal{L}_{int} = \sum_{s=0}^3 \bar{\psi}_s (i\cancel{\partial} - m_s - eA) \psi_s \quad . \tag{4.21}$$

Dabei verwendet man die folgenden Regeln, um die benötigten Beiträge von zwei Hilfsmassen mit verschiedenen Vorfaktoren zu erzeugen: Zunächst gilt für die Massen

$$\begin{aligned}
m_0^2 &= m^2 \\
m_1^2 &= m^2 + 2\Lambda^2 \\
m_2^2 &= m_3^2 = m^2 + \Lambda^2 \quad .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Diese Fermionen sollen sich an Vertices selbstverständlich nicht ineinander umwandeln können. Anstelle der zwei minimal nötigen Hilfsmassen in Gl.(4.19) führt man hier drei ein, um über die beiden identischen Massen m_2 und m_3 die zugehörigen Loop-Integrale gerade zweimal zu erhalten, wie dies von C_2 , Gl.(4.19), gefordert wird. Während m_1 genauso an das Photon-Feld ankoppelt wie das Elektron, müssen Loops von m_2 und m_3 mit einem relativen Minuszeichen eingehen. Das erreicht man dadurch, daß man für die zugehörigen Feldoperatoren Bosonen-Statistik verlangt,

$$\begin{aligned}
[\hat{\psi}_s(t, \underline{x}), \hat{\psi}_s(t, \underline{y})] &= 0 \\
[\hat{\psi}_s^+(t, \underline{x}), \hat{\psi}_s^+(t, \underline{y})] &= 0 \\
[\hat{\psi}_s(t, \underline{x}), \hat{\psi}_s^+(t, \underline{y})] &= \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \quad \text{für } s = 2, 3 \quad .
\end{aligned}$$

Das hat zur Folge, daß das Fermionen-Loop Minuszeichen, das ja von den Fermionen-Antikommutationsrelationen herrührte, für m_2 und m_3 entfällt. Diese Regeln zusammen ergeben gerade den Vorfaktor -2 für einen Loop der Masse $m^2 + \Lambda^2$, wie oben gefordert wurde.

Der freie Photon-Propagator aus Gl.(4.20) ergibt sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{\mu_1^2 - \mu^2} \left[-\frac{1}{4} F_{\rho\nu} (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2) F^{\rho\nu} + \frac{\mu^2 \mu_1^2}{2} A_\rho A^\rho - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho A) (\lambda \partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2) (\partial_\nu A^\nu) \right]. \quad (4.23)$$

Zum Beweis benutzt man zuerst, daß jede Lagrangedichte nur bis auf partielle Integration festgelegt ist, weil letztlich nur die Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$$

von Bedeutung ist. In unserem Fall erhält man so

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma &= \frac{1}{2(\mu_1^2 - \mu^2)} A_\rho \left[(\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2) \partial_\beta \partial^\beta A^\rho - (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2) \partial^\rho \partial^\nu A_\nu + \mu^2 \mu_1^2 A^\rho \right. \\ &\quad \left. + \lambda (\lambda \partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2) \partial^\rho \partial^\nu A_\nu \right] \\ &= \frac{1}{2(\mu_1^2 - \mu^2)} A_\rho \left[g^{\rho\nu} (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2) (\partial_\beta \partial^\beta + \mu_1^2) \right. \\ &\quad \left. + ((\lambda^2 - 1) \partial_\alpha \partial^\alpha + (\lambda - 1)(\mu^2 + \mu_1^2)) \partial^\rho \partial^\nu \right] A_\nu \\ &= \frac{1}{2(\mu_1^2 - \mu^2)} A_\rho \left[g^{\rho\nu} (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2) (\partial_\beta \partial^\beta + \mu_1^2) \right. \\ &\quad \left. + ((1 - \lambda)^2 \partial_\alpha \partial^\alpha - (1 - \lambda)(\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2)) \partial^\rho \partial^\nu \right] A_\nu \\ &= \frac{1}{2(\mu_1^2 - \mu^2)} A_\rho \left[g^{\rho\alpha} (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2) - (1 - \lambda) \partial^\rho \partial^\alpha \right] \left[g_{\alpha\nu} (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu_1^2) - (1 - \lambda) \partial_\alpha \partial_\nu \right] A^\nu. \end{aligned}$$

Die zugehörige Feldgleichung ergibt sich aus

$$\frac{\delta}{\delta A_\beta} S[A] = 0 \quad .$$

Allgemein gilt für

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A] &= A_\rho \hat{K}^{\rho\nu} A_\nu \\ &= A_\rho \left[K^{0,\rho\nu} + K_\alpha^{1,\rho\nu} \partial^\alpha + K_{\alpha\beta}^{2,\rho\nu} \partial^\alpha \partial^\beta + K_{\alpha\beta\gamma}^{3,\rho\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma + K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{4,\rho\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma \partial^\delta \right] A_\nu \end{aligned}$$

gerade

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_\rho} \int d^4x \mathcal{L}[A(x)] &= \hat{K}^{\rho\nu} A_\nu + K^{0,\nu\rho} A_\nu - K_\alpha^{1,\nu\rho} \partial^\alpha A_\nu + K_{\alpha\beta}^{2,\nu\rho} \partial^\alpha \partial^\beta A_\nu \\ &\quad - K_{\alpha\beta\gamma}^{3,\nu\rho} \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma A_\nu + K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{4,\nu\rho} \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma \partial^\delta A_\nu \\ &= \left\{ [K^{0,\rho\nu} + K^{0,\nu\rho}] + [K_\alpha^{1,\rho\nu} - K_\alpha^{1,\nu\rho}] \partial^\alpha + [K_{\alpha\beta}^{2,\rho\nu} + K_{\alpha\beta}^{2,\nu\rho}] \partial^\alpha \partial^\beta \right. \\ &\quad \left. + [K_{\alpha\beta\gamma}^{3,\rho\nu} - K_{\alpha\beta\gamma}^{3,\nu\rho}] \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma + [K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{4,\rho\nu} + K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{4,\nu\rho}] \partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma \partial^\delta \right\} A_\nu \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Falls die ungeraden Beiträge in $\hat{K}^{\rho\nu}$ verschwinden,

$$K_{\alpha}^{1,\nu\rho} = K_{\alpha\beta\gamma}^{3,\nu\rho} = 0 \quad ,$$

folgt

$$[\hat{K}^{\rho\nu} + \hat{K}^{\nu\rho}]A_{\nu} = 0 \quad .$$

Ist $\hat{K}^{\rho\nu}$ sogar symmetrisch (wie in unserem Fall) bleibt schließlich

$$2\hat{K}^{\rho\nu}A_{\nu} = 0 \quad .$$

Die Feldgleichung für die zugehörige Greensfunktion lautet dann

$$2\hat{K}^{\rho\nu}(\partial_x^{\alpha})D_{\nu\lambda}(x, y) = i g_{\lambda}^{\rho} \delta^{(4)}(x - y) \quad ,$$

bzw im Impulsraum (für ein homogenes System, d.h. falls $\hat{K}^{\rho\nu}$ nicht von x abhängt)

$$2K^{\rho\nu}(ik^{\alpha})D_{\nu\lambda}(k) = i g_{\lambda}^{\rho} \quad .$$

Unter Berücksichtigung geeigneter Randbedingungen erhält man daraus

$$D_{\nu\lambda}(k) = \frac{i}{2} K_{\nu\lambda}^{-1}(ik^{\alpha}) \quad . \quad (4.24)$$

In unserem Fall gilt

$$K^{\rho\nu}(ik^{\alpha}) = \frac{1}{2(\mu_1^2 - \mu^2)} Q^{\rho\lambda}(k, \mu) Q_{\lambda}^{\nu}(k, \mu_1) \quad (4.25)$$

$$Q^{\rho\lambda}(k, \mu) = [g^{\rho\lambda}(-k^2 + \mu^2) + (1 - \lambda)k^{\rho}k^{\lambda}] \quad . \quad (4.26)$$

Für den zu $Q^{\rho\lambda}$ inversen Tensor berechnet man über

$$\begin{aligned} Q_{\lambda\nu}^{-1}(k, \mu) &= ag_{\lambda\nu} + bk_{\lambda}k_{\nu} \\ Q^{\rho\lambda}(k, \mu)Q_{\lambda\nu}^{-1}(k, \mu) &= g_{\nu}^{\rho} \end{aligned}$$

den Ausdruck

$$Q_{\lambda\nu}^{-1}(k, \mu) = - \left[\frac{g_{\lambda\nu}}{k^2 - \mu^2} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_{\lambda}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)(k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda})} \right] \quad .$$

Schließlich kann man noch

$$K_{\rho\nu}^{-1}(ik) = 2(\mu_1^2 - \mu^2) Q_{\rho\lambda}^{-1}(k, \mu) Q_{\nu}^{-1,\lambda}(k, \mu_1)$$

und

$$Q_{\rho\nu}(k, \mu_1) - Q_{\rho\nu}(k, \mu) = (\mu_1^2 - \mu^2)g_{\rho\nu}$$

benutzt werden, was auf

$$\begin{aligned} K_{\rho\nu}^{-1}(ik) &= 2 Q_{\rho\lambda}^{-1}(k, \mu) [Q^{\lambda\alpha}(k, \mu_1) - Q_{\lambda\alpha}(k, \mu)] Q_{\alpha\nu}^{-1}(k, \mu_1) \\ &= 2 [Q_{\rho\nu}^{-1}(k, \mu) - Q_{\rho\nu}^{-1}(k, \mu_1)] \end{aligned}$$

führt. Daraus ergibt sich über Gl.(4.24) der gewünschte Propagator

$$D_{\rho\nu}(k) = -i \left[\frac{g_{\lambda\nu}}{k^2 - \mu^2} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_\lambda k_\nu}{(k^2 - \mu^2)(k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda})} \right] + i \left[\frac{g_{\lambda\nu}}{k^2 - \mu_1^2} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_\lambda k_\nu}{(k^2 - \mu_1^2)(k^2 - \frac{\mu_1^2}{\lambda})} \right] \quad (4.27)$$

Daher folgen aus der Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{reg} = \frac{1}{\mu_1^2 - \mu^2} & \left[-\frac{1}{4} F_{\rho\nu} (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2) F^{\rho\nu} \right. \\ & \left. + \frac{\mu^2 \mu_1^2}{2} A_\rho A^\rho - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho A) (\lambda \partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2 + \mu_1^2) (\partial_\nu A^\nu) \right] \\ & + \sum_{s=0}^3 \bar{\psi}_s (i \not{\partial} - m_s - e \not{A}) \psi_s \end{aligned} \quad (4.28)$$

genau solche Feynman-Regeln, die auf die benötigten regularisierten Loop-Integrale führen. Da \mathcal{L}_{reg} ebendrein eichinvariant ist (bis auf den Photon-Massen- und den Eichterm - analog zur nicht regularisierten Lagrangedichte), ist auch die gesamte aus ihm folgende Theorie eichinvariant. Die Ward-Takahashi-Identitäten bleiben daher in allen Ordnungen auch unter der Regularisierung erhalten.

Auf eine weitere Darstellung des Verfahrens von Pauli-Villars (etwa die Berechnung der Selbstenergie in niedrigster Ordnung) soll hier verzichtet werden.

4.3 Dimensionale Regularisierung

Betrachtet man etwa das Integral

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + m^2]^\alpha}$$

mit dem euklidischen, D -komponentigen Vektor \underline{k} , so läßt sich sehr leicht der Zusammenhang zwischen der vorliegenden Raumdimension D und der Konvergenz des Integrals klar machen,

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + m^2]^\alpha} = \int d\Omega_D \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{[k^2 + m^2]^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergent für } D < 2\alpha \\ \text{divergent für } D \geq 2\alpha \end{cases},$$

wobei $d\Omega_D$ die Winkelintegration in D Dimensionen bedeutet. Je größer die Raumdimension ist, desto größer muß auch die konvergenzerzeugende Potenz α sein, damit das Integral für große k konvergiert.

Das legt es nahe, Loop-Integrale, die in vier Dimensionen divergieren, in einer niedrigeren Dimension zu betrachten, in der sie konvergieren. Genauer gesagt, berechnet man solche Integrale für alle Dimensionen, in denen sie konvergieren, und faßt das Ergebnis als Funktion der Dimension auf. Diese Funktion kann man dann für $D \rightarrow 4$ untersuchen. War das Integral ursprünglich divergent in vier Dimensionen, dann sollte die Funktion bei $D = 4$ eine Singularität aufweisen. Die Details dieses Programms sollen im weiteren der Reihe nach durchgegangen werden. Im ersten Schritt sollen typische Loop-Integrale in beliebiger Dimension D ausgeführt werden.

4.3.1 Berechnung von Loop-Integralen in beliebiger Dimension

Als Basisintegral für alle weiteren Überlegungen berechnet man

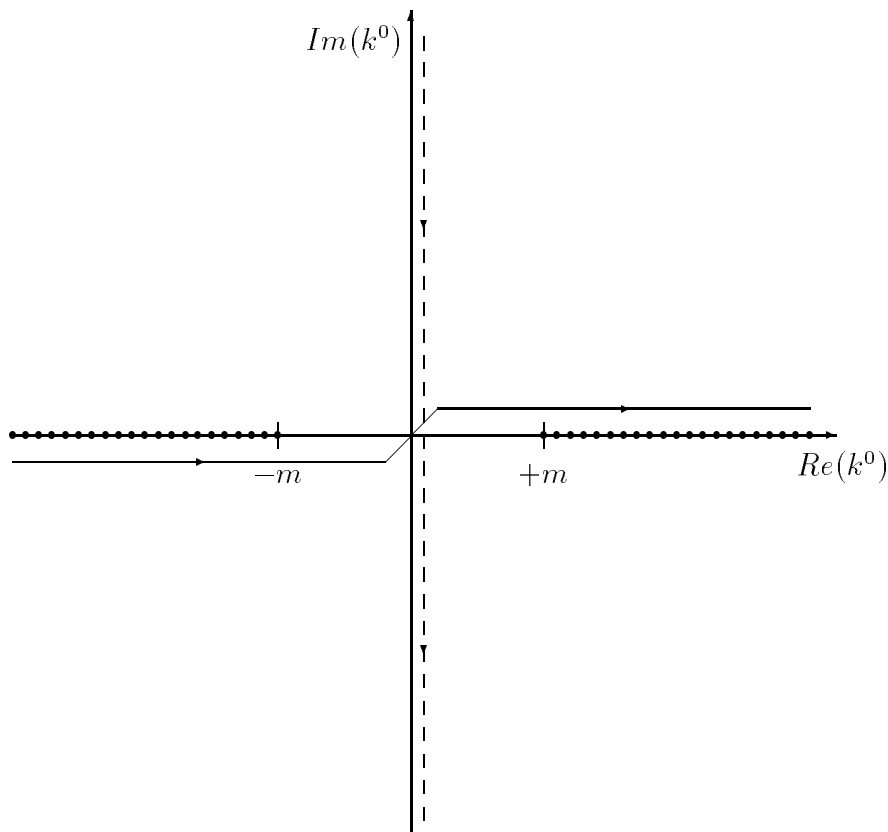
$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - m^2 + i\epsilon]^\alpha} = I(D, \alpha, m^2) \quad ,$$

wobei jetzt zunächst die Minkowski-Metrik $k^2 = (k^0)^2 - \underline{k}^2$ vorliegt. Im weiteren wird stets die Grundannahme benutzt, daß dieses Integral nur für solche D berechnet wird, bei denen es konvergiert. Daher sind alle Manipulationen, wie Vertauschungen von Integrationsreihenfolgen usw., erlaubt.

Als erstes geht man nun zur euklidischen Metrik über.

A) Übergang zu euklidischer Metrik: Wick-Rotation

In der unten folgenden Figur ist die Polstruktur des Integranden und der Integrationsweg aufgezeichnet. Da außer auf der reellen Achse keine Pole mehr auftreten, kann man die Integrationskontour wie in der Figur gezeigt schließen.



Die Bogenbeiträge verschwinden wieder und man erhält,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{[(k^0)^2 - \underline{k}^2 - m^2 + i\epsilon]^\alpha} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(ik^0)}{2\pi} \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{[-(k^0)^2 - \underline{k}^2 - m^2]^\alpha}$$

$$= i(-1)^\alpha \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k^0)^2 + \underline{k}^2 + m^2]^\alpha} \quad . \quad (4.29)$$

Damit kann man sich im weiteren auf die euklidische Metrik beschränken.

B) Kugelkoordinaten in beliebiger Dimension

Zur Berechnung des Integrals (4.29) verwendet man Kugelkoordinaten,

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k^0)^2 + \underline{k}^2 + m^2]^\alpha} = \int d\Omega_D \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{[k^2 + m^2]^\alpha} \quad .$$

Dazu muß zunächst der Raumwinkel in D Dimensionen berechnet werden,

$$\int d\Omega = \int f(\Theta_1, \dots, \Theta_{D-1}) d\Theta_1 \dots d\Theta_{D-1} \quad .$$

Die Transformation von kartesischen auf Kugelkoordinaten lautet in D Dimensionen,

$$\begin{aligned} k_1 &= k \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \sin\Theta_3 \sin\Theta_2 \cos\Theta_1 \\ k_2 &= k \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \sin\Theta_3 \sin\Theta_2 \sin\Theta_1 \\ k_3 &= k \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \sin\Theta_3 \cos\Theta_2 \\ k_4 &= k \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \cos\Theta_3 \\ &\dots \\ k_{D-2} &= k \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \cos\Theta_{D-3} \\ k_{D-1} &= k \sin\Theta_{D-1} \cos\Theta_{D-2} \\ k_D &= k \cos\Theta_{D-1} \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist Θ_{D-1} der Winkel zwischen dem vollen D -dimensionalen k -Vektor und der kartesischen k_D -Achse. $\cos\Theta_{D-1}$ projiziert also gerade auf die D -Achse. Dementsprechend projiziert $\sin\Theta_{D-1}$ auf den $(D-1)$ -dimensionalen Unterraum aller anderen kartesischen Richtungen. Das setzt sich immer weiter so fort. Lediglich der innerste Winkel ist konventionsgemäß abweichend als Zwischenwinkel zwischen der Projektion aus allen höheren Räumen auf die 1-2-Ebene und der 1-Achse (in Anlehnung an das gewöhnliche ϕ in drei Dimensionen) gewählt. Dabei überstreichen alle Θ_i außer Θ_1 als Zwischenwinkel zwischen einem Vektor und einer Koordinatenachse den Bereich von 0 bis π . Lediglich der innerste Winkel Θ_1 kann zwischen 0 und 2π variieren, damit alle Ausrichtungen eines zweidimensionalen Vektors erfaßt werden. Daraus resultiert als Funktionaldeterminante:

$$\det\left(\frac{d(k_1, \dots, k_D)}{d(k, \Theta_{D-1}, \dots, \Theta_1)}\right) = k^{D-1}$$

$$\det \begin{pmatrix} \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \cos\Theta_1 & \cos\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \cos\Theta_1 & \sin\Theta_{D-1} \cos\Theta_{D-2} \dots \cos\Theta_1 & \dots \\ \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \sin\Theta_1 & \cos\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \dots \sin\Theta_1 & \sin\Theta_{D-1} \cos\Theta_{D-2} \dots \sin\Theta_1 & \dots \\ & \dots & & \\ & \dots & & \\ \sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \cos\Theta_{D-3} & \cos\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} \cos\Theta_{D-3} & \sin\Theta_{D-1} \cos\Theta_{D-2} \cos\Theta_{D-3} & \dots \\ \sin\Theta_{D-1} \cos\Theta_{D-2} & \cos\Theta_{D-1} \cos\Theta_{D-2} & -\sin\Theta_{D-1} \sin\Theta_{D-2} & \dots \\ \cos\Theta_{D-1} & -\sin\Theta_{D-1} & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{\partial k_i}{\partial k} & \frac{\partial k_i}{\partial \Theta_{D-1}} & \frac{\partial k_i}{\partial \Theta_{D-2}} \dots \end{array}$$

Entwicklung nach der letzten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} &= k^{D-1}(-1)^D \cos \Theta_{D-1} \\ &\cdot \det \begin{pmatrix} \cos \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \sin \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \dots \\ \cos \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \sin \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \sin \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \dots \\ \cos \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} & -\sin \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} & \dots \end{pmatrix} \\ &+ k^{D-1}(-1)^D \sin \Theta_{D-1} \\ &\cdot \det \begin{pmatrix} \sin \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \sin \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \dots \\ \sin \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \sin \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \sin \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \dots \\ \sin \Theta_{D-1} \cos \Theta_{D-2} & -\sin \Theta_{D-1} \sin \Theta_{D-2} & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im ersten Summanden kann man aus der ersten Spalte $\cos \Theta_{D-1}$ herausziehen und aus den restlichen Spalten jeweils $\sin \Theta_{D-1}$. Analog läßt sich beim zweiten Summanden aus der zweiten Spalte $\cos \Theta_{D-1}$ und aus den anderen jeweils $\sin \Theta_{D-1}$ gewinnen,

$$\begin{aligned} &= k^{D-1}(-1)^D (\cos \Theta_{D-1})^2 (\sin \Theta_{D-1})^{D-2} \det \begin{pmatrix} \sin \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \cos \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \dots \\ \sin \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \cos \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \cos \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \dots \\ \cos \Theta_{D-2} & -\sin \Theta_{D-2} & \dots \end{pmatrix} \\ &+ k^{D-1}(-1)^D (\sin \Theta_{D-1})^D \det \begin{pmatrix} \sin \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \cos \Theta_{D-2} \dots \cos \Theta_1 & \dots \\ \sin \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \cos \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \cos \Theta_{D-2} \cos \Theta_{D-3} & \dots \\ \cos \Theta_{D-2} & -\sin \Theta_{D-2} & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die beiden verbleibenden Determinanten sind identisch und entsprechen gerade der Funktionaldeterminante von $D - 1$ -dimensionalen Kugelkoordinaten,

$$\det \left(\frac{d(k_1, \dots, k_D)}{d(k, \Theta_{D-1}, \dots, \Theta_1)} \right) = k(-1)^D \sin^{D-2} \Theta_{D-1} \det \left(\frac{d(k_1, \dots, k_{D-1})}{d(k, \Theta_{D-2}, \dots, \Theta_1)} \right)$$

Diese Rekursionsformel kann man leicht auflösen,

$$\det \left(\frac{d(k_1, \dots, k_D)}{d(k, \Theta_1, \dots, \Theta_{D-1})} \right) = k^{D-1} (-1)^{\frac{D(D-1)}{2}} \sin^{D-2} \Theta_{D-1} \sin^{D-3} \Theta_{D-2} \dots \sin \Theta_2, \quad (4.30)$$

wovon nur der Betrag benötigt wird. Man erhält daraus als Winkelintegral in D Dimensionen,

$$\int d\Omega_D = \int_0^\pi \sin^{D-2} \Theta_{D-1} d\Theta_{D-1} \int_0^\pi \sin^{D-3} \Theta_{D-2} d\Theta_{D-2} \dots \int_0^\pi \sin \Theta_2 d\Theta_2 \int_0^{2\pi} d\Theta_1 \quad .$$

Zur Auswertung benutzt man aus der Standard-Integralsammlung von Gradshteyn und Ryzhik die Formeln 3.621, 8.384.1 und 8.335.1,

$$\int_0^\pi \sin^\nu(x) dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})} \quad , \quad (4.31)$$

was auf

$$\begin{aligned} \int d\Omega_D &= 2\pi \pi^{\frac{D-2}{2}} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2}) \Gamma(\frac{D-2}{2}) \Gamma(\frac{D-3}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D-1}{2}) \Gamma(\frac{D-2}{2})} \dots \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(1)}{\Gamma(2) \Gamma(\frac{3}{2})} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \end{aligned} \quad (4.32)$$

führt. Als nächstes soll das Betragsintegral angegeben werden. Die Formel 3.241.4 aus Gradshteyn und Ryzhik liefert direkt

$$\int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{(k^2 + m^2)^\alpha} = \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-\alpha} \Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{2 \Gamma(\alpha)} \quad . \quad (4.33)$$

C) Das Basisintegral und die Idee der dimensional Regularisierung

Mit den Gln.(4.32,4.33) lautet das Gesamtergebnis für das Basisintegral im euklidischen Raum

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m^2)^\alpha} = \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-\alpha} \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\alpha)} \quad , \quad (4.34)$$

sowie im Minkowski-Raum

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^\alpha} = i(-1)^\alpha \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-\alpha} \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\alpha)} \quad . \quad (4.35)$$

Dieses Resultat gilt zunächst nur für ganzzahlige D mit $D < 2\alpha$. Die Gln.(4.31-4.33) wurden aber bereits für beliebiges komplexes D formuliert. Das erlaubt es, das Ergebnis jetzt als Funktion der komplexen Variablen D aufzufassen. Dabei sind insbesondere die D, α interessant, bei denen das ursprüngliche Integral divergierte. Beachtet man, daß α in unserem Fall nur ganzzahlige Werte annehmen kann, da der Nenner aus Kombinationen von Propagatoren resultiert, muß das Resultat also für beliebige natürliche α, D untersucht werden. Dabei ergeben sich aufgrund der Γ -Funktion gerade bei $\alpha - \frac{D}{2} = 0, -1, -2, \dots$ Pole erster Ordnung. Für $D = 4$ divergieren wie erwartet die Integrale mit $\alpha = 2, 1, 0, \dots$. Die Divergenz des ursprünglichen Integrals äußert sich in einem Pol des in beliebiger Dimension berechneten Integrals an der Stelle $D = 4$.

Das legt das folgende Schema zur Parametrisierung der Divergenzen von Loop-Integralen nahe.

1. Erweitere das Loop-Integral auf D Dimensionen, wobei D zunächst ganzzahlig und sinnvollerweise größer gleich zwei ist (damit im Minkowski-Raum wenigstens eine Raum-Dimension übrig bleibt).
2. Berechne das D -dimensionale Loop-Integral für alle D , für die es konvergiert.
3. Fasse das Ergebnis als Funktion $I(D)$ der Variablen D auf.
4. Setze diese Funktion in die komplexe Ebene fort. Sie wird im allgemeinen eine meromorphe Funktion mit Polen bei denjenigen ganzzahligen D sein, bei denen das Ausgangsintegral divergiert hätte.
5. Gewinne den physikalisch interessierenden Fall durch Laurent-Entwicklung der Funktion $I(D)$ um $D = 4$,

$$I(D) = \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{a_n}{(D-4)^n} \quad .$$

6. Entferne die Regularisierung durch Bilden des Grenzwerts $D \rightarrow 4$. Die ursprüngliche Divergenz manifestiert sich dann in Form eines Pols. Da im Grenzwert $D \rightarrow 4$ nur der Hauptteil von $I(D)$ sowie a_0 relevant ist, läßt man den Rest der Reihe sofort entfallen,

$$I_{phys} = \sum_{n=-N}^0 \frac{a_n}{(D-4)^n} \quad . \quad (4.36)$$

Das entspricht dem sofortigen Ausführen des Grenzwerts $m_s^2 \rightarrow \infty$ beim Verfahren von Pauli und Villars in all den Teilen des regularisierten Integrals, die in diesem Grenzwert verschwinden.

Dieses Schema nennt man dimensionale Regularisierung. Konsequenterweise sollte die Erweiterung der Loop-Integrale auf D Dimensionen direkt aus einer regularisierten Lagrangedichte folgen. Daher formuliert man die gesamte Theorie in D Dimensionen. Bevor wir dieses Konzept weiter verfolgen, soll aber das Werkzeug zur Berechnung realer Loop-Integrale zur Verfügung gestellt werden.

D) Einfachste Erweiterungen

Aus dem Basisintegral (4.35) kann man leicht realistische Loop-Integrale gewinnen. Zunächst berechnet man mit der Substitution $q = k + p$ ganz direkt

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + 2pk - m^2 + i\epsilon]^\alpha} &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q^2 - p^2 - m^2 + i\epsilon]^\alpha} \\ &= \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (p^2 + m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \quad . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Damit lassen sich sofort auch Tensoren behandeln,

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\nu}{[k^2 + 2pk - m^2 + i\epsilon]^\alpha} = \frac{-1}{2(\alpha - 1)} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + 2pk - m^2 + i\epsilon]^{\alpha-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2(\alpha-1)} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{i(-1)^{\alpha-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (p^2 + m^2)^{\frac{D}{2}+1-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha-1-\frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha-1)} \\
&= -\frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} p^\nu (p^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-\alpha} \frac{(\frac{D}{2}+1-\alpha)}{(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-1-\frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha-1)} .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung der Γ -Funktion,

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad ,$$

erhält man

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\nu}{[k^2 + 2pk - m^2 + i\epsilon]^\alpha} = -\frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} p^\nu (p^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha-\frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} . \quad (4.38)$$

Analog berechnet man Integrale mit mehreren k^ν im Zähler.

E) Realistische Loop-Integrale

Jetzt ist es nur noch ein kleiner Schritt zur Berechnung von realen Loop-Integralen. Diese setzen sich immer aus einer Anzahl von Propagatoren zusammen, in denen der Loop-Impuls umläuft,

$$I(D, \alpha, \beta, p^2, m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k-p)^2 - m_1^2 + i\epsilon]^\alpha [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]^\beta} .$$

An dieser Stelle benutzt man wieder eine Parameter-Darstellung des Nenners,

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{\alpha+\beta}} , \quad (4.39)$$

die man mit Hilfe des Integrals 3.381.4 aus Gradshteyn/Ryshik beweist,

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dv v^{\alpha-1} e^{-av} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty dw w^{\beta-1} e^{-bw} .$$

Einführen der 1,

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta(\lambda - v - w) ,$$

sowie die anschließende Substitution

$$x = \frac{w}{\lambda} , \quad y = \frac{v}{\lambda}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^\alpha b^\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \delta(1-x-y) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda(ax+by)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(1-x-y) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta) (ax+by)^{-(\alpha+\beta)} .
\end{aligned}$$

Dabei wurde wieder Formel 3.381.4 aus Gradsteyhn/Ryshik verwendet. Nach Auswerten der δ -Funktion erhält man gerade Gl.(4.39). Das gleiche Vorgehen führt zu der Darstellung

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \quad (4.40)$$

$$\cdot \frac{x_{n-1}^{\alpha_1-1} (x_{n-2} - x_{n-1})^{\alpha_2-1} \dots (1 - x_1)^{\alpha_n-1}}{[a_1 x_{n-1} + a_2 (x_{n-2} - x_{n-1}) + \dots + a_n (1 - x_1)]^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}$$

im Fall beliebig vieler Faktoren.

Unter Verwendung von Gl.(4.39) und Gl.(4.37) ergibt sich für das betrachtete Loop-Integral,

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k-p)^2 - m_1^2 + i\epsilon]^\alpha [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]^\beta}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[((k-p)^2 - m_1^2)x + (k^2 - m_2^2)(1-x) + i\epsilon]^{\alpha+\beta}}$$

$$= \frac{i(-1)^{\alpha+\beta}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} [p^2 x(x-1) + m_1^2 x + m_2^2 (1-x)]^{\frac{D}{2} - \alpha - \beta} . \quad (4.41)$$

Diese Formel läßt sich wieder leicht auf Integrale mit Impulsen im Zähler erweitern (entweder durch Differentiation nach dem externen Impuls p_ν oder durch Verwendung von Gl.(4.38)). Die beiden am häufigsten auftretenden Integrale seien hier angegeben:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\nu}{[(k-p)^2 - m_1^2 + i\epsilon]^\alpha [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]^\beta} \quad (4.42)$$

$$= \frac{i(-1)^{\alpha+\beta}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} p^\nu \int_0^1 dx x^\alpha (1-x)^{\beta-1} [p^2 x(x-1) + m_1^2 x + m_2^2 (1-x)]^{\frac{D}{2} - \alpha - \beta}$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\rho k^\nu}{[(k-p)^2 - m_1^2 + i\epsilon]^\alpha [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]^\beta} \quad (4.43)$$

$$= \frac{i(-1)^{\alpha+\beta}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\beta-1} \left\{ \Gamma(\alpha + \beta - \frac{D}{2}) p^\rho p^\nu x^{\alpha+1} \right.$$

$$\cdot [p^2 x(x-1) + m_1^2 x + m_2^2 (1-x)]^{\frac{D}{2} - \alpha - \beta}$$

$$- \Gamma(\alpha + \beta - 1 - \frac{D}{2}) \frac{g^{\rho\nu}}{2} x^{\alpha-1}$$

$$\left. \cdot [p^2 x(x-1) + m_1^2 x + m_2^2 (1-x)]^{\frac{D}{2} + 1 - \alpha - \beta} \right\} .$$

Eine Sammlung einiger weiterer im Zusammenhang mit der dimensional Regularisierung auftretender Integrale findet man im Anhang.

