

Statistische Feldtheorie

Dirk H. Rischke

Wintersemester 2021/2022

Inhaltsverzeichnis

1	Thermodynamik und Statistische Mechanik	1
1.1	Thermodynamische Grundrelationen	1
1.2	Mikrokanonisches Ensemble	3
1.3	Kanonisches Ensemble	4
1.4	Großkanonisches Ensemble	6
1.5	Anwendung: ideale Bose–Einstein– und Fermi–Dirac–Gase	9
2	Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie	13
2.1	Klassische Mechanik eines einzelnen Teilchens	13
2.2	Klassische Mechanik eines N –Teilchensystems	14
2.3	Kontinuumsmechanik	15
2.4	Quantenmechanik eines einzelnen Teilchens	18
2.5	Quantenfeldtheorie in zweiter Quantisierung	21
2.6	Quantenstatistik	23
3	Nichtwechselwirkende Feldtheorien	27
3.1	Funktionalintegraldarstellung der großkanonischen Zustandssumme	27
3.2	Normierung der Funktionalintegraldarstellung der großkanonischen Zustandssumme	31
3.3	Periodizität der Integration über kanonisch konjugierte Felder	35
3.4	Das neutrale skalare Feld	36
3.5	Das geladene skalare Feld	47
3.6	Anwendung: Bose–Einstein–Kondensation	52
3.7	Das Dirac–Feld	57
3.8	Das massive neutrale Vektorfeld	67
3.9	Das Stückelberg–Feld	72
3.10	Das elektromagnetische Feld	77
4	Störungstheorie	85
4.1	Entwicklung in Potenzen der Kopplungskonstanten	85
4.2	ϕ^4 –Theorie	89
4.3	Spektraldichte	93
4.4	Propagator in gemischter Darstellung	96
4.5	Feynman–Regeln für die ϕ^4 –Theorie	98
4.6	Yukawa–Theorie	102
4.7	QED	104
4.8	QCD	115

5	Resummationsverfahren	119
5.1	Infrarot-Divergenzen: Zusammenbruch der naiven Störungstheorie	119
5.2	1PI-effektive Wirkung und Schleifenentwicklung	125
5.3	2PI-effektive Wirkung (Cornwall–Jackiw–Tomboulis–Formalismus)	138
5.4	Spontane Symmetriebrechung und ihre Restaurierung bei nichtverschwin- denden Temperaturen	148
5.5	Symmetrierestauration in Hartree– und Hartree–Fock–Näherung	155
5.6	Fermionen: das Nambu–Jona-Lasinio–Modell	168
5.7	Suprafluidität und Supraleitung	173
5.8	Eichtheorien: Hard-Thermal-Loop (HTL) – Näherung	185
5.9	Funktionale Renormierungsgruppe	201
5.9.1	Herleitung der FRG-Flussgleichung	201
5.9.2	Gradientenentwicklung und “local-potential approximation”	206
5.9.3	Das $O(N)$ –Modell	209
5.9.4	Die FRG-Flussgleichung als Advektions-Diffusions-Gleichung	210

1 Thermodynamik und Statistische Mechanik

20.10.2021

In diesem ersten einleitenden Kapitel soll zunächst an die wichtigsten Relationen der Thermodynamik und Statistischen Mechanik (vgl. Vorlesung "Theoretische Physik V: Statistische Mechanik") erinnert werden, soweit diese für die Statistische Feldtheorie von Relevanz sein werden. Sodann werden sukzessive das mikrokanonische, das kanonische und das großkanonische Ensemble der Statistischen Mechanik und ihr Bezug zur Thermodynamik diskutiert. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Anwendung auf ideale, d.h. nichtwechselwirkende Bose-Einstein- und Fermi-Dirac-Gase.

Wie schon in der Quantenfeldtheorie wählen wir **natürliche Heavside-Lorentz-Einheiten** $\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$. Für thermodynamische Anwendungen ist es darüberhinaus zweckmäßig, auch noch den Wert der **Boltzmann-Konstanten** auf eins zu setzen, $k_B = 1$. Dies bedeutet, dass die **Temperatur** T dieselbe Einheit wie die Energie hat, $[T] = \text{MeV}$.

1.1 Thermodynamische Grundrelationen

Wir betrachten ein **abgeschlossenes** System mit **Volumen** V im thermodynamischen Gleichgewicht. In diesem System sind die folgenden Größen **exakt erhalten**:

- (i) die **Energie** E ,
- (ii) die **Teilchenzahl** N ,

denn die Abgeschlossenheit des Systems verhindert, dass Energie oder Teilchen mit der Umgebung ausgetauscht werden.

An dieser Stelle sind folgende Anmerkungen zu machen:

- (1) In Systemen, die im Rahmen einer **relativistischen** Feldtheorie beschrieben werden, muss die Annahme der exakten Teilchenzahlerhaltung modifiziert werden, da man (bei hinreichend großen Energien) immer Teilchen-Antiteilchen-Paare aus dem Vakuum erzeugen kann. Was aber in diesem Fall nach wie vor erhalten bleibt, ist die **Netto-Teilchenzahl**, d.h. die Zahl der Teilchen minus die Zahl der Antiteilchen. Da jedes Teilchen durch einen Satz von **Quantenzahlen** charakterisiert werden kann, und sich Teilchen und Antiteilchen durch das Vorzeichen in ihren Quantenzahlen unterscheiden, sind die Erhaltungsgrößen in relativistischen Systemen also die **Netto-Quantenzahlen**. Als Beispiel diene die elektrische Netto-Ladung, $Q \equiv Q^+ - Q^-$,

wobei Q^\pm die Ladung der Teilchen/Antiteilchen bezeichnet. (Wir verzichten der Einfachheit halber im Folgenden auf den Zusatz “Netto”, da dies durch das umgekehrte Vorzeichen der Antiteilchen-Quantenzahlen automatisch berücksichtigt wird.)

- (2) Da Teilchen und Antiteilchen verschiedene (und unter Umständen im jeweiligen Kontext auch erhaltene) Quantenzahlen besitzen können (man denke beispielsweise an Quarks, die Spin, Flavour, elektrische Ladung und Farbe tragen), sind daher im allgemeinen mehrere Quantenzahlen N_1, N_2, \dots unter (ii) zu berücksichtigen (hier der Einfachheit halber generisch durchnummeriert).

In einem System mit Volumen V und M erhaltenen Quantenzahlen N_1, \dots, N_M gilt im thermodynamischen Gleichgewicht der **erste Hauptsatz der Thermodynamik**

$$dE = T dS - p dV + \sum_{i=1}^M \mu_i dN_i, \quad (1.1)$$

wobei S für die **Entropie**, p für den **Druck** und μ_i für das mit der erhaltenen Quantenzahl N_i assoziierte **chemische Potential** steht. Als vollständiges Differential interpretiert impliziert der erste Hauptsatz, dass die Energie eine Funktion der unabhängigen Variablen Entropie, Volumen und erhaltenen Quantenzahlen ist,

$$E = E(S, V, \{N_i\}). \quad (1.2)$$

Ist die Energie des Systems in dieser Form, d.h. als Funktion dieser Variablen bekannt, so spricht man von einer **thermodynamisch vollständigen Zustandsgleichung**. “Thermodynamisch vollständig” bedeutet in diesem Zusammenhang, dass man alle anderen thermodynamischen Variablen durch partielle Ableitungen berechnen kann,

$$T = \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_{V, \{N_i\}}, \quad p = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_{S, \{N_i\}}, \quad \mu_j = \left. \frac{\partial E}{\partial N_j} \right|_{S, V, \{N_i\}_{i \neq j}}. \quad (1.3)$$

Man kann den ersten Hauptsatz (1.1) auch in der Form

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV - \sum_{i=1}^M \frac{\mu_i}{T} dN_i \quad (1.4)$$

schreiben und eine thermodynamisch vollständige Zustandsgleichung hätte die Form

$$S = S(E, V, \{N_i\}), \quad (1.5)$$

woraus man wieder alle anderen thermodynamischen Variablen durch partielle Ableitungen berechnen kann,

$$\frac{1}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{V, \{N_i\}}, \quad \frac{p}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E, \{N_i\}}, \quad \frac{\mu_j}{T} = - \left. \frac{\partial S}{\partial N_j} \right|_{E, V, \{N_i\}_{i \neq j}}. \quad (1.6)$$

Energie, Entropie, Volumen, und Quantenzahlen sind in der Regel **extensive Größen**, d.h. sie skalieren mit dem Volumen V des Systems. Wenn man also das Volumen um einen Faktor α verändert, $V \rightarrow \alpha V$, dann gilt

$$E(\alpha S, \alpha V, \{\alpha N_i\}) = \alpha E(S, V, \{N_i\}). \quad (1.7)$$

Wir betrachten nun infinitesimale Veränderungen, $\alpha \equiv 1 + \varepsilon$, mit $|\varepsilon| \ll 1$. Dann können wir die linke Seite dieser Gleichung bis zur ersten Ordnung in ε nach Taylor entwickeln,

$$\begin{aligned} E(S + \varepsilon S, V + \varepsilon V, \{N_i + \varepsilon N_i\}) &= \\ &= E(S, V, \{N_i\}) + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_{V, \{N_i\}} S + \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_{S, \{N_i\}} V + \sum_{j=1}^M \left. \frac{\partial E}{\partial N_j} \right|_{S, V, \{N_i\}_{i \neq j}} N_j \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= E(S, V, \{N_i\}) + \varepsilon \left(TS - pV + \sum_{j=1}^M \mu_j N_j \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (1.3) benutzt haben. Andererseits gilt für die rechte Seite von Gl. (1.7)

$$E(S + \varepsilon S, V + \varepsilon V, \{N_i + \varepsilon N_i\}) = E(S, V, \{N_i\}) + \varepsilon E(S, V, \{N_i\}). \quad (1.9)$$

Vergleichen wir die Koeffizienten der ersten Ordnung in ε in den Glgen. (1.8) und (1.9) so erhalten wir die **Fundamentalrelation der Thermodynamik**

$$E = TS - pV + \sum_{j=1}^M \mu_j N_j. \quad (1.10)$$

Bilden wir davon das totale Differential,

$$dE = T dS + S dT - p dV - V dp + \sum_{j=1}^M (\mu_j dN_j + N_j d\mu_j),$$

und benutzen den ersten Hauptsatz (1.1), so ergibt sich die **Gibbs–Duhem–Relation**

$$0 = S dT - V dp + \sum_{j=1}^M N_j d\mu_j, \quad (1.11)$$

welche die **intensiven Zustandsgrößen** $T, p, \{\mu_j\}$ (die per Definition nicht mit der Größe des Systems skalieren) miteinander verknüpft.

1.2 Mikrokanonisches Ensemble

In der Statistischen Mechanik wird ein abgeschlossenes System mit Energie E , Volumen V und M erhaltenen Quantenzahlen N_1, \dots, N_M durch das **mikrokanonische Ensemble** beschrieben. Die **mikrokanonische Zustandssumme** $\Xi(E, V, \{N_i\})$ ist die **Anzahl aller möglichen Mikrozustände** des Systems. Der Zusammenhang zur Thermodynamik ergibt sich durch Boltzmanns berühmte Formel, die in natürlichen Einheiten lautet,

$$S(E, V, \{N_i\}) = \ln \Xi(E, V, \{N_i\}). \quad (1.12)$$

Die **mikrokanonische Zustandsdichte** ist definiert als die Zahl der Mikrozustände pro Energieintervall $(E, E + dE)$,

$$\Delta(E, V, \{N_i\}) \equiv \frac{\Xi(E, V, \{N_i\})}{dE} \equiv \sum_R \delta(E - E_R), \quad (1.13)$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über alle möglichen Mikrozustände R geführt wird, allerdings mit der Einschränkung, dass das System feste Quantenzahlen N_1, \dots, N_M haben soll, was durch den Strich an der Summe gekennzeichnet ist. Die Delta-Funktion wiederum selektiert aus dieser Summe diejenigen Mikrozustände, deren Energie E_R gerade gleich der vorgegebenen Energie E ist.