Damit sind die technischen Hilfsmittel zur Berechnung von beliebigen Loop-Integralen in D Dimensionen bereitgestellt worden. Bevor wir die (physikalische) Auswertung von dimensional regularisierten Integralen an einem Beispiel weiter verfolgen können, muß zunächst die Erweiterung der gesamten Theorie auf D Dimensionen vorgenommen werden.

4.3.2 Quantenelektrodynamik in D Dimensionen

A) Lorentz-Vektoren im Orts- und Spinraum

Im vorhergehenden Abschnitt sind die Integrations-technischen Verfahren vorgestellt worden, mit denen Loop-Integrale in beliebiger Dimension berechenbar sind. Eine Erweiterung der Dimension der Loop-Impulse hat aber noch weitere Konsequenzen für die Theorie: Sie muß insgesamt konsistent in D Dimensionen formuliert werden. Dabei wird stets eine Zeit-Dimension beibehalten, d.h. nur die Raum-Dimension variiert.

Das bedeutet zunächst, daß alle Lorentz-Vektoren und -Tensoren in D Dimensionen definiert werden müssen. Dabei werden alle Raum-Dimensionen genauso wie im gewöhnlichen 4-dimensionalen Minkowski-Raum behandelt. Der metrische Tensor hat daher die Form

$$(g^{\rho\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & & -1 \end{pmatrix} . \quad (4.44)$$

Als Kontraktion des metrischen Tensors mit sich selbst erhält man die Raumdimension D ,

$$g^\rho{}_\rho = \text{tr}[g^\rho{}_\nu] = D . \quad (4.45)$$

Dabei ist die Spur im Ortsraum gemeint.

Die nächst komplizierteren Objekte, die auf D Dimensionen übertragen werden müssen, sind die Spinor-Matrizen. Für die jetzt D γ -Matrizen muß man wieder die gleichen Kommutationsrelationen fordern,

$$[\gamma^\rho, \gamma^\nu] = 2g^{\rho\nu} . \quad (4.46)$$

Die Dimension des Spinorraumes (nicht zu verwechseln mit der des Orts- und Impulsraumes – in vier Raum-Zeit-Dimensionen ist auch der Spinorraum vierdimensional) schlägt sich bei allen Spuren von Matrizen im Spinorraum nieder,

$$\text{tr}[1_S] = f(D) \quad (4.47)$$

$$\text{tr}[\gamma^\rho] = 0 \quad (4.48)$$

$$\text{tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu] = f(D)g^{\rho\nu} \quad (4.49)$$

$$\text{tr}[\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = f(D)[g^{\rho\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\rho\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\rho\beta} g^{\nu\alpha}] , \quad (4.50)$$

wobei die genau Form von $f(D)$ in weiteren unerheblich ist, wie sich zeigen wird. Lediglich $f(4) = 4$ geht in physikalisch relevante Größen ein. 1_S meint hier die Einheitsmatrix im Spinorraum, entsprechend tr die Spur im Spinorraum. Wie in vier Dimensionen verschwindet die Spur von ungeradzahlig vielen γ -Matrizen immer. Mit Hilfe der Kommutationsrelation (4.46) weist man leicht Relationen wie

$$\gamma^\rho \gamma_\rho = D 1_S \quad (4.51)$$

$$\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\rho = (2 - D)\gamma^\nu \quad (4.52)$$

nach.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß eine direkte Übertragung von

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

in beliebige Dimension nicht möglich ist, da diese Struktur charakteristisch für vier Dimensionen ist. Das führt zu einigen Konsequenzen im Fall von Theorien, die γ^5 beinhalten, worauf hier aber nicht eingegangen werden soll.

Der Vollständigkeit halber sollen die Relationen (4.44)-(4.52) auch noch einmal für euklidische Metrik angegeben werden. Dann gibt es keinen Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Komponenten und die γ -Matrizen sind antihermitesch.

$$\begin{aligned} (\delta^{\rho\nu}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & & 1 \end{pmatrix} \\ \delta^{\rho\rho} &= \text{tr}[\delta^{\rho\nu}] = D \\ [\gamma_e^\rho, \gamma_e^\nu] &= -2\delta^{\rho\nu} \\ \text{tr}[\gamma_e^\rho] &= 0 \\ \text{tr}[\gamma_e^\rho\gamma_e^\nu] &= -f(D)\delta^{\rho\nu} \\ \gamma_e^\rho\gamma_e^\rho &= -D 1_S \\ \gamma_e^\rho\gamma_e^\nu\gamma_e^\rho &= -(2-D)\gamma_e^\nu \end{aligned}$$

B) Die Lagrangedichte in D Dimensionen

Wie ändert sich nun die Lagrangedichte beim Übergang zu D Raum-Zeit-Dimensionen?

Um darauf eine Antwort zu geben, muß man die physikalische Dimension der verschiedenen in die Lagrangedichte eingehenden Größen untersuchen. Der Ausgangspunkt dazu ist die Dimensionslosigkeit der Wirkung in den Maßeinheiten $\hbar = c = 1$,

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(x) \quad .$$

Im System $\hbar = c = 1$ gibt es überhaupt nur eine physikalische Dimension, die Energie. Länge und Zeit sind von der Dimension $1/\text{Energie}$. Daher ist in D Raum-Zeit-Dimensionen die physikalische Dimension der Lagrangedichte

$$\text{Dim}[\mathcal{L}] = E^D \quad .$$

Die freien Lagrangedichten von Elektronen und Photonen müssen beim Übergang zu D Dimensionen unverändert bleiben, damit die aus ihnen resultierenden freien Propagatoren bis auf die Dimension der Lorentz-Vektoren gleich bleiben. Die Regularisierung wird ja außerdem erst für Terme benötigt, die aus der Wechselwirkung resultieren. Daraus bekommt man sofort

$$\text{Dim}[\hat{\psi}(i\hat{\not{D}} - m)\hat{\psi}] = E^D \quad \Rightarrow \quad \text{Dim}[\hat{\psi}] = E^{\frac{D-1}{2}} \quad (4.53)$$

$$\text{Dim}[\partial_\rho \hat{A}_\nu \partial^\rho \hat{A}^\nu] = E^D \quad \Rightarrow \quad \text{Dim}[\hat{A}^\nu] = E^{\frac{D-2}{2}} \quad . \quad (4.54)$$

Der Wechselwirkungsterm $\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi}$ hat daher die Dimension

$$Dim[\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi}] = E^{\frac{3D-4}{2}} \neq E^D \quad .$$

Daher ist die Kopplungskonstante im allgemeinen dimensionsbehaftet. Will man sie nach wie vor durch die Elektronenladung charakterisieren, deren physikalische Dimension verschwindet,

$$Dim[e] = Dim[\sqrt{4\pi\alpha}] = E^0 \quad ,$$

muß man zusätzlich eine Größe M von der Dimension der Energie in den Wechselwirkungsterm einfügen,

$$\mathcal{L}_{int} = - e M^{2-\frac{D}{2}} \hat{\psi}(x) \hat{A}(x) \hat{\psi}(x) \quad . \quad (4.55)$$

Auch die dimensionale Regularisierung erzeugt wie das Verfahren von Pauli und Villars zwingend eine Massenskala ! Während diese Tatsache bei Theorien mit massiven Fermionen relativ bedeutungslos ist, weil die Regularisierungsmasse nicht in regularisierte Ausdrücke eingeht, kann man bei masselosen Theorien nicht auf diese Massenskala verzichten (siehe später).

Damit lautet die regularisierte Lagrangedichte insgesamt

$$\mathcal{L}_{reg} = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\rho\nu} \hat{F}^{\rho\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\nu \hat{A}^\nu)^2 + \frac{\mu^2}{2} \hat{A}_\nu \hat{A}^\nu + \hat{\psi} (i\hat{\not{D}} - m - e M^{2-\frac{D}{2}} \hat{A}) \hat{\psi} \quad . \quad (4.56)$$

Diese Lagrangedichte hat exakt die gleiche Form wie die ursprüngliche, nur daß als Kopplungskonstante in den Feynman-Regeln jetzt immer $e M^{2-\frac{D}{2}}$ auftritt. Sie erhält daher automatisch die Eichinvarianz der Theorie.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen zur dimensionalen Regularisierung soll nun am Beispiel der Vakuumpolarisation in niedrigster Ordnung die Methode noch einmal in der Anwendung gezeigt werden. Dabei kann insbesondere der Vergleich mit dem Verfahren von Pauli und Villars gezogen werden.

4.3.3 Die Vakuumpolarisation $\omega^{(1)}$ in dimensionaler Regularisierung

Zur Demonstration der dimensionalen Regularisierung soll in diesem Abschnitt noch einmal die Vakuumpolarisation in niedrigster Ordnung von α betrachtet werden. Die aus der Lagrangedichte (4.56) resultierenden Feynman-Regeln liefern

$$\begin{aligned} \omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) &= -e^2 M^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} tr \left\{ \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} \gamma_\rho \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma_\nu \right\} \\ &= -e^2 M^{4-D} f(D) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(m^2 - p^2 - pk) g_{\rho\nu} + 2p_\rho p_\nu + p_\rho k_\nu + k_\rho p_\nu}{[(p+k)^2 - m^2][p^2 - m^2]} \quad , \end{aligned}$$

wobei $f(D)$ wieder die Spurfunktion im Spinorraum ist. Die Verwendung der Integrale (4.41-4.43) sowie Gl.(4.45) ergibt direkt

$$\begin{aligned} \omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) &= \frac{-i e^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{4-D} f(D) \int_0^1 dx \left\{ g_{\rho\nu} \left[m^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) - k^2 x^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{D}{2} [k^2 x(x-1) + m^2] \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) + k^2 x \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2k_\rho k_\nu x^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) - g_{\rho\nu} [k^2 x(x-1) + m^2] \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\
& -2k_\rho k_\nu x \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left. \vphantom{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)} \right\} [k^2 x(x-1) + m^2]^{\frac{D}{2}-2} \\
= & \frac{-2ie^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{4-D} f(D) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) [k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \\
& \cdot \int_0^1 dx x(1-x) [k^2 x(x-1) + m^2]^{\frac{D}{2}-2} .
\end{aligned}$$

Die Tensorstruktur von $\omega_{\rho\nu}$ entsteht automatisch,

$$\omega_{\rho\nu,reg}^{(1)}(k) = -i [k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \omega_{reg}^{(1)}(k^2) . \quad (4.57)$$

In die Ableitungen der Ward-Takahashi Identitäten gingen nur Operationen ein, die in D Dimensionen genauso wie in vier durchführbar sind, wie zum Beispiel Shifts von Integrationsvariablen. Auch die verwendeten Kommutationsrelationen der Feldoperatoren sind für alle Dimensionen gleich. Daher hängen die Ward-Takahashi Identitäten nicht von der Dimension des Raumes ab.

Das verbleibende Integral

$$\omega_{reg}^{(1)}(k^2) = \frac{2e^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{M}{m}\right)^{4-D} f(D) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) \left[1 + x(x-1) \frac{k^2}{m^2}\right]^{\frac{D}{2}-2}$$

ließe sich zwar mit Hilfe von Gradsteyhn/Ryshik 3.254.1 für beliebiges D berechnen, was aber nicht üblich ist. Vielmehr führt man konventionsgemäß an dieser Stelle die Laurent-Entwicklung um $D = 4$ aus. Dazu benötigt man die Entwicklungen aller D -abhängigen Funktionen um $D = 4$,

$$\begin{aligned}
f(D) &= 4 + f'(4)(D-4) + \mathcal{O}((D-4)^2) \\
\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{2-\frac{D}{2}} &= 1 + \left(2 - \frac{D}{2}\right) \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}((4-D)^2) \\
\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) &= \frac{2}{4-D} - \gamma + \mathcal{O}(4-D) \quad , \quad \gamma = 0.5772\dots \\
\left[1 + x(x-1) \frac{k^2}{m^2}\right]^{\frac{D}{2}-2} &= 1 - \left(2 - \frac{D}{2}\right) \ln\left[1 + x(x-1) \frac{k^2}{m^2}\right] + \mathcal{O}((4-D)^2) .
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
\omega_{reg}^{(1)}(k^2) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \left(4 - f'(4)(4-D) + \mathcal{O}((4-D)^2)\right) \left(\frac{2}{4-D} - \gamma + \mathcal{O}((4-D))\right) \\
&\quad \cdot \left(1 + \left(2 - \frac{D}{2}\right) \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}((4-D)^2)\right) \\
&\quad \cdot \left[\frac{1}{6} - \left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left[1 + x(x-1) \frac{k^2}{m^2}\right] + \mathcal{O}((4-D)^2)\right] \\
&= \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma - \frac{1}{2} f'(4) + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) \right. \\
&\quad \left. - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left[1 + x(x-1) \frac{k^2}{m^2}\right] + \mathcal{O}(4-D) \right\} .
\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral ist bereits früher berechnet worden,

$$\omega_{reg}^{(1)}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma - \frac{1}{2}f'(4) + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) - \left[\frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \left(\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccot}\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right] \right\} . \quad (4.58)$$

Dieses Ergebnis entspricht Gl.(4.14) im Rahmen der Pauli-Villars Regularisierung. Im Grenzwert $D \rightarrow 4^-$ erhält man die ursprüngliche Divergenz zurück,

$$\omega_{reg}^{(1)}(k^2) \xrightarrow{4-D=\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{3\pi} \frac{2}{\epsilon} \rightarrow \infty . \quad (4.59)$$

Die regularisierte Divergenz unterscheidet sich von der beim Pauli-Villars Verfahren um zusätzliche konstante Terme,

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \hat{=} \frac{2}{4-D} - \gamma - \frac{1}{2}f'(4) + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) . \quad (4.60)$$

Diese sind aber ebenfalls in $\omega_{reg}^{(1)}(k^2 = 0)$ enthalten,

$$\omega_{reg}^{(1)}(k^2 = 0) = \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma - \frac{1}{2}f'(4) + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) \right\} . \quad (4.61)$$

Außerdem ist auch die Form $\ln(\Lambda^2/m^2)$ der Divergenz beim Pauli-Villars Verfahren nur die Folge einer zusammenfassenden Definition. Zur Form der Divergenz im Rahmen der dimensional Regularisierung seien hier noch ein paar Anmerkungen gemacht. Da der aus der Dimension des Spinraumes resultierende Term $f'(4)$ in physikalischen Größen sowieso nicht auftritt, setzt man meist $f(4) = 4$, sodaß dieser Term entfällt. Im Falle massiver Fermionen kann man mit der Regularisierungsmasse ähnlich verfahren. Man wählt

$$4\pi M^2 = m^2 ,$$

sodaß der entsprechende Term eliminiert wird. Mit diesen Vereinfachungen bleibt dann praktisch nur noch die eigentliche Divergenz übrig. Bei der Diskussion von masselosen Fermionen kann die Regularisierungsmasse jedoch nicht eliminiert werden. Sie wird als die zunächst einzige Massenskala in der Theorie in allen Funktionen benötigt.

Es sei angemerkt, daß sich Regularisierungen generell bei der Darstellung der Divergenz eines Integrals um additive Konstanten unterscheiden können.

Damit stehen zwei zunächst völlig verschiedene Regularisierungsverfahren zur Verfügung, die es erlauben, mit partiell divergenten Loop-Integralen in eichinvarianter Weise umzugehen. Beide führen zu ähnlichen Darstellungen der Divergenz. Beide führen eine zusätzliche Massenskala in die Theorie ein.

Im weiteren wird stets angenommen, daß eines dieser Verfahren verwendet wird, auch ohne daß dies explizit angegeben wird. Bei expliziten Rechnungen wird im folgenden auf die dimensionale Regularisierung zurückgegriffen, da sie mit Hilfe der Integrale (4.41-4.43) und den Erweiterungen aus dem Anhang die direkte Auswertung von Loop-Integralen gestattet.

4.4 Anwendungen in erster und zweiter Ordnung

In diesem Abschnitt soll die Technik der dimensional Regularisierung auf eine Reihe von Diagrammen erster und zweiter Ordnung angewandt werden. Dabei werden für die gewöhnliche, d.h. massive, QED die Selbstenergie erster Ordnung sowie die Vertexkorrektur erster Ordnung für verschwindenden Photon-Impuls berechnet. Im masselosen Fall sollen auch verschiedene Beiträge zweiter Ordnung ausgewertet werden.

4.4.1 Die Selbstenergie massiver Fermionen in erster Ordnung

Zur Selbstenergie erster Ordnung trägt nur der Graph



bei. Gemäß der üblichen Definition der Selbstenergie lautet das zugehörige Feynman-Integral

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma^{(1)}(p) &= (-ie)^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} D_{\rho\nu}^{(0)}(k) \gamma^\rho G^{(0)}(p-k) \gamma^\nu \\
 &= -e^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[g^{\rho\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} + i\epsilon} \right] \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \cdot \gamma^\rho \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu .
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Davon soll zunächst der erste Term, der gerade der Feynman-Eichung entspricht, berechnet werden,

$$\Sigma_F^{(1)}(p) = -ie^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)(\not{p} - \not{k}) + Dm}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - \mu^2 + i\epsilon]} ,$$

wobei die Gln.(4.51,4.52) benutzt wurden. Verwenden der Standard-Integrale (4.41,4.42) ergibt

$$\begin{aligned}
 \Sigma_F^{(1)}(p) &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\
 &\quad \cdot \int_0^1 dx \left(Dm + (2-D)(1-x)\not{p} \right) \left[x(x-1) \frac{p^2}{m^2} + x + (1-x) \frac{\mu^2}{m^2} \right]^{\frac{D}{2}-2} .
 \end{aligned}$$

Jetzt entwickelt man unter dem Integral um $D = 4$,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_F^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\
 &\quad \cdot \left\{ Dm + \frac{2-D}{2} \not{p} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4-D}{2} \int_0^1 dx \left(4m - 2(1-x)\not{p} \right) \ln \left[x(x-1) \frac{p^2}{m^2} + x + (1-x) \frac{\mu^2}{m^2} \right] \right\} .
 \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral kann man mit der Substitution

$$y = x + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)$$

lösen,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx (4m - 2(1-x)\not{p}) \ln \left[x(x-1) \frac{p^2}{m^2} + x + (1-x) \frac{\mu^2}{m^2} \right] \\ &= (4m - \not{p}) \ln \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \\ &\quad + \not{p} \left\{ \frac{m^2}{p^2} \ln \left(\frac{m^2}{p^2} \right) - \frac{\mu^2}{p^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{p^2} \right) - \frac{m^2}{p^2} + \frac{\mu^2}{p^2} \right\} \\ &\quad + \left[2m - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{p^2} + 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right) \not{p} \right] \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\frac{m^2}{p^2} + 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right) \ln \left(\frac{m^2}{p^2} \right) - \left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{p^2} \right) - 4 \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \ln \left[\frac{m^2}{p^2} - 1 + \frac{\mu^2}{p^2} - \left(\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \ln \left[\frac{m^2}{p^2} - 1 + \frac{\mu^2}{p^2} + \left(\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Jetzt kann man zunächst alle μ^2 , die nicht unter einem Logarithmus stehen, gegen Null gehen lassen und die verschiedenen Terme zusammenfassen,

$$\begin{aligned} I &= 4m \left\{ -2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{p^2} - 1 \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \ln \left[\frac{m^2}{p^2} - 1 + \frac{\mu^2}{p^2} - \left(\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \left[\frac{m^2}{p^2} - 1 + \frac{\mu^2}{p^2} + \left(\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \right\} \\ &\quad + \not{p} \left\{ 2 + \frac{m^2}{p^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \ln \left[\frac{m^2}{p^2} - 1 + \frac{\mu^2}{p^2} - \left(\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \left[\frac{m^2}{p^2} - 1 + \frac{\mu^2}{p^2} + \left(\left(\frac{m^2}{p^2} - 1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die Logarithmen kann man noch weiter zusammenfassen,

$$\begin{aligned} I &= 4m \left\{ -2 - \left(\frac{m^2}{p^2} - 1 \right) \ln \frac{1}{2} \left[1 - \frac{p^2}{m^2} + \frac{\mu^2}{m^2} - \left(\left(1 - \frac{p^2}{m^2} - \frac{\mu^2}{m^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2 p^2}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\ &\quad + \not{p} \left\{ 2 + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \ln \frac{1}{2} \left[1 - \frac{p^2}{m^2} + \frac{\mu^2}{m^2} - \left(\left(1 - \frac{p^2}{m^2} - \frac{\mu^2}{m^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2 p^2}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck kann man für beliebiges p^2 den Grenzwert $\mu \rightarrow 0$ ausführen,

$$I = 4m \left\{ -2 + \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right\} + \not{p} \left\{ 2 + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right\}.$$

Auch an der Stelle $p^2 = m^2$ ist dieser Ausdruck endlich. Seine Ableitung nach p^ρ divergiert dagegen an dieser Stelle. Zu ihrer Berechnung darf daher der Grenzwert $\mu \rightarrow 0$ nur da ausgeführt werden, wo keine Divergenzen entstehen. Für die Ableitung von I erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial p^\rho} &= \gamma_\rho \left\{ 2 + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right\} \\ &+ \frac{p_\rho}{p^2} \left\{ \not{p} \left[-2 - 4 \frac{m^2}{p^2} - 4 \frac{m^4}{p^4} \ln \frac{1}{2} \left[1 - \frac{p^2}{m^2} + \frac{\mu^2}{m^2} - \left(\left(1 - \frac{p^2}{m^2} - \frac{\mu^2}{m^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2 p^2}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \right. \\ &\left. + 4m \left[2 + 2 \frac{m^2}{p^2} \ln \frac{1}{2} \left[1 - \frac{p^2}{m^2} + \frac{\mu^2}{m^2} - \left(\left(1 - \frac{p^2}{m^2} - \frac{\mu^2}{m^2} \right)^2 - 4 \frac{\mu^2 p^2}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Sigma_F^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \left[\frac{2}{4-D} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right) \right] (4m - \not{p}) \right. \\ &+ 4m \left[\frac{3}{2} - \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \\ &\left. - \not{p} \left[1 + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von dem mit Pauli-Villars Regularisierung berechneten außer in der Darstellung der Divergenz um

$$\frac{\alpha}{8\pi} (4m + \not{p}),$$

was im Rahmen der Uneindeutigkeit der dimensional Regularisierung liegt.

Für die Ableitung der Selbstenergie ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_\rho} \Sigma_F^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \gamma^\rho \left[-\frac{2}{4-D} + \gamma - \ln \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right) - 1 - \frac{m^2}{p^2} - \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \right. \\ &+ \frac{p^\rho}{p^2} \left[\not{p} \left(2 + 4 \frac{m^2}{p^2} + 4 \frac{m^4}{p^4} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right) \right. \\ &\left. \left. + 4m \left(-2 - 2 \frac{m^2}{p^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

und an der Stelle $p^2 = m^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_\rho} \Sigma_F^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \gamma^\rho \left[-\frac{2}{4-D} + \gamma - \ln \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right) - 2 \right] \right. \\ &\left. + \frac{p^\rho}{m} \left[\not{p} \left(6 + 2 \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right) - 8 - 4 \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Jetzt soll der zweite Term aus Gl.(4.62) berechnet werden.

$$\begin{aligned} \Sigma_{Rest}^{(1)}(p) &= -ie^2 (M^2)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1-\lambda}{\lambda} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k} + m)\not{k}}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}][k^2 - \mu^2]} \\ &= -ie^2 (M^2)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1-\lambda}{\lambda} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k}(p^2 - m^2) - k^2(\not{p} - m) - \not{k}(p^2 - 2pk + k^2 - m^2)}{[(p-k)^2 - m^2][k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}][k^2 - \mu^2]}. \end{aligned}$$

Der letzte Summand im Zähler ist ungerade in k und trägt daher nichts zum Integral bei. Die Auswertung der beiden verbleibenden Terme ergibt

$$\begin{aligned} \Sigma_{Rest}^{(1)}(p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ &\cdot \int_0^1 dx \left\{ (\not{p}-m) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left[x(x-1) \frac{p^2}{m^2} + x + (1-x) \frac{\mu^2}{m^2} \right]^{\frac{D}{2}-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2-m^2}{m^2} \not{p} \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) (1-x) \int_0^x dy \left[x(x-1) \frac{p^2}{m^2} + x + (1-x) \frac{\mu^2}{m^2} \right]^{\frac{D}{2}-2} \right\}, \end{aligned}$$

wobei Gl.(4.40) benutzt wurde. Der zweite Summand ist konvergent und kann gleich für $D=4$ berechnet werden. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma_{Rest}^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1-\lambda}{\lambda} \left\{ (\not{p}-m) \left[-\frac{2}{4-D} + \gamma - \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) - 2 + \left(1-\frac{m^2}{p^2}\right) \ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2-m^2}{2p^2} \not{p} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right) - \frac{\ln(\lambda)}{1-\lambda} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Damit ist die Selbstenergie in erster Ordnung vollständig bestimmt. Wie zu erwarten, hängt das Ergebnis von der gewählten Eichung ab.

4.4.2 Die Vertexkorrektur massiver Fermionen in erster Ordnung

Zur Vertexkorrektur erster Ordnung trägt nur der Graph



bei. Gemäß der Definition der Vertexkorrektur als Kern der irreduziblen (2,1)-Punkt-Funktion,

$$\Lambda_\rho(p, k) = -i e \left[\gamma_\rho + \Gamma_\rho(p, k) \right], \quad (4.67)$$

lautet sein Loop-Integral in Feynman-Eichung

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{(1)}(p, k) &= (-ie)^2 (M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} D_{\tau\nu}^{(0)}(k) \gamma^\tau G^{(0)}(q+k) \gamma_\rho G^{(0)}(q+p) \gamma^\nu \\ &= -ie^2 (M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 - \mu^2} \gamma^\nu \frac{\not{q} + \not{k} + m}{(q+k)^2 - m^2} \gamma_\rho \frac{\not{q} + \not{p} + m}{(q+p)^2 - m^2} \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Angesichts der Komplexität der Spinorstruktur soll hier nur der für die Renormierung und die Ward-Identität relevante Fall $p=k$ berechnet werden,

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{(1)}(p, p) &= -ie^2 (M^2)^{2-\frac{D}{2}} \\ &\cdot \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{(D-2)\gamma_\rho}{[(q+p)^2 - m^2][q^2 - \mu^2]} + 2 \frac{(q_\rho + p_\rho)[(2-D)(\not{q} + \not{p}) + Dm]}{[(q+p)^2 - m^2]^2 [q^2 - \mu^2]} \right\}. \end{aligned}$$

Anwenden der Standard-Integrale ergibt

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{(1)}(p, p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \\ &\cdot \int_0^1 dx \left\{ (D-2)\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\gamma_\rho(1-x) \left[x(x-1)\frac{p^2}{m^2} + x + (1-x)\frac{\mu^2}{m^2} \right]^{\frac{D}{2}-2} \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \frac{p_\rho x(x-1) \left[(D-2)\not{p}(x-1) + Dm \right]}{\left[x(x-1)\frac{p^2}{m^2} + x + (1-x)\frac{\mu^2}{m^2} \right]^{3-\frac{D}{2}}} \right\} . \end{aligned}$$

Während der erste Term UV-divergent aber IR-konvergent ist, ist der zweite Term UV-konvergent und IR-divergent. Daher kann an dieser Stelle im ersten Term $\mu \rightarrow 0$ und im zweiten $D \rightarrow 4$ genommen werden. Man erhält insgesamt (nach sorgfältiger Diskussion des Falles $p^2 = m^2$)

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{(1)}(p, p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \gamma_\rho \left[\frac{2}{4-D} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) + 1 + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^4}{p^4} - 1\right) \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_\rho}{p^2} \left[\not{p} \left(-2 - 4\frac{m^2}{p^2} - 2\frac{m^4}{p^4} \ln\left(\frac{(m^2 - p^2)^2 + m^2\mu^2}{m^4}\right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4m \left(2 + \frac{m^2}{p^2} \ln\left(\frac{(m^2 - p^2)^2 + m^2\mu^2}{m^4}\right) \right) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (4.69)$$

Der Vergleich mit Gl.(4.64) zeigt, daß die Ward-Identität (3.16) von den regularisierten Funktionen in erster Ordnung erfüllt wird,

$$\frac{\partial}{\partial p^\rho} \Sigma^{(1)}(p) = -\Gamma_\rho^{(1)}(p, p) \quad . \quad (4.70)$$

Eine weitere Diskussion der Vertexkorrektur soll hier nicht vorgenommen werden.

4.4.3 Die Vakuumpolarisation der masselosen QED in erster Ordnung

Jetzt sollen einige Graphen der masselosen QED diskutiert werden. Die entsprechenden Beiträge erster Ordnung kann man entweder aus dem Grenzwert $m \rightarrow 0$ der massiven Theorie gewinnen (unter Beachtung der Tatsache, daß dann alle Integrationen für $p^2 > m^2$ auszuführen sind) oder direkt berechnen. Letzteres hat den Vorteil, daß eine Auswertung in beliebiger Dimension möglich ist, was für die Diskussion von Graphen höherer Ordnung benötigt wird. Außerdem kann in diesem Fall von vornherein $\mu \rightarrow 0$ genommen werden, da $p^2 = 0$ sowie so eine kritische Stelle ist und, wie noch zu behandeln sein wird, nicht zur Renormierung herangezogen wird.

Man startet also mit dem Integral

$$\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) = -(-ie)^2 (M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma_\rho \frac{i}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}-\not{k}} \right\} \quad . \quad (4.71)$$

Auswerten der Spuren mit der Konvention $f(D) = 4$ und den Standard-Integralen (4.41-4.43) ergibt unter Beachtung von Gl.(4.45) für beliebiges D

$$\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) = -i \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) [k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \int_0^1 dx x^{\frac{D}{2}-1} (1-x)^{\frac{D}{2}-1} .$$

Das verbleibende Integral läßt sich ganz allgemein lösen,

$$\int_0^1 dx x^\alpha (1-x)^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} , \quad (4.72)$$

und man erhält letztlich für beliebiges D

$$\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) = -i \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) [k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D)} , \quad (4.73)$$

bzw

$$\omega^{(1)}(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D)} . \quad (4.74)$$

Schließlich kann man um $D = 4$ entwickeln ($\eta = 4 - D$)

$$\omega^{(1)}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{2}{\eta} + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{k^2}\right) + \frac{5}{3} - \gamma \right\} . \quad (4.75)$$

4.4.4 Die Selbstenergie der masselosen QED in erster Ordnung

In beliebiger Eichung ergibt sich die Selbstenergie der masselosen QED in erster Ordnung aus dem Feynman-Integral

$$\Sigma^{(1)}(p) = -ie^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\rho(\not{p}-\not{k})\gamma_\nu}{(p-k)^2} \frac{1}{k^2} \left[g^{\rho\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] . \quad (4.76)$$

Auswerten mit den Standard-Integralen (4.41-4.43) ergibt unter Beachtung von Gl.(4.52)

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{p^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \not{p} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left[2 - D - 2\frac{1-\lambda}{\lambda} \right] x^{\frac{D}{2}-2} (1-x)^{\frac{D}{2}-1} \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \frac{1-\lambda}{\lambda} x^{\frac{D}{2}-1} (1-x)^{\frac{D}{2}-2} \right\} \\ &= \frac{\alpha \not{p}}{4\pi} \left(\frac{4\pi M^2}{p^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)}{\Gamma(D-1)} \left\{ \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left[4 - D - \frac{2}{\lambda} \right] - \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \left[2 - \frac{2}{\lambda} \right] \right\} . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Funktionalgleichung der Γ -Funktion erhält man schließlich für beliebiges D

$$\Sigma^{(1)}(p) = -\frac{\alpha \not{p}}{2\pi\lambda} \left(\frac{4\pi M^2}{p^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D-1)} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) . \quad (4.77)$$

Es ergibt sich die erstaunliche Tatsache, daß die Selbstenergie in erster Ordnung in Landau-Eichung für alle D verschwindet. Die Entwicklung um $D = 4$ führt auf ($\eta = 4 - D$)

$$\Sigma^{(1)}(p) = -\frac{\alpha \not{p}}{4\pi\lambda} \left\{ \frac{2}{\eta} + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{p^2}\right) + 1 - \gamma \right\} . \quad (4.78)$$

4.4.5 Die Vertexkorrektur der masselosen QED in erster Ordnung

Die Vertexkorrektur soll von vornherein nur in Feynman-Eichung diskutiert werden. Dann lautet ihr Loop-Integral erster Ordnung

$$\Gamma_\rho^{(1)}(p, k) = -ie^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\nu(\not{q} + \not{k})\gamma_\rho(\not{q} + \not{p})\gamma^\nu}{(q+k)^2(q+p)^2q^2}, \quad (4.79)$$

was auf

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{(1)}(p, k) = & -ie^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \gamma_\rho \left[(D-2)q^2 + 2\not{p}\not{q} + 2\not{q}\not{k} + 2\not{p}\not{k} \right. \right. \\ & \left. \left. - (4-D)(\not{q}\not{p} + \not{k}\not{q} + \not{k}\not{p}) \right] \right. \\ & + q_\rho \left[-2(D-2)\not{q} - 4\not{k} - 2(D-4)\not{p} \right] \\ & + p_\rho \left[-4\not{q} - 4\not{k} \right] \\ & \left. + k_\rho \left[2(4-D)(\not{q} + \not{p}) \right] \right\} \cdot \frac{1}{(q+k)^2(q+p)^2q^2} \end{aligned}$$

führt. Auch hier verbietet der Aufwand eine vollständige Berechnung für beliebiges D . Daher soll zunächst in allen konvergenten Termen $D = 4$ gesetzt werden,

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{(1)}(p, k) = & -ie^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left\{ \gamma_\rho \left[(D-2)q^2 + 2\not{p}\not{q} + 2\not{q}\not{k} + 2\not{p}\not{k} \right] \right. \\ & \left. + q_\rho \left[-2(D-2)\not{q} - 4\not{k} \right] + p_\rho \left[-4\not{q} - 4\not{k} \right] \right\} \\ & \cdot \frac{1}{(q+k)^2(q+p)^2q^2}. \end{aligned}$$

Dann bleibt nach einigen Umformungen ($\eta = 4 - D$)

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho^{(1)}(p, k) = & \frac{\alpha}{2\pi} (4\pi M^2)^{2-\frac{D}{2}} \\ & \cdot \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \gamma_\rho \left[\frac{2}{\eta} - \gamma - 3 \right. \right. \\ & \left. \left. - \ln \left[y^2(k-p)^2 + y(p^2 - k^2 + 2pkx - 2p^2x) + p^2x(x-1) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(x-1)\not{p}\not{k}}{y^2(k-p)^2 + y(p^2 - k^2 + 2pkx - 2p^2x) + p^2x(x-1)} \right] \right. \\ & + 2p_\rho \left[\frac{y^2(\not{p} - \not{k}) + y(x\not{k} + (1-2x)\not{p}) + (1-x)\not{k} + x(x-1)\not{p}}{y^2(k-p)^2 + y(p^2 - k^2 + 2pkx - 2p^2x) + p^2x(x-1)} \right] \\ & \left. \left. + 2k_\rho \left[\frac{y^2(\not{k} - \not{p}) + y(x\not{p} - \not{k})}{y^2(k-p)^2 + y(p^2 - k^2 + 2pkx - 2p^2x) + p^2x(x-1)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Auch auf die weitere Auswertung dieses Ausdrucks soll verzichtet werden. Lediglich den Fall $p = k$ kann man jetzt schnell angeben,

$$\Gamma_\rho^{(1)}(p, p) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \gamma_\rho \left[\frac{2}{\eta} + \ln \left(\frac{4\pi M^2}{p^2} \right) - \gamma + 1 \right] - 2 \frac{p_\rho \not{p}}{p^2} \right\}. \quad (4.80)$$

Man stellt sofort fest, daß die Ward-Identität (3.16) auch hier erfüllt ist.