Nun ist im Prinzip mittels Gl. (1.12) die thermodynamisch vollständige Zustandsgleichung $S(E, V, \{N_i\})$ des Systems aus der mikrokanonischen Zustandssumme $\Xi(E, V, \{N_i\})$ bzw. aus der mikrokanonischen Zustandsdichte $\Delta(E, V, \{N_i\})$ berechenbar, und damit sind aufgrund von Gl. (1.6) alle thermodynamischen Eigenschaften des Systems bekannt. Das Problem besteht darin, dass die mikrokanonische Zustandsdichte aufgrund der Beschränkung der Summe durch die Delta-Funktion in Gl. (1.13) nur sehr schwer berechenbar ist. Daher geht man in der Regel einen Umweg über das im nächsten Abschnitt diskutierte **kanonische Ensemble**.

1.3 Kanonisches Ensemble

Im kanonischen Ensemble betrachtet man ein System mit gegebenem Volumen V und M erhaltenen Quantenzahlen N_1, \dots, N_M , welches sich in Kontakt mit einem **Wärmebad** konstanter Temperatur T im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, s. Abb. 1.1.

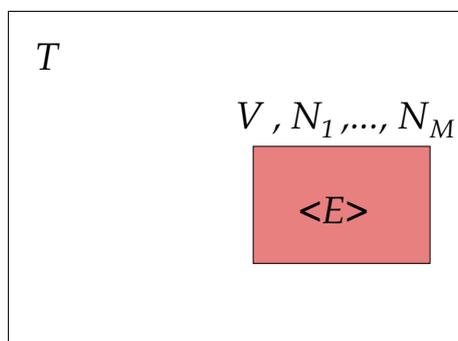


Abbildung 1.1: System mit konstantem Volumen V und konstanten Quantenzahlen N_1, \dots, N_M in Kontakt mit einem Wärmebad konstanter Temperatur T .

In diesem Fall ist ein **Energieaustausch** mit dem Wärmebad erlaubt, aber kein Austausch von Quantenzahlen. Der Energieaustausch sorgt dafür, dass das System im thermodynamischen Gleichgewicht dieselbe Temperatur wie das Wärmebad annimmt, mithin **exakt erhalten** ist, wohingegen die Energie nur noch **im Mittel** erhalten ist,

$$E \longrightarrow \langle E \rangle = \text{const.}$$

Die Temperatur ersetzt die Energie als unabhängige thermodynamische Variable. Mit ihrer Hilfe wird der Mittelwert der Energie $\langle E \rangle$ kontrolliert. Die Zustandsgleichungen $E(S, V, \{N_i\})$ bzw. $S(E, V, \{N_i\})$ sind nicht mehr thermodynamisch vollständig, d.h. sie erlauben nicht länger die Berechnung aller thermodynamischen Zustandsgrößen. Man benötigt eine Funktion, die von den unabhängigen thermodynamischen Variablen $T, V, \{N_i\}$ abhängt.

Betrachten wir die Energie $E(S, V, \{N_i\})$. Die Ersetzung der Entropie S durch die Temperatur $T = \partial E / \partial S|_{V, \{N_i\}}$, d.h. durch die Ableitung von E nach S , ist mathematisch ein Variablenwechsel, wie wir ihm schon oft begegnet sind, beispielsweise in der Mechanik bei der Ersetzung der Geschwindigkeit \dot{q} in der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ durch den Impuls $p \equiv \partial L / \partial \dot{q}|_q$. Dies geschieht mit Hilfe einer **Legendre-Transformation**. Aus der Lagrange-Funktion erhält man dann die Hamilton-Funktion $H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$.

In unserem Fall erhält man mit Hilfe einer Legendre-Transformation von $E(S, V, \{N_i\})$ bzgl. der Variablen S die **freie Energie**

$$F = E - \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_{V, \{N_i\}} \quad S \equiv E - TS, \quad (1.14)$$

wobei wir die erste Gl. (1.3) benutzt haben. Das totale Differential berechnen wir mit Hilfe des ersten Hauptsatzes (1.1) zu

$$dF = dE - T dS - S dT = -S dT - p dV + \sum_{i=1}^M \mu_i dN_i. \quad (1.15)$$

Diese Relation kann man als ersten Hauptsatz der Thermodynamik, nun aber für die freie Energie formuliert, betrachten. Sie zeigt auch, dass eine thermodynamisch vollständige Zustandsgleichung durch die freie Energie als Funktion der unabhängigen Variablen $T, V, \{N_i\}$ gegeben ist,

$$F = F(T, V, \{N_i\}). \quad (1.16)$$

Die anderen thermodynamischen Größen berechnet man wieder mit Hilfe partieller Ableitungen,

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V, \{N_i\}}, \quad p = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T, \{N_i\}}, \quad \mu_j = \left. \frac{\partial F}{\partial N_j} \right|_{T, V, \{N_i\}_{i \neq j}}. \quad (1.17)$$

In der Statistischen Mechanik wird ein System bei fester Temperatur T , festem Volumen V und festen Quantenzahlen N_1, \dots, N_M durch das **kanonische Ensemble** beschrieben. Die **kanonische Zustandssumme** erhält man aus einer **Laplace-Transformation** der mikrokanonischen Zustandsdichte (1.13) bzgl. der Variablen E ,

$$\begin{aligned} Z(T, V, \{N_i\}) &\equiv \int_0^\infty dE e^{-E/T} \Delta(E, V, \{N_i\}) = \int_0^\infty dE e^{-E/T} \sum_R \delta(E - E_R) \\ &= \sum_R e^{-E_R/T}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

wobei wir im letzten Schritt Integral und Summe vertauscht und das Integral mit Hilfe der Delta-Funktion berechnet haben.

Falls die kanonische Zustandssumme $Z(T, V, \{N_i\})$ bekannt ist, kann man daraus die mikrokanonische Zustandsdichte $\Delta(E, V, \{N_i\})$ durch eine **inverse Laplace-Transformation** berechnen,

$$\Delta(E, V, \{N_i\}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} d\frac{1}{T} e^{E/T} Z(T, V, \{N_i\}) . \quad (1.19)$$

Hierbei verläuft die Integrationskontur parallel zur imaginären $1/T$ -Achse und rechts von allen Singularitäten von $Z(T, V, \{N_i\})$, oder mit anderen Worten, $\delta > \text{Re}(1/T^*)$, wobei $1/T^*$ diejenige Singularität von $Z(T, V, \{N_i\})$ ist, die den größten Realteil besitzt, vgl. Abb. 1.2.

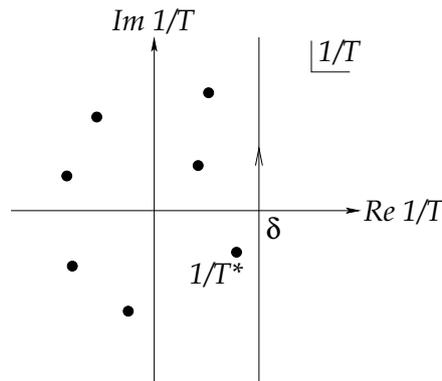


Abbildung 1.2: Integrationskontur für die inverse Laplace-Transformation (1.19) in der komplexen $1/T$ -Ebene.

Der Bezug zur Thermodynamik wird durch die Relation

$$F(T, V, \{N_i\}) = -T \ln Z(T, V, \{N_i\}) \quad (1.20)$$

hergestellt. Falls $Z(T, V, \{N_i\})$ bekannt ist, kann man so die freie Energie $F(T, V, \{N_i\})$ berechnen und, weil dies eine thermodynamisch vollständige Zustandsgleichung ist, mittels Gl. (1.17) auch alle anderen thermodynamischen Zustandsgrößen. Die Berechnung von $Z(T, V, \{N_i\})$ wiederum ist erheblich einfacher als die von $\Delta(E, V, \{N_i\})$, da die Summe über alle Mikrozustände in Gl. (1.18) nun nicht mehr wie noch in Gl. (1.13) durch eine Delta-Funktion auf Energien $E = E_R$ beschränkt ist. Allerdings besteht nach wie vor die Einschränkung auf einen exakt vorgegebenen Satz von Quantenzahlen N_1, \dots, N_M . Diese wird im **großkanonischen Ensemble** fallen gelassen, welches wir im nächsten Abschnitt besprechen werden.

1.4 Großkanonisches Ensemble

Im großkanonischen Ensemble betrachtet man ein System mit gegebenem Volumen V , das sich im thermodynamischen Gleichgewicht mit einem **Wärmebad** konstanter Temperatur T befindet, welches gleichzeitig ein **Quantenzahlenreservoir** bildet, das konstante chemische Potentiale μ_1, \dots, μ_M aufweist, s. Abb. 1.3.

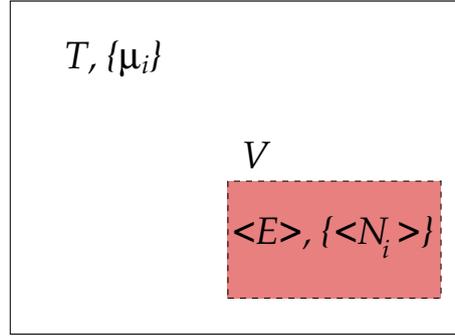


Abbildung 1.3: System mit konstantem Volumen V in Kontakt mit einem Wärmebad und Quantenzahlenreservoir konstanter Temperatur T und konstanten chemischen Potentialen μ_1, \dots, μ_M .

Nun ist nicht nur Energieaustausch, sondern auch der Austausch von Quantenzahlen zwischen System und Reservoir erlaubt. Die Energie E und die Quantenzahlen N_1, \dots, N_M sind lediglich im Mittel erhalten,

$$E \longrightarrow \langle E \rangle = \text{const} , \quad \{N_i\} \longrightarrow \{\langle N_i \rangle = \text{const}_i\} .$$

Wie beim kanonischen Ensemble ersetzt die Temperatur T die Energie und kontrolliert ihren Mittelwert $\langle E \rangle$. Darüberhinaus ersetzen die chemischen Potentiale μ_1, \dots, μ_M die Quantenzahlen und kontrollieren ihre Mittelwerte $\langle N_1 \rangle, \dots, \langle N_M \rangle$. Die unabhängigen thermodynamischen Variablen sind $T, V, \{\mu_i\}$ und man benötigt eine Funktion dieser Variablen, die die freie Energie ersetzt und eine thermodynamisch vollständige Zustandsgleichung bildet. Dies ist das **großkanonische Potential** $\Omega(T, V, \{\mu_i\})$, welches man aus der freien Energie $F(T, V, \{N_i\})$ durch M -fache Legendre-Transformation bzgl. der Variablen N_1, \dots, N_M erhält,

$$\Omega = F - \sum_{j=1}^M \left. \frac{\partial F}{\partial N_j} \right|_{T, V, \{N_i\}_{i \neq j}} \quad N_j = F - \sum_{j=1}^M \mu_j N_j , \quad (1.21)$$

wobei wir die letzte Gl. (1.17) benutzt haben. Mit Hilfe der Fundamentalrelation der Thermodynamik (1.10) und der Definition (1.14) der freien Energie folgern wir, dass

$$\Omega = E - TS - \sum_{j=1}^M \mu_j N_j = -pV . \quad (1.22)$$

Das totale Differential von Ω berechnen wir mit der Definition (1.21) und Gl. (1.15) zu

$$d\Omega = dF - \sum_{j=1}^M (\mu_j dN_j + N_j d\mu_j) = -S dT - p dV - \sum_{j=1}^M N_j d\mu_j . \quad (1.23)$$

Diese Relation kann man als ersten Hauptsatz der Thermodynamik für das großkanonische Potential ansehen. Als totales Differential von Ω interpretiert bestätigt sie auch, dass Ω

eine Funktion der unabhängigen thermodynamischen Variablen $T, V, \{\mu_i\}$ ist,

$$\Omega = \Omega(T, V, \{\mu_i\}) , \quad (1.24)$$

was eine thermodynamisch vollständige Zustandsgleichung darstellt, weil man daraus mit Hilfe partieller Ableitungen alle anderen Zustandsgrößen berechnen kann,

$$S = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right|_{V, \{\mu_i\}} , \quad p = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial V} \right|_{T, \{\mu_i\}} , \quad N_j = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_j} \right|_{T, V, \{\mu_i\}_{i \neq j}} . \quad (1.25)$$

Mit Hilfe von Gl. (1.22) folgern wir sofort, dass

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial V} \right|_{T, \{\mu_i\}} = -p = \frac{\Omega}{V} , \quad (1.26)$$

d.h. Ω kann vom Volumen V nur linear abhängen, ist also eine extensive Zustandsgröße.

In der Statistischen Mechanik wird ein System mit festem Volumen V , fester Temperatur T und festen chemischen Potentialen μ_1, \dots, μ_M durch das **großkanonische Ensemble** beschrieben. Die **großkanonische Zustandssumme** ist die M -fache Laplace-Transformierte der kanonischen Zustandssumme bzgl. der Quantenzahlen N_1, \dots, N_M ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(T, V, \{\mu_i\}) &= \sum_{N_1} e^{\mu_1 N_1/T} \dots \sum_{N_M} e^{\mu_M N_M/T} Z(T, V, \{N_i\}) \\ &= \sum_{N_1} e^{\mu_1 N_1/T} \dots \sum_{N_M} e^{\mu_M N_M/T} \sum_R' e^{-E_R/T} \\ &= \sum_R e^{\sum_{i=1}^M \mu_i N_i/T} e^{-E_R/T} = \sum_R e^{-(E_R - \sum_{i=1}^M \mu_i N_i)/T} , \end{aligned} \quad (1.27)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Restriktion hinsichtlich der Quantenzahlen in der Summe über alle Mikrozustände fallenlassen konnten, da nun über alle Werte der Quantenzahlen N_1, \dots, N_M summiert wird, $\sum_{N_1, \dots, N_M} \sum_R' \equiv \sum_R$.

Falls die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}(T, V, \{\mu_i\})$ bekannt ist, kann man die kanonische Zustandssumme $Z(T, V, \{N_i\})$ durch M -fache inverse Laplace-Transformation bestimmen. Für eine einzige erhaltene Quantenzahl N lautet diese in Analogie zu Gl. (1.19)

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} d\frac{\mu}{T} e^{-\mu N/T} \mathcal{Z}(T, V, \mu) . \quad (1.28)$$

Die Integrationskontur in der komplexen μ/T -Ebene ist analog wie in Abb. 1.2 rechts von der Singularität von $\mathcal{Z}(T, V, \mu)$ mit dem größten Realteil zu wählen.

Der Zusammenhang zur Thermodynamik ergibt sich durch die Relation

$$\Omega(T, V, \{\mu_i\}) = -T \ln \mathcal{Z}(T, V, \{\mu_i\}) , \quad (1.29)$$

bzw. mit Gl. (1.22)

$$p(T, \{\mu_i\}) = \frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}(T, V, \{\mu_i\}) , \quad (1.30)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass Ω bzw. $\ln \mathcal{Z}$ linear proportional zum Volumen sind, d.h. der Druck hängt (als intensive Zustandsgröße) nicht vom Volumen ab. Die Berechnung von $\mathcal{Z}(T, V, \{\mu_i\})$ ist im Vergleich zu der von $Z(T, V, \{N_i\})$ oder gar $\Delta(E, V, \{N_i\})$ einfach.

Übungsaufgabe 1.1: Schreibe den ersten Hauptsatz der Thermodynamik, die Fundamentalrelation der Thermodynamik, sowie die partiellen Ableitungen der Zustandsgleichung

- (a) für die Dichten $\epsilon \equiv E/V$, $s \equiv S/V$, $n_i \equiv N_i/V$, $f \equiv F/V$, $\omega \equiv \Omega/V \equiv -p$, und
- (b) im Fall einer einzelnen erhaltenen Quantenzahl N , für die spezifischen Größen E/N , S/N , V/N , F/N , Ω/N .

1.5 Anwendung: ideale Bose–Einstein– und Fermi–Dirac–Gase

Als einfache Anwendung und Beispiel betrachten wir das ideale, d.h. nichtwechselwirkende Bose–Einstein– bzw. Fermi–Dirac–Gas und berechnen deren großkanonische Zustandssummen $\mathcal{Z}_0^{\text{BE}}$ bzw. $\mathcal{Z}_0^{\text{FD}}$.

Wir bezeichnen mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots$ die **Energie-Eigenzustände** der Teilchen, die sich beispielsweise aus der Lösung einer quantenmechanischen Wellengleichung ergeben. Dann ist ein Mikrozustand R des Systems offenbar dadurch vollständig festgelegt, dass man angibt, wieviele Teilchen n_r sich in dem jeweiligen Energie-Eigenzustand ε_r befinden, also durch den Satz von Zahlen $R \equiv \{n_0, n_1, \dots, n_r, \dots\}$. Beim Bose–Einstein–Gas kann n_r alle möglichen natürlichen Zahlen inklusive der null annehmen, $n_r \in \mathbb{N}_0$, beim Fermi–Dirac–Gas aufgrund des Pauli–Prinzips lediglich die Werte $n_r = 0, 1$ (falls es nicht weitere Quantenzahlen, wie z.B. Spin, Flavour, Farbe, etc. gibt, die eine Mehrfachbesetzung bzw. Entartung eines Energie-Eigenzustands erlauben). Da Wechselwirkungen vernachlässigt werden sollen, lautet die Energie E_R des Mikrozustands R einfach

$$E_R = \sum_{r=0}^{\infty} n_r \varepsilon_r, \quad (1.31)$$

und die totale Quantenzahl N_R in diesem Mikrozustand ist

$$N_R = \sum_{r=0}^{\infty} q n_r, \quad (1.32)$$

wobei q für das Quantum an erhaltener Quantenzahl steht, welches ein einzelnes Teilchen trägt. Wir setzen der Einfachheit halber im Folgenden $q = 1$.

Gemäß Gl. (1.27) berechnet sich die großkanonische Zustandssumme nun wie folgt,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_0^{\text{BE/FD}} &= \sum_R e^{-(E_R - \mu N_R)/T} = \sum_{n_0=0}^{\infty/1} \sum_{n_1=0}^{\infty/1} \dots e^{-\sum_{r=0}^{\infty} (\varepsilon_r - \mu) n_r / T} \\
 &= \sum_{n_0=0}^{\infty/1} e^{-(\varepsilon_0 - \mu) n_0 / T} \sum_{n_1=0}^{\infty/1} e^{-(\varepsilon_1 - \mu) n_1 / T} \dots \sum_{n_r=0}^{\infty/1} e^{-(\varepsilon_r - \mu) n_r / T} \dots \\
 &= \prod_{r=0}^{\infty} \sum_{n_r=0}^{\infty/1} [e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}]^{n_r} , \tag{1.33}
 \end{aligned}$$

wobei die obere Grenze der Summen über n_r , $r = 0, 1, \dots$, für das Bose–Einstein–Gas ∞ und für das Fermi–Dirac–Gas 1 ist.

Für (relativistische) Bosonen gilt nun, dass das chemische Potential niemals größer als ihre Ruhemasse m werden kann, $\mu \leq m$. Der niedrigste Energie-Eigenzustand ε_0 wird wiederum nach unten durch die Masse der Teilchen beschränkt, $m \leq \varepsilon_0$, denn die Teilchen müssen mindestens ihre Ruhemasse an Energie tragen. Im Fall $\mu = m$ findet Bose–Einstein–Kondensation statt, welche wir momentan außer acht lassen wollen. Wir nehmen also an, dass $\mu < m \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_r \forall r \in \mathbb{N}$. Dann gilt $e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T} < 1$ und die Summe über n_r in Gl. (1.33) stellt im Fall des Bose–Einstein–Gases gerade eine (konvergente) geometrische Reihe dar, so dass

$$\mathcal{Z}_0^{\text{BE}} = \prod_{r=0}^{\infty} [1 - e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}]^{-1} , \tag{1.34}$$

bzw.

$$\ln \mathcal{Z}_0^{\text{BE}} = - \sum_{r=0}^{\infty} \ln [1 - e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}] . \tag{1.35}$$

Im Fall des Fermi–Dirac–Gases ist die Berechnung der Summe über n_r in Gl. (1.33) sogar noch einfacher, da sie lediglich zwei Terme enthält,

$$\mathcal{Z}_0^{\text{FD}} = \prod_{r=0}^{\infty} [1 + e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}] , \tag{1.36}$$

bzw.

$$\ln \mathcal{Z}_0^{\text{FD}} = \sum_{r=0}^{\infty} \ln [1 + e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}] . \tag{1.37}$$

Die **mittlere Besetzungszahl** des Zustands r erhalten wir durch folgende Überlegung. Zunächst ist per Definition des statistischen Mittelwerts

$$\langle n_r^{\text{BE/FD}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_0^{\text{BE/FD}}} \sum_R n_r e^{-\sum_{s=0}^{\infty} n_s (\varepsilon_s - \mu)/T} = - \frac{\partial}{\partial [(\varepsilon_r - \mu)/T]} \ln \mathcal{Z}_0^{\text{BE/FD}} \Big|_{\{(\varepsilon_s - \mu)/T\}_{s \neq r}} , \tag{1.38}$$

wobei wir im zweiten Schritt die erste Zeile von Gl. (1.33) benutzt haben. Mit Hilfe der Glgen. (1.35) und (1.37) berechnen wir nun weiter

$$\begin{aligned}
 \langle n_r^{\text{BE/FD}} \rangle &= - \frac{\partial}{\partial[(\varepsilon_r - \mu)/T]} \left\{ \mp \sum_{s=0}^{\infty} \ln [1 \mp e^{-(\varepsilon_s - \mu)/T}] \right\} \Big|_{\{(\varepsilon_s - \mu)/T\}_{s \neq r}} \\
 &= \pm \frac{\partial}{\partial[(\varepsilon_r - \mu)/T]} \ln [1 \mp e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}] = \pm \frac{1}{1 \mp e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}} (\mp 1)(-1) e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T} \\
 &= \frac{1}{e^{(\varepsilon_r - \mu)/T} \mp 1} .
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Dies ist die bekannte Bose–Einstein– bzw. Fermi–Dirac–Verteilungsfunktion.

Der **Boltzmann–Limes** entspricht dem Fall $e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T} \ll 1$, d.h. man kann den Logarithmus in den Glgen. (1.35) und (1.37) in führender Ordnung in $e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}$ entwickeln, bzw. den Term ∓ 1 im Nenner in Gl. (1.39) vernachlässigen,

$$\ln \mathcal{Z}_0^{\text{B}} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T} , \quad \langle n_r^{\text{B}} \rangle = e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T} . \tag{1.40}$$

Alle drei Fälle lassen sich damit kompakt in der Form

$$\ln \mathcal{Z}_0 = \frac{1}{\theta} \sum_{r=0}^{\infty} \ln [1 + \theta e^{-(\varepsilon_r - \mu)/T}] , \quad \langle n_r \rangle = \frac{1}{e^{(\varepsilon_r - \mu)/T} + \theta} \tag{1.41}$$

schreiben, mit $\theta = \pm 1$ für Fermi–Dirac– bzw. Bose–Einstein–Statistik, sowie dem Grenzwert $\theta \rightarrow 0$ für Boltzmann–Statistik.