4.4.6 Die Vakuumpolarisation der masselosen QED in zweiter Ordnung

Zur Vakuumpolarisation zweiter Ordnung tragen die folgenden drei Graphen bei:


(4.81)

Die ersten beiden Diagramme liefern den gleichen Beitrag. Dieser soll als erstes berechnet werden. Das zugehörige Feynman-Integral kann man auf die Selbstenergie erster Ordnung zurückführen,

$$\omega_{1,\rho\nu}^{(2)}(k) = -(-ie)^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \gamma_\rho \frac{i}{\not{p}} (-i)\Sigma^{(1)}(p) \frac{i}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}-\not{k}} \right\}. \quad (4.82)$$

Die Selbstenergie wird aber jetzt für beliebige Dimension benötigt, da im allgemeinen Diagramme höherer Ordnung Pole von mehr als erster Ordnung bei $D = 4$ aufweisen werden. Eine konsistente Behandlung der entsprechenden Funktionen erfordert eine Entwicklung der Beiträge von Subgraphen bis zu der Ordnung des Poles des Gesamtgraphen. Einsetzen von Gl.(4.77) führt auf

$$\omega_{1,\rho\nu}^{(2)}(k) = -\frac{\alpha^2}{\lambda} (4\pi M^4)^{2-\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)}{\Gamma(D-1)} (2-D)\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \frac{\gamma_\rho \not{p} \gamma_\nu (\not{p}-\not{k})}{(p-k)^2 (p^2)^{3-\frac{D}{2}}} \right\}.$$

Das Impuls-Integral läßt sich leicht auswerten,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \text{tr} \left\{ \frac{\gamma_\rho \not{p} \gamma_\nu (\not{p}-\not{k})}{(p-k)^2 (p^2)^{3-\frac{D}{2}}} \right\} &= 4 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2p_\rho p_\nu + p_\rho k_\nu + k_\rho p_\nu - g_{\rho\nu}(p^2 + pk)}{(p-k)^2 (p^2)^{3-\frac{D}{2}}} \\ &= \frac{4i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(k^2)^{D-4}}{\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right)} \int_0^1 dx x^{D-3} (1-x)^{\frac{D}{2}-1} \\ &\quad \cdot \left\{ [k^2 g_{\rho\nu} - 2k_\rho k_\nu] \Gamma(4-D) + k^2 g_{\rho\nu} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \Gamma(3-D) \right\} \\ &= \frac{4i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(k^2)^{D-4}}{\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right)} \frac{\Gamma(D-2)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}D-2\right)} \\ &\quad \cdot \left\{ [k^2 g_{\rho\nu} - 2k_\rho k_\nu] \Gamma(4-D) + k^2 g_{\rho\nu} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \Gamma(3-D) \right\}, \end{aligned}$$

so daß man insgesamt

$$\begin{aligned} \omega_{1,\rho\nu}^{(2)}(k) &= -\frac{i\alpha^2}{2\pi^2\lambda} \left(\frac{4\pi M^2}{k^2}\right)^{4-D} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)}{\Gamma(D-1)} \frac{(2-D)}{(4-D)} \frac{\Gamma(D-2)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}D-2\right)} \\ &\quad \cdot \left\{ [k^2 g_{\rho\nu} - 2k_\rho k_\nu] \Gamma(4-D) + k^2 g_{\rho\nu} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \Gamma(3-D) \right\} \end{aligned} \quad (4.83)$$

erhält. Die Entwicklung um $D = 4$ ergibt

$$\begin{aligned} \omega_{1,\rho\nu}^{(2)}(k) = & \frac{i\alpha^2}{6\pi^2\lambda} \left\{ [k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \left[\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} \left(\ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) + \frac{7}{4} - \gamma \right) + \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{7}{4} - \gamma \right) \ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) - \frac{7}{4} \gamma \right] \right. \\ & \left. + k^2 g_{\rho\nu} \left[\frac{1}{4\eta} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) + \frac{11}{16} - \frac{\gamma}{4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Eine etwas kompliziertere Rechnung (siehe Itzykson/Zuber Kap.8-4-4) ergibt für den dritten Graphen aus Gl.(4.81) in Feynman-Eichung

$$\begin{aligned} \omega_{3,\rho\nu}^{(2)}(k) = & \frac{i\alpha^2}{3\pi^2} \left\{ [k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \left[-\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta} \left(\ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) + \frac{5}{2} - \gamma \right) - \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{5}{2} - \gamma \right) \ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) + c \right] \right. \\ & \left. - k^2 g_{\rho\nu} \left[\frac{1}{4\eta} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) + \frac{11}{16} - \frac{\gamma}{4} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.85)$$

wobei die unwesentliche Konstante c nicht berechnet wurde. In der Addition aller drei Graphen entfallen die Pole zweiter Ordnung,

$$\omega_{\rho\nu}^{(2)}(k) = -i \frac{\alpha^2}{4\pi^2} [k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \left[\frac{1}{\eta} + \ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) + c' \right] , \quad (4.86)$$

und auch das Quadrat des Logarithmus. Diese Tatsache, die sich in beliebiger Ordnung wiederholt, ist eine besondere Eigenschaft der 1-Fermion-Loop Graphen der Vakuumpolarisation. Insbesondere ist zu beachten, daß hier auch der Mischterm aus Polbeitrag und impulsabhängiger Funktion,

$$\frac{1}{\eta} \ln \left(\frac{4\pi M^2}{k^2} \right) ,$$

in der Summe der drei Diagramme entfällt. Abschließend sei ohne Beweis angemerkt, daß das Gesamtergebnis für die zweite Ordnung der Vakuumpolarisation, Gl.(4.86), unabhängig von der gewählten Eichung ist.

4.4.7 Die Selbstenergie der masselosen QED in zweiter Ordnung

Zur Selbstenergie zweiter Ordnung tragen die folgenden drei Graphen bei:



$$(4.87)$$

Der erste Graph in Gl.(4.87) soll zuerst ausgewertet werden. Das zugehörige Feynman-Integral kann man auf die Selbstenergie erster Ordnung zurückführen,

$$\Sigma_1^{(2)}(p) = -ie^2 (M^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \gamma^\rho G^{(0)}(q) \left(-i\Sigma^{(1)}(q) \right) G^{(0)}(q) \gamma^\nu D_{\rho\nu}^{(0)}(p-q) . \quad (4.88)$$

Da die Selbstenergie erster Ordnung in Landau-Eichung verschwindet, gilt das gleiche natürlich auch für den Beitrag dieses Graphen. Daher soll hier nur die Feynman-Eichung verwendet werden. Einsetzen von Gl.(4.77) führt dann auf

$$\Sigma_1^{(2)}(p) = -i\alpha^2(4\pi M^4)^{2-\frac{D}{2}}(2-D)^2\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D-1)}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{\not{q}}{(q-p)^2(q^2)^{3-\frac{D}{2}}}. \quad .$$

Anwenden von Gl.(4.42) ergibt letztlich für beliebiges D

$$\Sigma_1^{(2)}(p) = \frac{\alpha^2\not{p}}{8\pi^2}\left(\frac{4\pi M^2}{p^2}\right)^{4-D}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\Gamma(4-D)\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}D-3\right)}. \quad (4.89)$$

Diese Funktion hat bei $D = 4$ einen Pol zweiter Ordnung. Die konsistente Entwicklung aller Terme um $D = 4$ ergibt

$$\Sigma_1^{(2)}(p) = \frac{\alpha^2\not{p}}{8\pi^2}\left\{\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\eta}\left[\ln\left(\frac{4\pi M^2}{p^2}\right)-\gamma+\frac{5}{4}\right]+\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{4\pi M^2}{p^2}\right)\right]^2+\frac{\gamma^2}{2}-\frac{5}{4}\gamma-\frac{\pi^2}{24}+\frac{31}{16}\right\}. \quad (4.90)$$

Als nächstes soll der zweite Graph berechnet werden. Sein Loop-Integral kann man auf die Vakuumpolarisation erster Ordnung zurückführen,

$$\Sigma_2^{(2)}(p) = -ie^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\gamma^\rho G^{(0)}(p-q)\gamma^\nu D_{\rho\alpha}^{(0)}(q)\omega^{(1),\alpha\beta}(q)D_{\beta\nu}^{(0)}(q). \quad (4.91)$$

Aufgrund der transversalen Struktur der Vakuumpolarisation ist dieser Ausdruck unabhängig von der gewählten Eichung: Nur die q_α bzw q_β -proportionalen Terme im freien Photon-Propagator enthalten den Eichparameter λ . Man erhält daher

$$\Sigma_2^{(2)}(p) = ie^2(M^2)^{2-\frac{D}{2}}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{\gamma^\rho(\not{p}-\not{q})\gamma^\nu}{(p-q)^2}\frac{(q^2g_{\rho\nu}-q_\rho q_\nu)}{(q^2)^2}\omega^{(1)}(q^2). \quad .$$

Nun kann man Gl.(4.75) einsetzen,

$$\Sigma_2^{(2)}(p) = 8i\alpha^2(4\pi M^4)^{2-\frac{D}{2}}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D)}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q^2[(3-D)\not{p}+(D-1)\not{q}]-2pq\not{q}}{(p-q)^2(q^2)^{4-\frac{D}{2}}}. \quad .$$

Nach einigem Zusammenfassen von Γ -Funktionen erhält man für beliebiges D und beliebige Eichung

$$\Sigma_2^{(2)}(p) = \frac{\alpha^2\not{p}}{4\pi^2}\left(\frac{4\pi M^2}{p^2}\right)^{4-D}(D-1)\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\Gamma(5-D)\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma(D-3)}{\Gamma(D)\Gamma\left(4-\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}D-3\right)}. \quad (4.92)$$

Dieser Graph divergiert aufgrund der transversalen Struktur der Vakuumpolarisation nur linear und nicht quadratisch, wie man in zweiter Ordnung erwartet hätte. Die Entwicklung um $D = 4$ gestaltet sich hier daher etwas einfacher,

$$\Sigma_2^{(2)}(p) = \frac{\alpha^2\not{p}}{8\pi^2}\left\{\frac{1}{\eta}+\ln\left(\frac{4\pi M^2}{p^2}\right)-\gamma+\frac{7}{4}\right\}. \quad (4.93)$$

Auf die Berechnung des wesentlich komplizierteren dritten Graphen soll hier verzichtet werden.

Kapitel 5

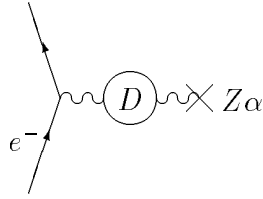
Der Photon-Propagator: 2. Teil

Nachdem wir jetzt eine Methode zur Verfügung haben, divergente Loop-Integrale technisch zu handhaben, können wir in diesem Kapitel die schon im Abschnitt 4.1 angedeutete Renormierung des Photon-Propagators ausführen. Dazu wird stets die Verwendung einer Regularisierung vorausgesetzt, auch wenn dies nicht explizit durch einen Index oder ähnlich deutlich gemacht wird. Während in diesem Kapitel zunächst nur exemplarisch der Photon-Propagator betrachtet wird, um das verwendete Schema aufzuzeigen, wird die vollständige Renormierung der QED im nächsten Kapitel begonnen. Insbesondere wird auch in diesem Kapitel die Renormierung in höherer Ordnung schon einmal angedeutet, wobei zur Vereinfachung der Photon-Propagator isoliert diskutiert wird. Dabei läßt man natürlich außer Acht, daß es noch andere divergente irreduzible Funktionen gibt, deren Diagramme in die Vakuumpolarisation eingehen. Aus didaktischen Gründen soll dieses eigentlich inkorrekte Vorgehen aber hier gerechtfertigt sein.

Das Programm dieses Kapitels beginnt mit der Klärung der Frage, in welcher Form der Photon-Propagator in meßbare Größen eingeht. Aus diesen Überlegungen gewinnt man eine Bedingung, Normierungsbedingung genannt, die der Photon-Propagator in allen Ordnungen erfüllen muß, die aber bereits mit der ersten Ordnung im Widerspruch steht. Das zwingt zu einer Uminterpretation der Kopplungskonstanten in der Lagrangedichte. Mit diesem Trick kann man einen endlichen renormierten Photon-Propagator konstruieren, wobei alle Divergenzen in nicht meßbaren Konstanten verschwinden. Schließlich wird eine alternative Sicht dieses Renormierungsschemas gezeigt, das sogenannte Counterterm-Verfahren.

5.1 Physikalische Relevanz des Photon-Propagators

Als Vorarbeit zu der in diesem Kapitel zu diskutierenden Renormierung des Photon-Propagators soll jetzt an einem Beispiel gezeigt werden, wie der Propagator in physikalisch meßbare Größen eingeht. Dazu betrachtet man am einfachsten ein Elektron, das mit einem ruhenden Punkt-Kern der Ladung Z wechselwirkt,



Diese Wechselwirkung erfolgt über reale Photonen, die durch den vollen Photon-Propagator beschrieben werden. In niedrigster Ordnung der Stärke des Kernes ist es gerade der obige Graph, der in die Elektron-Kern-Streuung bei niederen Energien sowie in die Bindungsenergie von Elektronen am Kern eingeht. Das Potential, das das Elektron spürt, ist in diesem Fall durch

$$V^\rho(x) = i e^2 \int d^4y D^{\rho\nu}(x-y) j_{ext,\nu}(y)$$

gegeben, wobei $j_{ext,\nu}$ die Stromdichte des Kernes charakterisiert. Für zeitunabhängige externe Stromdichten kann man das y^0 -Integral sofort ausführen,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy^0 D^{\rho\nu}(x-y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy^0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D^{\rho\nu}(k) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2\pi \delta(k^0) D^{\rho\nu}(k) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} D^{\rho\nu}(k^0=0, \mathbf{k}) \end{aligned}$$

In niedrigster Ordnung von α erhält man daraus in Feynman-Eichung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy^0 D^{(0),\rho\nu}(x-y) &= i g^{\rho\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \\ &= i g^{\rho\nu} \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \end{aligned}$$

was für Punktkerne,

$$j_{ext,\nu}(y) = g_{0\nu} Z \delta^{(3)}(\mathbf{y}) \quad ,$$

auf das bekannte Coulomb-Potential führt,

$$V^{(0),\rho}(\mathbf{x}) = - g^{\rho 0} Z e^2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{4\pi |\mathbf{x}|} = - g^{\rho 0} \frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|}$$

Betrachtet man den vollen Propagator in beliebiger Eichung,

$$D^{\rho\nu}(k) = - i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 [1 + \omega(k^2)] - \mu^2 + i\epsilon} - i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 - \mu^2 + i\epsilon)}$$

bekommt man

$$V^\rho(\mathbf{x}) = - Z e^2 g^{\rho 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{k^2 [1 + \omega(-k^2)] + \mu^2} \quad . \quad (5.1)$$

Wie erwartet trägt der $k^\rho k^\nu$ -Teil des Propagators zu Erwartungswerten mit erhaltenen Strömen nichts bei. Das Potential hängt daher nicht von der Eichung ab. Die Masse μ^2 wird in allen Ordnungen wie bei der Fourier-Transformation des Coulomb-Potentials als konvergenzerzeugender Faktor für $\underline{x}^2 \rightarrow \infty$ bzw $\underline{k}^2 \rightarrow 0$ benötigt. Sie wird im weiteren meist unterdrückt werden.

Das Potential (5.1) geht direkt in die Bindungsenergie von Elektronen in Atomen ein. Es ist also indirekt meßbar. Die Quantenelektrodynamik liefert Korrekturen zur Bindungsenergie in aufsteigender Ordnung von α .

Der entscheidende Punkt ist nun: Die Fouriertransformierte des Potentials ist ganz allgemein direkt proportional zum Produkt aus e^2 und Photon-Propagator,

$$V^\rho(k) = i e^2 D^{\rho\nu}(k) j_\nu(k) \quad . \quad (5.2)$$

Daher kommt nur dem Produkt

$$e^2 D^{\rho\nu}(k)$$

eine wirkliche physikalische Bedeutung zu.

5.2 Renormierung des Photon-Propagators

Wo werden die QED-Korrekturen im Potential besonders wirksam? Die Vakuumpolarisation beschreibt virtuelle (und reale) Paarerzeugung, in diesem Fall im Coulomb-Feld des Kernes. Diese ist um so leichter möglich, je höher die zur Verfügung stehende Energiedichte des externen Feldes ist. Sie wird also besonders für große Impulsüberträge \underline{k}^2 , d.h. kleine Abstände \underline{x}^2 vom Kern auftreten. In großem Abstand zum Kern muß dagegen das klassische Verhalten dominieren, das man in gewöhnlichen Experimenten feststellt. Genauer gesagt, das volle Potential (5.1) muß für große \underline{x}^2 bzw kleine \underline{k}^2 gerade dem Coulomb-Potential entsprechen,

$$V^\rho(\underline{k}^2) = - Z e^2 g^{\rho 0} \frac{1}{\underline{k}^2 [1 + \omega(-\underline{k}^2)]} \xrightarrow{\underline{k}^2 \rightarrow 0} - Z e^2 g^{\rho 0} \frac{1}{\underline{k}^2} \quad . \quad (5.3)$$

Diese Forderung an das Potentials ist die einfachste Begründung der folgenden direkten Forderung an den vollen Photon-Propagator,

$$\begin{aligned} e^2 D^{\rho\nu}(k) &= - i e^2 \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 [1 + \omega(k^2)] + i\epsilon} - i e^2 \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \\ &\xrightarrow{k^2 \rightarrow 0} - i e^2 g^{\rho\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} + \text{Terme proportional } k^\rho k^\nu \quad . \quad (5.4) \end{aligned}$$

Sie sagt nichts anderes, als daß ein reales Photon, das sich selbstverständlich immer auf der Massenschale $k^2 = 0$ befindet, wie ein freies Photon beschrieben werden muß, d.h. masselos ist. Es bleibt anzumerken, daß der Teil proportional $k^\rho k^\nu$ durch Gl.(5.3) nicht festgelegt wird.

Bereits in erster Ordnung von α widersprechen die Gln.(4.16,4.61),

$$\omega_{reg}^{(1)}(k^2 = 0) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) = \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma - \frac{1}{2} f'(4) + \ln\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right) \right\} \quad ,$$

aber der daraus resultierenden Forderung

$$\omega(k^2 = 0) = 0 \quad .$$

Die Vakuumpolarisation verschwindet nicht nur bei $k^2 = 0$ nicht, $\omega^{(1)}(k^2 = 0)$ divergiert sogar, wenn die Regularisierung entfernt wird. Dieser Umstand erfordert eine Uminterpretation der bisher verwendeten Größen, in deren Rahmen dann auch alle divergenten Beiträge zur Vakuumpolarisation aus allen physikalisch relevanten Ausdrücken eliminiert werden können. Daß dies in allen Ordnungen der Fall ist, soll in diesem Kapitel nicht bewiesen werden. Für die erste Ordnung wird es unmittelbar klar werden.

Da nur eine k -unabhängige, divergente Konstante stört, kann man dieses Problem folgendermaßen lösen: Man versteht die Kopplungskonstante in der Lagrangedichte nicht mehr als die üblicherweise gemessene Elektronenladung e sondern als einen nicht meßbaren Parameter $e_0 \neq e$ der Theorie. Man führt dann die gesamte Störungstheorie wie bisher durch, aber als Konsequenz von

$$\mathcal{L}_{int} = - e_0 \hat{\psi} \hat{A} \psi \quad (5.5)$$

steht überall der Parameter e_0 anstelle der wahren Ladung e . Dann erhält man als Potential

$$V^\rho(\underline{k}^2) = - Z e_0^2 g^{\rho 0} \frac{1}{\underline{k}^2 [1 + \omega(e_0^2, -\underline{k}^2)]} \quad , \quad (5.6)$$

wobei das Argument e_0^2 in ω klarstellen soll, daß auch diese Funktion mit dem Parameter e_0 zu berechnen ist. Die funktionale Form von ω ist aber diesselbe wie bisher. Entsprechend folgt als physikalische Forderung

$$V^\rho(\underline{k}^2) \xrightarrow{\underline{k}^2 \rightarrow 0} - Z e^2 g^{\rho 0} \frac{1}{\underline{k}^2} \quad ,$$

bzw für den vollen Photon-Propagator gemäß Gl.(5.4)

$$\begin{aligned} e_0^2 D^{\rho\nu}(k) &= - i e_0^2 \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 [1 + \omega(e_0^2, k^2)] + i\epsilon} - i e_0^2 \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \\ &\xrightarrow{k^2 \rightarrow 0} - i e^2 g^{\rho\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} + \text{Terme proportional } k^\rho k^\nu \quad . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Diese läßt sich jetzt aber leicht erfüllen, indem man zwischen der wahren Ladung e und dem Parameter der Theorie e_0 die Relation

$$\frac{e_0^2}{1 + \omega(e_0^2, k^2 = 0)} = e^2 \quad (5.8)$$

annimmt. Das bedeutet etwa in erster Ordnung

$$e^2 = e_0^2 \left[1 + \omega^{(1)}(e_0^2, k^2 = 0) \right]^{-1} = e_0^2 \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right]^{-1} \cong e_0^2 \left[1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \quad .$$

Da $\omega^{(1)}(e_0^2, k^2 = 0)$ divergiert, sagt man, die Vakuumpolarisation schirmt die sehr große 'nackte' Ladung e_0 ab, sodaß in ausreichender Entfernung von der nackten Ladung nur noch e meßbar

ist. Diese Vorstellung sollte aber nicht zu ernst genommen werden. Man nennt die (divergente) multiplikative Konstante zwischen den beiden Größen die Renormierungskonstante Z_3 ,

$$e^2 = Z_3(e_0^2) e_0^2 \quad , \quad Z_3(e_0^2) = \frac{1}{1 + \omega(e_0^2, k^2 = 0)} \quad (5.9)$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Definitionen für beliebige Ordnungen formuliert wurden. Dabei wurde aber außer Acht gelassen, daß es noch weitere divergente Funktionen außer der Vakuumpolarisation gibt, was ab der zweiten Ordnung zu einer Verkopplung aller divergenten Funktionen und Renormierungskonstanten führt. Um die Idee der Renormierung aber auch in höherer Ordnung schon einmal anzudeuten, soll diese Verkopplung hier zunächst ignoriert werden.

Welche Konsequenzen haben die Gln.(5.5-5.9) für den vollen Photon-Propagator? Ihn berechnet man ebenfalls mit der nackten Ladung e_0 ,

$$D^{\rho\nu}(e_0^2, k) = -i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 [1 + \omega(e_0^2, k^2)] + i\epsilon} - i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \quad , \quad (5.10)$$

er enthält also alle möglichen Divergenzen. Physikalisch relevant ist aber gemäß Gl.(5.7) nur der $g^{\rho\nu}$ -proportionale Teil der Größe

$$e_0^2 D^{\rho\nu}(e_0^2, k) = -i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{e_0^2}{k^2 [1 + \omega(e_0^2, k^2)] + i\epsilon} - i e_0^2 \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \quad , \quad (5.11)$$

er sollte daher endlich sein. Es liegt nahe, diese endliche Größe durch die endliche wahre Ladung e auszudrücken,

$$\frac{e_0^2}{k^2 [1 + \omega(e_0^2, k^2)] + i\epsilon} = e^2 \frac{e^2 [1 + \omega(e_0(e)^2, k^2 = 0)]}{k^2 [1 + \omega(e_0(e)^2, k^2)] + i\epsilon} \equiv \frac{e^2}{k^2 [1 + \omega_R(e^2, k^2)] + i\epsilon} \quad , \quad (5.12)$$

wobei man die Funktion $\omega_R(e^2, k^2)$ als renormierte Vakuumpolarisation bezeichnet. Sie soll selbstverständlich als Funktion der wahren Ladung e formuliert sein, d.h. in Gl.(5.12) ist e_0 wie angedeutet als Funktion von e zu verstehen. Diese Funktion gewinnt man, indem man Gl.(5.9) nach e_0 auflöst. Das ist nicht allgemein möglich, sondern muß Ordnung für Ordnung erfolgen. So ergibt sich zum Beispiel in erster Ordnung

$$\begin{aligned} e^2 &= e_0^2 \left[1 + \omega^{(1)}(e_0^2, k^2 = 0) \right]^{-1} = e_0^2 \left[1 - \omega^{(1)}(e_0^2, k^2 = 0) \right] \\ &= e_0^2 \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right]^{-1} = e_0^2 \left[1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \\ &= e_0^2 \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right]^{-1} = e_0^2 \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \\ \Rightarrow \quad e_0^2 &= e^2 \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] = e^2 \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right]^{-1} \\ &= e^2 \left[1 + \omega^{(1)}(e^2, k^2 = 0) \right] = e^2 \left[1 - \omega^{(1)}(e^2, k^2 = 0) \right]^{-1} \quad . \quad (5.13) \end{aligned}$$

Dabei wurde davon Gebrauch gemacht, daß bis zu der betrachteten ersten Ordnung $e^4 = e^2 e_0^2 = e_0^4$ gilt. All die obigen Formen sind äquivalent.

Außerdem ist in Gl.(5.12) auch noch der Grenzwert zu nehmen, in dem die Regularisierung verschwindet, d.h. $\Lambda \rightarrow \infty$ bzw. $\eta = 4 - D \rightarrow 0$. Daher lautet Gl.(5.12) in vollständiger Form

$$\begin{aligned}
1 + \omega_R(e^2, k^2) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} Z_3(e_0(e), M, \eta) \left[1 + \omega(e_0(e)^2, M, \eta, k^2) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1 + \omega(e_0(e)^2, M, \eta, k^2)}{1 + \omega(e_0(e)^2, M, \eta, k^2 = 0)} \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_3(e_0(e), \Lambda) \left[1 + \omega(e_0(e)^2, \Lambda, k^2) \right] \\
&= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \omega(e_0(e)^2, \Lambda, k^2)}{1 + \omega(e_0(e)^2, \Lambda, k^2 = 0)} \right] . \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Hier ist die Abhängigkeit der Größen von der Regularisierungsmasse M bzw. Λ explizit festgehalten. Die renormierte Vakuumpolarisation hängt nicht mehr von ihr ab, wie im Falle der Pauli-Villars Regularisierung wegen des Grenzwerts $\Lambda \rightarrow \infty$ unmittelbar einleuchtet. Das gleiche trifft aber auch für die dimensionale Regularisierung zu. Im weiteren wird stets stellvertretend die Pauli-Villars Form zur Kenntlichmachung der Regularisierung verwendet werden.

$\omega_R(e^2, k^2)$ ist eine endliche Funktion, was erst noch zu beweisen sein wird. Diese Tatsache soll hier aber schon einmal angenommen werden. Ein Beweis für die erste Ordnung folgt unten. Während also auf der linken Seite von Gl.(5.12) zwei divergente Größen miteinander multipliziert etwas endliches ergeben, ist die renormierte Vakuumpolarisation für sich endlich.

Um das Renormierungsverfahren für die Vakuumpolarisation anschaulich zu machen, soll es bis zur zweiten Ordnung durchgeführt werden. Die Abhängigkeit der Vakuumpolarisation von der Regularisierungsmasse Λ wird dabei für einen Moment unterdrückt.

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \omega(e_0(e)^2, k^2)}{1 + \omega(e_0(e)^2, 0)} &= \frac{1 + \omega^{(1)}(e_0(e)^2, k^2) + \omega^{(2)}(e_0(e)^2, k^2) + \dots}{1 + \omega^{(1)}(e_0(e)^2, 0) + \omega^{(2)}(e_0(e)^2, 0) + \dots} \\
&= \left[1 + \omega^{(1)}(e_0(e)^2, k^2) + \omega^{(2)}(e_0(e)^2, k^2) + \dots \right] \\
&\quad \cdot \left[1 - \omega^{(1)}(e_0(e)^2, 0) - \omega^{(2)}(e_0(e)^2, 0) + (\omega^{(1)}(e_0(e)^2, 0))^2 + \dots \right] \\
&= 1 + \omega^{(1)}(e_0(e)^2, k^2) - \omega^{(1)}(e_0(e)^2, 0) - \omega^{(1)}(e_0(e)^2, k^2) \omega^{(1)}(e_0(e)^2, 0) \\
&\quad + \omega^{(2)}(e_0(e)^2, k^2) - \omega^{(2)}(e_0(e)^2, 0) + (\omega^{(1)}(e_0(e)^2, 0))^2 + \dots .
\end{aligned}$$

Jetzt verwendet man die Relation (5.13), um e_0 konsistent bis zur Ordnung $e^4 = e_0^4$ durch e auszudrücken,

$$\begin{aligned}
\omega^{(1)}(e_0(e)^2, k^2) &= \omega^{(1)}(e^2, k^2) \left[1 + \omega^{(1)}(e^2, 0) \right] \\
\omega^{(2)}(e_0(e)^2, k^2) &= \omega^{(2)}(e^2, k^2) \\
(\omega^{(1)}(e_0(e)^2, k^2))^2 &= (\omega^{(1)}(e^2, k^2))^2 ,
\end{aligned}$$

wobei in Termen, die selbst bereits von zweiter Ordnung sind, einfach e_0 durch e ersetzt werden kann. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \omega(e_0(e)^2, k^2)}{1 + \omega(e_0(e)^2, 0)} &= 1 + \omega^{(1)}(e^2, k^2) \left[1 + \omega^{(1)}(e^2, 0) \right] - \omega^{(1)}(e^2, 0) \left[1 + \omega^{(1)}(e^2, 0) \right] \\
&\quad - \omega^{(1)}(e^2, k^2) \omega^{(1)}(e^2, 0) + \omega^{(2)}(e^2, k^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega^{(2)}(e^2, 0) + (\omega^{(1)}(e^2, 0))^2 + \dots \\
= & 1 + \omega^{(1)}(e^2, k^2) - \omega^{(1)}(e^2, 0) + \omega^{(2)}(e^2, k^2) - \omega^{(2)}(e^2, 0) + \dots \\
= & 1 + \omega_R(e^2, k^2) \quad .
\end{aligned}$$

Damit ist ω_R bis zur zweiten Ordnung durch e und die bekannten Funktionen $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ ausgedrückt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die zweite Ordnung im Rahmen der Renormierung der gesamten QED eine Korrektur erfahren wird.

Die erste Ordnung ist aber korrekt durch

$$\omega_R^{(1)}(e^2, k^2) = \omega^{(1)}(e^2, \Lambda, k^2) - \omega^{(1)}(e^2, \Lambda, k^2 = 0) \quad (5.15)$$

gegeben. Da die Divergenz ganz in dem k -unabhängigen Teil von $\omega^{(1)}$ steckt, ist diese Differenz, d.h. die renormierte Vakuumpolarisation in erster Ordnung, endlich,

$$\omega_R^{(1)}(e^2, k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \left[\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccot} \left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\} \quad , \quad (5.16)$$

und das gesamte Schema in dieser Ordnung erfolgreich. Für alle höheren Ordnungen muß dies aber erst noch nachgewiesen werden.

Man kann nun in Analogie zur Form des ursprünglichen, nicht renormierten Propagators einen renormierten Photon-Propagator definieren,

$$\begin{aligned}
D_R^{\rho\nu}(e^2, k) & \equiv -i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 [1 + \omega_R(e^2, k^2)] + i\epsilon} - i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \\
& = -i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \omega(e_0(e)^2, \Lambda, k^2 = 0)}{k^2 [1 + \omega(e_0(e)^2, \Lambda, k^2)] + i\epsilon} \right] - i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \quad ,
\end{aligned} \quad (5.17)$$

der ebenfalls als Funktion von e zu verstehen ist. Er ist genau dann auch endlich, wenn ω_R endlich ist.

Im Fall einer beliebigen Eichung λ kann man nur die physikalisch relevanten Terme in dem so definierten renormierten Propagator mit den entsprechenden Ausdrücken im nicht renormierten Propagator multiplikativ in Zusammenhang bringen,

$$D_R^{\rho\nu}(e^2, k) + i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} = \frac{1}{Z_3(e_0)} \left[D^{\rho\nu}(e_0^2, k) + i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \right] \quad , \quad (5.18)$$

bzw

$$e^2 \left[D_R^{\rho\nu}(e^2, k) + i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \right] = e_0^2 \left[D^{\rho\nu}(e_0^2, k) + i \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \right] \quad .$$

Diese Gleichung kann man auch als Definition des renormierten Photon-Propagators auffassen. Das Produkt $e_0^2 D^{\rho\nu}(e_0^2, k)$ geht gerade in das Potential (5.2) ein und muß daher endlich sein.

In Landau-Eichung entfallen die störenden Terme proportional $k^\rho k^\nu$ und man erhält einfach

$$D_R^{\rho\nu}(e^2, k) = \frac{1}{Z_3(e_0)} D^{\rho\nu}(e_0^2, k) \quad .$$

Aufgrund der einfachen Form des Photon-Propagators in Landau-Eichung nehmen auch alle aus ihm folgenden Relationen die einfachste Gestalt an.

Will man den multiplikativen Zusammenhang zwischen dem renormierten und dem baren Propagator generell herstellen, muß der renormierte Propagator als

$$D_R^{\rho\nu}(e^2, k) \equiv -i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 [1 + \omega_R(e^2, k^2)] + i\epsilon} - i \frac{Z_3 k^\rho k^\nu}{k^2 (\lambda k^2 + i\epsilon)} \quad (5.19)$$

definiert werden. In dieser Definition ist nur noch der physikalisch relevante Teil des renormierten Propagators endlich. In Landau-Eichung sind die beiden Definitionen (5.17) und (5.19) identisch. Daher wird im weiteren meist die Landau-Eichung verwendet werden, um aus der Uneindeutigkeit der Definition resultierende Schwierigkeiten zu umgehen.

Als Anmerkung sei an dieser Stelle die Wirkung der ersten Ordnung der Vakuumpolarisation im Potential (5.1) noch angeführt. Exakt erhält man aus Gl.(5.6)

$$V^\rho(\underline{x}) = - Z e^2 g^{\rho 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{\underline{k}^2 [1 + \omega_R(e^2, -\underline{k}^2)]} \quad , \quad (5.20)$$

was in erster Ordnung

$$\begin{aligned} V^\rho(\underline{x}) &= - Z e^2 g^{\rho 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{\underline{k}^2 [1 + \omega_R^{(1)}(e^2, -\underline{k}^2)]} \\ &= - Z e^2 g^{\rho 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{\underline{k}^2} [1 - \omega_R^{(1)}(e^2, -\underline{k}^2)] \end{aligned}$$

bedeutet. Angesichts der Funktion (5.16) soll davon nur die Korrektur für kleine $|\underline{k}|$ berechnet werden,

$$\begin{aligned} V^\rho(\underline{x}) &= - Z e^2 g^{\rho 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{\underline{k}^2} \left[1 + \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{\underline{k}^2}{m^2} \right] \\ &= - \frac{Z\alpha}{|\underline{x}|} - \frac{4Z\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\underline{x}) \quad . \end{aligned}$$

Diese erste Korrektur zum Coulomb-Potential nennt man das Uehling-Potential. Sein Beitrag zur Energieverschiebung atomarer Zustände ist meßbar.

5.3 Alternative Formulierung des Renormierungsschemas: Das Countertermverfahren

Zusammenfassend hatten wir das Renormierungsschema im letzten Kapitel folgendermaßen konstruiert:

1. Ausgehend von der Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R &= -\frac{1}{4} (\partial_\rho \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\rho) (\partial^\rho \hat{A}^\nu - \partial^\nu \hat{A}^\rho) - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho \hat{A}^\rho)^2 + \frac{\mu^2}{2} \hat{A}_\rho \hat{A}^\rho \\ &\quad + \hat{\psi} (i\hat{\not{D}} + m - e_0 \hat{A}) \hat{\psi} \end{aligned} \quad (5.21)$$

hatten wir den nicht renormierten Photon-Propagator mit dem Parameter $e_0 \neq e$ berechnet,

$$D^{\rho\nu}(e_0^2, x - y) = \langle 0 | T \hat{A}^\rho(x) \hat{A}^\nu(y) | 0 \rangle_{e_0} \quad , \quad (5.22)$$

was hier ausdrücklich festgehalten wird. Dieser Propagator divergiert.

2. Über die Gleichungen

$$e^2 = Z_3(e_0) e_0^2 = \frac{e_0^2}{1 + \omega(e_0^2, k^2)} \quad , \quad D_R^{\rho\nu}(e^2, x-y) = \frac{1}{Z_3(e_0)} D^{\rho\nu}(e_0^2, x-y) \quad (5.23)$$

hatten wir (im Fall der Landau-Eichung) den renormierten Propagator als Funktion der wahren Ladung e definiert. Die linke Gleichung muß eine endliche Funktion von $x - y$ sein, in dem Produkt

$$\frac{1}{Z_3(e_0)} D^{\rho\nu}(e_0^2, x-y)$$

heben sich die Divergenzen also gerade heraus.

Die Felder in der Lagrangedichte ergeben daher nicht direkt den renormierten Propagator, sondern den nicht renormierten,

$$D_R^{\rho\nu}(e_0^2, x-y) = Z_3^{-1}(e_0(e)) \langle 0 | T \hat{A}^\rho(x) \hat{A}^\nu(y) | 0 \rangle_{\epsilon_0(e)} \quad . \quad (5.24)$$

Das legt die Definition renormierter Felder nahe,

$$\hat{A}_R^\rho(x) = Z_3^{-\frac{1}{2}}(e_0(e)) \hat{A}^\rho(x) \quad , \quad (5.25)$$

deren Vakuumerwartungswert der renormierte Propagator ist,

$$D_R^{\rho\nu}(e_0, x-y) = \langle 0 | T \hat{A}_R^\rho(x) \hat{A}_R^\nu(y) | 0 \rangle \quad . \quad (5.26)$$

In ihnen formuliert lautet die renormierte Lagrangedichte dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = Z_3(e) \left\{ -\frac{1}{4} (\partial_\rho \hat{A}_{R,\nu} - \partial_\nu \hat{A}_{R,\rho}) (\partial^\rho \hat{A}_R^\nu - \partial^\nu \hat{A}_R^\rho) - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho \hat{A}_R^\rho)^2 + \frac{\mu^2}{2} \hat{A}_{R,\rho} \hat{A}_R^\rho \right\} \\ + \hat{\psi} (i\hat{\not{D}} + m - e \hat{A}_R) \hat{\psi} \quad . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Man beachte, daß der Faktor Z_3 aus dem Wechselwirkungsterm herausfällt,

$$e_0 \hat{A}^\rho(x) = e \hat{A}_R^\rho(x) \quad .$$

Die Lagrangedichte (5.27) ist ganz durch die wahre Ladung e gegeben. Dafür tritt ein Vorfaktor vor der Lagrangedichte der Photonen auf. Diese Tatsache interpretiert man folgendermaßen: Im nächsten Kapitel wird ausführlich gezeigt werden, daß die Ordnung eines Diagramms in e^2 der in \hbar äquivalent ist. Die Beiträge von Loops lassen sich also als Quantenkorrekturen auffassen. Das legt die folgende Interpretation der obigen Lagrangedichte nahe. Ihre ursprüngliche Form ist aus klassischen Theorien, der Elektrodynamik und der Dirac-Gleichung, abgeleitet worden. Daher muß man Quantenkorrekturen anbringen,

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \mathcal{L} + \hbar \delta\mathcal{L}^{[1]} + \hbar^2 \delta\mathcal{L}^{[2]} + \dots \quad , \quad (5.28)$$

die die korrekte Definition der Ladung e in allen Ordnungen von \hbar sicherstellen. Nach Gl.(5.27) haben diese sogenannten Counterterme die Form

$$\delta\mathcal{L}_R = (Z_3(e)-1) \left\{ -\frac{1}{4} (\partial_\rho \hat{A}_{R,\nu} - \partial_\nu \hat{A}_{R,\rho}) (\partial^\rho \hat{A}_R^\nu - \partial^\nu \hat{A}_R^\rho) - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho \hat{A}_R^\rho)^2 + \frac{\mu^2}{2} \hat{A}_{R,\rho} \hat{A}_R^\rho \right\} \quad . \quad (5.29)$$

Z_3 ist daher eine Reihe in \hbar . Die Counterterme, d.h. die Funktion $Z_3(e)$, sind so konstruiert, daß alle Divergenzen eliminiert werden.

Aus Gl.(5.27) kann man ohne Rückgriff auf den Parameter e_0 direkt den renormierten Photon-Propagator berechnen. Die obige Lagrangedichte hat gerade solche Feynman-Regeln zur Folge, daß der neue freie Propagator die Form

$$D_R^{(0),\rho\nu}(k) = -i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{Z_3(e)[k^2 + i\epsilon]} \quad (5.30)$$

hat. Dieser Propagator geht überall da ein, wo bisher der freie Propagator ohne die Renormierungskonstante stand. Berechnet man zum Beispiel die Vakuumpolarisation, so kann man sich zu Nutze machen, daß jeder in ihr eingehende freie Propagator an zwei Vertices endet. Diese erhalten nach Feynman-Regeln jetzt die wahre Ladung e als Faktor zugeordnet. Will man die gleiche Funktion $\omega(x, k^2)$ verwenden wie bisher, so kann man alle die freien Propagatoren begleitenden Faktoren Z_3 auf die Kopplungskonstanten der beiden Vertices schlagen, an denen die Propagatoren enden. Man erhält also die alte Funktion mit einem Faktor $Z_3^{-1}(e)e^2$ an der Stelle von x . Zusätzlich muß noch beachtet werden, daß die e der beiden äußeren Vertices nicht mit einem freien Propagator verbunden sind und daher ein Z_3 zu viel gezählt wird,

$$\omega^{\rho\nu}(k) = -i \left[k^2 g^{\rho\nu} - k^\rho k^\nu \right] Z_3(e) \omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2) \quad (5.31)$$

Die Resummation der Dyson-Reihe für den Photon-Propagator ergibt dann

$$\begin{aligned} D_R^{\rho\nu}(e, k) &= \left(g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{Z_3(e)(k^2 + i\epsilon)} \right)^{n+1} \left(-ik^2 Z_3(e) \omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2) \right)^n \\ &= -i \left(g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right) \frac{1}{Z_3(e)(k^2 + i\epsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2) \right)^n \\ &= -i \left(g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right) \frac{1}{Z_3(e)} \frac{1}{k^2 [1 + \omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2)] + i\epsilon} \quad (5.32) \end{aligned}$$

Als Normierungsbedingung folgt direkt aus Gl.(5.7)

$$Z_3(e) [1 + \omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2 = 0)] = 1 \quad (5.33)$$

Diese Gleichung entspricht exakt Gl.(5.9), nur daß Z_3 hier gleich als Funktion von e angesehen wird. Auch in der wahren Ladung ausgedrückt ergibt sich eine nicht allgemein auflösbare implizite Bestimmungsgleichung für Z_3 . Sie muß wie Gl.(5.9) Ordnung für Ordnung gelöst werden.

Schließlich definiert man ganz analog zu Gl.(5.12) die renormierte Vakuumpolarisation als

$$1 + \omega_R(e^2, k^2) \equiv Z_3(e) [1 + \omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2)] = \frac{1 + \omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2)}{1 + \omega(Z_3^{-1}(e)e^2, k^2 = 0)} \quad (5.34)$$

Der Vorteil dieser Betrachtungsweise ist der alleinige Rückgriff auf die wahre Ladung e . Daher sind hier von vornherein alle Greensfunktionen und Renormierungskonstanten als Funktionen von e formuliert. Beide Schemata des Renormierungsschemas sind aber völlig äquivalent. Wir werden beiden im Rahmen der vollen Renormierung der QED wieder begegnen.

Kapitel 6

Divergenzgrad und Renormierbarkeit

Im vorangegangenen Kapitel haben wir die Renormierung des Photon-Propagators bzw der Vakuumpolarisation diskutiert, ohne auf andere divergente Funktionen zu achten. In diesem Kapitel soll geklärt werden, wann ein Diagramm oder eine ganze Funktion divergiert. Diese Untersuchung wird uns zu einer Klassifikation von Quantenfeldtheorien in renormierbare und nicht renormierbare Theorien führen.

Zur Untersuchung der Konvergenz oder Divergenz von Feynman-Integralen beliebiger Diagramme genügt die Betrachtung irreduzibler Graphen, da sich reduzierbare von diesen nicht um weitere Loops, d.h. Integrationen, sondern nur um multiplikative freie Propagatoren unterscheiden bzw aus mehreren irreduziblen Teilen aufgebaut sind.

Wann ist ein Feynman-Integral eines beliebigen irreduziblen Diagramms für große Loop-Impulse divergent? Zur Beantwortung dieser Frage betrachtet man die Zahl der die Divergenz verursachenden Loops und die der konvergenzzeugenden Propagatoren in dem Integral. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} I_{F(B)} &= \text{Zahl der inneren Fermion(Boson)-Propagatoren} \\ V &= \text{Zahl der Vertices} \\ E_{F(B)} &= \text{Zahl der äußeren Fermion(Boson)-Anschlüsse} \\ L &= \text{Zahl der Loops} \end{aligned}$$

erhält man direkt

$$L = I_F + I_B - V + 1 \quad , \quad (6.1)$$

weil jede innere Linie eine Viererimpulsintegration mit sich bringt und jeder Vertex eine impulserhaltende δ -Funktion. Schließlich läßt sich die Gesamtimpulserhaltung abspalten. Für die Untersuchung der Konvergenz des zugehörigen Feynman-Integrals bei großen Loop-Impulsen spielen die Massen der Fermionen und die äußeren Impulse keine Rolle, da sie vergleichsweise klein sind. Dabei läßt man außer Acht, daß unter Umständen, wie etwa bei der Vakuumpolarisation, äußere Impulse abfaktorisiert werden können und damit die Konvergenz des Integrals beeinflußt wird. Solche aus der Eichinvarianz der Theorie resultierenden Eigenschaften können aber immer nur die Konvergenz eines Feynman-Integrals verbessern, da dimensionsbehaftete äußere Impulse aus dem Integral herausgezogen werden und der Integrand diese Dimension verlieren muß. Damit bleibt als L -faches Impulsintegral zur Abschätzung der Über-

Alles-Konvergenz

$$\int \frac{d^{4L}k}{k^{I_F} k^{2I_B}} \quad .$$

Für die Über-Alles Aussage ist die Unterscheidung der einzelnen Loop-Impulse unwesentlich. Es können aber divergente Teilintegrationen auftreten, obwohl das Gesamtintegral über ausreichend viele konvergenzerzeugende Impulse im Nenner verfügt. Diese Divergenzen berücksichtigt man hier nicht. Formale Aufintegration liefert

$$\int \frac{dk}{k^{I_F+2I_B-4L+1}} \quad .$$

Dieses Integral konvergiert für $I_F + 2I_B - 4L > 0$ und divergiert für $I_F + 2I_B - 4L \leq 0$. Daher definiert man den sogenannten scheinbaren Divergenzgrad $\omega(G)$,

$$\omega(G) = 4L - I_F - 2I_B = 3I_F + 2I_B - 4V + 4 \quad . \quad (6.2)$$

Er charakterisiert das Verhalten eines beliebigen Diagramms G folgendermaßen:

1. $\omega(G) < 0$: Das Integral konvergiert Über-Alles, kann aber divergente Subgraphen besitzen, d.h. gewisse Kombinationen der Loop-Integrale divergieren.
2. $\omega(G) \geq 0$: Das Integral divergiert scheinbar Über-Alles, diese Aussage kann aber durch Eichinvarianzeigenschaften noch modifiziert werden.

Soweit wurde nur ein einzelnes Diagramm betrachtet. Wie steht es mit dem Verhalten ganzer irreduzibler N-Punkt-Funktionen?

Dazu schreibt man den scheinbaren Divergenzgrad etwas um. Man führt zunächst einige einen Vertex charakterisierenden Größen ein,

$$\begin{aligned} b_v &= \text{Zahl der am Vertex } v \text{ endenden Boson-Linien} \\ f_v &= \text{Zahl der am Vertex } v \text{ endenden Fermion-Linien} \\ \delta_v &= \text{Zahl der am Vertex } v \text{ auftretenden Ableitungen} \quad . \end{aligned}$$

Wechselwirkungs-Lagrangedichten, bei denen Ableitungen von Feldoperatoren auftraten, sind uns bis jetzt noch nicht begegnet. Sie werden zum Beispiel in der skalaren Quantenelektrodynamik und der QCD benötigt und sollen hier im Rahmen dieser allgemeinen Überlegung mit eingeschlossen werden. Jede Ableitung ∂_ν eines Feldoperators an einem Vertex führt im Impulsraum auf einen Faktor k_ν , der diesem Vertex in den Feynman-Regeln zugeordnet ist. Diese Impulse verschlechtern die Konvergenz des Feynman-Integrals um $\sum_v \delta_v$, wobei die Summe über alle Vertices des Diagramms läuft.

Aus diesen Größen definiert man den Vertexfaktor

$$\omega_v \equiv \frac{3}{2}f_v + b_v + \delta_v \quad , \quad (6.3)$$

der im Grunde die Dimension der Feldoperator-Kombination in \mathcal{L}_{int} angibt,

$$\begin{aligned} Dim[\hat{\psi}] &= E^{\frac{3}{2}} \quad , \quad Dim[\hat{A}] = E \quad , \quad Dim[\partial_\nu] = E \\ \Rightarrow \quad E^4 &= Dim[\mathcal{L}_{int}] = Dim[\text{Kopplungskonstante}] \cdot E^{\omega_v} \quad . \end{aligned} \quad (6.4)$$

In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele für den Vertexfaktor angegeben.

Theorie	\mathcal{L}_{int}	f_v	b_v	δ_v	ω_v
QED	$-e\hat{\psi}\hat{A}\hat{\psi}$	2	1	0	4
skalare QED	$-ieA_\nu[\phi^+(\partial^\nu\phi) + (\partial^\nu\phi^+)\phi]$	0	3	1	4
skalare QED	$e^2A^2\phi^+\phi$	0	4	0	4
Fermi-Kopplung	$\hat{\psi}\gamma_\nu(1-\gamma_5)\hat{\psi}\hat{\psi}\gamma^\nu(1-\gamma_5)\hat{\psi}$	4	0	0	6
QCD	$-gf^{abc}A_\nu^aA_\rho^b\partial^\nu A^{c,\rho}$	0	3	1	4
QCD	$-\frac{g^2}{4}f^{bca}f^{ars}A_\nu^bA_\rho^cA^{r,\nu}A^{s,\rho}$	0	4	0	4
QCD	$-gA_\nu^a\bar{\psi}\gamma^\nu\frac{\lambda^a}{2}\psi$	2	1	0	4
Φ^3 -Theorie	$\frac{\lambda}{3!}\Phi^3$	0	3	0	3
Φ^4 -Theorie	$\frac{\lambda}{4!}\Phi^4$	0	4	0	4
Φ^5 -Theorie	$\frac{\lambda}{5!}\Phi^5$	0	5	0	5

Für beliebige Diagramme ist stets die Zahl der Enden innerer Propagatoren gleich der Zahl der Eingänge an den Vertices minus der Zahl der äußeren Anschlüsse,

$$\begin{aligned}\sum_v f_v &= 2I_F + E_F \\ \sum_v b_v &= 2I_B + E_B \quad .\end{aligned}$$

Eingesetzt in Gl.(6.2) ergibt das unter Berücksichtigung der Ableitungskopplung

$$\begin{aligned}\omega(G) &= 4 + \sum_v \left(\frac{3}{2}f_v + b_v + \delta_v\right) - 4V - \frac{3}{2}E_F - E_B \\ &= 4 + \sum_v (\omega_v - 4) - \frac{3}{2}E_F - E_B \quad .\end{aligned}\tag{6.5}$$

Damit ist eine Darstellung für $\omega(G)$ gefunden, die es erlaubt, irreduzible Funktionen insgesamt zu diskutieren. Denn die Zahl der äußeren Anschlüsse definiert gerade den Typ der Funktion und die Struktur der Vertices ist durch die Theorie vorgegeben. Der Vertexfaktor ω_v geht also ganz wesentlich in den Divergenzgrad ein. Man unterscheidet mit ihm drei Typen von Theorien:

1. $\omega_v > 4$: Für beliebiges E_F und E_B , d.h. für jede beliebige N-Punkt-Funktion, nimmt $\omega(G)$ mit der Zahl der Vertices, d.h. mit der Ordnung der Kopplungskonstanten, zu und wird daher von einer gewissen Ordnung ab stets größer als Null. Ab einer bestimmten Ordnung divergieren daher alle Greensfunktionen der Theorie. Man würde unendlich viele Renormierungskonstanten benötigen, um alle Divergenzen zu eliminieren. Solche Theorien nennt man nicht renormierbar. Beispiele sind die Fermi-Kopplung oder die Φ^5 -Theorie.
2. $\omega_v = 4$: In diesem Fall hängt $\omega(G)$ nicht von der Zahl der Vertices, d.h. von der Ordnung der Kopplungskonstanten, ab,

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B \quad .$$

Der Divergenzgrad wird allein vom Typ der N-Punkt-Funktion bestimmt. Es gibt endlich viele Funktionen, bei denen in allen Ordnungen $\omega(G) \geq 0$ gilt, d.h. alle Beiträge divergieren. Alle anderen N-Punkt-Funktionen sind Über-Alles konvergent, können jedoch divergente Subgraphen aus der Menge der divergenten Typen enthalten. Diese Theorien heißen renormierbar. Man benötigt endlich viele Renormierungskonstanten, um die endlich vielen N-Punkt-Funktionen konvergent zu halten. Alle realen Eichtheorien sind Beispiele für diesen Typ.

3. $\omega_v < 4$: Hier nimmt der Divergenzgrad mit der Zahl der Vertices ab. Es gibt also überhaupt nur endlich viele divergente Diagramme, die zu einigen wenigen Funktionen beitragen. Solche Theorien bezeichnet man als superrenormierbar. Sie sind im allgemeinen physikalisch uninteressant.

An dieser Stelle sei noch eine Anmerkung zu massiven Vektorbosonen angefügt. Deren freier Propagator,

$$D_{\rho\nu}^{(0)}(k) = -i \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2} \right) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad ,$$

verschwindet für große k^2 nicht und erfordert daher bei der Abschätzung der Konvergenz von Feynman-Integralen eine andere Zählweise,

$$\begin{aligned} \omega(G) &= 4L - I_F \\ &= 4 + \sum_v \left(\frac{3}{2}f_v + 2b_v + \delta_v - 4 \right) - \frac{3}{2}E_F - 2E_B \quad . \end{aligned}$$

Die minimale Kopplung führt daher im Falle massiver Vektorbosonen erwartungsgemäß auf eine nicht renormierbare Theorie.

Die gewöhnliche QED soll jetzt im Detail diskutiert werden. Dazu stellt man zunächst eine Tabelle der divergenten N-Punkt-Funktionen der QED auf:

E_F	E_B	$\omega(G)$	Tat. Div.	1.Ord.	2.Ordnung	Konst.
0	2	2	0			Z_3
0	3	1	–	wegen Ladungskonjugationsinvarianz ausgeschlossen		–
0	4	0	–4		diverse	–
2	0	1	0			$Z_2, \delta m$
2	1	0	0			Z_1

In dieser Tabelle sind neben dem scheinbaren Divergenzgrad $\omega(G)$ auch der tatsächliche Divergenzgrad und die zugehörige Renormierungskonstante angegeben.

In der QED divergieren von fünf möglichen irreduziblen Funktionen nur drei. Zum einen verschwinden aufgrund der Ladungskonjugationsinvarianz der Theorie alle Loops und damit auch alle N-Punkt-Funktionen mit ungeradzahlig vielen äußeren Photon-Anschlüssen (Furry's Theorem). Außerdem war in Kapitel 3.2 gezeigt worden, daß die Photon-Photon-Streuamplitude aufgrund der Eichinvarianz der Theorie die Form

$$\Gamma^{(0,4),\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} q_3^{\nu_3} q_4^{\nu_4} \Phi_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

haben muß, Gl.(3.21). Anstelle des scheinbaren Divergenzgrades 0 ist ihr tatsächlicher Divergenzgrad daher -4 , weil 4 Dimensionen der Energie faktorisieren und jedes Loop-Integral um diese 4 Dimensionen schneller konvergiert.

Auch bei den verbleibenden drei divergenten Funktionen, der Vakuumpolarisation $\omega^{\rho\nu}(k)$, der Selbstenergie $\Sigma(p)$ und der Vertexkorrektur $\Gamma^\rho(p, k)$,

$$\Lambda^\rho(p, k) = - i e \left[\gamma^\rho + \Gamma^\rho(p, k) \right] \quad , \quad (6.6)$$

reduziert die Eichinvarianz den Divergenzgrad. Das ist bei der Vakuumpolarisation schon explizit gezeigt worden (hier faktorisiert der Transversalitätsfaktor zwei Dimensionen der Energie) und ist bei der Selbstenergie aufgrund der Ward-Identität 3.16 unmittelbar klar. Eine Diskussion ihrer Renormierungskonstanten folgt im nächsten Kapitel. Alle höheren N-Punkt-Funktionen sind Über-Alles konvergent. Sie enthalten aber selbstverständlich Graphen der Vakuumpolarisation, der Selbstenergie und der Vertexkorrektur als Teilgraphen.

Kapitel 7

Das Counterterm-Verfahren: Allgemeine Formulierung

In diesem Kapitel soll die Renormierung der QED in geschlossener Form dargestellt werden. Dabei wird auf viele Ergebnisse zurückgegriffen, die in den vorangegangenen Kapiteln erarbeitet worden sind.

Um zeigen zu können, daß die Loop-Beiträge zu irreduziblen Funktionen als echt quantenmechanische Korrekturen, genauer als eine Reihe in \hbar , aufgefaßt werden können, wird zunächst geklärt, an welchen Stellen in den Greensfunktionen \hbar , das bisher unterdrückt worden ist, auftritt. Dann wird das Counterterm Verfahren noch einmal allgemein formuliert. Es zeigt sich, daß zwischen nicht renormierten und renormierten Greensfunktionen ein einfacher multiplikativer Zusammenhang besteht, der durch die Renormierungskonstanten vermittelt wird. Deren präzise Definition folgt im Anschluß bei der Betrachtung der drei über-Alles divergenten Funktionen der QED. Um das Renormierungsschema auch für höhere Ordnungen besonders anschaulich zu machen, wird es schließlich für die massive QED bis zur zweiten Ordnung explizit vorgeführt. Da die masselose QED zum einen einfacher handhabbar aber auch für den Hochenergie Grenzfall der massiven Theorie besonders interessant ist, wird sie im letzten Abschnitt noch einmal getrennt bis zur dritten Ordnung diskutiert.

7.1 Reinstallation von \hbar

Wie bereits in Kapitel 5.3 angedeutet wurde, sollen die zur Renormierung nötigen Terme als Quantenkorrekturen interpretiert werden. Um diese Interpretation zu rechtfertigen, muß zunächst geklärt werden, wo überall \hbar in die N-Punkt-Funktionen eingeht.

Für \hbar gibt es im Grunde zwei Quellen: Zum einen enthalten die Kommutationsrelationen der Feldoperatoren einen Faktor \hbar ,

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_\alpha(t, \underline{x}), \hat{\bar{\psi}}_\beta(t, \underline{y})\} &= \hbar \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \\ [\partial_0 \hat{A}_\rho(t, \underline{x}), \hat{A}_\nu(t, \underline{y})] &= i \hbar g_{\rho\nu} \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \quad . \end{aligned}$$

Daher gilt

$$(i\hbar\partial - m) \langle 0 | T \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | T (i\hbar\partial - m) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\bar{\psi}}_\beta(y) | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
& +i\hbar\delta(x^0 - y^0)\gamma^0 \langle 0 | \hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) + \hat{\bar{\psi}}(y)\hat{\psi}(x) | 0 \rangle \\
& = i\hbar^2\delta^{(4)}(x - y)
\end{aligned}$$

und analog

$$\left[(\hbar^2\partial_\beta\partial^\beta + \mu^2)g^{\rho\nu} - \hbar^2(1 - \lambda)\partial^\rho\partial^\nu \right] \langle 0 | T\hat{A}_\nu(x)\hat{A}_\alpha(y) | 0 \rangle = i\hbar^3g^\rho{}_\alpha\delta^{(4)}(x - y) .$$

Die Propagatoren lauten daher einschließlich \hbar -Faktoren

$$\begin{aligned}
G(x - y) &= i\hbar^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} e^{-\frac{i}{\hbar}p(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= i\hbar \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + \frac{m}{\hbar}}{p^2 - \frac{m^2}{\hbar^2} + i\epsilon}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
D^{\rho\nu}(x - y) &= -i\hbar^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} e^{-\frac{i}{\hbar}k(x-y)} \left[g^{\rho\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} + i\epsilon} \right] \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\
&= -i\hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[g^{\rho\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 - \frac{\mu^2}{\hbar^2\lambda} + i\epsilon} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{\mu^2}{\hbar^2} + i\epsilon} .
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Um die Ordnung eines Diagramms in \hbar eindeutig zu klären, sollte eigentlich die Darstellung verwendet werden, in der die Propagatoren im Impulsraum \hbar nicht mehr enthalten. Die Ordnung von \hbar kann aber nicht davon abhängen, ob man massive Fermionen oder masselose Teilchen betrachtet. Daher sind beide obige Formen für die Abzählung der Faktoren \hbar , die einem Diagramm zugeordnet werden müssen, äquivalent. Beide Formen unterscheiden sich aufgrund der verschiedenen Definition der Fourier-Transformierten nur in der absoluten Potenz von \hbar , die zu einem Diagramm gehört. Die relative Potenz von \hbar aufgrund der Zahl der inneren Propagatoren ist gleich. Die Darstellung

$$\begin{aligned}
G(p) &= i\hbar \frac{\not{p} + \frac{m}{\hbar}}{p^2 - \frac{m^2}{\hbar^2} + i\epsilon} \\
D^{\rho\nu}(k) &= -i\hbar \left[g^{\rho\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 - \frac{\mu^2}{\hbar^2\lambda} + i\epsilon} \right] \frac{1}{k^2 - \frac{\mu^2}{\hbar^2} + i\epsilon}
\end{aligned}$$

ist aber wesentlich leichter auszuwerten. In ihr erhält jeder Propagator einen zusätzlichen Faktor \hbar .

Die zweite Quelle von \hbar ist der Operator $U(t)$, der das wechselwirkende System auf das nichtwechselwirkende zurückführt,

$$U(t) = T \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d^4x \mathcal{L}_{int}[\hat{\psi}, \hat{A}] \right\} .$$

Der Exponent muß selbstverständlich dimensionslos sein. Damit erhält jeder Vertex einen zusätzlichen Faktor $1/\hbar$.