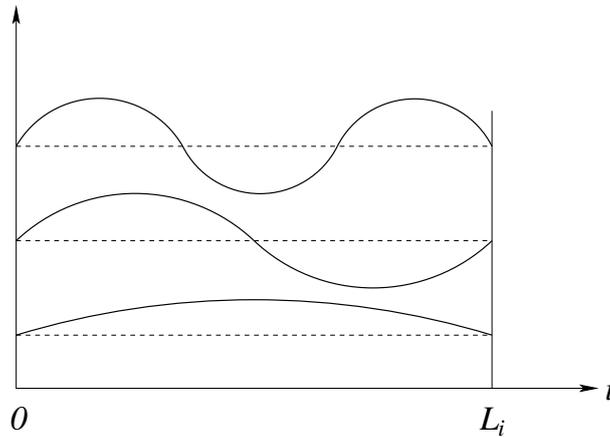


Abbildung 1.4: Quantelung der Impuls-Eigenzustände in einem Volumen mit Kantenlänge L_i in i -Richtung, $i = x, y, z$.

22.10.2021

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch die Summe über die Energie-Eigenzustände r explizit ausführen. Im wechselwirkungsfreien Fall können wir die Energiezustände mit Eigenzuständen des Impulses identifizieren, $\varepsilon_r \equiv \varepsilon_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. In einem quaderförmigen Volumen mit den Kantenlängen L_x, L_y und L_z sind die Impuls-Eigenzustände

gequantelt: nur solche Zustände sind möglich, deren halbzahlige Vielfache ihrer de Broglie–Wellenlänge gerade der Kantenlänge des Volumens entsprechen,

$$\frac{n_i}{2} \lambda_i = L_i, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad i = x, y, z, \quad (1.42)$$

vgl. Abb. 1.4. Für die erlaubten Impulse ergibt sich daher mit der de Broglie–Relation $\lambda_i = 2\pi/k_i$

$$k_i = \frac{\pi}{L_i} n_i. \quad (1.43)$$

Die Summe über die Energie-Eigenzustände in Gl. (1.41) entspricht dann gerade einer (dreifachen) Summe über die möglichen Werte von n_i , $i = x, y, z$, bzw. nach Gl. (1.43) einer Summe über die möglichen Impulse

$$\sum_{r=0}^{\infty} \equiv \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \equiv \sum_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z} \sum_{\mathbf{k}} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad (1.44)$$

wobei wir im letzten Schritt mit eins erweitert haben. Nun ist das Inkrement Δk_i des Impulses gemäß Gl. (1.43) gerade gleich π/L_i , also $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \pi^3/(L_x L_y L_z) \equiv \pi^3/V$. Im thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$ wird dieses infinitesimal klein, $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \rightarrow dk_x dk_y dk_z$, so dass

$$\sum_{r=0}^{\infty} \rightarrow \frac{V}{\pi^3} \int_0^{\infty} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z \equiv \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}. \quad (1.45)$$

Mit Gl. (1.41) nimmt daher der Druck (1.30) (für eine einzige erhaltene Quantenzahl) folgende Form an:

$$p = \frac{T}{\theta} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln [1 + \theta e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/T}]. \quad (1.46)$$

Da $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ lediglich vom Betrag des Impulses abhängt, bietet es sich an, das Impulsintegral in Kugelkoordinaten zu berechnen,

$$\begin{aligned} p &= \frac{T}{\theta} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \ln [1 + \theta e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/T}] \\ &= \frac{T}{\theta} \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{k^3}{3} \ln [1 + \theta e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/T}] \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dk \frac{k^3}{3} \left(-\frac{1}{T} \right) \frac{d\varepsilon_{\mathbf{k}}}{dk} \frac{\theta e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/T}}{1 + \theta e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/T}} \right\} \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \int_0^{\infty} dk \frac{k^4}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \equiv \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle, \end{aligned} \quad (1.47)$$

wobei wir zur zweiten Zeile partiell integriert und zur dritten Zeile die Relation $d\varepsilon_{\mathbf{k}}/dk = k/\varepsilon_{\mathbf{k}}$, sowie die Definition (1.41) der Verteilungsfunktion $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$ benutzt haben.

Übungsaufgabe 1.2: Benutze den ersten Hauptsatz der Thermodynamik für den Druck p (s. Übungsaufgabe 1.1), um aus Gl. (1.47) Entropiedichte s und Quantenzahldichte n zu berechnen. Benutze sodann die Fundamentalrelation der Thermodynamik (in der Formulierung für Dichten, vgl. Übungsaufgabe 1.1), um die Energiedichte ϵ zu berechnen.

2 Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die Grundlagen der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie, insofern sie für das Folgende von Bedeutung sind. Wir fassen den Zusammenhang zwischen Klassischer Mechanik, Klassischer Feldtheorie, Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie einerseits, sowie Statistischer Mechanik und Quantenstatistik andererseits, und wie diese Theorien auf die Formulierung der Statistischen Feldtheorie Einfluss nehmen, in Abb. 2.1 zusammen.

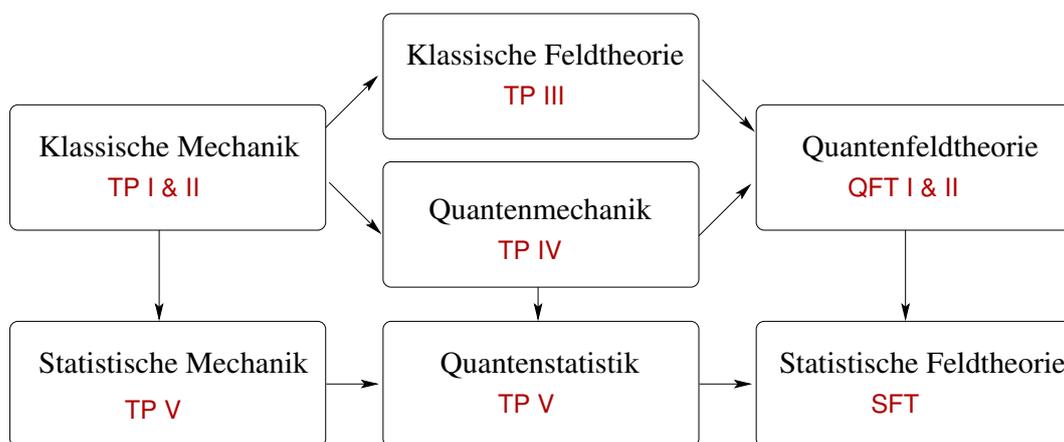


Abbildung 2.1: Verschiedene Theorien und ihr Einfluss auf die Formulierung der Statistischen Feldtheorie. Die Vorlesungen, in denen die jeweiligen Theorien erläutert werden, sind in rot vermerkt.

Im Folgenden gehen wir kurz auf die einzelnen Theorien ein.

2.1 Klassische Mechanik eines einzelnen Teilchens

Startpunkt für die **klassische Mechanik eines einzelnen Partikels** der Masse m , das sich der Einfachheit halber in 1+1 Dimensionen bewegen möge, ist die **klassische Wirkung**

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}) , \quad (2.1)$$

welche ein Funktional der im Zeitintervall $[t_i, t_f]$ durchlaufenen Trajektorie $\{q(t), t_i \leq t \leq t_f\}$ ist. Integriert wird über die **Lagrange–Funktion**

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) , \quad (2.2)$$

die wir der Einfachheit halber als nicht explizit zeitabhängig angenommen haben, mit der potentiellen Energie $V(x)$ des Teilchens. Die Bewegungsgleichung für das Teilchen folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip der extremalen Wirkung, $\delta S = 0$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} , \quad (2.3)$$

nämlich gerade die **Euler–Lagrange–Gleichung** der klassischen Mechanik. Der **kanonisch konjugierte Impuls** ist definiert als

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \equiv m\dot{x} , \quad (2.4)$$

wobei die letzte Identität gilt, falls V nicht von der Geschwindigkeit \dot{x} abhängt. Die **Hamilton–Funktion** ist die Legendre–Transformierte der Lagrange–Funktion bzgl. der Variable \dot{x} ,

$$H(x, p) = p\dot{x} - L(x, \dot{x}) = \frac{p^2}{2m} + V(x) . \quad (2.5)$$

2.2 Klassische Mechanik eines N –Teilchensystems

Die Verallgemeinerung auf ein **klassisch–mechanisches System von N Punktteilchen** mit Massen m_i , $i = 1, \dots, N$ ist ohne Probleme vollziehbar. Die **Wirkung** ist

$$S[\vec{x}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) , \quad (2.6)$$

wobei $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_N)$, $\dot{\vec{x}} \equiv (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ N –dimensionale Vektoren der Koordinaten x_i und Geschwindigkeiten \dot{x}_i der einzelnen Teilchen sind. Die **Lagrange–Funktion** ist nun

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - V(\vec{x}) . \quad (2.7)$$

Die **Euler–Lagrange–Gleichungen** lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} , \quad i = 1, \dots, N , \quad (2.8)$$

Die **kanonisch konjugierten Impulse** sind

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \equiv m_i \dot{x}_i , \quad i = 1, \dots, N , \quad (2.9)$$

welche sich wieder in einen N –dimensionalen Vektor $\vec{p} = (p_1, \dots, p_N)$ zusammenfassen lassen. Die **Hamilton–Funktion** ist die N –fache Legendre–Transformierte der Lagrange–Funktion bzgl. der Geschwindigkeiten \dot{x}_i ,

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{x}_i - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(\vec{x}) . \quad (2.10)$$

2.3 Kontinuumsmechanik

Im Limes unendlicher Teilchenzahl, $N \rightarrow \infty$, erhalten wir die **Kontinuumsmechanik**, welche eine **klassische Feldtheorie** darstellt. Dazu ersetzen wir die Massen m_i der Teilchen durch **infinitesimale Massen** dm_i . Da diese kontinuierlich dicht im Raum liegen, können wir den Teilchenindex i auch durch die kontinuierliche Raumkoordinate x ersetzen, $dm_i \rightarrow dm(x)$ (wir arbeiten der Einfachheit halber nach wie vor in 1+1 Dimensionen). Außerdem ersetzen wir die (zeitabhängige) Teilchenkoordinate $x_i(t)$ durch eine neue Koordinate

$$\phi_i(t) \equiv x_i(t) - x_{i,\text{eq}}, \quad (2.11)$$

welche die **Auslenkung** des i -ten Teilchens aus einer Ruhe- bzw. Gleichgewichtslage $x_{i,\text{eq}}$ darstellt. Im kontinuierlichen Limes wird dann $\phi_i(t) \rightarrow \phi(t, x)$. Nun führen wir die **Massendichte**

$$\rho(x) \equiv \frac{dm(x)}{dx} \quad (2.12)$$

ein. Die **kinetische Energie** der Teilchen wird dann im Limes $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 &\equiv \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\phi}_i^2 \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int dm(x) \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \int dx \frac{dm(x)}{dx} \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \int dx \rho(x) \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

wobei wir in der zweiten Zeile im Integral die Variablensubstitution $m(x) \rightarrow x$ vorgenommen haben.