Bei einem Diagramm mit I inneren Linien und V Vertices ergibt sich so die Ordnung

$$\hbar^{I-V} ,$$

oder, ausgedrückt durch die Zahl der Loops L ,

$$\hbar^{L-1} \quad .$$

Schließlich kann man noch $3V = 2I + E$ berücksichtigen, wobei E die Zahl der äußeren Anschlüsse bedeutet,

$$\hbar^{\frac{V-E}{2}} \quad .$$

Die relative Ordnung eines Diagramms in \hbar ist also der in der Feinstrukturkonstanten α und der Zahl der Loops äquivalent. Höhere Ordnungen der Störungstheorie sind daher gleichzeitig Quantenkorrekturen.

Im weiteren soll \hbar wieder unterdrückt werden.

7.2 Das Counterterm-Verfahren

Das legt die folgende Argumentation nahe: Die Divergenzen entstehen durch Loop-Integrationen. Sie treten daher erst in Beiträgen erster Ordnung in \hbar zu beliebigen N-Punkt-Funktionen auf. Mit ansteigender Zahl der Loops kommen immer wieder neue Divergenzen dazu. Die Divergenzen sind daher quantenmechanischer Natur. Die Lagrangedichte, die bis jetzt verwendet wurde, ist aber aus rein klassischen Überlegungen gewonnen worden. Daher müssen Quantenkorrekturen an sie angefügt werden,

$$\mathcal{L}_{qm} = \mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \hbar \delta \mathcal{L}^{[1]} + \hbar^2 \delta \mathcal{L}^{[2]} + \dots \quad .$$

Die Quantenkorrekturen sollen selbstverständlich die Struktur der Theorie nicht verändern. Daher werden die Feldoperator-Kombinationen, die in ihnen vorkommen, die gleichen wie in der ursprünglichen Lagrangedichte sein. Es werden nur die Parameter der Theorie, die Kopplungskonstante und die Masse des Fermions, sowie die Normierung der Feldoperatoren modifiziert,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = & -\frac{1}{4} Z_3(e, m) (\partial_\rho \hat{A}_{R,\nu} - \partial_\nu \hat{A}_{R,\rho}) (\partial^\rho \hat{A}_R^\nu - \partial^\nu \hat{A}_R^\rho) \\ & - Z_3(e, m) \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho \hat{A}_R^\rho)^2 + Z_3(e, m) \frac{\mu^2}{2} \hat{A}_{R,\rho} \hat{A}_R^\rho \\ & + Z_2(e, m) \hat{\psi}_R (i \not{\partial} - m + \delta m(e, m)) \hat{\psi}_R - Z_1(e, m) e \hat{\psi}_R \hat{A}_R \hat{\psi}_R \quad . \end{aligned} \quad (7.3)$$

Der Lagrangeparameter λ wird hier nicht abweichend von $-\frac{1}{4}F^2$ -Term modifiziert, da alle Resultate sowieso unabhängig von λ sind. Die Einführung einer eigenen multiplikativen Renormierungskonstante bringt daher nichts. Das gleiche gilt für den Photon-Massenterm, da am Ende doch der Grenzwert $\mu \rightarrow 0$ genommen wird. Die $Z_i(e, m)$ und $\delta m(e, m)$ werden hier von vornherein als Funktionen von e und m angesehen. Sie sind in jeder Ordnung so zu wählen, daß in dieser Ordnung e die tatsächliche Elektronenladung und m die wahre Elektronenmasse darstellt. Sie sind daher Reihen in \hbar . Eine präzisere Fassung dieser Bedingungen wird gleich vorgenommen.

Die zugehörigen renormierten Greensfunktionen erhält man als Erwartungswerte der renormierten Feldoperatoren,

$$G_{R,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) = \langle 0 | T \hat{\psi}_R(x_1) \dots \hat{\psi}_R(x_n) \hat{\bar{\psi}}_R(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}_R(y_n) \hat{A}_{R,\rho_1}(z_1) \dots \hat{A}_{R,\rho_l}(z_l) | 0 \rangle, \quad (7.4)$$

d.h. insbesondere

$$G_R(x-y) = \langle 0 | T \hat{\psi}_R(x) \hat{\bar{\psi}}_R(y) | 0 \rangle \quad (7.5)$$

$$D_{R,\rho\nu}(x-y) = \langle 0 | T \hat{A}_{R,\rho}(x) \hat{A}_{R,\nu}(y) | 0 \rangle \quad (7.6)$$

$$G_{R,\rho}^{(2,1)}(x,y,z) = \langle 0 | T \hat{\psi}_R(x) \hat{\bar{\psi}}_R(y) \hat{A}_{R,\rho}(z) | 0 \rangle. \quad (7.7)$$

Die Berechnung der renormierten Propagatoren erfolgt am günstigsten über die sogenannten baren Parameter und Feldoperatoren. Man definiert sie in Analogie zu Kapitel 5,

$$\hat{\psi}_0(x) = Z_2^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_R(x) \quad (7.8)$$

$$\hat{A}_0^\rho(x) = Z_3^{\frac{1}{2}} \hat{A}_R^\rho(x) \quad (7.9)$$

$$e_0 = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}} e \quad (7.10)$$

$$m_0 = m - \delta m, \quad (7.11)$$

sodaß die renormierte Lagrangedichte formuliert in den baren Größen die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R &= -\frac{1}{4} (\partial_\rho \hat{A}_{0,\nu} - \partial_\nu \hat{A}_{0,\rho}) (\partial^\rho \hat{A}_0^\nu - \partial^\nu \hat{A}_0^\rho) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho \hat{A}_0^\rho)^2 + \frac{\mu^2}{2} \hat{A}_{0,\rho} \hat{A}_0^\rho \\ &\quad + \hat{\bar{\psi}}_0 (i \not{\partial} - m_0) \hat{\psi}_0 - e_0 \hat{\bar{\psi}}_0 \hat{A}_0 \hat{\psi}_0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

annimmt. Das ist genau die Lagrangedichte, von der man ausgegangen war, nur daß in ihr jetzt nicht die physikalisch relevanten renormierten Feldoperatoren und wahren Parameter e und m stehen, sondern die nicht renormierten baren Größen. Aus dieser Lagrangedichte kann man, wie in den vorangegangenen Kapiteln abgeleitet, die Vakuumerwartungswerte der baren Feldoperatoren in Abhängigkeit von den baren Parametern e_0 und m_0 , die in die Feynman-Regeln eingehen, berechnen,

$$G_{0,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) = \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x_1) \dots \hat{\psi}_0(x_n) \hat{\bar{\psi}}_0(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}_0(y_n) \hat{A}_{0,\rho_1}(z_1) \dots \hat{A}_{0,\rho_l}(z_l) | 0 \rangle, \quad (7.13)$$

d.h. insbesondere

$$G_0(x-y) = \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(y) | 0 \rangle \quad (7.14)$$

$$D_{0,\rho\nu}(x-y) = \langle 0 | T \hat{A}_{0,\rho}(x) \hat{A}_{0,\nu}(y) | 0 \rangle \quad (7.15)$$

$$G_{0,\rho}^{(2,1)}(x,y,z) = \langle 0 | T \hat{\psi}_0(x) \hat{\bar{\psi}}_0(y) \hat{A}_{0,\rho}(z) | 0 \rangle. \quad (7.16)$$

Aus Gl.(7.8,7.9) ergeben sich direkt die Relationen zwischen den renormierten und den baren Greensfunktionen,

$$G_{0,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) = Z_2^n Z_3^{\frac{l}{2}} G_{R,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) \quad , \quad (7.17)$$

d.h. insbesondere

$$G_0(x-y) = Z_2 G_R(x-y) \quad (7.18)$$

$$D_{0,\rho\nu}(x-y) = Z_3 D_{R,\rho\nu}(x-y) \quad (7.19)$$

$$G_{0,\rho}^{(2,1)}(x,y,z) = Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} G_{R,\rho}^{(2,1)}(x,y,z) \quad . \quad (7.20)$$

Schließlich erhält man für die irreduziblen N-Punkt-Funktionen

$$\Gamma_{0,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) = Z_2^{-n} Z_3^{-\frac{l}{2}} \Gamma_{R,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) \quad , \quad (7.21)$$

weil auf der linken Seite gegenüber Gl.(7.17) n nicht renormierte Propagatoren G_0 und l $D_0^{\rho\nu}$ abgespalten werden müssen, auf der rechten Seite dagegen n -mal G_R und l -mal $D_R^{\rho\nu}$, die sich jeweils um ein Z_2 bzw Z_3 unterscheiden. Die gleichen Relationen gelten auch im Impulsraum. Der Vollständigkeit halber sei noch eine präzise Formulierung für $G^{(2n,l)}$ angegeben, in der ausdrücklich betont wird, daß $G_0^{(2n,l)}$ mit Hilfe einer Regularisierung berechnet wird,

$$\begin{aligned} & G_{R,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(e, m, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, k_1, \dots, k_l) \quad (7.22) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2^{-n}(e, m, \Lambda) Z_3^{-\frac{l}{2}}(e, m, \Lambda) G_{0,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(e_0(e, m), m_0(e, m), \Lambda, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, k_1, \dots, k_l) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2^{-n}(e, m, \Lambda) Z_3^{-\frac{l}{2}}(e, m, \Lambda) G_{0,\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, k_1, \dots, k_l\right) \quad , \end{aligned}$$

die für die renormierte Greensfunktion entfernt werden muß. Außerdem ist angedeutet, daß die nicht renormierte Greensfunktion mit den baren Parametern zu berechnen ist. Diese können von vornherein mittels der Gln.(7.10,7.11) zugunsten von e , m und den Renormierungskonstanten eliminiert werden, d.h. jedem Vertex, an dem nach Feynman-Regeln bisher e_0 stand, wird die ganze Kombination $\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}$ zugeordnet. Damit lassen sich die $G_0^{(2n,l)}$ und daraus die $G_R^{(2n,l)}$ auch ohne Rückgriff auf die baren Parameter direkt berechnen.

Die freien Propagatoren lauten daher

$$G_0^{(0)}(p) = i \frac{\not{p} + m_0}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad (7.23)$$

$$D_0^{(0),\rho\nu}(k) = -i \left[g^{\rho\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k^\rho k^\nu}{k^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} + i\epsilon} \right] \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad . \quad (7.24)$$

Jetzt sollen die drei divergenten Funktionen der QED explizit durchgegangen werden.

7.3 Vakuumpolarisation, Selbstenergie und Vertexkorrektur

7.3.1 Vakuumpolarisation

Für den nicht renormierten Photon-Propagator erhält man in beliebiger Eichung

$$D_0^{\rho\nu}(e_0, m_0, \Lambda, k) = -i \left(g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 [1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2)] + i\epsilon} - i \frac{k_\rho k_\nu}{\lambda k^2 (k^2 + i\epsilon)} . \quad (7.25)$$

Die funktionale Abhängigkeit der nicht renormierten Vakuumpolarisation von e_0 , m_0 , Λ und k^2 folgt wie bisher direkt aus den Feynman-Regeln. Diese Funktion ist daher im Prinzip bekannt. Ihre niedrigste Ordnung wurde in Kapitel 4.2, Gl.(4.14), berechnet. Gegenüber Gl.(4.14) steht jetzt aber e_0 an der Stelle von e und m_0 an der von m ,

$$\omega_0^{(1)}(e_0, m_0, \Lambda, k^2) = \frac{e_0^2}{12\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right) - \frac{1}{3} - 2 \left(1 + \frac{2m_0^2}{k^2}\right) \left[\left(\frac{4m_0^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \arccot\left(\frac{4m_0^2}{k^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\} .$$

Allerdings spielt die Verwendung von e_0 und m_0 in der ersten Ordnung keine Rolle. Formuliert in den wahren Parametern enthält diese erste Ordnung aber bereits höhere Ordnungen in \hbar , die bei der Renormierung in höherer Ordnung wesentlich werden.

Daraus folgt gemäß Gl.(7.22) für den renormierten Photon-Propagator

$$D_R^{\rho\nu}(e, m, k) = \left(g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right) \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[Z_3(e, m, \Lambda) \left[1 + \omega_0\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, k^2\right) \right] \right]^{-1} - i Z_3(e, m, \Lambda) \frac{k_\rho k_\nu}{\lambda k^2 (k^2 + i\epsilon)} . \quad (7.26)$$

Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt ist in beliebiger Eichung nur der physikalisch relevante Teil des renormierten Photon-Propagators endlich. Der $k_\rho k_\nu$ -proportionale Teil enthält noch die beim Entfernen der Regularisierung divergente Renormierungskonstante Z_3 . Da die Beiträge zum renormierten Photon-Propagator auch in alle anderen Greensfunktionen eingehen, sind auch in diesen im allgemeinen divergente Teile vorhanden. Das Problem läßt sich aber durch konsequentes Verwenden der Landau-Eichung lösen, da dann der störende Term im renormierten Propagator verschwindet,

$$D_{L,R}^{\rho\nu}(e, m, k) = -i \left(g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[Z_3(e, m, \Lambda) \left[1 + \omega_0\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, k^2\right) \right] \right]^{-1} . \quad (7.27)$$

Nur die Landau-Eichung liefert in beliebiger Ordnung vollständig konvergente Greensfunktionen. Sie wird im weiteren ohne ausdrücklichen Hinweis ausschließlich benutzt.

Man beachte den Unterschied von Gl.(7.27) zu Gl.(5.19), der aus der Verwendung von m_0 an Stelle von m und der Existenz von Z_1 und Z_2 herrührt.

Die Normierungsbedingung für $D_R^{\rho\nu}$ erhält man aus Gl.(5.7),

$$Z_3(e, m, \Lambda) \left[1 + \omega_0\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, k^2 = 0\right) \right] = 1 , \quad (7.28)$$

was eine implizite Bestimmungsgleichung für die Renormierungskonstante $Z_3(e, m, \Lambda)$ darstellt. Im Gegensatz zu Gl.(5.9) ist diese bei vollständiger Behandlung der QED aber mit den anderen Renormierungskonstanten verkoppelt. Man benötigt also auch für diese noch drei implizite Bestimmungsgleichungen, die wiederum von Z_3 abhängen werden. Der gesamte Satz von vier Gleichungen ist Ordnung für Ordnung gekoppelt zu lösen.

Schließlich definiert man die renormierte Vakuumpolarisation wie in Gl.(5.14),

$$1 + \omega_R(e, m, k^2) \equiv \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_3(e, m, \Lambda) \left[1 + \omega_0 \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{1/2}}, m - \delta m, \Lambda, k^2 \right) \right] \quad . \quad (7.29)$$

Sie erfüllt die Bedingung

$$\omega_R(e, m, k^2 = 0) = 0 \quad . \quad (7.30)$$

7.3.2 Selbstenergie

Als nächstes soll der Elektron-Propagator betrachtet werden. Den nicht renormierten Propagator erhält man wieder aus der Resummation der Dyson-Reihe,

$$\begin{aligned} G_0(p) &= G_0^{(0)}(p) + G_0^{(0)}(p) (-i\Sigma_0(p)) G_0^{(0)}(p) + G_0^{(0)}(p) (-i\Sigma_0(p)) G_0^{(0)}(p) (-i\Sigma_0(p)) G_0^{(0)}(p) \\ &\quad + \dots \\ &= G_0^{(0)}(p) \frac{1}{1 + i\Sigma_0(p) G_0^{(0)}(p)} \\ &= \frac{1}{G_0^{(0),-1}(p) + i\Sigma_0(p)} \quad , \end{aligned} \quad (7.31)$$

wobei die Selbstenergie konventionsgemäß mit einem Vorfaktor $-i$ definiert ist. Der inverse Propagator lautet damit

$$G_0^{-1}(e_0, m_0, \Lambda, p) = -i \left[\not{p} - m_0 - \Sigma_0(e_0, m_0, \Lambda, p) \right] \quad . \quad (7.32)$$

Der renormierte Propagator läßt sich dann leicht angeben,

$$G_R^{-1}(e, m, p) = -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2(e, m, \Lambda) \left[\not{p} - m + \delta m(e, m, \Lambda) - \Sigma_0 \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{1/2}}, m - \delta m, \Lambda, p \right) \right] \quad . \quad (7.33)$$

Als nächstes müssen Normierungsbedingungen für den Elektron-Propagator formuliert werden. Da der volle renormierte Elektron-Propagator ein reales freies Elektron (in Wechselwirkung mit dem Photon-Feld) beschreiben soll, muß er auf der Massenschale, auf der sich ein reales freies Elektron ja befindet, einen Pol erster Ordnung haben. Diese Bedingung definiert im Rahmen des Formalismus praktisch die Masse m des Elektrons. Bei einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen muß der Propagator auf der Massenschale $p^2 = m^2$ daher die Form des freien Propagators annehmen,

$$G_R^{-1}(e, m, p) \underset{p^2=m^2}{\sim} -i (\not{p} - m) \quad . \quad (7.34)$$

Die Bedingung (7.34) soll jetzt etwas präziser gefaßt werden,

$$G_R^{-1}(e, m, p)|_{\not{p}=m} = 0 \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} G_R^{-1}(e, m, p)|_{\not{p}=m} = -i \quad . \quad (7.36)$$

Das bedeutet für die Renormierungskonstanten

$$\delta m(e, m, \Lambda) = \Sigma_0\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p\right)\Big|_{\not{p}=m} \quad (7.37)$$

$$Z_2(e, m, \Lambda) = \left[1 - \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_0\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p\right)\Big|_{\not{p}=m}\right]^{-1} \quad (7.38)$$

Die Auswertung an der Stelle $\not{p} = m$ ist dabei als formale Ersetzung von \not{p} durch m zu verstehen. Die Bedingungen (7.35-7.38) sollen noch etwas genauer untersucht werden. Mit der allgemeinen Form der Selbstenergie

$$\Sigma_0(p) = \not{p}\Sigma_1(p^2) + m\Sigma_2(p^2) \quad (7.39)$$

mit nicht spinorwertigen Funktionen $\Sigma_{1,2}(p^2)$, d.h.

$$G_R^{-1}(p) = -i Z_2 \left[\not{p} \{1 - \Sigma_1(p^2)\} - m \{1 + \Sigma_2(p^2)\} + \delta m \right] ,$$

wäre

$$G_R^{-1}(e, m, p)\Big|_{p^2=m^2} = -i (\not{p} - m) \quad (7.40)$$

mit

$$\delta m = m\Sigma_1(m^2) + m\Sigma_2(m^2) \quad (7.41)$$

$$Z_2 = \left(1 - \Sigma_1(m^2)\right)^{-1} \quad (7.42)$$

Genüge getan. Die Gln.(7.35-7.38) sind dagegen eine formale Schreibweise für

$$\delta m = m\Sigma_1(m^2) + m\Sigma_2(m^2) \quad (7.43)$$

$$Z_2^{-1} = 1 - \Sigma_1(m^2) - 2m^2 \left(\frac{\partial}{\partial(p^2)} \Sigma_1(p^2)\Big|_{p^2=m^2} + \frac{\partial}{\partial(p^2)} \Sigma_2(p^2)\Big|_{p^2=m^2} \right) , \quad (7.44)$$

wobei der letzte Summand zu Z_2^{-1} nicht verschwindet. Dabei wurde Gebrauch davon gemacht, daß

$$\not{p}^2 = p^2 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \not{p}} = 2\not{p} \frac{\partial}{\partial(p^2)}$$

gilt. In die Bedingung (7.36) geht auch die Ableitung der Selbstenergie ein ! Diese Wahl der Normierungsbedingungen bewirkt, daß der renormierte Propagator an der Stelle $p^2 = m^2$ um einen endlichen Faktor vom freien Propagator verschieden ist, also nicht das Residuum 1 besitzt. In der ersten Ordnung läßt sich das direkt zeigen,

$$\begin{aligned} G_R^{(1),-1}(e, m, p) &= -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2^{(1)}(e, m, \Lambda) \left[\not{p} - m + \delta^{(1)}m(e, m, \Lambda) - \Sigma_0^{(1)}(e, m, \Lambda, p) \right] \\ &= -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_0^{(1)}(e, m, \Lambda, p)\Big|_{\not{p}=m} \right] \\ &\quad \cdot \left[\not{p} - m + \Sigma_0^{(1)}(e, m, \Lambda, p)\Big|_{\not{p}=m} - \Sigma_0^{(1)}(e, m, \Lambda, p) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -i \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\not{p} - m - \Sigma_0^{(1)}(e, m, \Lambda, p) + \Sigma_0^{(1)}(e, m, \Lambda, p) \Big|_{\not{p}=m} \right. \\
& \left. + (\not{p} - m) \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_0^{(1)}(e, m, \Lambda, p) \Big|_{\not{p}=m} \right] . \quad (7.45)
\end{aligned}$$

Aus der Selbstenergie werden also gerade die ersten beiden Glieder einer Taylor-Entwicklung um $\not{p} = m$ heraussubtrahiert. An der formalen Stelle $\not{p} = m$ nimmt der renormierte Propagator also genau die Form des freien an. Führt man diese formale Darstellung mittels Gl.(7.38) auf die nicht spinorwertigen Funktionen $\Gamma_{1,2}(p^2)$ zurück, erhält man

$$\begin{aligned}
G_R^{(1),-1}(e, m, p) = & -i \not{p} \left[1 - \Sigma_1^{(1)}(p^2) + \Sigma_1^{(1)}(m^2) \right. \\
& \left. + 2m^2 \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_1^{(1)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_2^{(1)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} \right) \right] \\
& + i m \left[1 + \Sigma_2^{(1)}(p^2) - \Sigma_2^{(1)}(m^2) \right. \\
& \left. + 2m^2 \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_1^{(1)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_2^{(1)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} \right) \right] .
\end{aligned}$$

Der Propagator hat also an der Stelle $p^2 = m^2$ die Form des freien Propagators aber multipliziert mit

$$1 + 2m^2 \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_1^{(1)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} + \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_2^{(1)}(p^2) \Big|_{p^2=m^2} \right) .$$

Die Bedingung (7.40) hätte gerade auf

$$G_R^{(1),-1}(e, m, p) = -i \not{p} \left[1 - \Sigma_1^{(1)}(p^2) + \Sigma_1^{(1)}(m^2) \right] + i m \left[1 + \Sigma_2^{(1)}(p^2) - \Sigma_2^{(1)}(m^2) \right] .$$

geführt. Beide Renormierungen unterscheiden sich um einen konstanten Faktor. Die eigentliche Subtraktion der Divergenzen ist in beiden identisch.

Nun definiert man die renormierte Selbstenergie

$$\not{p} - m - \Sigma_R(e, m, p) \equiv \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2(e, m, \Lambda) \left[\not{p} - m + \delta m(e, m, \Lambda) - \Sigma_0 \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{1/2}}, m - \delta m, \Lambda, p \right) \right] , \quad (7.46)$$

sodaß

$$G_R^{-1}(e, m, p) = -i \left[\not{p} - m - \Sigma_R(e, m, p) \right] \quad (7.47)$$

gilt. Entsprechend den Gln.(7.37,7.38) erfüllt Σ_R die Bedingungen

$$\Sigma_R(e, m, p) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_R(e, m, p) \Big|_{\not{p}=m} = 0 . \quad (7.49)$$

Die Bedingung (7.40) hätte dagegen

$$\Sigma_R(e, m, p) \Big|_{p^2=m^2} = 0 \quad (7.50)$$

zur Folge gehabt.

7.3.3 Vertextkorrektur

Die dritte divergente Funktion der QED ist die Vertextkorrektur. Zunächst ergibt sich für die (2,1)-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned}\Lambda_R^\rho(e, m, p, k) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2(e, m, \Lambda) Z_3^{\frac{1}{2}}(e, m, \Lambda) \Lambda_0^\rho\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p, k\right) \\ &= -i e \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_1(e, m, \Lambda) \left\{ \gamma^\rho + \Gamma_0^\rho\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p, k\right) \right\} .\end{aligned}\quad (7.51)$$

Die Normierungsbedingung folgt praktisch aus der niedrigsten Ordnung,

$$\Lambda_R^\rho(e, m, p, k)|_{\not{p}=\not{k}=m} = -i e \gamma^\rho , \quad (7.52)$$

was die Renormierungskonstante Z_1 festlegt,

$$\gamma^\rho Z_1^{-1}(e, m, \Lambda) = \gamma^\rho + \Gamma_0^\rho\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p, k\right)|_{\not{p}=\not{k}=m} . \quad (7.53)$$

Dabei ist hier die formale Bedingung $\not{p} = \not{k} = m$ nur der Ausdruck der Tatsache, daß nur eine Forderung gestellt werden darf. Die Gleichung (7.52) für $p^\rho = k^\rho, p^2 = m^2$ zu fordern ergäbe zwei Bedingungen für die beiden Teile proportional zu γ^ρ und p^ρ in der Vertextkorrektur. Das wird an der allgemeinen Form der Vertextkorrektur für $p^\nu = k^\nu$,

$$\Gamma_0^\rho(p, p) = m \gamma^\rho [\not{p} \Gamma_1(p^2) + m \Gamma_2(p^2)] + p^\rho [\not{p} \Gamma_3(p^2) + m \Gamma_4(p^2)] , \quad (7.54)$$

explizit deutlich. Da $\Gamma_3(m^2)$ und $\Gamma_4(m^2)$ nicht verschwinden, bliebe für $p^\nu = k^\nu, p^2 = m^2$ ein Anteil proportional p^ρ übrig. Die Forderung (7.52) kann man auch in der Form

$$\sum_{\alpha=1}^2 \bar{u}_\alpha(p) \Lambda_R^\rho(e, m, p, p) u_\alpha(p)|_{p^2=m^2} = \text{tr}[(\not{p} + m) \Lambda_R^\rho(e, m, p, p)|_{p^2=m^2}] = -4 i e p^\rho$$

aufschreiben. Der Erwartungswert der Vertextkorrektur für unpolarisierten freien Teilchen soll verschwinden. Die Bedingung (7.53) lautet genauer formuliert (kontrahiere Gl.(7.53) mit p_ρ und werte mit $\not{p} = m$ aus)

$$Z_1^{-1} = 1 + m^2 [\Gamma_1(m^2) + \Gamma_2(m^2)] + m^2 [\Gamma_3(m^2) + \Gamma_4(m^2)] . \quad (7.55)$$

Auch hier definiert man eine renormierte Vertextkorrektur

$$\gamma^\rho + \Gamma_R^\rho(e, m, p, k) \equiv \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_1(e, m, \Lambda) \left\{ \gamma^\rho + \Gamma_0^\rho\left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p, k\right) \right\} , \quad (7.56)$$

für die dann

$$\Lambda_R^\rho(e, m, p, k) = -i e \left\{ \gamma^\rho + \Gamma_R^\rho(e, m, p, k) \right\} \quad (7.57)$$

$$\Gamma_R^\rho(e, m, p, k)|_{\not{p}=\not{k}=m} = 0 \quad (7.58)$$

gilt. In erster Ordnung läßt sich die renormierte Vertexkorrektur leicht angeben,

$$\Gamma_R^{(1),\rho}(e, m, p, k) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Gamma_0^{(1),\rho}(e, m, p, k) - \Gamma_0^{(1),\rho}(e, m, p, k)|_{\not{k}=\not{m}} \right\} , \quad (7.59)$$

bzw explizit

$$\Gamma_R^{(1),\rho}(p, k) = \Gamma_0^{(1),\rho}(p, k) - m^2 \gamma^\rho \left\{ \Gamma_1^{(1),\rho}(m^2) + \Gamma_2^{(1),\rho}(m^2) + \Gamma_3^{(1),\rho}(m^2) + \Gamma_4^{(1),\rho}(m^2) \right\} .$$

Die Ward-Identität (3.16) gilt auf Grund der identischen Struktur der renormierten Lagrangedichte (7.12) für die nicht renormierte Vertexfunktion in Abhängigkeit von den baren Parametern e_0 und m_0 ,

$$\Lambda_0^\rho(e_0, m_0, \Lambda, p, p) = e_0 \frac{\partial}{\partial p_\rho} G_0^{-1}(e_0, m_0, \Lambda, p) , \quad (7.60)$$

und damit auch nach der Ersetzung $e_0 = \frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}$ und $m_0 = m - \delta m$,

$$\Lambda_0^\rho \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p, p \right) = \frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial p_\rho} G_0^{-1} \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p \right) , \quad (7.61)$$

Das bedeutet für die eigentliche Vertexkorrektur

$$\Gamma_0^\rho \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p, p \right) = - \frac{\partial}{\partial p_\rho} \Sigma_0 \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p \right) . \quad (7.62)$$

Setzt man hier die Formen (7.39) und (7.54) ein, erhält man als Relationen zwischen den einzelnen Anteilen der Vertexkorrektur und der Selbstenergie

$$\Gamma_1(p^2) = 0 \quad (7.63)$$

$$m^2 \Gamma_2(p^2) = - \Sigma_1(p^2) \quad (7.64)$$

$$\Gamma_3(p^2) = - 2 \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_1(p^2) \quad (7.65)$$

$$\Gamma_4(p^2) = - 2 \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_2(p^2) . \quad (7.66)$$

Durch Vergleich von Gl.(7.44) mit Gl.(7.55) ergibt sich dann explizit

$$Z_1(e, m, \Lambda) = Z_2(e, m, \Lambda) . \quad (7.67)$$

Diese wichtige Beziehung kann man schließlich wieder in Gl.(7.61) einsetzen,

$$\begin{aligned} \Lambda_R^\rho(e, m, p, p) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2(e, m, \Lambda) Z_3^{\frac{1}{2}}(e, m, \Lambda) \Lambda_0^\rho \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p, p \right) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} e Z_1(e, m, \Lambda) \frac{\partial}{\partial p_\rho} G_0^{-1} \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p \right) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} e Z_2(e, m, \Lambda) \frac{\partial}{\partial p_\rho} G_0^{-1} \left(\frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, \Lambda, p \right) \\ &= e \frac{\partial}{\partial p_\rho} G_R^{-1}(e, m, p) , \end{aligned} \quad (7.68)$$

und erhält so die Ward-Identität für die renormierten Funktionen,

$$\Gamma_R^\rho(e, m, p, p) = - \frac{\partial}{\partial p_\rho} \Sigma_R(e, m, p) \quad . \quad (7.69)$$

Es zeigt sich, daß die spezielle Wahl der Normierungsbedingungen (7.35,7.36) vor allem im Hinblick auf die Identität $Z_1 = Z_2$ und damit die Ward-Identitäten (7.68,7.69) wesentlich ist.

Analog zeigt man die Gültigkeit der Ward-Takahashi-Identitäten für alle höheren $(2n, l)$ -Punkt-Funktionen.

Abschließend sei noch betont, daß die Lagrangedichte der QED nur höchstens vier Renormierungskonstanten zuläßt, die Normierungsfaktoren der beiden Feldoperatoren und die beiden Parameter der Theorie. Gäbe es daher mehr als vier über-Alles divergente Funktionen, wäre ein Renormierungsprogramm ziemlich aussichtslos. Auch in dem vorliegenden Fall wäre mit dem in diesem Kapitel aufgestellten formalen Schema das Problem der Renormierung nur dann abgehandelt, wenn nur endliche Renormierungen nötig wären. Es bleibt nämlich noch zu zeigen, daß mit diesem Verfahren tatsächlich alle Divergenzen aus sämtlichen Funktionen eliminiert werden. Dies soll im nächsten Kapitel diskutiert werden.

Zuvor soll zur Illustration das Counterterm-Verfahren einmal explizit in den niedrigsten Ordnungen vorgestellt werden.

7.4 Renormierung bis zur zweiten Ordnung

Um das im letzten Abschnitt vorgestellte Schema noch etwas anschaulicher zu machen, soll es hier bis zur zweiten Ordnung explizit vorgeführt werden. Dabei wird angenommen, die drei nicht renormierten Funktionen $\omega_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2)$, $\Sigma_0(e_0, m_0, \Lambda, p)$ und $\Gamma_0^\rho(e_0, m_0, \Lambda, p, k)$ seien bis zu dieser Ordnung bekannt. Außerdem soll hier davon Gebrauch gemacht werden, daß alle drei Funktionen nur quadratisch von e_0 abhängen. Die Abhängigkeit von der Regularisierungsmasse Λ wird im weiteren der Kürze wegen unterdrückt. Dann nehmen die drei Funktionen bis zur zweiten Ordnung die Form

$$\omega_0(e_0, m_0, k^2) = e_0^2 \omega_1(m_0, k^2) + e_0^4 \omega_2(m_0, k^2) \quad (7.70)$$

$$\Sigma_0(e_0, m_0, p) = e_0^2 \Sigma_1(m_0, p) + e_0^4 \Sigma_2(m_0, p) \quad (7.71)$$

$$\Gamma_0^\rho(e_0, m_0, p, k) = e_0^2 \Gamma_1^\rho(m_0, p, k) + e_0^4 \Gamma_2^\rho(m_0, p, k) \quad (7.72)$$

an. Auch die Renormierungskonstanten sind damit gegeben,

$$Z_3(e_0, m_0) = \left[1 + e_0^2 \omega_1(m_0, 0) + e_0^4 \omega_2(m_0, 0) \right]^{-1} \quad (7.73)$$

$$\delta m(e_0, m_0) = e_0^2 \Sigma_1(m_0, m) + e_0^4 \Sigma_2(m_0, m) \quad (7.74)$$

$$Z_2(e_0, m_0) = \left[1 - e_0^2 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m_0, m) - e_0^4 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_2(m_0, m) \right]^{-1} \quad (7.75)$$

$$Z_1(e_0, m_0) = Z_2(e_0, m_0) \quad , \quad (7.76)$$

wobei das Argument m in Σ bzw seiner Ableitung eine Kurzschreibweise für $\not{p} = m$ sein soll. Schließlich gilt

$$e^2 = Z_3(e_0, m_0) e_0^2 = Z_3 \left(\frac{e}{Z_3^{\frac{1}{2}}(e, m)}, m - \delta m(e, m) \right) e_0^2 \quad (7.77)$$

$$m = m_0 + \delta m(e_0, m_0) = m_0 + \delta m\left(\frac{e}{Z_3^{\frac{1}{2}}(e, m)}, m - \delta m(e, m)\right) \quad , \quad (7.78)$$

woraus iterativ e_0 und m_0 in Abhängigkeit von e und m berechnet werden können.