Um die **potentielle Energie** $V(\vec{x})$ in den Kontinuumsimes zu überführen, benötigen wir ihre explizite Form, d.h. wir müssen ein konkretes System betrachten. Wir wählen dafür N gekoppelte harmonische Oszillatoren, vgl. Abb. 2.2. Im Limes $N \rightarrow \infty$ wird daraus ein elastischer (entlang seiner Länge deformierbarer) Stab. Aus der Überlegung, dass die Feder zwischen dem i -ten und $(i+1)$ -ten Massenpunkt elongiert wird, wenn $\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t) > 0$, und kontrahiert wird, wenn $\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t) < 0$, sowie sich in ihrer Länge nicht ändert, wenn $\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t) = 0$, folgt die potentielle Energie als

$$V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{k_i}{2} [\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)]^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (\Delta x)^2 k_i \left[\frac{\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)}{\Delta x} \right]^2. \quad (2.14)$$

Wir führen nun die Federkonstante multipliziert mit einer Längeneinheit, $\kappa_i \equiv k_i \Delta x$, ein und lassen $N \rightarrow \infty$ gehen. Im Kontinuumsimes wird dann $\kappa_i \rightarrow \kappa(x)$ und wir erhalten

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x \kappa_i \left[\frac{\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)}{\Delta x} \right]^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int dx \kappa(x) \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2. \quad (2.15)$$

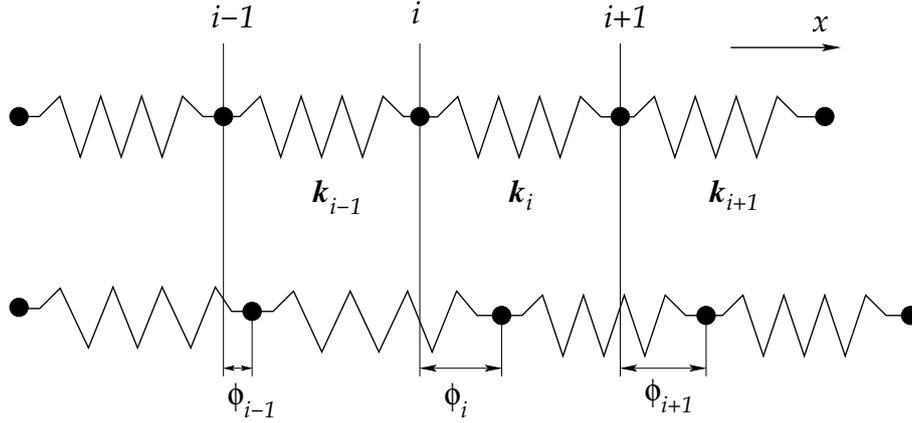


Abbildung 2.2: Eine Kette von N gekoppelten harmonischen Oszillatoren, die in x -Richtung schwingen können. Die Federkonstante zwischen dem i -ten und $(i + 1)$ -ten Oszillator wird mit k_i bezeichnet.

Mit den Glgen. (2.13) und (2.15) wird die Lagrange-Funktion (2.7) dann zu

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \int dx \left[\rho(x) \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 - \kappa(x) \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int dx \rho(x) \left[\left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 - c^2(x) \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 &= \int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi),
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die **ortsabhängige Schallgeschwindigkeit**

$$c(x) \equiv \sqrt{\frac{\kappa(x)}{\rho(x)}} \tag{2.17}$$

und in der dritten Zeile die **Lagrange-Dichte**

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \rho(x) \left[\left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 - c^2(x) \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{2.18}$$

eingeführt, sowie die gängigen Abkürzungen $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ benutzt haben.

Die Lagrange-Dichte bildet üblicherweise den Ausgangspunkt für die Diskussion einer Feldtheorie, ganz gleich ob klassisch oder quantenfeldtheoretisch. Mit Gl. (2.18) haben wir ein einfaches Beispiel für eine 1+1-dimensionale klassische Feldtheorie angegeben. Die **Wirkung** ergibt sich aus der Definition (2.6) mit Gl. (2.16) zu

$$S[\phi(t, x)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi). \tag{2.19}$$

Die **Euler–Lagrange–Gleichungen** folgen aus dem Prinzip der extremalen Wirkung,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (2.20)$$

wobei wir den 1+1-dimensionalen Vektor

$$X^\mu \equiv (t, x)^T \quad (2.21)$$

und die Ableitung nach seinen Komponenten,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X^\mu} \equiv (\partial_t, \partial_x), \quad (2.22)$$

definiert haben. Der (kontravariante) Vektor X^μ ist das zweidimensionale Analogon des aus der Relativitätstheorie bekannten 4-Vektors der Raum-Zeit-Koordinaten und ∂_μ entsprechend die (kovariante) Ableitung nach den Raum-Zeit-Koordinaten.

Das **kanonisch konjugierte Feld** ist definiert als

$$\pi(t, x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, x)}, \quad (2.23)$$

mit der gängigen Abkürzung $\dot{\phi}(t, x) \equiv \partial \phi(t, x) / \partial t \equiv \partial_t \phi(t, x)$. Die **Hamilton–Dichte** ist die Legendre–Transformierte der Lagrange–Dichte bzgl. der Zeitableitung des Feldes,

$$\mathcal{H}(\phi, \pi, \partial_x \phi) = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_t \phi, \partial_x \phi). \quad (2.24)$$

Übungsaufgabe 2.1: Bestimme die Bewegungsgleichung, das kanonisch konjugierte Feld und die Hamilton–Dichte für die durch die Lagrange–Dichte (2.18) definierte Theorie. Löse die Bewegungsgleichung für den Fall konstanter Massendichte, $\rho(x) = \text{const}$, und konstanter Schallgeschwindigkeit, $c(x) = \text{const}$.

Lösung: Wir bezeichnen der Einfachheit halber $\partial_t \phi \equiv \dot{\phi}$ und $\partial_x \phi \equiv \phi'$. Mit Gl. (2.20) bestimmt man die Bewegungsgleichung zu

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = \partial_t [\rho(x) \dot{\phi}] + \partial_x [-\rho(x) c^2(x) \phi'] \\ &= \rho(x) \ddot{\phi} - \partial_x [\rho(x) c^2(x) \phi'] \\ &= \rho(x) [\ddot{\phi} - c^2(x) \phi''] - \phi' c(x) [\rho'(x) c(x) + 2\rho(x) c'(x)] = 0, \end{aligned}$$

mit $\partial_x \rho(x) \equiv \rho'(x)$ und $\partial_x c(x) \equiv c'(x)$.

Für den Fall $\rho(x) = \text{const}$, $c(x) = \text{const}$ erhalten wir die wohlbekannte **Wellengleichung**

$$\ddot{\phi} - c^2 \phi'' = 0$$

für das Feld $\phi(t, x)$, mit der allgemeinen Lösung

$$\phi(t, x) = \sum_k [\phi_+(k) e^{-ik(x-ct)} + \phi_-(k) e^{-ik(x+ct)} + \text{c.c.}] ,$$

d.h. die Lösung besteht aus einer Superposition von ebenen Wellen mit Wellenzahl k und Frequenz $\omega = ck$, die sich mit Schallgeschwindigkeit c in $\pm x$ -Richtung ausbreiten.

Das kanonisch konjugierte Feld berechnet sich per Definition (2.23) mit der Lagrange-Dichte (2.18) zu

$$\pi(t, x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, x)} = \rho(x) \dot{\phi}(t, x) .$$

Die Hamilton-Dichte ist gemäß Gl. (2.24)

$$\mathcal{H} = \rho \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \rho \left(\phi^2 - c^2 \phi'^2 \right) = \frac{1}{2} \rho \left(\dot{\phi}^2 + c^2 \phi'^2 \right) .$$

2.4 Quantenmechanik eines einzelnen Teilchens

In der **Quantenmechanik** wird ein einzelnes Teilchen durch eine **Wellenfunktion** $\phi(t, x)$ beschrieben, welche Lösung der **zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung**

$$i \partial_t \phi(t, x) = \hat{H} \phi(t, x) \tag{2.25}$$

ist, mit dem **Hamilton-Operator** $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p}, t)$, der eine Funktion des Ortsoperators \hat{x} und des Impulsoperators \hat{p} , sowie – für explizit zeitabhängige Probleme – der Zeit t ist. Die Schrödinger-Gleichung (2.25) ist auch eine Wellengleichung, ganz ähnlich wie die gerade im Rahmen der klassischen Feldtheorie besprochene. Man spricht bei einer Beschreibung eines Systems durch die Schrödinger-Gleichung auch von der **“ersten Quantisierung”**.

Falls der Hamilton-Operator nicht explizit zeitabhängig ist, $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p})$, kann man die Zeitabhängigkeit der Lösung $\phi(t, x)$ durch einen Separationsansatz bestimmen,

$$\phi(t, x) = \sum_n \phi_n(x) e^{-iE_n t} , \tag{2.26}$$

wobei $\phi_n(x)$ die Eigenfunktionen von \hat{H} sind und E_n die dazugehörigen Eigenwerte,

$$\hat{H} \phi_n(x) = E_n \phi_n(x) . \tag{2.27}$$

Dies ist die **zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung**. In der Tat löst der Ansatz (2.26) die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (2.25), wie man sich durch Einsetzen überzeugt,

$$i \partial_t \phi(t, x) = \sum_n E_n \phi_n(x) e^{-iE_n t} \equiv \sum_n \hat{H} \phi_n(x) e^{-iE_n t} = \hat{H} \phi(t, x) , \tag{2.28}$$

wobei wir Gl. (2.27) benutzt haben.

Die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ des zeitunabhängigen Hamilton-Operators sind komplexwertig und können daher als **Skalarprodukt** im Hilbert-Raum der Zustände des Systems dargestellt werden. In der **Dirac’schen “bra-ket”-Notation** sei $|x\rangle$ ein **Ortseigenzustand**,

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle , \tag{2.29}$$

und $|n\rangle$ ein **Energie–Eigenzustand**,

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle , \quad (2.30)$$

dann ist

$$\phi_n(x) \equiv \langle x|n\rangle . \quad (2.31)$$

Wir schieben hier eine **vollständige Eins** von **Impuls–Eigenzuständen**,

$$\mathbb{1} = \sum_k |k\rangle \langle k| , \quad (2.32)$$

ein und erhalten

$$\phi_n(x) = \sum_k \langle x|k\rangle \langle k|n\rangle \equiv \sum_k e^{ikx} \tilde{\phi}_n(k) , \quad (2.33)$$

wobei

$$\langle x|k\rangle \equiv e^{ikx} \quad (2.34)$$

die Darstellung der ebenen Welle als Skalarprodukt im Hilbert–Raum ist und

$$\langle k|n\rangle \equiv \tilde{\phi}_n(k) \quad (2.35)$$

die Fourier–Transformierte der Wellenfunktion $\phi_n(x)$ darstellt. Die inverse Fourier–Transformation erhalten wir hieraus durch Einschieben einer **vollständigen Eins** von **Orts–eigenzuständen**,

$$\mathbb{1} = \frac{1}{L} \int dx |x\rangle \langle x| , \quad (2.36)$$

mit der räumlichen Ausdehnung L des Systems in x –Richtung, d.h.

$$\tilde{\phi}_n(k) = \frac{1}{L} \int dx \langle k|x\rangle \langle x|n\rangle = \frac{1}{L} \int dx \langle x|k\rangle^* \phi_n(x) = \frac{1}{L} \int dx e^{-ikx} \phi_n(x) . \quad (2.37)$$

Die Ortseigenzustände sind **orthogonal**,

$$\langle x|y\rangle = \sum_k \langle x|k\rangle \langle k|y\rangle = \sum_k e^{ik(x-y)} = L \delta(x-y) . \quad (2.38)$$

Auch die Impuls–Eigenzustände sind orthogonal,

$$\langle k|p\rangle = \frac{1}{L} \int dx \langle k|x\rangle \langle x|p\rangle = \frac{1}{L} \int dx e^{-i(k-p)x} = \delta_{k,p} , \quad (2.39)$$

genau wie die (diskreten) Energie–Eigenzustände,

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m} . \quad (2.40)$$

Für ein **nichtwechselwirkendes System** lautet der Hamilton–Operator

$$\hat{H}_0 = -\frac{\Delta}{2m} , \quad (2.41)$$

mit dem (eindimensionalen) Laplace–Operator $\Delta \equiv \partial_x^2$. Der Hamilton–Operator (2.41) hat die Eigenwerte

$$E_n \equiv E_k = \frac{k^2}{2m}, \quad (2.42)$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\phi_n(x) \equiv \phi_k(x) = e^{ikx} = \langle x|k \rangle. \quad (2.43)$$

Die **allgemeine Lösung** der zeitabhängigen Schrödinger–Gleichung lautet dann

$$\phi(t, x) = \sum_k a(k) e^{-i(E_k t - kx)}. \quad (2.44)$$

Als Beispiel für ein **wechselwirkendes quantenmechanisches Einteilchensystem** betrachten wir den **eindimensionalen harmonischen Oszillator**, der durch den folgenden Hamilton–Operator definiert ist,

$$\hat{H} = -\frac{\Delta}{2m} + \frac{\varkappa}{2} x^2 \equiv \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.45)$$

Hierbei ist $\omega \equiv \sqrt{\varkappa/m}$ die **Eigenfrequenz** des Oszillators und

$$\hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - \frac{1}{m\omega} \partial_x \right), \quad \hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + \frac{1}{m\omega} \partial_x \right) \quad (2.46)$$

sind **Erzeugungs–** und **Vernichtungsoperatoren** für Quanten mit der Energie ω . Wie man leicht nachrechnet, erfüllen sie die **Vertauschungsrelationen**

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0. \quad (2.47)$$

Man spricht nun landläufig (und etwas irreführend) von der **“zweiten Quantisierung”**. Der **Teilchenzahloperator** ist definiert als

$$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.48)$$

womit sich der Hamilton–Operator (2.45) auch als

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.49)$$

schreiben läßt. Die Eigenzustände von \hat{N} sind durch die Zahl n der angeregten Quanten in einem Zustand charakterisiert, $|n\rangle$, und die zugehörigen Eigenwerte sind gerade durch n gegeben,

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.50)$$

Da der Hamilton–Operator (2.49) offenbar mit dem Teilchenzahloperator \hat{N} vertauscht, kann man die Teilchenzahl–Eigenzustände $|n\rangle$ auch als Eigenzustände des Hamilton–Operators benutzen,

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (2.51)$$

mit den Energie–Eigenwerten

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) . \quad (2.52)$$

Der Grundzustand ist der Zustand ohne angeregte Quanten, $|0\rangle$, das sog. **Vakuum**. Seine Energie verschwindet aber nicht,

$$E_0 = \frac{\omega}{2} , \quad (2.53)$$

die sog. **Nullpunktsenergie**. Die Wirkung von Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren auf Teilchenzahl–Eigenzustände ist gegeben durch

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle , \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle , \quad (2.54)$$

was man mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (2.47) und anschließender Normierung der Teilchenzahl–Eigenzustände ausgehend von den Relationen

$$\hat{a} |0\rangle = 0 , \quad \hat{a}^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad (2.55)$$

beweisen kann. Man kann jeden beliebigen Zustand $|n\rangle$ durch n -faches Anwenden von Erzeugungsoperatoren aus dem Vakuum erzeugen,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle . \quad (2.56)$$

2.5 Quantenfeldtheorie in zweiter Quantisierung

Im Rahmen der **kanonischen** (oder “**zweiten**”) **Quantisierung** der **Quantenfeldtheorie** werden Wellenfunktionen, die sich als Lösungen einer Wellengleichung (wie beispielsweise der Klein–Gordon–Gleichung) ergeben,

$$\phi(t, x) = \sum_k [a(k) e^{-i(\omega_k t - kx)} + a^*(k) e^{i(\omega_k t - kx)}] , \quad (2.57)$$

mit der (relativistischen) Energie–Impuls–Beziehung $\omega_k \equiv \sqrt{k^2 + m^2}$, zu **Operatoren** erhoben,

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_k [\hat{a}(k) e^{-i(\omega_k t - kx)} + \hat{a}^\dagger(k) e^{i(\omega_k t - kx)}] , \quad (2.58)$$

wobei die Fourier–Amplituden $a(k)$, $a^*(k)$ in Gleichung (2.57) zu **Vernichtungs– und Erzeugungsoperatoren** $\hat{a}(k)$, $\hat{a}^\dagger(k)$ werden, ganz ähnlich wie beim harmonischen Oszillator. Nun aber sind diese Operatoren impulsabhängig und entsprechen der Vernichtung und Erzeugung von **Teilchen mit Impuls k** .

Für **Bosonen** erfüllen die Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren in Analogie zu Gl. (2.47) die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \delta_{k,k'} , \quad [\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = [\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 0 . \quad (2.59)$$

Wir bezeichnen einen Teilchenzahl–Eigenzustand mit n_{k_i} Teilchen, die den Impuls k_i tragen, mit $|n_{k_i}\rangle$ und mit

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle \equiv \prod_{i=1}^{\infty} |n_{k_i}\rangle \quad (2.60)$$

den entsprechenden Produktzustand über alle möglichen Impulse k_i . Dann gilt in Analogie zu den Glgen. (2.54), (2.55) und (2.56)

$$\hat{a}(k_i) |0\rangle = 0, \quad (2.61)$$

$$\hat{a}(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle = \sqrt{n_{k_i}} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i} - 1, \dots\rangle, \quad (2.62)$$

$$\hat{a}^\dagger(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle = \sqrt{n_{k_i} + 1} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i} + 1, \dots\rangle, \quad (2.63)$$

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_{k_i}!}} (\hat{a}(k_i)^\dagger)^{n_{k_i}} |0\rangle. \quad (2.64)$$

Der **Teilchenzahl–Operator** für Teilchen mit Impuls k_i ist

$$\hat{N}(k_i) \equiv \hat{a}^\dagger(k_i) \hat{a}(k_i), \quad (2.65)$$

mit Eigenzuständen $|n_{k_i}\rangle$ und Eigenwerten n_{k_i} , so dass

$$\hat{N}(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle = n_{k_i} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle. \quad (2.66)$$

Für **Fermionen** ist dem **Pauli–Prinzip** Rechnung zu tragen, d.h. die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen **Antivertauschungsrelationen**,

$$\{\hat{b}(k), \hat{b}^\dagger(k')\} = \delta_{k,k'}, \quad \{\hat{b}(k), \hat{b}(k')\} = \{\hat{b}^\dagger(k), \hat{b}^\dagger(k')\} = 0. \quad (2.67)$$

Vernachlässigen wir für den Moment die Möglichkeit, dass sich Teilchen durch andere Quantenzahlen (wie Spin, Flavour, Farbe, etc.) unterscheiden können, dann kann sich höchstens ein Teilchen in einem Impulszustand k_i befinden, $n_{k_i} = 0, 1$, was folgende Relationen ergibt

$$\hat{b}(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 0, \dots\rangle = 0, \quad (2.68)$$

$$\hat{b}(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 1, \dots\rangle = |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 0, \dots\rangle, \quad (2.69)$$

$$\hat{b}^\dagger(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 1, \dots\rangle = 0, \quad (2.70)$$

$$\hat{b}^\dagger(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 0, \dots\rangle = |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 1, \dots\rangle. \quad (2.71)$$

Der **Teilchenzahl–Operator** für Teilchen mit Impuls k_i ist

$$\hat{N}(k_i) \equiv \hat{b}^\dagger(k_i) \hat{b}(k_i), \quad (2.72)$$

mit

$$\hat{N}(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 0, \dots\rangle = 0, \quad \hat{N}(k_i) |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 1, \dots\rangle = |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, 1, \dots\rangle. \quad (2.73)$$

Sowohl für Bosonen wie für Fermionen ist der **Gesamtteilchenzahl–Operator**

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{N}(k_i) \equiv \sum_k \hat{N}(k). \quad (2.74)$$

Der **Feldoperator im Schrödinger–Bild** zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $\hat{\phi}(0, x)$. Er erfüllt die Eigenwert–Gleichung

$$\hat{\phi}(0, x) |\phi_0\rangle = \phi_0(x) |\phi_0\rangle, \quad (2.75)$$

wobei der **Eigenwert** $\phi_0(x)$ gerade die **Wellenfunktion** $\phi(t, x)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ darstellt, $\phi(0, x) \equiv \phi_0(x)$, und $|\phi_0\rangle$ der zugehörige **Eigenzustand** ist. Diese Eigenzustände sind **vollständig**,

$$\int \prod_x d\phi_0(x) |\phi_0\rangle \langle \phi_0| = \mathbb{1}, \quad (2.76)$$

und **orthogonal**

$$\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \prod_x \delta(\phi_a(x) - \phi_b(x)) \equiv \delta[\phi_a - \phi_b], \quad (2.77)$$

was die quantenfeldtheoretischen Analoga zu den Glgen. (2.36) und (2.38) aus der Quantenmechanik sind. Mit der rechten Seite von Gl. (2.77) haben wir die **funktionale Delta-Funktion** definiert.

Das zu $\phi(0, x)$ **kanonisch konjugierte Feld** folgt aus Gl. (2.23),

$$\pi(0, x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(0, x)}, \quad (2.78)$$

der zugehörige Feldoperator im Schrödinger-Bild ist $\hat{\pi}(0, x)$. Er erfüllt zu den Glgen. (2.75), (2.76) und (2.77) analoge Beziehungen,

$$\hat{\pi}(0, x) |\pi_0\rangle = \pi_0(x) |\pi_0\rangle, \quad (2.79)$$

$$\int \prod_x \frac{d\pi_0(x)}{2\pi} |\pi_0\rangle \langle \pi_0| = \mathbb{1}, \quad (2.80)$$

$$\langle \pi_a | \pi_b \rangle = \delta[\pi_a - \pi_b], \quad (2.81)$$

wobei die letzten beiden Gleichungen die quantenfeldtheoretischen Analoga zu den Glgen. (2.32) und (2.39) aus der Quantenmechanik sind. Der Faktor $1/(2\pi)$ im Integrationsmaß in Gl. (2.80) ist Konvention.

Die quantenfeldtheoretische Verallgemeinerung des quantenmechanischen Überlapps (2.34) ist

$$\langle \phi_a | \pi_b \rangle = \exp \left[i \int dx \pi_b(x) \phi_a(x) \right]. \quad (2.82)$$

Um den **quantenfeldtheoretischen Hamilton-Operator** herzuleiten, folgt man ausgehend von der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ zunächst den Schritten aus der klassischen Feldtheorie bis zur Hamilton-Dichte (2.24). Dort ersetzt man nun das Feld ϕ und das kanonisch konjugierte Feld π durch die entsprechenden Operatoren. Zum Schluss integriert man noch über den Raum,

$$\hat{H} \equiv \int dx \mathcal{H}(\hat{\phi}, \hat{\pi}, \partial_x \hat{\phi}). \quad (2.83)$$

2.6 Quantenstatistik

27.10.2021

Von der Statistischen Mechanik gelangt man zur **Quantenstatistik**, indem man den klassischen Mikrozustand R durch sein quantenmechanisches Analogon $|R\rangle$ ersetzt. Dies kann beispielsweise der Teilchenzahl-Eigenzustand (2.60) sein,

$$|R\rangle \equiv |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle,$$

wobei wir die einzelnen Zustände der Einfachheit halber durchnummeriert haben (anstelle Impulsindizes k_i , $i = 1, 2, \dots$, zu verwenden). Die Zustände $|R\rangle$ sind vollständig und orthogonal,

$$\sum_R |R\rangle\langle R| = \mathbb{1}, \quad \langle R|R'\rangle = \delta_{R,R'}. \quad (2.84)$$

Die Energie E_R eines Mikrozustands ist nun Eigenwert zum zugehörigen Hamilton-Operator,

$$\hat{H}|R\rangle = E_R|R\rangle, \quad (2.85)$$

und die Teilchen- oder, im relativistischen Kontext, Netto-Quantenzahl N_R im Mikrozustand R ist der Eigenwert des Teilchenzahl- bzw. Netto-Ladungsoperators,

$$\hat{N}|R\rangle = N_R|R\rangle. \quad (2.86)$$

Hier haben wir vorausgesetzt, dass \hat{H} mit \hat{N} vertauscht, so dass sie ein gemeinsames System von Eigenzuständen $\{|R\rangle\}$ besitzen.