Um die Renormierungskonstanten (7.73-7.76) konsistent bis zur Ordnung \hbar^2 in e und m zu formulieren, wird die Auflösung der Gln.(7.77,7.78) nur bis zur ersten Ordnung benötigt. In dieser können in Z_3 und δm e_0 und m_0 direkt durch e und m ersetzt werden,

$$e_0^2 = Z_3^{(1),-1}(e, m) e^2 = \left(1 + e^2 \omega_1(m, 0)\right) e^2 \quad (7.79)$$

$$m_0 = m - \delta^{(1)} m(e, m) = m - e^2 \Sigma_1(m, m) \quad . \quad (7.80)$$

Einsetzen von (7.79,7.80) in (7.73-7.75) und konsistentes Auswerten bis zur zweiten Ordnung ergibt

$$Z_3(e, m) = \left[1 + e^2 \omega_1(m, 0) \left[1 + e^2 \omega_1(m, 0) - e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \omega_1(m, 0) + e^4 \omega_2(m, 0)\right]\right]^{-1} \quad (7.81)$$

$$\delta m(e, m) = e^2 \Sigma_1(m, m) \left[1 + e^2 \omega_1(m, 0)\right] - e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \Sigma_1(m, m) + e^4 \Sigma_2(m, m) \quad (7.82)$$

$$Z_2(e, m) = \left[1 - e^2 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) \left[1 + e^2 \omega_1(m, 0) + e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) - e^4 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_2(m, m)\right]\right]^{-1} \quad , \quad (7.83)$$

sowie nach Inversion

$$Z_3(e, m) = 1 - e^2 \omega_1(m, 0) + e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \omega_1(m, 0) - e^4 \omega_2(m, 0) \quad (7.84)$$

$$Z_2(e, m) = 1 + e^2 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) + e^4 \left(\frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m)\right)^2 + e^4 \omega_1(m, 0) \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) - e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) + e^4 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_2(m, m) \quad . \quad (7.85)$$

Daraus kann man die renormierten Funktionen bis zur zweiten Ordnung gewinnen,

$$\begin{aligned} \omega_R(e, m, k^2) &= Z_3(e, m) \left[1 + \omega_0\left(\frac{e}{Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, k^2\right)\right] - 1 \\ &= \left[1 - e^2 \omega_1(m, 0) + e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \omega_1(m, 0) - e^4 \omega_2(m, 0)\right] \\ &\quad \cdot \left[1 + e^2 \omega_1(m, k^2) + e^4 \omega_1(m, 0) \omega_1(m, k^2) - e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \omega_1(m, k^2) + e^4 \omega_2(m, k^2)\right] - 1 \\ &= e^2 \omega_1(m, k^2) - e^2 \omega_1(m, 0) + e^4 \omega_2(m, k^2) - e^4 \omega_2(m, 0) \end{aligned} \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned}
& -e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \omega_1(m, k^2) + e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \omega_1(m, 0) \\
\Sigma_R(e, m, p) &= Z_2(e, m) \left[-\not{p} + m - \delta m(e, m) + \Sigma_0 \left(\frac{e}{Z_3^{\frac{1}{2}}}, m - \delta m, p \right) \right] + \not{p} - m \\
&= \left[1 + e^2 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) + e^4 \left(\frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + e^4 \omega_1(m, 0) \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) - e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) + e^4 \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_2(m, m) \right] \\
&\cdot \left[-\not{p} + m - e^2 \Sigma_1(m, m) - e^4 \Sigma_1(m, m) \omega_1(m, 0) + e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \Sigma_1(m, m) \right. \\
&\quad \left. - e^4 \Sigma_2(m, m) + e^2 \Sigma_1(m, p) + e^4 \Sigma_1(m, p) \omega_1(m, 0) \right. \\
&\quad \left. - e^4 \Sigma_1(m, m) \frac{\partial}{\partial m} \Sigma_1(m, p) + e^4 \Sigma_2(m, p) \right] + \not{p} - m \\
&= e^2 \left[\Sigma_1(m, p) - \Sigma_1(m, m) - (\not{p} - m) \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) \right] \tag{7.87} \\
&+ e^4 \left[\left(\omega_1(m, 0) + \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) \right) \right. \\
&\quad \cdot \left(\Sigma_1(m, p) - \Sigma_1(m, m) - (\not{p} - m) \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) \right) \\
&\quad \left. - \Sigma_1(m, m) \left(\frac{\partial}{\partial m} \Sigma_1(p, m) - \frac{\partial}{\partial m} \Sigma_1(m, m) - (\not{p} - m) \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_1(m, m) \right) \right. \\
&\quad \left. + \Sigma_2(m, p) - \Sigma_2(m, m) - (\not{p} - m) \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma_2(m, m) \right] .
\end{aligned}$$

Man erkennt, wie die beiden Funktionen ineinander eingehen. Die Renormierung der Vertexkorrektur soll hier nicht noch einmal vorgeführt werden.

Mit Hilfe der Gln.(4.58,4.63,4.65) kann man die Renormierungskonstanten und die renormierten Funktionen (Feynman-Eichung, $f(D) \equiv 4$) in erster Ordnung explizit angeben,

$$Z_3(e, m) = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right) \right\} \tag{7.88}$$

$$\delta m(e, m) = \frac{3e^2}{16\pi^2} m \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right) + \frac{4}{3} \right\} \tag{7.89}$$

$$Z_2(e, m) = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi M^2}{m^2} \right) + 4 + 2\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right\} \tag{7.90}$$

$$\omega_R^{(1)}(k^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \left(\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arccot} \left(\frac{4m^2}{k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right\} \tag{7.91}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{F,R}^{(1)}(p) &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ 4m \left[\frac{5}{8} - \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \not{p} \left[\frac{3}{2} + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + (\not{p} - m) \left[\frac{9}{2} + 2\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right\} . \tag{7.92}
\end{aligned}$$

Für die renormierte Vakuumpolarisation erhält man natürlich das alte Ergebnis (5.16). Die renormierte Selbstenergie ist abhängig von der gewählten Eichung, nicht aber von der verwendeten Regularisierung. Die Unterschiede zwischen Pauli-Villars- und dimensionaler Regularisierung zeigen sich nur in Konstanten, die durch die Renormierung erst festgelegt werden. Daher unterscheiden sich zwar die regularisierten Funktionen und die Renormierungskonstanten, die renormierten Funktionen jedoch nicht mehr.

Es sei noch einmal generell darauf hingewiesen, daß das gesamte Renormierungsschema Eichungs-abhängig ist.

7.5 Masselose Quantenelektrodynamik

Die Untersuchung der Quantenelektrodynamik masseloser Fermionen ist vor allem aus konzeptionellen Gründen interessant. Zum einen vereinfacht sich das Renormierungsschema, weil für $m = 0$ auch die Renormierung der Masse entfällt. Andererseits ist im masselosen Fall auch die explizite Berechnung der drei divergenten Funktionen in höherer Ordnung relativ leicht möglich. Schließlich bestimmt der so behandelbare Teil der Greensfunktionen das Hochenergie-Verhalten der entsprechenden Funktionen im massiven Fall. Das ist insbesondere im Hinblick auf die Diskussion von Renormierungsgruppengleichungen interessant.

Zunächst sollen einige allgemeine Bemerkungen zur Form der drei wesentlichen Funktionen vorangestellt werden. Da die Masse m als dimensionsbehaftete Größe jetzt nicht mehr zur Verfügung steht, kann man aus der Dimension der irreduziblen Funktionen Rückschlüsse auf ihre funktionale Abhängigkeiten von Ladung und Impuls gewinnen. Die Vakuumpolarisation $\omega_0(e_0, k^2)$ ist dimensionslos. Die einzige zur Kompensation des Impulses k^2 verfügbare Größe ist die Regularisierungsmasse Λ . Außerdem hängt die Vakuumpolarisation nur quadratisch von e bzw e_0 ab. Man schreibt sie daher als Funktion der Feinstrukturkonstanten α ,

$$\omega_0(e_0, k^2) = \omega\left(\alpha_0, \frac{k^2}{\Lambda^2}\right) \quad . \quad (7.93)$$

Analog erhält man für die Selbstenergie eine Proportionalität zu \not{p} , da die Regularisierungsmasse nicht linear in additiver Form auftreten kann, was man im Rahmen der dimensional Regularisierung leicht einsieht: Λ geht nur multiplikativ mit der baren Feinstrukturkonstanten α_0 ein und kann deshalb nur unter dem Logarithmus vorkommen. Daher ist \not{p} die einzige Größe, die die Dimension E hat,

$$\Sigma_0(e_0, p) = \not{p} \Sigma\left(\alpha_0, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \quad . \quad (7.94)$$

Schließlich bleibt aus den gleichen Gründen für die Vertexkorrektur bei $p^\nu = k^\nu$,

$$\Gamma_0^\rho(e_0, p, p) = \gamma^\rho \Gamma_1\left(\alpha_0, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{p^\rho \not{p}}{p^2} \Gamma_2\left(\alpha_0, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \quad . \quad (7.95)$$

Die Ward-Identität legt dann sofort

$$\Gamma_1\left(\alpha_0, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right) = -\Sigma\left(\alpha_0, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \quad (7.96)$$

$$\Gamma_2\left(\alpha_0, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right) = -2p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma\left(\alpha_0, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \quad (7.97)$$

fest. Die allgemeine Form von $\Gamma_0^\rho(\epsilon_0, \Lambda, p, k)$ ist selbstverständlich noch etwas komplizierter.

Auch das Renormierungs-Verfahren erfährt hier eine erste Modifikation, die im übernächsten Kapitel noch ausgiebiger diskutiert werden wird. Während bisher stets auf der Massenschale, $k^2 = 0, p^2 = m^2$, renormiert worden ist, muß in diesem Fall ein anderer Renormierungspunkt gewählt werden. Eine ausführliche Diskussion dieses Problems soll auf Kapitel 9 verschoben werden. Hier wird als Renormierungspunkt für alle drei Funktionen die Stelle λ^2 ohne weiteren Kommentar einfach verwendet werden, d.h. man stellt die Forderungen

$$\omega_R(\alpha, \lambda^2) = 0 \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_R(\alpha, p)|_{p^2=\lambda^2} = 0 \quad (7.99)$$

$$\Gamma_R^\rho(\alpha, p, p)|_{p^2=\lambda^2} = 0 \quad . \quad (7.100)$$

Daraus erhält man als Bestimmungsgleichungen für die Renormierungskonstanten

$$Z_3\left(\alpha, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) = \left[1 + \omega\left(\frac{\alpha}{Z_3}, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right)\right]^{-1} \quad (7.101)$$

$$Z_2\left(\alpha, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) = \left[1 - \Sigma\left(\frac{\alpha}{Z_3}, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) - 2\lambda^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma\left(\frac{\alpha}{Z_3}, \frac{p^2}{\Lambda^2}\right)\Big|_{p^2=\lambda^2}\right]^{-1} \quad (7.102)$$

$$Z_1\left(\alpha, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) = \left[1 + \Gamma_1\left(\frac{\alpha}{Z_3}, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) + \Gamma_2\left(\frac{\alpha}{Z_3}, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right)\right]^{-1} , \quad (7.103)$$

woran man wegen Gl.(7.96,7.97) sofort $Z_1 = Z_2$ abliest.

Jetzt soll das Renormierungsschema bis zur dritten Ordnung vorgeführt werden. Das ist hier deutlich übersichtlicher als die zweite Ordnung des massiven Falls, da die Vakuumpolarisation und Z_3 völlig von den anderen beiden Funktionen entkoppeln. Mit den Abkürzungen $x = \frac{k^2}{\Lambda^2}$, $y = \frac{p^2}{\Lambda^2}$ und $z = \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}$ erhält man aus

$$\omega(\alpha_0, x) = \alpha_0 \omega^{(1)}(x) + \alpha_0^2 \omega^{(2)}(x) + \alpha_0^3 \omega^{(3)}(x) \quad (7.104)$$

$$\Sigma(\alpha_0, y) = \alpha_0 \Sigma^{(1)}(y) + \alpha_0^2 \Sigma^{(2)}(y) + \alpha_0^3 \Sigma^{(3)}(y) \quad (7.105)$$

und

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{Z_3(\alpha, z)} = \alpha \left[1 + \omega\left(\frac{\alpha}{Z_3(\alpha, z)}, z\right)\right] \quad (7.106)$$

gerade

$$\begin{aligned} Z_3(\alpha, z) &= \left[1 + \alpha \left[1 + \alpha \left[1 + \omega^{(1)}(z)\right] \omega^{(1)}(z) + \alpha^2 \omega^{(2)}(z)\right] \omega^{(1)}(z) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \left[1 + 2\omega^{(1)}(z)\right] \omega^{(2)}(z) + \alpha^3 \omega^{(3)}(z)\right]^{-1} \\ &= \left[1 + \alpha \omega^{(1)}(z) + \alpha^2 \left[\left(\omega^{(1)}(z)\right)^2 + \omega^{(2)}(z)\right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha^3 \left[\left(\omega^{(1)}(z)\right)^3 + 3\omega^{(1)}(z)\omega^{(2)}(z) + \omega^{(3)}(z)\right]\right]^{-1} \\ &= 1 - \alpha \omega^{(1)}(z) - \alpha^2 \omega^{(2)}(z) - \alpha^3 \left[\omega^{(1)}(z)\omega^{(2)}(z) + \omega^{(3)}(z)\right] \quad , \quad (7.107) \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \alpha & \left[1 + \alpha \omega^{(1)}(z) + \alpha^2 \left[\left(\omega^{(1)}(z) \right)^2 + \omega^{(2)}(z) \right] \right. \\ & \left. + \alpha^3 \left[\left(\omega^{(1)}(z) \right)^3 + 3\omega^{(1)}(z)\omega^{(2)}(z) + \omega^{(3)}(z) \right] \right] . \end{aligned} \quad (7.108)$$

Daraus läßt sich die renormierte Vakuumpolarisation sofort ausrechnen,

$$\begin{aligned} \omega_R\left(\alpha, \frac{x}{z}\right) &= Z_3(\alpha, z) \left[1 + \omega\left(\frac{\alpha}{Z_3}, x\right) \right] - 1 \\ &= \left[1 - \alpha \omega^{(1)}(z) - \alpha^2 \omega^{(2)}(z) - \alpha^3 \left[\omega^{(1)}(z)\omega^{(2)}(z) + \omega^{(3)}(z) \right] \right] \\ &\quad \cdot \left[1 + \alpha \left[1 + \alpha \omega^{(1)}(z) + \alpha^2 \left[\left(\omega^{(1)}(z) \right)^2 + \omega^{(2)}(z) \right] \right] \omega^{(1)}(x) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \left[1 + 2\alpha \omega^{(1)}(z) \right] \omega^{(2)}(x) + \alpha^3 \omega^{(3)}(x) \right] - 1 \\ &= \alpha \left[\omega^{(1)}(x) - \omega^{(1)}(z) \right] + \alpha^2 \left[\omega^{(2)}(x) - \omega^{(2)}(z) \right] \\ &\quad + \alpha^3 \left[\omega^{(3)}(x) - \omega^{(3)}(z) + \left[\omega^{(2)}(x) - \omega^{(2)}(z) \right] \omega^{(1)}(z) \right] . \end{aligned} \quad (7.109)$$

Aufgrund der Identität $Z_1 = Z_2$ und des Fehlens der Massenrenormierung machen sich in den höheren Ordnungen der Vakuumpolarisation nur solche divergente Subgraphen bemerkbar, die in niedrigerer Ordnung zur Vakuumpolarisation gehören. Die divergenten Beiträge von von Selbstenergie- und Vertexkorrektur-Graphen zur Vakuumpolarisation heben sich exakt heraus. Das entspricht der Tatsache, daß bei der expliziten Berechnung der Vakuumpolarisation zweiter Ordnung, Gl.(4.86), in der Summe der drei beitragenden Graphen sowohl die Pole zweiter Ordnung als auch das Produkt aus Divergenz und k^2 -abhängigem Logarithmus entfallen,

$$\begin{aligned} \omega^{(1)}(x) &= \frac{1}{3\pi} \left\{ \frac{2}{4-D} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi}{x}\right) + \frac{5}{3} \right\} \\ \omega^{(2)}(x) &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{4-D} + \ln\left(\frac{4\pi}{x}\right) + c \right\} . \end{aligned}$$

Es sei noch einmal angemerkt, daß die zweite Ordnung zwar in Feynman-Eichung berechnet wurde, das Ergebnis aber unabhängig von der Eichung ist. Es zeigt sich obendrein, daß die Konstante c , die nicht vollständig berechnet worden ist, für die renormierte Vakuumpolarisation ohne Bedeutung ist, da sie in der Differenz $\omega^{(2)}(k^2) - \omega^{(2)}(0)$ nicht mehr auftritt,

$$\omega_R(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{4\pi M^2}{k^2}\right) + \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{4\pi M^2}{k^2}\right) + \dots \quad (7.110)$$

Mit Hilfe von Gl.(7.108) kann man dann Z_2 berechnen.

$$Z_2(\alpha, z) = \left[1 - \alpha \left[1 + \alpha \omega^{(1)}(z) + \alpha^2 \left[\left(\omega^{(1)}(z) \right)^2 + \omega^{(2)}(z) \right] \right] \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z \Sigma^{(1)'}(z) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \left[1 + 2\alpha\omega^{(1)}(z) \right] \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] - \alpha^3 \left[\Sigma^{(3)}(z) + 2z\Sigma^{(3)'}(z) \right] \Big]^{-1} \\
= & \left[1 - \alpha \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right. \\
& - \alpha^2 \left[\omega^{(1)}(z) \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] + \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] \right. \\
& - \alpha^3 \left[\left[\left(\omega^{(1)}(z) \right)^2 + \omega^{(2)}(z) \right] \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\omega^{(1)}(z) \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] + \left[\Sigma^{(3)}(z) + 2z\Sigma^{(3)'}(z) \right] \right] \right]^{-1} \\
= & 1 + \alpha \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \tag{7.111} \\
& + \alpha^2 \left[\omega^{(1)}(z) \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] + \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right]^2 \right. \\
& \quad \left. + \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] \right] \\
& + \alpha^3 \left[\left[\left(\omega^{(1)}(z) \right)^2 + \omega^{(2)}(z) \right] \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] + \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right]^3 \right. \\
& \quad + 2 \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \left[\omega^{(1)}(z) \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right. \\
& \quad \quad \left. + \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] \right] \\
& \quad \left. + 2\omega^{(1)}(z) \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] + \left[\Sigma^{(3)}(z) + 2z\Sigma^{(3)'}(z) \right] \right] .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann die renormierte Selbstenergie,

$$\Sigma_R(\alpha, z, p) = \not{p} \Sigma_R\left(\alpha, \frac{y}{z}\right) \tag{7.112}$$

$$\Sigma_R\left(\alpha, \frac{y}{z}\right) = Z_2(\alpha, z) \left[\Sigma\left(\frac{\alpha}{Z_3}, y\right) - 1 \right] + 1 \tag{7.113}$$

$$= \alpha \left[\Sigma^{(1)}(y) - \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right] \tag{7.114}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha^2 \left[\left[\omega^{(1)}(z) + \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right] \right. \\
& \quad \cdot \left[\Sigma^{(1)}(y) - \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right] \\
& \quad \left. + \Sigma^{(2)}(y) - \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] \right] \\
& + \alpha^3 \left[\left[\left(\omega^{(1)}(z) \right)^2 + \omega^{(2)}(z) + 2\omega^{(1)}(z) \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. + \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] + \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right]^2 \right] \\
& \quad \cdot \left[\Sigma^{(1)}(y) - \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[2\omega^{(1)}(z) + \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z\Sigma^{(1)'}(z) \right] \right] \\
& \cdot \left[\Sigma^{(2)}(y) - \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] \right] \\
& + \Sigma^{(3)}(y) - \left[\Sigma^{(3)}(z) + 2z\Sigma^{(3)'}(z) \right] \Big] .
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Vakuumpolarisation ist hier das Renormierungsschema in zweiter Ordnung zunächst wesentlich komplizierter. Das ist eine Konsequenz der Tatsache, daß in die Renormierung der Selbstenergie auch die der Vakuumpolarisation eingeht, umgekehrt aufgrund der Eichinvarianz der Theorie jedoch nicht.

Die renormierte Selbstenergie vereinfacht sich gewaltig, wenn man bedenkt, daß nur in Landau-Eichung vollständig endliche renormierte Funktionen zu erwarten sind. In Landau-Eichung verschwindet aber die regularisierte Selbstenergie erster Ordnung, Gl.(4.78). Dann lautet die renormierte Selbstenergie wesentlich kürzer

$$\begin{aligned}
\Sigma_R\left(\alpha, \frac{y}{z}\right) &= \alpha^2 \left[\Sigma^{(2)}(y) - \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] \right] \\
& + \alpha^3 \left[2\omega^{(1)}(z) \left[\Sigma^{(2)}(y) - \left[\Sigma^{(2)}(z) + 2z\Sigma^{(2)'}(z) \right] \right] \right. \\
& \left. + \Sigma^{(3)}(y) - \left[\Sigma^{(3)}(z) + 2z\Sigma^{(3)'}(z) \right] \right] .
\end{aligned} \tag{7.115}$$

Damit bleiben auch hier in zweiter Ordnung keine aus der ersten Ordnung stammenden Counterterme mehr übrig. Wie in Abschnitt 4.4.7 gezeigt wurde, treten in den einzelnen Graphen der Selbstenergie zweiter Ordnung aber Pole zweiter Ordnung und das Produkt aus Pol und impulsabhängiger Funktion auf, Gl.(4.90). Zur Elimination dieser Terme werden im Prinzip Counterterme niedrigerer Ordnung in Diagrammen höherer Ordnung benötigt. Es zeigt sich also, daß auch im Fall der Selbstenergie in der Summe der drei Diagramme zweiter Ordnung diese Terme entfallen müssen. Sowohl bei der Vakuumpolarisation als auch bei der Selbstenergie werden Counterterme aus niedrigerer Ordnung erst in dritter Ordnung zur Renormierung benötigt. Bevor darauf noch näher eingegangen werden soll, muß zunächst eine allgemeine Aussage zur Struktur der Divergenzen in divergenten Diagrammen gemacht werden, was im nächsten Kapitel geschehen soll.

Die Renormierung der Vertexkorrektur erfolgt ganz analog und soll hier nicht noch aufgeführt werden.

Man erkennt in den beiden Beispielen der letzten beiden Abschnitte explizit die Verkopplung der drei divergenten Funktionen und ihrer Renormierungskonstanten. Das Renormierungsschema wird sehr schnell äußerst kompliziert, wenn die Komplexität der Diagramme steigt.

Kapitel 8

Idee des allgemeinen Renormierungsbeweises

In den vorangegangenen drei Kapiteln ist das allgemeine Renormierungsschema für den Fall der Quantenelektrodynamik ausführlich dargestellt worden. Gäbe es keine divergenten Feynman-Integrale, wäre dieses Schema ausreichend, die verschiedenen Funktionen an die jeweiligen physikalisch motivierten Normierungsbedingungen anzupassen. Allerdings bleibt noch zu zeigen, daß durch dieses Verfahren auch alle Divergenzen aus der Theorie eliminiert werden, sodaß die Regularisierungen wieder entfernt werden können. Die Begründung dafür soll in diesem Kapitel diskutiert werden.

Im ersten Abschnitt soll das zum Beweis wesentliche Konvergenztheorem für Feynman-Integrale und eine einfache Erweiterung vorgestellt werden. Er macht eine Aussage zur Form der divergenten Beiträge in beliebigen Loop-Integralen. Auf die Darstellung des relativ länglichen Beweises dieses Theorems wird hier verzichtet (siehe z.B. Itzykson/Zuber chap. 8-1-4). Allerdings wird sich zeigen, daß dieses Theorem nur in niedrigster Ordnung direkt auf die uns interessierenden Loop-Integrale anwendbar ist. Im zweiten Abschnitt soll dann der realistischere Fall höherer Ordnungen etwas eingehender diskutiert werden.

8.1 Konvergenztheorem für Feynman-Integrale

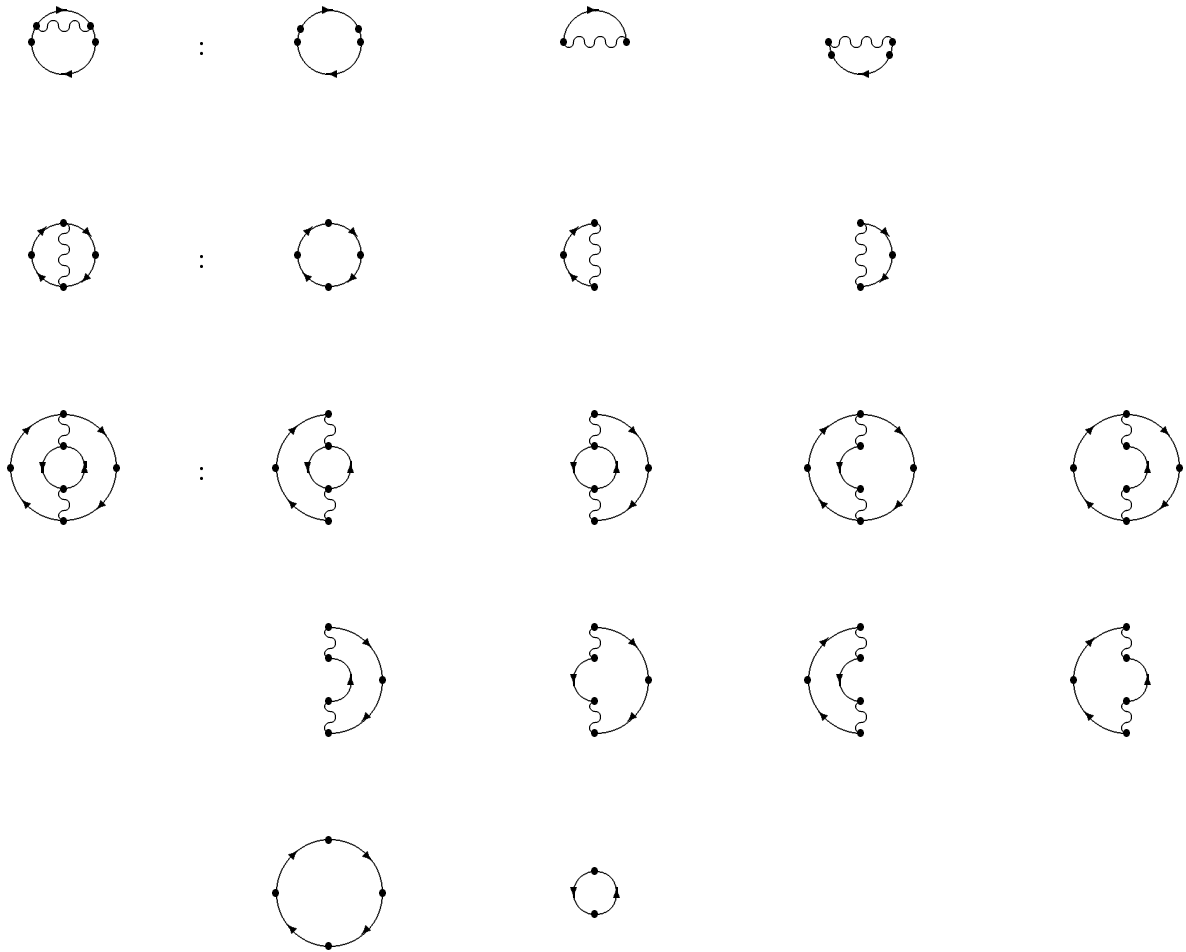
In diesem Abschnitt soll das zentrale Konvergenztheorem für Feynman-Integrale zu beliebigen irreduziblen Diagrammen vorgestellt werden. Es lautet:

Ist der scheinbare Divergenzgrad ω eines Diagramms G sowie aller seiner irreduziblen Subdiagramme g echt kleiner Null,

$$\omega(G) < 0 \quad , \quad \omega(g) < 0 \quad , \quad g \in G \quad ,$$

so konvergiert das zugehörige Feynman-Integral absolut.

Dieses Theorem soll hier nicht bewiesen sondern nur erläutert werden. Zunächst sei an einigen Beispielen gezeigt, wie die Menge aller irreduziblen Subdiagramme eines gegebenen Graphen aussieht:



Dabei führen einige der hier gezeigten Subdiagramme natürlich auf das gleiche Feynman-Integral.

Die Aussage des Konvergenztheorems ist unmittelbar anschaulich: Die Menge aller irreduziblen Subdiagramme entspricht der Menge aller möglichen Integrationsreihenfolgen der verschiedenen Loop-Integrationen im Feynman-Integral des Graphen G . Existiert jedes der möglichen Subintegrale einschließlich des Gesamtintegrals, kann nirgendwo in dem Feynman-Integral eine Divergenz entstehen.

Eine Folgerung aus dieser Aussage ist das folgende Theorem:

Ist der scheinbare Divergenzgrad ω für alle irreduziblen Subdiagramme g eines Graphen G kleiner als Null, $\omega(g) < 0$, für den Gesamtgraphen dagegen größer gleich Null, $\omega(G) \geq 0$, so ist der divergente Teil des Feynman-Integrals eine Polynom von höchstens $\omega(G)$ -tem Grad in den externen Impulsen des Diagramms,

$$I_G(e, m, \Lambda, p_i) = I_{div}(e, m, \Lambda, p_i) + I_{fin}(e, m, p_i) \quad ,$$

mit

$$I_{div}(e, m, \Lambda, p_i) = \sum_{n=0}^{\omega(G)} p_{i_1} \dots p_{i_n} I^{i_1 \dots i_n}(e, m, \Lambda) \quad .$$

Auf einen Beweis wird auch hier verzichtet. Der wesentliche Punkt dieses Theorems ist die Aussage: Die Divergenzen können nur in einer relativ einfachen Struktur vorkommen, nämlich einem Polynom in den externen Impulsen. Das ist der eigentliche Grund für den Erfolg des Renormierungsschemas.

Das wird in der ersten Ordnung direkt klar. Die Vakuumpolarisation zum Beispiel hat einen scheinbaren Divergenzgrad $\omega(G) = 2$. In erster Ordnung gibt es keine irreduziblen Subdiagramme, die divergieren könnten. Daher muß aufgrund der transversalen Struktur der Vakuumpolarisation,

$$\omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) = -i[k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu] \omega^{(1)}(k^2) \quad ,$$

der divergente Teil in $\omega^{(1)}(k^2)$ unabhängig von k^2 sein, denn der Transversalitätsfaktor stellt gerade ein Polynom zweiten Grades dar. Man kann nun einen Counterterm an die Lagrange-dichte anfügen,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R^{[1]} &= \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}^{(1)} \\ &= \mathcal{L} + Z_3^{(1)} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho A^\rho)^2 \right\} \quad , \end{aligned}$$

der den freien Propagator (bzw den inversen freien Propagator) in

$$D_{\rho\nu}^{-1,(0)}(k) = i(1 + Z_3^{(1)}) [k^2 g_{\rho\nu} - (1 - \lambda) k_\rho k_\nu] \quad (8.1)$$

überführt. In erster Ordnung ergibt sich dann insgesamt

$$\begin{aligned} D_{R,\rho\nu}^{-1,(1)}(k) &= i(1 + Z_3^{(1)}) [k^2 g_{\rho\nu} - (1 - \lambda) k_\rho k_\nu] - \omega_{\rho\nu}^{(1)}(k) \\ &= i(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu) [1 + \omega^{(1)}(k^2) + Z_3^{(1)}] + \lambda(1 + Z_3^{(1)}) k_\rho k_\nu \quad . \quad (8.2) \end{aligned}$$

Wählt man

$$Z_3^{(1)} = -\omega^{(1)}(k^2 = 0) \quad ,$$

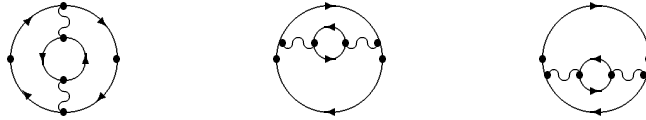
dann ist der Ausdruck $\omega^{(1)}(k^2) + Z_3^{(1)} = \omega^{(1)}(k^2) - \omega^{(1)}(0)$, der gerade der renormierten Vakuumpolarisation $\omega_R^{(1)}(k^2)$ entspricht, und damit auch der physikalisch relevante Teil des Photon-Propagators frei von Divergenzen.