Die großkanonische Zustandssumme ist in der Quantenstatistik definiert als

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})/T}. \quad (2.87)$$

Wählen wir die Basis $\{|R\rangle\}$, um die Spur auszuwerten, so erhalten wir mit den Eigenwert-Gleichungen (2.85) und (2.86), sowie der Normierung der Zustände, $\langle R|R\rangle = 1$, das Resultat

$$\mathcal{Z} = \sum_R \langle R| e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})/T} |R\rangle = \sum_R e^{-(E_R-\mu N_R)/T}, \quad (2.88)$$

welches mit dem klassischen Ausdruck (1.27) (für eine einzige erhaltene Quantenzahl) übereinstimmt.

Beispiel: Wir betrachten einen einzelnen **harmonischen Oszillator**. Es gibt keine erhaltene Quantenzahl, daher können wir $\mu = 0$ setzen. Die großkanonische Zustandssumme ist dann identisch mit der kanonischen. Zur Auswertung der großkanonischen Zustandssumme (2.88) wählen wir die Zustände $|n\rangle$, die die Zahl der angeregten Quanten angeben,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= \text{Tr} e^{-\hat{H}/T} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| e^{-\hat{H}/T} |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/T} \langle n|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\omega(n+1/2)/T} = e^{-\omega/(2T)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\omega n/T} \\ &= e^{-\omega/(2T)} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\omega/T})^n = \frac{e^{-\omega/(2T)}}{1 - e^{-\omega/T}} = \frac{1}{2 \sinh[\omega/(2T)]}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

wobei wir die Gln. (2.51) und (2.52) benutzt haben, sowie die Tatsache, dass $e^{-\omega/T} < 1$ ist, so dass wir eine konvergente geometrische Reihe erhalten. Der Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme ist dann

$$\ln \mathcal{Z}_1 = -\frac{\omega}{2T} - \ln(1 - e^{-\omega/T}) = -\ln\left(2 \sinh \frac{\omega}{2T}\right). \quad (2.90)$$

Für N (ungekoppelte) harmonische Oszillatoren erhalten wir dann

$$\ln \mathcal{Z}_N \equiv N \ln \mathcal{Z}_1 = -\frac{N\omega}{2T} - N \ln(1 - e^{-\omega/T}) . \quad (2.91)$$

Übungsaufgabe 2.2: Berechne die freie Energie $F = -T \ln \mathcal{Z}_N$ sowie die anderen thermodynamischen Zustandsgrößen (μ, p, S, E) mit Hilfe des ersten Hauptsatzes und der Fundamentalrelation der Thermodynamik.

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit nichtwechselwirkenden Feldtheorien und wie man die zugehörige großkanonische Zustandssumme als Funktionalintegral darstellen kann. Dies geschieht in enger Analogie zum erzeugenden Funktional für N -Teilchen-Korrelationsfunktionen in der Quantenfeldtheorie. Besonderes Augenmerk widmen wir der Normierung des Funktionalintegrals, da die Zustandssumme eine dimensionslose Größe sein muss. Sodann wird argumentiert, warum man die Funktionalintegration über die kanonisch konjugierten Felder auf periodische Feldkonfiguration einschränken kann. Zum Schluss des Kapitels werden sukzessive das neutrale skalare Feld, das geladene skalare Feld, das Dirac-Feld, das massive Vektorfeld und schließlich das elektromagnetische Feld besprochen.

3.1 Funktionalintegraldarstellung der großkanonischen Zustandssumme

Die großkanonische Zustandssumme ist durch Gl. (2.88) gegeben. Wir definieren zur Vereinfachung der Schreibweise im Folgenden den verallgemeinerten “Hamilton-Operator”

$$\hat{K} \equiv \hat{H} - \mu \hat{N} , \quad (3.1)$$

der die chemische Energie $\mu \hat{N}$ beinhaltet. Zur Auswertung der Spur in Gl. (2.88) wählen wir die vollständige Basis von Eigenwerten $\phi_0(\mathbf{x})$ zum Schrödinger-Bild-Feldoperator $\hat{\phi}(0, \mathbf{x})$, vgl. Gl. (2.75), wobei wir jetzt auf 3+1 Raum-Zeit-Dimensionen verallgemeinern,

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\hat{K}/T} = \int \prod_{\mathbf{x} \in V} d\phi_0(\mathbf{x}) \langle \phi_0 | e^{-\hat{K}/T} | \phi_0 \rangle . \quad (3.2)$$

Man beachte, dass die Raumkoordinaten der Felder im Volumen V des Systems liegen müssen. Die einzelnen Matrixelemente in der Spur erinnern an die **quantenmechanische Übergangsamplitude**

$$\langle \phi_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | \phi_i \rangle , \quad (3.3)$$

mit folgenden offensichtlichen Ersetzungen:

- (i) $\phi_i = \phi_f = \phi_0$, Anfangs- und Endzustand in der Übergangsamplitude sind identisch,
- (ii) $\hat{H} \longrightarrow \hat{K}$, anstelle des Hamilton-Operators tritt der verallgemeinerte Hamilton-Operator (3.1) auf,
- (iii) $t_f - t_i \longrightarrow -i/T$, das reelle Zeitintervall $[t_i, t_f]$ für die quantenmechanische Zeitentwicklung wird durch ein Intervall $[0, 1/T]$ in der **imaginären Zeit** ersetzt.

Aufgrund von Punkt (iii) spricht man auch von der **Statistischen Feldtheorie im Imaginärzeitformalismus**. (Es existiert auch eine Variante der Statistischen Feldtheorie im sog. Realzeitformalismus, die wir aber in dieser Vorlesung aus Zeitgründen nicht besprechen werden.)

Die Punkte (ii) und (iii) lassen sich auch so interpretieren, dass

(ii') $\hat{U}(t_f, t_i) \equiv e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} \longrightarrow e^{-\hat{K}/T}$, der quantenmechanische Zeitentwicklungsoperator wird durch den Gibbs-Operator des großkanonischen Ensembles ersetzt.

Genau wie in der Vorlesung "Quantenfeldtheorie" demonstriert, läßt sich das Matrixelement (3.3) auch in Form eines Funktionalintegrals schreiben. Wir führen die entsprechende Diskussion zur Erinnerung noch einmal durch, nun aber gleich für das Matrixelement in Gl. (3.2). Zunächst partitionieren wir das Intervall $[0, 1/T]$ in N kleine Stücke der Länge $\Delta\tau$,

$$\frac{1}{T} \equiv N\Delta\tau ,$$

wobei wir am Schluss den Limes $N \rightarrow \infty$, $\Delta\tau \rightarrow 0$, mit $N\Delta\tau = 1/T = \text{const}$, durchführen werden. Der Gibbs-Operator kann damit wie folgt geschrieben werden,

$$e^{-\hat{K}/T} \equiv e^{-\hat{K}\Delta\tau N} \equiv \prod_{j=1}^N e^{-\hat{K}\Delta\tau} . \quad (3.4)$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Übergangsamplitude in Gl. (3.2) ein und schieben vor jeden Faktor $e^{-\hat{K}\Delta\tau}$ einen vollständigen Satz von Eigenfunktionen zum Feldoperator, Gl. (2.76), und hinter jeden Faktor einen vollständigen Satz von Eigenfunktionen zum kanonisch konjugierten Feldoperator, Gl. (2.80), ein,

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | e^{-\hat{K}/T} | \phi_0 \rangle &= \langle \phi_0 | \prod_{j=1}^N e^{-\hat{K}\Delta\tau} | \phi_0 \rangle \\ &= \int \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{x} \in V} \frac{d\pi_j(\mathbf{x}) d\phi_j(\mathbf{x})}{2\pi} \langle \phi_0 | \phi_N \rangle \langle \phi_N | e^{-\hat{K}\Delta\tau} | \pi_N \rangle \langle \pi_N | \phi_{N-1} \rangle \langle \phi_{N-1} | e^{-\hat{K}\Delta\tau} | \pi_{N-1} \rangle \cdots \\ &\quad \cdots \langle \pi_2 | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-\hat{K}\Delta\tau} | \pi_1 \rangle \langle \pi_1 | \phi_0 \rangle . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hier haben wir die einzelnen Sätze von vollständigen Eigenfunktionen mit j durchnummeriert, um sie voneinander unterscheiden zu können. Wir benutzen nun

(i) für den ersten Faktor unter dem Integral die Orthogonalität (2.77) der Eigenzustände $|\phi_j\rangle$,

$$\langle \phi_0 | \phi_N \rangle = \delta[\phi_0 - \phi_N] , \quad (3.6)$$

(ii) für die Faktoren $\langle \pi_j | \phi_{j-1} \rangle$ die 3+1-dimensionale Verallgemeinerung von Gl. (2.82),

$$\langle \pi_j | \phi_{j-1} \rangle = \exp \left[-i \int_V d^3\mathbf{x} \pi_j(\mathbf{x}) \phi_{j-1}(\mathbf{x}) \right] , \quad (3.7)$$

3.1 Funktionalintegraldarstellung der großkanonischen Zustandssumme

- (iii) für die Faktoren $\langle \phi_j | e^{-\hat{K}\Delta\tau} | \pi_j \rangle$ die folgende Zwischenüberlegung: im Limes $\Delta\tau \rightarrow 0$ dürfen wir die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion nach dem linearen Term in der (infinitesimal) kleinen Größe $\Delta\tau$ abbrechen,

$$\langle \phi_j | e^{-\hat{K}\Delta\tau} | \pi_j \rangle = \langle \phi_j | 1 - \hat{K}\Delta\tau | \pi_j \rangle + O(\Delta\tau^2). \quad (3.8)$$

Der Hamilton-Operator \hat{K} kann als Raumintegral über eine entsprechende Hamilton-Dichte geschrieben werden,

$$\hat{K} \equiv \int_V d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{K}}, \quad (3.9)$$

wobei

$$\hat{\mathcal{K}} \equiv \hat{\mathcal{H}} - \mu \hat{\mathcal{N}}. \quad (3.10)$$

Hier ist $\hat{\mathcal{H}}$ die gewöhnliche (allerdings operatorwertige) Hamiltondichte, vgl. Gl. (2.83), und $\hat{\mathcal{N}}$ die zum Operator \hat{N} korrespondierende (operatorwertige) ‘‘Quantenzahldichte’’,

$$\hat{N} \equiv \int_V d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{N}}, \quad (3.11)$$

Entsprechend Gl. (2.83) ist $\hat{\mathcal{H}}$ eine Funktion der Feldoperatoren $\hat{\phi}$ und $\hat{\pi}$ (sowie von Gradienten von $\hat{\phi}$). Gleiches gilt auch für die Quantenzahldichte $\hat{\mathcal{N}}$ und damit auch für die verallgemeinerte Hamilton-Dichte $\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K}(\hat{\phi}, \hat{\pi}, \nabla\hat{\phi})$. Zwischen Eigenzuständen $\langle \phi_j |$ und $| \pi_j \rangle$ können wir die Feldoperatoren durch ihre entsprechenden Eigenwerte ersetzen, also

$$\begin{aligned} \langle \phi_j | \hat{K} | \pi_j \rangle &= \int_V d^3\mathbf{x} \langle \phi_j | \mathcal{K}(\hat{\phi}, \hat{\pi}, \nabla\hat{\phi}) | \pi_j \rangle = \int_V d^3\mathbf{x} \langle \phi_j | \mathcal{K}(\phi_j, \pi_j, \nabla\phi_j) | \pi_j \rangle \\ &\equiv K_j \langle \phi_j | \pi_j \rangle, \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei

$$K_j \equiv \int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{K}(\phi_j, \pi_j, \nabla\phi_j) \quad (3.13)$$

der Wert des verallgemeinerten Hamilton-Operators für die Feldeigenwerte ϕ_j, π_j ist. Da der adjungierte Zustand $\langle \phi_j |$ in Gl. (3.12) auftritt, müsste man bei der Ersetzung der Feldoperatoren durch die Feldeigenwerte eigentlich den komplex konjugierten Feldeigenwert ϕ_j^* einsetzen. Allerdings ist der Hamilton-Operator \hat{K} hermitesch und hat mithin reelle Eigenwerte. Die Feldeigenwerte ϕ_j und ϕ_j^* müssen daher in einer reellwertigen Kombination auftreten. Setzen wir Gl. (3.12) in Gl. (3.8) ein und machen die Entwicklung der Exponentialfunktion rückgängig, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \phi_j | e^{-\hat{K}\Delta\tau} | \pi_j \rangle &= e^{-K_j\Delta\tau} \langle \phi_j | \pi_j \rangle \\ &\equiv \exp \left\{ \int_V d^3\mathbf{x} \left[i \pi_j(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) - \Delta\tau \mathcal{K}(\phi_j, \pi_j, \nabla\phi_j) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei wir Gl. (3.7) benutzt haben.