Die gleiche Überlegung begründet auch für die Selbstenergie ($\omega(G) = 1$) und die Vertexkorrektur ($\omega(G) = 0$) in erster Ordnung den Erfolg der Renormierung.

Mit den obigen Theoremen wäre daher der allgemeinen Renormierungsbeweis abgeschlossen, wenn die Voraussetzungen für das obige zweite Theorem auch allgemein gegeben wären. In allen höheren Ordnungen als der ersten gilt aber keineswegs $\omega(g) < 0$ für alle Subgraphen der drei divergenten Funktionen. Vielmehr enthalten diese in höherer Ordnung ihre eigenen Diagramme niedrigerer Ordnung als Subgraphen. Diese sind lediglich durch Counterterme in allen niedrigeren Ordnungen als der betrachteten endlich gehalten worden. Die Tatsache, daß der Divergenzgrad der Subgraphen nicht kleiner als Null ist, macht sich dadurch bemerkbar, daß bei der Auswertung eines Feynman-Integrals höherer Ordnung sich die Divergenzen von Subintegrationen miteinander multiplizieren und Produkte aus Divergenzen und nichttrivialen Funktionen der externen Impulse entstehen. Das war zum Beispiel in den Beiträgen zur Vakuumpolarisation zweiter Ordnung, Gl.(4.84,4.85), und zur Selbstenergie zweiter Ordnung,

Gl.(4.90), bereits offenkundig geworden. Allerdings heben sich im masselosen Fall in zweiter Ordnung in der Summe der beitragenden Graphen diese Terme heraus. Das liegt insbesondere an der Eichinvarianz der Theorie, d.h. an der Eigenschaft $Z_1 = Z_2$.

In dritter Ordnung entfallen aus dem gleichen Grund zwar ebenfalls die meisten Counterterme aus den niedrigeren Ordnungen, es bleibt jedoch jeweils ein Beitrag übrig, Gl.(7.109) und Gl.(7.115). Im Fall der Vakuumpolarisation resultiert dieser aus den Diagrammen:



In höherer Ordnung gestaltet sich der Renormierungsbeweis also wesentlich komplizierter. Das soll im nächsten Abschnitt eingehender diskutiert werden.

8.2 Diskussion der höheren Ordnungen

Die Wirkung eines Counterterms beliebiger Ordnung soll jetzt zunächst einmal auf eine alternative Weise dargestellt werden, die es erlaubt zu erkennen, welche Divergenzen durch die zur Verfügung stehenden Counterterme eliminiert werden können. Exemplarisch betrachtet man wieder die Renormierung des Photon-Propagators bzw der Vakuumpolarisation.

Dabei soll in der Form eines Induktionsbeweises vorgegangen werden. Die Induktionsgrundlage dafür liefert die erste Ordnung. Angenommen nun, man hätte durch Hinzufügen von Countertermen der Form

$$Z_3^{(k)} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho A^\rho)^2 \right\}$$

zur Lagrangedichte den physikalisch wesentlichen Teil des Photon-Propagators bis zur Ordnung $n - 1$ endlich gehalten. Dann lautet der renormierte inverse Photon-Propagator bis zu dieser Ordnung (was durch die eckige Klammer angedeutet werden soll)

$$\begin{aligned} D_{R,\rho\nu}^{-1,[n-1]}(k) &= i \left[k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu \right] - \omega_{R,\rho\nu}^{[n-1]}(k) + \lambda Z_3^{[n-1]}(e, m, \Lambda) k_\rho k_\nu \\ &= i \left(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu \right) \left[1 + \omega_R^{[n-1]}(k^2) \right] + \lambda Z_3^{[n-1]}(e, m, \Lambda) k_\rho k_\nu \quad . \quad (8.3) \end{aligned}$$

Das ist der inverse Propagator zu (7.26). Das Einführen eines Counterterms n -ter Ordnung zur Lagrangedichte,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R^{[n]} &= \mathcal{L}_R^{[n-1]} + \delta \mathcal{L}^{(n)} \\ &= \mathcal{L}_R^{[n-1]} + Z_3^{(n)} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho A^\rho)^2 \right\} , \end{aligned}$$

kann man auf zwei Weisen umsetzen. Die erste besteht darin, daß der neue Counterterm auf die bisherige Lagrangedichte addiert wird und der daraus resultierende neue freie Photon-Propagator einen um $Z_3^{(n)}$ veränderten Vorfaktor aufweist. Dem ist eine zweite Interpretation äquivalent. Dabei wird der Counterterm so aufgefaßt, als würde er einen zusätzlichen zweiten

freien Photon-Propagator erzeugen. Dieser geht in alle niedrigeren Ordnungen nicht ein, da sein Vorfaktor $Z_3^{(n)}$ von n -ter Ordnung ist. In der n -ten Ordnung wirkt er wie ein freier Propagator. In allen höheren Ordnungen tritt er dann aber auch in Loops auf. Das bewirkt gerade die Addition eines inversen freien Propagators multipliziert mit $Z_3^{(n)}$ zum renormierten inversen Photon-Propagator in n -ter Ordnung,

$$\begin{aligned}
D_{R,\rho\nu}^{-1,[n]}(k) &= i\left(1 + Z_3^{(n)}(e, m, \Lambda)\right)\left[k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu\right] - \omega_{R,\rho\nu}^{[n-1]}(k) - C_{\rho\nu}^{(n)}(e, m, \Lambda, k) \\
&\quad - \omega_{\rho\nu}^{(n)}\left(\frac{e^2}{Z_3^{[n-1]}}, m - \delta m^{[n-1]}, \Lambda, k\right) + \lambda\left(Z_3^{[n-1]}(e, m, \Lambda) + Z_3^{(n)}(e, m, \Lambda)\right)k_\rho k_\nu \\
&= i\left(k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu\right) \\
&\quad \cdot \left[1 + \omega_R^{[n-1]}(k^2) + C^{(n)}(e, m, \Lambda, k^2) + \omega^{(n)}(e^2, m, \Lambda, k^2) + Z_3^{(n)}(e, m, \Lambda)\right] \\
&\quad + \lambda Z_3^{[n]}(e, m, \Lambda)k_\rho k_\nu \quad .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Dabei repräsentiert $C^{(n)}$ die aus der Multiplikation von Countertermen niedrigerer Ordnung mit Vakuumpolarisationsbeiträgen niedrigerer Ordnung in $\omega^{[n-1]}$ entstehenden Terme n -ter Ordnung,

$$\begin{aligned}
C^{(n)}(e, m, \Lambda, k^2) &= Z_3^{[n-1]}(e, m, \Lambda) \left[1 + \omega^{[n-1]}\left(\frac{e^2}{Z_3^{[n-1]}(e, m, \Lambda)}, m - \delta m^{[n-1]}(e, m, \Lambda), \Lambda, k^2\right)\right] \\
&\quad - 1 - \omega_R^{[n-1]}(e, m, k^2) \quad .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Außerdem wurde benutzt, daß $\omega^{(n)}$ selbst bereits von n -ter Ordnung ist und in seinen Argumenten daher die Renormierungskonstanten entfallen. Der entscheidende Punkt an dieser Überlegung ist, daß durch das Hinzufügen von Countertermen zur Lagrangedichte nur solche divergenten Terme in der Vakuumpolarisation eliminiert werden können, die nicht noch von k^2 abhängen. Das deckt sich exakt mit der Aussage des Konvergenztheorems, daß die originären Divergenzen n -ter Ordnung in $\omega(k^2)$ nicht von k^2 abhängen. Dabei meint originär von n -ter Ordnung gerade die Über-Alles-Divergenz dieser Ordnung, die sich in einem Pol n -ter Ordnung äußert. Das Auftreten von Polen n -ter Ordnung war bei Vakuumpolarisation und Selbstenergie zweiter Ordnung in den Beiträgen einzelner Graphen bereits nachgewiesen worden, auch wenn in dieser Ordnung die Summen der jeweils drei Diagramme keine Pole zweiter Ordnung mehr enthielt.

Allerdings müssen zusätzlich die Reste der Renormierung der niedrigeren Ordnungen berücksichtigt werden. Daß solche Terme auch zur Renormierung benötigt werden, wird ebenfalls an Graphen der Vakuumpolarisation zweiter Ordnung klar, in denen Produkte aus Polen erster Ordnung und k^2 -abhängigen Loop-Beiträgen erster Ordnung vorkommen (auch diese fallen in der Summe der drei Graphen aber in diesem speziellen Fall wieder weg).

Die gleiche Argumentation gilt für Selbstenergie und Vertexkorrektur. Auch bei ihnen sind die in jeder Ordnung neu hinzukommenden Pole n -ter Ordnung nur mit Polynomen ersten bzw nullten Grades in den äußeren Impulsen kombiniert. Diese Divergenzen haben immer genau die Tensorstruktur und Impulsabhängigkeit der inversen freien Greensfunktionen bzw eines einfachen Vertex'. Daher lassen sich Counterterme an die Lagrangedichte in Form der freien Lagrangedichte von Elektronen und der minimalen Kopplung anfügen, die diese Divergenzen exakt kompensieren.

Daß die $C^{(n)}$, Gl.(8.5), genau zur Renormierung von $\omega^{(n)}$ benötigt werden, läßt sich im Rahmen des Subtraktionsschemas von Bogoliubov relativ leicht beweisen. Auf den allgemeinen Beweis soll hier aber nicht eingegangen werden (siehe Itzykson/Zuber chap.8-2). Es beruht darauf, daß für jeden divergenten Subgraphen eines Diagramms ein Counterterm eingeführt wird, der die jeweilige Divergenz kompensiert. Das war bisher nur deshalb nicht bereits offensichtlich geworden, weil aufgrund von $Z_1 = Z_2$ viele dieser Counterterme sich im Fall einer Eichtheorie gegenseitig wegheben. Das hängt damit zusammen, daß das bisher diskutierte Renormierungsschema stets für eine gesamte Ordnung einer Greensfunktion nicht aber für einzelne Graphen abgeleitet worden war. In einem eichinvarianten Satz von Graphen reduzieren sich aber die Divergenzen. Das Subtraktionsschema funktioniert dagegen für jeden einzelnen Graphen.

An dieser Stelle soll das Verfahren lediglich an einem Graphen zweiter Ordnung illustriert werden. Dazu betrachtet man am günstigsten wieder die Vakuumpolarisation der masselosen QED. Um die Relation des bisher verwendeten Schemas zum Subtraktionsschema klar zu stellen, sei zunächst noch einmal die renormierte Vakuumpolarisation unter Einschluß von Z_1 und Z_2 festgehalten, d.h.

$$Z_3(\alpha, z) = \left[1 + \omega\left(\frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3}, z\right) \right]^{-1} \quad (8.6)$$

$$Z_2(\alpha, z) = \left[1 - \Sigma\left(\frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3}, z\right) - 2z \frac{\partial}{\partial z} \Sigma\left(\frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3}, z\right) \right]^{-1} \quad (8.7)$$

$$Z_1(\alpha, z) = \left[1 + \Gamma_1\left(\frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3}, z\right) + \Gamma_2\left(\frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3}, z\right) \right]^{-1} \quad (8.8)$$

$$\alpha_0 = \frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3} = \frac{Z_1^2}{Z_2^2} \alpha \left[1 + \omega\left(\frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3}, z\right) \right]^{-1}, \quad (8.9)$$

wobei die Notation aus Abschnitt 7.5 benutzt wurde. Mit dem Ansatz

$$Z_i = 1 + \alpha Z_i^{(1)} + \alpha^2 Z_i^{(2)} + \dots \quad (8.10)$$

kann man Gl.(8.9) bis zur zweiten Ordnung allgemein lösen,

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \alpha & \left[1 + \alpha \left(2Z_1^{(1)} - 2Z_2^{(1)} - Z_3^{(1)} \right) \right. \\ & + \alpha^2 \left(2Z_1^{(2)} - 2Z_2^{(2)} + \left(Z_1^{(1)} \right)^2 - 4Z_1^{(1)} Z_2^{(1)} + 3Z_2^{(1)} - 2 \left(Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)} \right) Z_3^{(1)} \right. \\ & \left. \left. - Z_3^{(2)} + \left(Z_3^{(1)} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Damit kann man die renormierte Vakuumpolarisation bis zur zweiten Ordnung berechnen,

$$\begin{aligned} \omega_R\left(\alpha, \frac{x}{z}\right) &= Z_3(\alpha, z) \left[1 + \omega\left(\frac{Z_1^2 \alpha}{Z_2^2 Z_3}, x\right) \right] - 1 \\ &= \left[1 + \alpha Z_3^{(1)} + \alpha^2 Z_3^{(2)} + \dots \right] \\ &\cdot \left[1 + \alpha \left[1 + \left(2Z_1^{(1)} - 2Z_2^{(1)} - Z_3^{(1)} \right) \right] \omega^{(1)}(x) + \alpha^2 \omega^{(2)}(x) \right] - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left[\omega^{(1)}(x) + Z_3^{(1)}(z) \right] \\
&\quad + \alpha^2 \left[\omega^{(2)}(x) + 2 \left(Z_1^{(1)}(z) - Z_2^{(1)}(z) \right) \omega^{(1)}(x) + Z_3^{(2)} \right] .
\end{aligned} \tag{8.12}$$

In zweiter Ordnung wird damit die Bedeutung von $C^{(n)}$, Gl.(8.5), deutlich. Die Forderung

$$\omega_R^{(n)}(z) = 0$$

erzwingt direkt

$$Z_3^{(1)}(z) = -\omega^{(1)}(z) .$$

Bedenkt man die Werte von $Z_{1,2}^{(1)}$

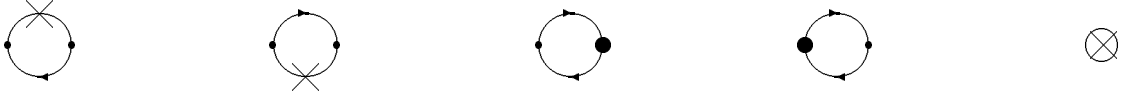
$$Z_2^{(1)}(z) = \Sigma^{(1)}(z) + 2z \frac{\partial}{\partial z} \Sigma^{(1)}(z) \tag{8.13}$$

$$Z_1^{(1)}(z) = -\Gamma_1^{(1)}(z) - \Gamma_2^{(1)}(z) , \tag{8.14}$$

wird die Bedeutung der Counterterme klar: Zu den drei Graphen



gehören die Counterterme



$$\begin{aligned}
&= -Z_2^{(1)}(z) \omega^{(1)}(x) - Z_2^{(1)}(z) \omega^{(1)}(x) + Z_1^{(1)}(z) \omega^{(1)}(x) + Z_1^{(1)}(z) \omega^{(1)}(x) + Z_3^{(2)}(z) \\
&= -2 \left[\Sigma^{(1)}(z) + 2z \frac{\partial}{\partial z} \Sigma^{(1)}(z) \right] \omega^{(1)}(x) - 2 \left[\Gamma_1^{(1)}(z) + \Gamma_2^{(1)}(z) \right] \omega^{(1)}(x) + Z_3^{(2)}(z) .
\end{aligned}$$

Die Counterterme subtrahieren gerade die Produkte aus der Divergenz des zur Selbstenergie bzw Vertexkorrektur gehörenden Subgraphen und dem impulsabhängigen Restgraphen heraus. Das soll explizit an dem ersten der drei Graphen gezeigt werden. Sein Beitrag lautet gemäß Gl.(4.84) (der Faktor 4π ist hier noch in die Variablen x und z hineingezogen worden)

$$\begin{aligned}
\omega_{1,\rho\nu}^{(2)}(k) &= -i \frac{\alpha^2}{6\pi^2 \lambda} \left\{ \left[k^2 g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu \right] \left[-\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} \left(\ln(x) + \gamma - \frac{7}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\ln(x) \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{7}{4} - \gamma \right) \ln(x) + \frac{7}{4} \gamma \right] \right. \\
&\quad \left. + k^2 g_{\rho\nu} \left[-\frac{1}{4\eta} + \frac{1}{4} \ln(x) + \frac{\gamma}{4} - \frac{11}{16} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Für die weitere Überlegung spielt der nichttransversale Teil dieses Ausdrucks keine Rolle. Dieser Term verschwindet in der eichinvarianten Summe der drei Graphen zweiter Ordnung. Er enthält auch nicht den problematische Term $\ln(x)/\eta$. Der transversale Anteil des betrachteten Graphen führt auf

$$\omega_1^{(2)}(x) = \frac{1}{6\pi^2 \lambda} \left[-\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} \left(\ln(x) + \gamma - \frac{7}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\ln(x) \right)^2 + \left(\frac{7}{4} - \gamma \right) \ln(x) + \frac{7}{4} \gamma \right] . \tag{8.15}$$

Den zugehörigen Counterterm berechnet man aus den Gln.(4.74,4.77) durch konsistente Entwicklung bis zur zweiten Ordnung,

$$\omega^{(1)}(x) = \frac{1}{3\pi} \left\{ \frac{2}{\eta} + \frac{5}{3} - \gamma - \ln(x) \right. \quad (8.16)$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4} (\ln(x))^2 + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{5}{6} \right) \ln(x) + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{5}{6} \gamma - \frac{\pi^2}{24} + \frac{14}{9} \right) \eta \right\}$$

$$Z_2^{(1)}(z) = -\frac{1}{4\pi\lambda} \left\{ \frac{2}{\eta} - 1 - \gamma - \ln(z) \right. \quad (8.17)$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4} (\ln(z))^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \right) \ln(z) + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) \eta \right\}$$

$$Z_2^{(1)}(z)\omega^{(1)}(x) = \frac{1}{6\pi^2\lambda} \left[-\frac{2}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} \left(-\frac{2}{3} + 2\gamma + \ln(zx) \right) + \frac{1}{4} (\ln(zx))^2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{2}{3} \right) \ln(zx) + \gamma^2 - \frac{2}{3} \gamma - \frac{\pi^2}{24} + \frac{13}{18} \right] .$$

Addiert man diesen Counterterm zum ursprünglichen Beitrag (8.15),

$$\omega_1^{(2)}(x) - Z_2^{(1)}(z)\omega^{(1)}(x) = \frac{1}{6\pi^2\lambda} \left[\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} \left(-\ln(z) - \gamma - \frac{13}{12} \right) - \frac{1}{4} (\ln(x))^2 \right. \quad (8.18)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \ln(x) \ln(z) + \frac{1}{4} (\ln(z))^2 + \frac{13}{12} \ln(x) + \left(\gamma - \frac{2}{3} \right) \ln(z) \right.$$

$$\left. + \gamma^2 + \frac{13}{12} \gamma - \frac{\pi^2}{24} + \frac{13}{18} \right] ,$$

so entfallen die kritischen Produkte aus Pol und dem impulsabhängigen $\ln(x)$. Es bleibt ein divergenter Term, der durch ein geeignetes $Z_3^{(2)}(z)$ kompensiert werden kann.

Dieses Schema wiederholt sich in allen Ordnungen. Zu jedem divergenten Subgraph wird ein Counterterm eingeführt, der aus der Divergenz des Subgraphen multipliziert mit dem Restgraphen, der durch Weglassen des Subgraphen im Diagramm entsteht, besteht. Mit dieser Illustration sollen die Bemerkungen zum allgemeinen Renormierungsbeweis abgeschlossen sein.

Kapitel 9

Renormierungspunkt und Renormierungsgruppengleichungen

Bereits in Abschnitt 7.5 war angedeutet worden, daß es sinnvoll sein kann, die renormierten N-Punkt-Funktionen einer Theorie nicht auf der Massenschale, also für Photonen bei $k^2 = 0$ und für Elektronen bei $p^2 = m^2$, durch eine Normierungsbedingung festzulegen, sondern einen anderen Punkt auf der Impulsskala zu verwenden. Dieses Vorgehen soll in diesem Kapitel noch etwas eingehender begründet und seine Konsequenzen deutlich gemacht werden.

Dazu sehen wir uns im Abschnitt 9.1 erst einmal die physikalische Bedeutung des Renormierungspunktes an. Es wird sich zeigen, daß er für physikalisch relevante Größen völlig unwesentlich ist. Die Invarianz der Theorie gegenüber einer Änderung des Renormierungspunktes wird dann im darauffolgenden Abschnitt zur Herleitung der Renormierungsgruppengleichung benutzt. Diese werden einer Skalentransformationsgleichung gegenübergestellt, woraus man die sogenannte Callan-Symanzik Gleichung gewinnt. Bei ihr ist insbesondere die Betrachtung der laufenden Kopplungskonstante zur Analyse des Hochenergie-Verhaltens von Teilchen interessant. Schließlich soll die Gell-Mann-Low Gleichung für den Photon-Propagator der masselosen QED gelöst werden.

9.1 Die Bedeutung des Renormierungspunktes

Zur Vereinfachung soll zunächst die sogenannte effektive Kopplungskonstante definiert werden, die gerade den Kern des Photon-Propagators darstellt,

$$e_0^2 D_0^{\rho\nu}(k) = -i \left[g^{\rho\nu} - \frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right] \frac{4\pi}{k^2 + i\epsilon} d_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2) \quad (9.1)$$

$$d_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2) = \frac{e_0^2}{4\pi[1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2)]} \quad , \quad (9.2)$$

und analog für den renormierten Propagator.

Bei der Untersuchung der physikalischen Relevanz des Photon-Propagators in Abschnitt 5.1 war klar geworden, daß nur das Produkt

$$e_0^2 D_0^{\rho\nu}(e_0, m_0, \Lambda, k) = e^2 D_R^{\rho\nu}(e, m, k) \quad (9.3)$$

in physikalisch meßbare Größen eingeht, Gl.(5.2). Formuliert in der effektiven Kopplungskonstanten lautet Gl.(9.3) dann

$$d_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2) = d_R(e, m, k^2) \quad . \quad (9.4)$$

Diese Funktion gibt für alle k , d.h. auch alle x , den Verlauf des Potentials wieder, das die Stärke der Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen beschreibt. Dieses ist für alle k^2 endlich. Während bisher betont wurde, daß den baren Parameter e_0 und m_0 und entsprechend den baren Funktionen keine physikalische Realität zukommt, zeigt Gl.(9.4) im Grunde, daß die Darstellung der physikalisch wesentlichen Größen genauso durch die baren Größen erfolgen kann wie durch renormierte Größen. Allerdings steht auf der linken Seite von Gl.(9.4) praktisch das Produkt von zwei divergenten Ausdrücken, deren Divergenzen sich herausheben.

Die konkrete Gestalt von e_0 und m_0 in Abhängigkeit von e und m war aus den Normierungsbedingungen wie etwa Gl.(5.7),

$$d_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2 = 0) = d_R(e, m, k^2 = 0) = \frac{e^2}{4\pi} = \alpha \quad , \quad (9.5)$$

gewonnen worden. Dabei entsprach die Wahl der Stelle $k^2 = 0$ als Renormierungspunkt der Massenschale eines realen freien Photons. Sie war praktisch der Definition der Feinstrukturkonstanten α als Kopplungsstärke zweier unendlich voneinander entfernter statischer Ladungen äquivalent. Da Gl.(9.4) aber für alle k^2 erfüllt sein muß, hätte man genauso gut statt dem Renormierungspunkt $k^2 = 0$ eine beliebige andere Stelle $k^2 = \lambda^2$, ($\lambda^2 < 0$) wählen können. Dies würde man als eine Umdefinition der Feinstrukturkonstanten verstehen: Sie würde dann für Ladungen mit endlichem Abstand voneinander gemessen. Dementsprechend ist sie abhängig vom Renormierungspunkt λ^2 , was durch einen Index charakterisiert werden soll. Die Normierungsbedingung lautet dann

$$d_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2 = \lambda^2) = \frac{e_0^2}{4\pi[1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, \lambda^2)]} = d_R(e_\lambda, m, \lambda, k^2 = \lambda^2) = \alpha_\lambda \quad . \quad (9.6)$$

Diese Gleichung legt die Relation zwischen barer und renormierter Kopplungskonstante fest,

$$\frac{e_\lambda^2}{4\pi} = \alpha_\lambda = \frac{\alpha_0}{1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, \lambda^2)} = Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \alpha_0 \quad . \quad (9.7)$$

Die Renormierungskonstante Z_3 hängt jetzt selbstverständlich vom Renormierungspunkt λ ab. Auch die renormierte effektive Kopplungskonstante wird im allgemeinen explizit vom Renormierungspunkt abhängen (bei masselosen Theorien auf jeden Fall).

Den Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Feinstrukturkonstanten α und α_λ kann man über Gl.(9.4) leicht herstellen,

$$\frac{\alpha_\lambda}{\alpha} = \frac{d_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2 = \lambda^2)}{d_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2 = 0)} = \frac{1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, 0)}{1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, \lambda^2)} \quad . \quad (9.8)$$

Die Änderung des Renormierungspunktes bewirkt also eine endliche Umnormierung der renormierten Parameter.

Eine analoge Überlegung kann man für alle anderen divergenten Funktionen anstellen. Anstelle aber für jede Funktion einen anderen Renormierungspunkt zu verwenden, soll immer die Stelle λ^2 gewählt werden. Man kann dann das gesamte Renormierungsprogramm mit der wie oben definierten renormierten Kopplungskonstanten e_λ und einem entsprechendem m_λ durchführen. Da sein Erfolg nicht vom Renormierungspunkt abhängt, ändert sich an dem eigentlichen Schema nichts, außer daß jetzt alle Renormierungskonstanten und alle renormierten N-Punkt-Funktionen vom Renormierungspunkt abhängen. So definiert man zum Beispiel die renormierte Vakuumpolarisation über

$$\begin{aligned} d_R(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, k^2) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\alpha_\lambda}{Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)[1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2)]} \\ &\equiv \frac{\alpha_\lambda}{1 + \omega_R(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, k^2)} \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$= \alpha_\lambda \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, \lambda^2)}{1 + \omega_0(e_0, m_0, \Lambda, k^2)} \quad . \quad (9.10)$$

Analog geht man für die Selbstenergie und die Vertexkorrektur sowie die zugehörigen Renormierungskonstanten vor. Allgemein erhält man wieder die gleichen Relationen wie bisher

$$\Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, p_i) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_2^n(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) Z_3^{-\frac{l}{2}}(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \Gamma_0^{(2n,l)}(e_0, m_0, \Lambda, p_i) \quad , \quad (9.11)$$

bzw

$$\Gamma_0^{(2n,l)}(e_0, m_0, \Lambda, p_i) = Z_2^{-n}(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) Z_3^{-\frac{l}{2}}(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, p_i) \quad . \quad (9.12)$$

9.2 Die Renormierungsgruppengleichung

Während bisher die baren Parameter zumeist als Funktionen der renormierten Parameter angesehen wurden, legt Gl.(9.6) die umgekehrte Sicht nahe. Die renormierten Parameter hängen nämlich immer vom Renormierungspunkt λ ab (das gilt auch für $\lambda = 0$), die baren Parameter dagegen bleiben gemäß Gl.(9.4) immer dieselben. Das gleiche gilt für die baren und renormierten N-Punkt-Funktionen.

Die allgemeine Form der Renormierung führt also erneut eine Massenskala, nämlich den Renormierungspunkt λ , in die Theorie ein. Allerdings sind alle Renormierungspunkte äquivalent. Die eigentlich relevanten Größen sind invariant gegenüber der Wahl des Renormierungspunkts. Das manifestiert sich in der Unabhängigkeit der baren N-Punkt-Funktionen vom Renormierungspunkt. Differenziert man Gl.(9.12) nach λ , erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \frac{d}{d\lambda} \Gamma_0^{(2n,l)}(e_0, m_0, \Lambda, p_i) \\ &= \lambda Z_2^{-n}(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) Z_3^{-\frac{l}{2}}(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \\ &\quad \left\{ -n Z_2^{-1}(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_2(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \right\} - \frac{l}{2} Z_3^{-1}(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} e_\lambda(e_0, m_0, \lambda) \right) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} m_\lambda(e_0, m_0, \lambda) \right) \frac{\partial}{\partial m_\lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{ex} \left. \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, p_i) . \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $Z_2^n Z_3^{\frac{l}{2}}$ ergibt sich die Renormierungsgruppengleichung,

$$0 = \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\epsilon x} - n \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z_2(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \right) - \frac{l}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} e_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \right) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} m_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \right) \frac{\partial}{\partial m_\lambda} \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, p_i) \quad (9.13)$$

Die in ihr auftretenden Funktionen sind endlich, was man bei den Ableitungen der renormierten Parameter unmittelbar einsieht, müssen diese doch in Abhängigkeit von λ gerade die wahre Kopplungsstärke und Masse beim Impuls λ wiedergeben. Aber auch die Ableitungen von $\ln Z_{2,3}$ sind endlich,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) &= \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)}{Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)}{\alpha_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)} \quad , \end{aligned}$$

und analog für Z_2 . Man kann daher in Gl.(9.13) den Grenzwert $\Lambda \rightarrow \infty$ ausführen.

Den verschiedenen Ausdrücken in der geschweiften Klammer gibt man einen eigenen Namen,

$$\beta(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} e_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{e_\lambda} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} d_0(e_0, m_0, \Lambda, \lambda^2) \quad (9.14)$$

$$\gamma_m(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} m_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda) \quad (9.15)$$

$$\gamma_2(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(Z_2(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)) \quad (9.16)$$

$$\gamma_3(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(Z_3(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)) \quad (9.17)$$

Man bezeichnet β als Gell-Mann-Low-, Callan-Symanzik- oder einfach als Renormierungsgruppenfunktion, die γ 's als anomale Dimensionen, was gleich noch näher erläutert wird. Sie sind als Funktionen der renormierten Parameter zu verstehen, d.h. e_0 und m_0 sind auf der rechten Seite der Gln.(9.14-9.17) durch e_λ und m_λ auszudrücken.

Mit ihnen lautet die Renormierungsgruppengleichung

$$0 = \left\{ -2n\gamma_2(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) - l\gamma_3(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \right. \\ \left. + \beta(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} + \gamma_m(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial m_\lambda} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\epsilon x} \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, p_i) \quad (9.18)$$

Als Beispiel sei die Renormierungsgruppengleichung für die Photon-2-Punkt-Funktion angegeben,

$$0 = \left\{ -2\gamma_3(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) + \beta(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} \right. \\ \left. + \gamma_m(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial m_\lambda} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\epsilon x} \right\} \Gamma_R^{(0,2)}(e_\lambda, m_\lambda, k) \quad .$$

Aus ihr leitet man direkt eine Gleichung für die effektive Kopplungskonstante ab,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{ -2\gamma_3(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) + \beta(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} \right. \\
&\quad \left. + \gamma_m(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial m_\lambda} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{ex} \right\} \alpha_\lambda d_R^{-1}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, k^2) \\
&= \alpha_\lambda \left\{ \beta(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} + \gamma_m(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial m_\lambda} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{ex} \right\} d_R^{-1}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, k^2) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\gamma_3(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) &= \frac{\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)}{2 \alpha_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)} \\
&= \lambda \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} e_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)}{e_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)} \\
&= \frac{\beta(e_\lambda, m_\lambda, \lambda)}{e_\lambda(e_0, m_0, \Lambda, \lambda)} \tag{9.19}
\end{aligned}$$

benutzt wurde.

Es sei noch erwähnt, daß in der Literatur gelegentlich noch eine andere Version der Renormierungsgruppengleichung verwendet wird. Alternativ zur Differentiation von Gl.(9.12) nach dem Renormierungspunkt hätte man auch Gl.(9.11) nach der Regularisierungsmasse Λ ableiten können, um eine sehr ähnliche Gleichung wie (9.18) zu gewinnen. Diese gilt aber dann für die bare N-Punkt-Funktion und nicht für $\Gamma_R^{(2n,l)}$.

9.3 Das Skalentransformationsverhalten von $\Gamma_R^{(2n,l)}$

Bereits in Abschnitt 4.3 war die Dimension der Feldoperatoren diskutiert worden,

$$\begin{aligned}
Dim[\hat{\psi}] &= E^{\frac{3}{2}} \\
Dim[\hat{A}_\nu] &= E \quad .
\end{aligned}$$

Daraus erhält man direkt die Dimension der Greensfunktionen,

$$Dim \left[G_{\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l) \right] = E^{3n+l} \quad .$$

Im Impulsraum ergibt sich dann

$$Dim \left[G_{\rho_1 \dots \rho_l}^{(2n,l)}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, k_1, \dots, k_l) \right] = E^{3n+l-4(2n+l)+4} = E^{4-5n-3l} \quad , \tag{9.20}$$

wobei berücksichtigt wurde, daß konventionsgemäß mit der Abspaltung der Gesamtimpulserhaltenden δ -Funktion aus der Fourier-transformierten Greensfunktion vier Dimensionen der Energie verloren gehen. Schließlich erhält man als Dimension der N-Punkt-Funktionen

$$Dim \left[\Gamma^{(2n,l)}(p_i) \right] = \frac{Dim \left[G^{(2n,l)}(p_i) \right]}{Dim \left[G^{(2,0)}(p_j) \right]^{2n} Dim \left[G^{(0,2)}(p_k) \right]^l} = E^{4-3n-l} \quad , \tag{9.21}$$

wobei die p_i für alle auftretenden Impulse stehen und alle Lorentz-Indices wieder weggelassen wurden. Führt man eine Skalentransformation der Energieskala um den Faktor t aus, muß sich $\Gamma^{(2n,l)}$ wie eine homogene Funktion vom Grad $4 - 3n - l$ verhalten, d.h. es gilt

$$\Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, tm_\lambda, t\lambda, tp_i) = t^{4-3n-l} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, p_i) \quad , \quad (9.22)$$

denn bei einer Skalentransformation der Energieskala ändern sich alle dimensionsbehafteten Größen um den Skalenfaktor t , während das dimensionslose e_λ gleich bleibt. Eine kleine Modifikation von Gl.(9.22) ergibt

$$\Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, tp_i) = t^{4-3n-l} \Gamma_R^{(2n,l)}\left(e_\lambda, \frac{m_\lambda}{t}, \frac{\lambda}{t}, p_i\right) \quad .$$

Differentiation nach t führt auf

$$\begin{aligned} t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, tp_i) &= t^{4-3n-l} \left\{ 4 - 3n - l - m_\lambda \frac{\partial}{\partial m_\lambda} - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{e_\lambda} \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}\left(e_\lambda, \frac{m_\lambda}{t}, \frac{\lambda}{t}, p_i\right) \\ &= \left\{ 4 - 3n - l - m_\lambda \frac{\partial}{\partial m_\lambda} - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{e_\lambda} \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, tp_i) \quad . \end{aligned} \quad (9.23)$$

Die Abhängigkeit der renormierten N-Punkt-Funktionen vom Renormierungspunkt verändert daher ihr Skalentransformationsverhalten. Die Elimination der expliziten Ableitung nach λ mittels Gl.(9.18) ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ -t \frac{\partial}{\partial t} + \beta(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} + m_\lambda (\gamma_m(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) - 1) \frac{\partial}{\partial m_\lambda} \right. \\ &\quad \left. + 4 - 2n \left(\gamma_2(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) + \frac{3}{2} \right) - l \left(\gamma_3(e_\lambda, m_\lambda, \lambda) + 1 \right) \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, tp_i) \quad , \end{aligned} \quad (9.24)$$

was als Callan-Symanzik-Gleichung bezeichnet wird. Diese Gleichung erklärt auch die Namen anomale Dimensionen für $\gamma_{2,3,m}$. Sie spiegeln gerade das durch die Abhängigkeit vom Renormierungspunkt veränderte Verhalten der $\Gamma_R^{(2n,l)}$ bei Skalierung aller dimensionsbehafteter Größen wieder.

Die Gl.(9.24) ist eine lineare partielle Differentialgleichung in den Variablen t, e_λ und m_λ . Zur Lösung der Callan-Symanzik Gleichung macht man den Ansatz

$$\Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, m_\lambda, \lambda, tp_i) = f(t) \Gamma_R^{(2n,l)}(g(t), M(t), \lambda, p_i) \quad , \quad (9.25)$$

in dem die Skalierung aller Impulse in eine Skalen-abhängige Kopplungskonstante $g(t)$ und eine Skalen-abhängige Masse $M(t)$ sowie einen globalen Vorfaktor $f(t)$ bei festgehaltenem Renormierungspunkt umgesetzt wird. Diese Funktionen sind abhängig von e_λ und m_λ zu verstehen. Sie müssen die Randbedingungen

$$f(1) = 1 \quad (9.26)$$

$$g(1) = e_\lambda \quad (9.27)$$

$$M(1) = m_\lambda \quad (9.28)$$

erfüllen. Den Zusammenhang der so eingeführten Funktionen mit den oben definierten Funktionen $\beta, \gamma_{2,3,m}$ erhält man durch Differentiation des Ansatzes (9.25) nach t ,

$$\begin{aligned} & t \frac{\partial}{\partial t} f(t) \Gamma_R^{(2n,l)}(g(t), M(t), \lambda, p_i) \\ = & t \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t) \right) + f(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} g(t) \right) \frac{\partial}{\partial g(t)} + f(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} M(t) \right) \frac{\partial}{\partial M(t)} \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(g(t), M(t), \lambda, p_i) \\ = & t \left\{ \frac{1}{f(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} g(t) \right) \frac{\partial}{\partial g(t)} + \left(\frac{\partial}{\partial t} M(t) \right) \frac{\partial}{\partial M(t)} \right\} f(t) \Gamma_R^{(2n,l)}(g(t), M(t), \lambda, p_i) \quad . \end{aligned}$$

Der Ansatz (9.25) genügt also der Callan-Symanzik Gleichung (9.24), wenn man e_λ mit $g(t)$ und m_λ mit $M(t)$ identifiziert und für die neu eingeführten Funktionen $g(t), M(t)$ und $f(t)$ gerade die Differentialgleichungen

$$t \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \beta(g(t), M(t), \lambda) \quad (9.29)$$

$$t \frac{\partial}{\partial t} M(t) = M(t) \left(\gamma_m(g(t), M(t), \lambda) - 1 \right) \quad (9.30)$$

$$t \frac{\partial}{\partial t} \ln f(t) = 4 - 2n \left(\gamma_2(g(t), M(t), \lambda) + \frac{3}{2} \right) - l \left(\gamma_3(g(t), M(t), \lambda) + 1 \right) \quad (9.31)$$

gelten. Der Ansatz (9.25) leistet also eine partielle Lösung der Callan-Symanzik Gleichung, da bei gegebenem β und $\gamma_{2,3,m}$ in Abhängigkeit von e_λ und m_λ die Differentialgleichungen (9.29-9.31) im Prinzip bekannt und lösbar sind. Gl.(9.31) läßt sich sofort lösen,

$$\begin{aligned} \ln f(t) &= (4 - 3n - l) \ln(t) - \int_1^t \frac{2n \gamma_2(g(t'), M(t'), \lambda) + l \gamma_3(g(t'), M(t'), \lambda)}{t'} dt' \\ f(t) &= t^{4-3n-l} \exp \left\{ - \int_1^t \frac{2n \gamma_2(g(t'), M(t'), \lambda) + l \gamma_3(g(t'), M(t'), \lambda)}{t'} dt' \right\} \quad . \quad (9.32) \end{aligned}$$

Die Randbedingung $f(1) = 1$ wurde bei der Integration von Gl.(9.31) direkt eingebaut.

Die Gl.(9.30) ist im allgemeinen weniger interessant, weil die gesamte Überlegung vor allem zur Diskussion des Hochenergie-Verhaltens von Teilchen verwendet wird, wo die Masse keine Rolle mehr spielt. Daher soll im nächsten Abschnitt das Konzept der Renormierungsgruppeninvarianz für masselose Fermionen weiter ausgeführt werden. Die abgeleiteten Relationen entsprechen dann im massiven Fall dem asymptotischen Verhalten der jeweiligen Funktion für große Impulse.

9.4 Masselose Theorie

Zu Anfang dieses Abschnitts sollen alle relevanten Gleichungen der Abschnitte 9.1-9.3 noch einmal für masselose Fermionen zusammengestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda \left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \right) &= \alpha_0 Z_3 \left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \right) \\ &= \alpha_0 \left[1 + \omega_0 \left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \right) \right]^{-1} \quad (9.33) \end{aligned}$$

$$d_R\left(e_\lambda, \frac{k^2}{\lambda^2}\right) = \alpha_\lambda \frac{1 + \omega_0\left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right)}{1 + \omega_0\left(e_0, \frac{k^2}{\Lambda^2}\right)} \quad (9.34)$$

$$\Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, \lambda, p_i) = Z_2^n\left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) Z_3^{\frac{l}{2}}\left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) \Gamma_0^{(2n,l)}(e_0, \Lambda, p_i) \quad (9.35)$$

$$0 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{e_\lambda} + \beta(e_\lambda) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} - 2n\gamma_2(e_\lambda) - l\gamma_3(e_\lambda) \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, \lambda, p_i) \quad (9.36)$$

$$0 = \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{e_\lambda} + \frac{e_\lambda}{2\pi} \beta(e_\lambda) \frac{\partial}{\partial \alpha_\lambda} \right\} d_R^{-1}\left(e_\lambda, \frac{k^2}{\lambda^2}\right) \quad (9.37)$$

$$\beta(e_\lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} e_\lambda \left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) \quad (9.38)$$

$$\gamma_2(e_\lambda) = \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \left[Z_2\left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) \right] \quad (9.39)$$

$$\gamma_3(e_\lambda) = \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \left[Z_3\left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}\right) \right] \quad (9.40)$$

$$0 = \left\{ -t \frac{\partial}{\partial t} + \beta(e_\lambda) \frac{\partial}{\partial e_\lambda} + 4 - 2n\left(\gamma_2(e_\lambda) + \frac{3}{2}\right) - l\left(\gamma_3(e_\lambda) + 1\right) \right\} \Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, \lambda, tp_i) \quad (9.41)$$

$$\Gamma_R^{(2n,l)}(e_\lambda, \lambda, tp_i) = f(t) \Gamma_R^{(2n,l)}(g(t), \lambda, p_i) \quad (9.42)$$

$$t \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \beta(g(t)) \quad (9.43)$$

$$t \frac{\partial}{\partial t} \ln f(t) = 4 - 2n\left(\gamma_2(g(t)) + \frac{3}{2}\right) - l\left(\gamma_3(g(t)) + 1\right) \quad (9.44)$$

$$f(t) = t^{4-3n-l} \exp\left\{ - \int_1^t \frac{2n\gamma_2(g(t')) + l\gamma_3(g(t'))}{t'} dt' \right\} \quad (9.45)$$

Dabei wurde an verschiedenen Stellen davon Gebrauch gemacht, daß die Fermionen-Masse als dimensionsbehaftete Größe entfällt, weswegen dimensionslose Größen entweder nur von Quotienten aus verschiedenen dimensionsbehafteten Größen oder auch gar nicht mehr von ihnen abhängen können.

Jetzt kann man die Gleichung für die laufende Kopplungskonstante formal lösen und $f(t)$ etwas einfacher schreiben,

$$\ln(t) = \int_{e_\lambda}^{g(t)} \frac{1}{\beta(g')} dg' \quad (9.46)$$

$$f(t) = t^{4-3n-l} \exp\left\{ - \int_{e_\lambda}^{g(t)} \frac{2n\gamma_2(g') + l\gamma_3(g')}{\beta(g')} dg' \right\} \quad (9.47)$$

Zum Abschluß des formalen Teils dieses Abschnitts soll noch der Begriff der stabilen Fixpunkte vorgestellt werden. Dazu untersucht man die laufende Kopplungskonstante $g(t)$ für $t \rightarrow \infty$ bzw $t \rightarrow 0$. Aus der Differentialgleichung (9.43) erkennt man, daß $g(t)$ für positives $\beta(g(t))$ mit t wächst und für negatives $\beta(g(t))$ mit t kleiner wird. Wechselt β nirgendwo das Vorzeichen, dann bedeutet $\beta > 0$ eine ewiges Weiterwachsen von $g(t)$ und $\beta < 0$ ein ständiges

Abfallen, wobei im Prinzip kein Grenzwert vorgegeben ist, gegen den $g(t)$ stetig konvergieren könnte (abgesehen davon, daß man eigentlich $g(t) \geq 0$ erwartet). Damit $g(t)$ einen endlichen Grenzwert g_0 anstrebt, muß $\beta(g)$ für $g = g_0$ eine Nullstelle aufweisen. Es genügt nicht, daß $\beta(g)$ für $g \rightarrow \infty$ verschwindet, weil dann $g(t)$ zwar immer schwächer, aber doch immer weiter wächst. Das Beispiel

$$\beta(g) = \beta_0 e^{-g}$$

möge das belegen,

$$g(t) = \ln[e^{\epsilon_\lambda} + \beta_0 \ln(t)] \quad .$$

Angenommen also, $\beta(g')$ habe an der Stelle g_0 eine Nullstelle erster Ordnung,

$$\beta(g') \big|_{g' \approx g_0} = \beta'(g_0) (g' - g_0) \quad ,$$

und diese Nullstelle sei die dem Punkt e_λ am nächsten gelegene, dann ergibt die Auswertung des Integrals (9.46) in der Umgebung der Nullstelle,

$$\begin{aligned} \ln(t) &= \int_{e_\lambda}^{\bar{e}} \frac{dg'}{\beta(g')} + \frac{1}{\beta'(g_0)} \ln \left[\frac{g(t) - g_0}{\bar{e} - g_0} \right] \\ g(t) &= g_0 + t^{\beta'(g_0)} e^{a I_0} (\bar{e} - g_0) \quad , \end{aligned}$$

wobei I_0 für das Integral von e_λ bis \bar{e} steht. I_0 hängt nicht mehr von $g(t)$ ab. Ist nun $\beta'(g_0) > 0$, so nähert sich für $t \rightarrow 0$ die Funktion $g(t)$ dem Grenzwert g_0 . Im Fall $\beta'(g_0) < 0$ wird der Grenzwert g_0 dagegen für $t \rightarrow \infty$ angestrebt. Man nennt g_0 im ersteren Fall einen infrarot stabilen Fixpunkt, im letzteren Fall einen ultraviolett stabilen Fixpunkt. Die gleiche Überlegung kann man mit demselben Resultat für Nullstellen höherer Ordnung durchführen,

$$\beta(g') = a (g' - g_0)^n \quad \Rightarrow \quad g(t) = g_0 + \left[\frac{1}{(\bar{e} - g_0)^{1-n} + a(n-1)(I_0 - \ln(t))} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad .$$

Die laufende Kopplungskonstante nähert sich asymptotisch immer der e_λ nächstgelegenen Nullstelle von $\beta(g')$ an.

Jetzt soll als erste explizite Anwendung der Renormierungsgruppenidee die Gleichung (9.37) gelöst werden. Zur Abkürzung wird $x = \frac{k^2}{\lambda^2}$ definiert, sodaß die Gleichung die Form

$$0 = \left\{ \frac{e_\lambda}{2\pi} \beta(e_\lambda) \frac{\partial}{\partial \alpha_\lambda} - 2x \frac{\partial}{\partial x} \right\} d_R^{-1}(e_\lambda, x) \quad (9.48)$$

annimmt. Bei bekanntem $\beta(e_\lambda)$,

$$\beta(e_\lambda) = \frac{2\pi}{e_\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha_\lambda^{n+1} \quad ,$$

(die Tatsache, daß diese Reihe diese Form hat, kann man aus der Definition von $\beta(e_\lambda)$ leicht einsehen,

$$\beta(e_\lambda) = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} e_\lambda \left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \right) = \frac{2\pi}{e_\lambda} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_\lambda \left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \right) = \frac{2\pi}{e_\lambda} \alpha_0 \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[1 + \omega_0 \left(e_0, \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \right) \right]^{-1} \quad)$$

kann man Gl.(9.48) mit dem Ansatz

$$d_R^{-1}(e_\lambda, x) = \frac{1}{\alpha_\lambda} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \alpha_\lambda^n \right] \quad (9.49)$$

lösen. Dabei findet man die Randbedingungen für die $p_n(x)$ aus dem bekannten Wert der effektiven Kopplungskonstante bei $k^2 = \lambda^2$, d.h. $x = 1$,

$$p_n(1) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \quad .$$

Einsetzen der Potenzreihen und Sortieren nach gleichen Potenzen von α_λ ergibt

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_\lambda^n \left\{ -2xp'_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)(k-1)b_{n-k} \right\} \quad . \quad (9.50)$$

Für $p_1(x)$ und $p_2(x)$ erhält man direkt

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -\frac{b_1}{2} \ln(x) \\ p_2(x) &= -\frac{b_2}{2} \ln(x) \quad . \end{aligned}$$

Die höheren $p_n(x)$ erhält man ebenfalls nach Auflösung von Gl.(9.50) nach dem höchsten p_n ,

$$p'_n(x) = \frac{1}{2x} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)(k-1)b_{n-k} \quad ,$$

z.B. p_3 ,

$$p_3(x) = -\frac{b_1 b_2}{8} (\ln(x))^2 - \frac{b_3}{2} \ln(x) \quad .$$

Da zur Integration eines beliebigen p_n stets nur das Integral

$$\int dx \frac{(\ln(x))^n}{x} = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1} \quad (9.51)$$

benötigt wird, läßt sich Gl.(9.50) exakt lösen. Darauf soll hier aber verzichtet werden. Nur der für große x dominante Term soll berechnet werden. In p_3 ist der $\ln^2(x)$ -Term asymptotisch dominant. Seine Aufintegration liefert gemäß Gl.(9.51) den in p_4 dominanten Beitrag. Dieses Verhalten setzt sich in allen Ordnungen fort. Man erhält daraus letztlich

$$p_n(x) = - \left(\frac{b_1}{2} \right)^{n-2} \frac{b_2}{2} \frac{(\ln(x))^{n-1}}{n-1} + \mathcal{O}\left((\ln(x))^{n-2} \right) \quad . \quad (9.52)$$

Die niedrigsten beiden Ordnungen der Gell-Mann-Low Funktion $\beta(e_\lambda)$, d.h. der Vakuumpolarisation, bestimmen also bereits das gesamte Verhalten der effektiven Kopplungskonstante für große Impulse. Die Auswertung der Renormierungsgruppengleichung leistet also die partielle Lösung der Störungstheorie in allen Ordnungen. Als nächstes sollen die Koeffizienten b_1 und b_2 für die masselose QED berechnet werden. Entsprechend Gl.(9.38) und Gl.(9.34) wird dazu die

Vakuumpolarisation in den ersten beiden Ordnungen, die in Abschnitt 4.4 berechnet wurden, benötigt,

$$\begin{aligned}\omega_0^{(1)}\left(e_0, \frac{k^2}{M^2}\right) &= \frac{\alpha_0}{3\pi} \left\{ \frac{2}{\eta} + c_1 - \ln\left(\frac{k^2}{4\pi M^2}\right) \right\} \\ \omega_0^{(2)}\left(e_0, \frac{k^2}{M^2}\right) &= \frac{\alpha_0^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\eta} + c_2 - \ln\left(\frac{k^2}{4\pi M^2}\right) \right\} \quad .\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich Z_3 gemäß Gl.(7.73) (in Abhängigkeit von α_0 formuliert),

$$\begin{aligned}Z_3\left(e_0, \frac{\lambda^2}{M^2}\right) &= 1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \left\{ \frac{2}{\eta} + c_1 - \ln\left(\frac{\lambda^2}{4\pi M^2}\right) \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha_0^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\eta} + c_2 - \ln\left(\frac{\lambda^2}{4\pi M^2}\right) - \frac{4}{9} \left[\frac{2}{\eta} + c_1 - \ln\left(\frac{\lambda^2}{4\pi M^2}\right) \right]^2 \right\} \quad .\end{aligned}$$

Das ergibt wiederum entsprechend Gl.(7.108)

$$\alpha_0 = \alpha_\lambda \left\{ 1 + \frac{\alpha_\lambda}{3\pi} \left[\frac{2}{\eta} + c_1 - \ln\left(\frac{\lambda^2}{4\pi M^2}\right) \right] \right\} \quad . \quad (9.53)$$

Dann berechnet man β über Gl.(9.38) und Gl.(9.33),

$$\begin{aligned}\beta(e_\lambda) &= \frac{2\pi}{e_\lambda} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_0 \left[1 + \omega_0\left(\alpha_0, \frac{\lambda^2}{M^2}\right) \right]^{-1} \\ &= \frac{2\pi}{e_\lambda} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_0 Z_3\left(\alpha_0, \frac{\lambda^2}{M^2}\right) \\ &= \frac{2\pi}{e_\lambda} \left\{ \frac{2\alpha_0^2}{3\pi} + \frac{\alpha_0^3}{2\pi^2} \left[1 - \frac{8}{9} \left[\frac{2}{\eta} + c_1 - \ln\left(\frac{\lambda^2}{4\pi M^2}\right) \right] \right] \right\} \quad .\end{aligned}$$

Eliminiert man α_0 mittels Gl.(9.53), bleibt

$$\beta(\alpha_\lambda) = \frac{2\pi}{e_\lambda} \left\{ \frac{2\alpha_\lambda^2}{3\pi} + \frac{\alpha_\lambda^3}{2\pi^2} - \frac{121\alpha_\lambda^4}{144\pi^3} + \mathcal{O}(\alpha_\lambda^5) \right\} \quad , \quad (9.54)$$

wobei noch das hier nicht berechnete Ergebnis dritter Ordnung angefügt wurde. Der asymptotisch dominante Teil der effektiven Kopplungskonstanten bzw des Photon-Propagators ist damit durch Gl.(9.49) und Gl.(9.52) gegeben.

Eine Anmerkung sei hier noch angefügt. Das obige Vorgehen ist selbstverständlich nur vernünftig, solange

$$\alpha_\lambda^n p_n(x) \ll 1$$

gilt, also insbesondere

$$\alpha_\lambda \frac{b_1}{2} \ln(x) \ll 1 \quad .$$

Die Berechnung der effektiven Kopplungskonstanten mit dem oben vorgeführten Verfahren bricht daher für

$$\frac{\alpha_\lambda}{3\pi} \ln(x) \approx 1$$

zusammen. Diese Polstelle der effektiven Kopplungskonstanten bezeichnet man als Landau-Ghost. In seiner Nähe macht die verwendete Störungstheorie keinen Sinn mehr.

Nun soll die laufende Kopplungskonstante bis zur zweiten Ordnung berechnet werden. Mit

$$\beta(e) = \frac{2\pi}{e} (b_1\alpha^2 + b_2\alpha^2 + \dots)$$

erhält man aus Gl.(9.46)

$$\ln(t) = \int_{e_\lambda}^{g(t)} \frac{g'dg'}{2\pi} \frac{1}{b_1\alpha'^2 + b_2\alpha'^2} = \int_{\alpha_\lambda}^{G(t)} d\alpha' \frac{1}{b_1\alpha'^2 + b_2\alpha'^2} = \frac{1}{b_1} \left[-\frac{1}{\alpha'} + \frac{b_2}{b_1} \ln \left(\frac{b_1 + b_2\alpha'}{b_1\alpha'} \right) \right]_{\alpha_\lambda}^{G(t)}$$

mit

$$G(t) = \frac{g^2(t)}{4\pi} \quad ,$$

d.h.

$$-\alpha_\lambda b_1 \ln(t) = \frac{\alpha_\lambda}{G(t)} - 1 - \alpha_\lambda \frac{b_2}{b_1} \ln \left[\frac{\alpha_\lambda (b_1 + b_2 G(t))}{G(t) (b_1 + b_2 \alpha_\lambda)} \right] \quad .$$

Diese Relation ist nicht exakt aufzulösen. Mit dem Ansatz

$$G(t) = \frac{1}{\alpha_\lambda} [1 + g_1(t)\alpha_\lambda + g_2(t)\alpha_\lambda^2 + \dots]$$

erhält man

$$\begin{aligned} -\alpha_\lambda b_1 \ln(t) &= g_1(t)\alpha_\lambda + g_2(t)\alpha_\lambda^2 + \dots \\ &- \alpha_\lambda \frac{b_2}{b_1} \left[\ln \left[1 + g_1(t)\alpha_\lambda + g_2(t)\alpha_\lambda^2 + \dots \right] - \ln \left[1 + \frac{b_2}{b_1} \alpha_\lambda \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(1 + \frac{b_2}{b_1} \alpha_\lambda \left[1 - g_1(t)\alpha_\lambda - g_2(t)\alpha_\lambda^2 + \dots \right] + (g_1(t)\alpha_\lambda)^2 + \dots \right) \right] \quad . \end{aligned}$$

Konsistent bis zur zweiten Ordnung erfordert diese Gleichung

$$g_1(t) = -b_1 \ln(t) \quad (9.55)$$

$$g_2(t) = -b_2 \ln(t) \quad . \quad (9.56)$$

Damit ergibt sich also

$$G(t) = \frac{\alpha_\lambda}{1 - b_1 \alpha_\lambda \ln(t) - b_2 \alpha_\lambda^2 \ln(t) - \dots} \quad , \quad (9.57)$$

d.h. im Fall der QED

$$G_{QED}(t) = \frac{\alpha_\lambda}{1 - \frac{2\alpha_\lambda}{3\pi} \ln(t) - \frac{\alpha_\lambda^2}{2\pi^2} \ln(t) - \dots} \quad . \quad (9.58)$$

Man erkennt, daß $t = 0$ im Fall der QED ein infrarot stabiler Fixpunkt ist und daher $G(t)$ an dieser Stelle verschwindet. Das entspricht der Tatsache, daß die Wechselwirkung der QED für beliebig kleine Impulsüberträge, d.h. für unendlich entfernte Ladungen, verschwindet.

Im Gegensatz dazu findet man in der QCD als Callan-Symanzik Funktion in den niedrigsten beiden Ordnungen

$$\beta_{QCD}(e_s) = -\frac{2\pi}{e_s} \left(\left(11 - \frac{2}{3}N_F\right) \frac{\alpha_s^2}{2\pi} + \left(102 - \frac{38}{3}N_F\right) \frac{\alpha_s^3}{8\pi^2} + \dots \right) \quad , \quad (9.59)$$

mit der starken Wechselwirkungskopplungskonstanten e_s und

$$\alpha_s = \frac{e_s^2}{4\pi} \quad .$$

Daher ist für $N_F < \frac{306}{38} = 8,05..$ die Stelle $e_s = 0$ ein ultraviolett stabiler Fixpunkt. Dementsprechend verschwindet die laufende Kopplungskonstante in diesem Fall für $t \rightarrow \infty$,

$$G_{QCD}(t) = \frac{\alpha_s}{1 + \frac{(33-2N_F)}{6\pi}\alpha_s \ln(t) + \frac{(306-38N_F)}{24\pi^2}\alpha_s^2 \ln(t) + \dots} \quad . \quad (9.60)$$

Sämtliche N-Punkt-Funktionen verhalten sich für große Impulse daher wie die Funktionen wechselwirkungsfreier Teilchen. Die QCD mit weniger als acht Flavour-Freiheitsgraden ist eine asymptotisch freie Theorie.

Abschließend sei noch der Vorfaktor $f(t)$ für Photon- l -Punkt-Funktionen angegeben. Man erhält aus Gl.(9.47) und Gl.(9.19)

$$f(t) = t^{4-l} \exp \left\{ -l \int_{e_\lambda}^{g(t)} \frac{dg'}{g'} \right\} = t^{4-l} \left(\frac{\alpha_\lambda}{G(t)} \right)^l \quad . \quad (9.61)$$

Er geht nicht in die innere Struktur der N-Punkt-Funktionen ein, ändert also an der asymptotischen Freiheit einer Theorie nichts.

Anhang A

Integralsammlung

In diesem Anhang sollen einige der im Zusammenhang mit der dimensionalren Regularisierung verwendeten Integrale im Minkowski-Raum, d.h. es gilt $p^2 = (p^0)^2 - \underline{p}^2$, aufgelistet werden.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + 2kp - m^2]^\alpha} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) (m^2 + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{[k^2 + 2kp - m^2]^\alpha} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) p_\mu (m^2 + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 + 2kp - m^2]^\alpha} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) p_\mu p_\nu - \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - 1\right) \frac{g_{\mu\nu}}{2} (m^2 + p^2) \right\} (m^2 + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 + 2kp - m^2]^\alpha} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - 1\right) (g_{\mu\nu} p_\lambda + g_{\mu\lambda} p_\nu + g_{\nu\lambda} p_\mu) (m^2 + p^2) \right. \\
& \quad \left. - \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) p_\mu p_\nu p_\lambda \right\} (m^2 + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho}{[k^2 + 2kp - m^2]^\alpha} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{1}{4} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - 2\right) (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) (m^2 + p^2)^2 \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - 1\right) (g_{\mu\nu} p_\lambda p_\rho + g_{\mu\rho} p_\lambda p_\nu + g_{\mu\lambda} p_\nu p_\rho + g_{\nu\rho} p_\lambda p_\mu \\
& \quad \quad \quad \left. + g_{\nu\lambda} p_\mu p_\rho + g_{\rho\lambda} p_\nu p_\mu) (m^2 + p^2) \right. \\
& \quad \left. + \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho \right\} (m^2 + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p-k)^2 - m_1^2]^\alpha [k^2 - m_2^2]^\beta} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1} [x(1-x)p^2 - xm_1^2 - (1-x)m_2^2]^{\frac{D}{2}-\alpha-\beta} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\nu}{[(p-k)^2 - m_1^2]^\alpha [k^2 - m_2^2]^\beta} \\
= & \frac{ip_\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\beta-1} x^\alpha [x(1-x)p^2 - xm_1^2 - (1-x)m_2^2]^{\frac{D}{2}-\alpha-\beta} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\nu k_\mu}{[(p-k)^2 - m_1^2]^\alpha [k^2 - m_2^2]^\beta} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\beta-1} \left\{ p_\nu p_\mu \Gamma\left(\alpha + \beta - \frac{D}{2}\right) x^{\alpha+1} [x(1-x)p^2 \dots]^{\frac{D}{2}-\alpha-\beta} \right. \\
& \left. + \frac{g_{\nu\mu}}{2} \Gamma\left(\alpha + \beta - 1 - \frac{D}{2}\right) x^{\alpha-1} [\dots]^{\frac{D}{2}+1-\alpha-\beta} \right\} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\nu k_\mu k_\rho}{[(p-k)^2 - m_1^2]^\alpha [k^2 - m_2^2]^\beta} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\beta-1} \left\{ p_\nu p_\mu p_\rho \Gamma\left(\alpha + \beta - \frac{D}{2}\right) x^{\alpha+2} [\dots]^{\frac{D}{2}-\alpha-\beta} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p_\rho + g_{\mu\rho} p_\nu + g_{\nu\rho} p_\mu) \right. \\
& \left. \cdot \Gamma\left(\alpha + \beta - 1 - \frac{D}{2}\right) x^\alpha [\dots]^{\frac{D}{2}+1-\alpha-\beta} \right\} \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\nu k_\mu k_\rho k_\lambda}{[(p-k)^2 - m_1^2]^\alpha [k^2 - m_2^2]^\beta} \\
= & \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\beta-1} \left\{ p_\nu p_\mu p_\rho p_\lambda \Gamma\left(\alpha + \beta - \frac{D}{2}\right) x^{\alpha+3} [\dots]^{\frac{D}{2}-\alpha-\beta} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p_\rho p_\lambda + g_{\mu\rho} p_\nu p_\lambda + g_{\nu\rho} p_\mu p_\lambda \right. \\
& \left. + g_{\mu\lambda} p_\rho p_\nu + g_{\nu\lambda} p_\rho p_\mu + g_{\rho\lambda} p_\nu p_\mu) \right. \\
& \left. \cdot \Gamma\left(\alpha + \beta - 1 - \frac{D}{2}\right) x^{\alpha+1} [\dots]^{\frac{D}{2}+1-\alpha-\beta} \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) \right. \\
& \left. \cdot \Gamma\left(\alpha + \beta - 2 - \frac{D}{2}\right) x^{\alpha-1} [\dots]^{\frac{D}{2}+2-\alpha-\beta} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - m^2]^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (-1)^\alpha \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} (m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - 1\right)}{\Gamma(\alpha)} (m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + 1} g_{\mu\nu} \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho}{[k^2 - m^2]^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^\alpha}{4} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - 2\right)}{\Gamma(\alpha)} (m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + 2} \\
&\quad \times (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + g_{\mu\lambda} g_{\rho\nu}) \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\rho k_\epsilon k_\sigma}{[k^2 - m^2]^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{8} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - 3\right)}{\Gamma(\alpha)} (m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + 3} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} g_{\epsilon\sigma})_{symm}
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $(g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} g_{\epsilon\sigma})_{symm}$, daß alle Kombinationen der Indices mit positivem Vorzeichen durchgegangen werden müssen.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 d\alpha d\beta (\alpha + \beta)^\rho &= \frac{(2^{\rho+2} - 2)}{(\rho + 1)(\rho + 2)} \\
\int_0^1 d\alpha \alpha^x (1 - \alpha)^y &= \frac{\Gamma(x + 1)\Gamma(y + 1)}{\Gamma(x + y + 2)} \\
\int_0^\infty dx \frac{x^\beta}{(x^2 + m^2)^\alpha} &= \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})\Gamma(\alpha - \frac{\beta+1}{2})}{2\Gamma(\alpha)(m^2)^{\alpha - \frac{\beta+1}{2}}}
\end{aligned}$$