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

Nun setzen wir die Glgen. (3.6), (3.7) und (3.14) in Gl. (3.5) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | e^{-\hat{K}/T} | \phi_0 \rangle &= \int \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{x} \in V} \frac{d\pi_j(\mathbf{x}) d\phi_j(\mathbf{x})}{2\pi} \delta[\phi_0 - \phi_N] \\ &\times \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \Delta\tau \int_V d^3\mathbf{x} \left[i \pi_k(\mathbf{x}) \frac{\phi_k(\mathbf{x}) - \phi_{k-1}(\mathbf{x})}{\Delta\tau} - \mathcal{K}(\phi_k, \pi_k, \nabla\phi_k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$, $\Delta\tau \rightarrow 0$ geht die Summe über k im Exponenten in ein Integral über die Variable τ über. Die finite Differenz der Felder wird zu

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\phi_k(\mathbf{x}) - \phi_{k-1}(\mathbf{x})}{\Delta\tau} = \frac{\partial\phi(\tau, \mathbf{x})}{\partial\tau}.$$

Mit den Definitionen

$$\mathcal{D}\phi(\tau, \mathbf{x}) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{x} \in V} d\phi_j(\mathbf{x}), \quad \mathcal{D}\pi(\tau, \mathbf{x}) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{x} \in V} \frac{d\pi_j(\mathbf{x})}{2\pi}, \quad (3.16)$$

erhalten wir dann aus Gl. (3.15) im Limes $N \rightarrow \infty$, $\Delta\tau \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | e^{-\hat{K}/T} | \phi_0 \rangle &= \int \mathcal{D}\pi(\tau, \mathbf{x}) \int_{\phi(0, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x})}^{\phi(1/T, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x})} \mathcal{D}\phi(\tau, \mathbf{x}) \\ &\times \exp \left\{ \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3\mathbf{x} \left[\pi(\tau, \mathbf{x}) i \frac{\partial\phi(\tau, \mathbf{x})}{\partial\tau} - \mathcal{K}(\phi, \pi, \nabla\phi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hier haben wir an den Grenzen des Funktionalintegrals über die Felder $\phi(\tau, \mathbf{x})$ angedeutet, dass sowohl der ‘‘Anfangszustand’’ bei $\tau = 0$ als auch, aufgrund der funktionalen Delta-Funktion $\delta[\phi_0 - \phi_N]$, der ‘‘Endzustand’’ bei $\tau = 1/T$ durch den Feldeigenwert $\phi_0(\mathbf{x})$ gegeben ist.

Setzen wir Gl. (3.17) in Gl. (3.2) ein, so wird auch noch über alle möglichen Feldeigenwerte $\phi_0(\mathbf{x})$ integriert. Die Beschränkung des Funktionalintegrals über die Felder ϕ ist dann lediglich die, dass man über alle Felder $\phi(\tau, \mathbf{x})$ integriert, die **periodisch** im Intervall $[0, 1/T]$ sind. Die **großkanonische Zustandssumme** hat dann folgende Darstellung als **Funktionalintegral**,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathfrak{N} \int \mathcal{D}\pi(\tau, \mathbf{x}) \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\phi(\tau, \mathbf{x}) \\ &\times \exp \left\{ \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3\mathbf{x} \left[\pi(\tau, \mathbf{x}) i \frac{\partial\phi(\tau, \mathbf{x})}{\partial\tau} - \mathcal{K}(\phi, \pi, \nabla\phi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Hier haben wir noch eine Normierungskonstante \mathfrak{N} eingeführt, die dafür sorgt, dass die Zustandssumme (wie üblich) eine **dimensionslose Zahl** wird. Dies ist erforderlich, da die Felder $\pi(\tau, \mathbf{x})$ und $\phi(\tau, \mathbf{x})$ im Integralmaß i.a. nicht dimensionslos sind. Wir bestimmen die Form dieser Normierungskonstante im nächsten Abschnitt.

3.2 Normierung der Funktionalintegraldarstellung der großkanonischen Zustandssumme

Um die Normierungskonstante \mathfrak{N} zu bestimmen, wählen wir als konkretes Beispiel das nichtwechselwirkende, neutrale, skalare Feld mit der wohlbekanntenen Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) . \quad (3.19)$$

Hierbei ist zu beachten, dass im Imaginärzeitformalismus die folgenden Ersetzungen hinsichtlich der Zeitvariable und der Ableitung nach der Zeit zu machen sind,

$$t \longrightarrow -i\tau , \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial \tau} . \quad (3.20)$$

Wir behalten dennoch der Einfachheit halber die Minkowski–Notation (mit kontra- und kovarianten Vektoren) bei.

Wir definieren die **Wirkung im Imaginärzeitformalismus** als das Integral der Lagrange–Dichte über das Raumvolumen V und das Imaginärzeitintervall $[0, 1/T]$,

$$S \equiv \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{L} . \quad (3.21)$$

Diese ist in natürlichen Einheiten dimensionlos. Also muss die Lagrange–Dichte die Dimension Länge^{−4} oder Energie⁴ haben.

Betrachten wir nun die Lagrange–Dichte (3.19). Da die Masse m und der 4–Gradient ∂_μ die Dimension Länge^{−1} oder Energie haben, muss das Feld ϕ ebenfalls die Dimension Länge^{−1} oder Energie haben, $[\phi(\tau, \mathbf{x})] = \text{MeV}$. Das kanonisch konjugierte Feld $\pi(\tau, \mathbf{x}) \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(\tau, \mathbf{x})$ (wobei nach wie vor $\dot{\phi} \equiv \partial_t \phi$ die gewöhnliche Zeitableitung bedeutet) hat dann die Dimension Länge^{−2} oder Energie², $[\pi(\tau, \mathbf{x})] = \text{MeV}^2$. Wie schon im vorangegangenen Abschnitt angedeutet, ist das Integralmaß in Gl. (3.18) daher nicht dimensionlos und die Normierungskonstante \mathfrak{N} muss dies kompensieren.

Zur Bestimmung von \mathfrak{N} nehmen wir an, unser Raum–Zeit–Volumen V/T sei in Form eines **Raum–Zeit–Gitters diskretisiert**, s. Abb. 3.1.

Wir nehmen an, dass das Imaginärzeitintervall $1/T$ in N Teilstücke der Länge ε unterteilt ist, während das Raumvolumen V ein Würfel der Kantenlänge L ist, wobei L in M Teilstücke der Länge a unterteilt ist. Es gilt

$$\frac{V}{T} = \frac{L^3}{T} = (Ma)^3 N \varepsilon = NM^3 \varepsilon a^3 . \quad (3.22)$$

Die einzelnen Gitterpunkte lassen sich durch Angabe eines vierdimensionalen Vektors ganzer Zahlen charakterisieren,

$$(\tau, \mathbf{x}) \equiv (j\varepsilon, \mathbf{n}a) , \quad j = 0, \dots, N , \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) , \quad n_i = 0, \dots, M , \quad i = x, y, z .$$

Auf dem so definierten Gitter sind die Felder nur an den diskreten Gitterpunkten definiert und nicht mehr Funktionen der kontinuierlichen Variablen (τ, \mathbf{x}) . Sie tragen daher lediglich Indizes für den jeweiligen Raum–Zeitpunkt ,

$$\phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(j\varepsilon, \mathbf{n}a) \equiv \phi_{j,\mathbf{n}} , \quad \pi(\tau, \mathbf{x}) = \pi(j\varepsilon, \mathbf{n}a) \equiv \pi_{j,\mathbf{n}} . \quad (3.23)$$

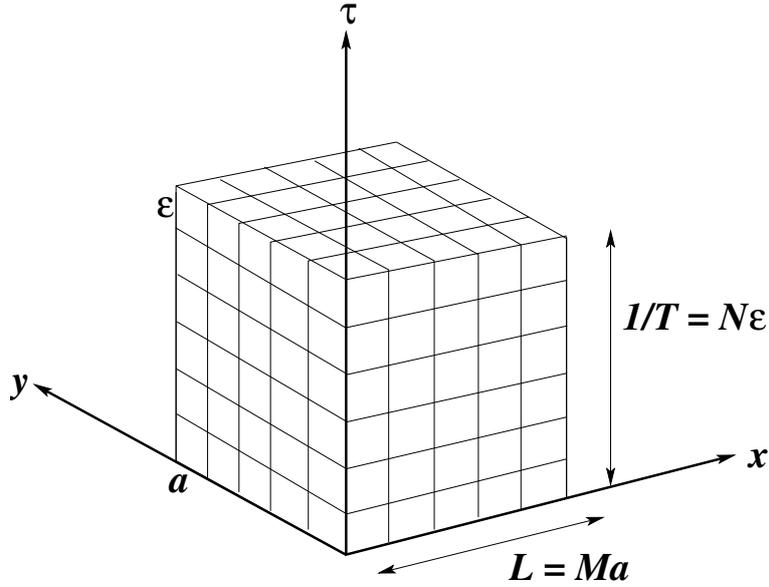


Abbildung 3.1: In Form eines Gitters diskretisierte Raum-Zeit. Zum Zweck der dreidimensionalen Visualisierung sind nur die räumlichen Achsen x und y , sowie die imaginäre Zeitachse τ gezeigt.

In diskretisierter Form lautet die großkanonische Zustandssumme (3.18) dann

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \Re \int \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{n}} \frac{d\pi_{j,\mathbf{n}}}{2\pi} \prod_{j=0}^N \prod_{\mathbf{n}} d\phi_{j,\mathbf{n}} \delta^{(M^3)}(\phi_{0,\mathbf{n}} - \phi_{N,\mathbf{n}}) \\ & \times \exp \left\{ \sum_{k=1}^N \varepsilon \sum_{\mathbf{m}} a^3 \left[\pi_{k,\mathbf{m}} i \frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k-1,\mathbf{m}}}{\varepsilon} - \mathcal{K}_{k,\mathbf{m}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Es lohnt sich ein Vergleich mit Gl. (3.15): der Unterschied besteht darin, dass (i) $\Delta\tau \equiv \varepsilon$, (ii) die Ortsvariable \mathbf{x} durch den diskreten Vektor \mathbf{n} (bzw. \mathbf{m}) ersetzt wurde, (iii) entsprechend die Integration über $d^3\mathbf{x} \equiv a^3$ einer diskreten Summe Platz gemacht hat, und (iv) eine zusätzliche Integration über $\prod_{\mathbf{n}} d\phi_{0,\mathbf{n}}$ stattfindet, die aus der Definition (3.2) der großkanonischen Zustandssumme folgt. In Gl. (3.24) haben wir

$$\mathcal{K}_{k,\mathbf{m}} \equiv \mathcal{K}(\phi_{k,\mathbf{m}}, \pi_{k,\mathbf{m}}, \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_x}, \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_y}, \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_z}) \quad (3.25)$$

abgekürzt, wobei \mathbf{e}_i , $i = x, y, z$, die kartesischen Einheitsvektoren sind. Der Ortsgradient wird zum Vektor der finiten Differenzen

$$\nabla\phi(\tau, \mathbf{x}) \longrightarrow \left(\frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_x}}{a}, \frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_y}}{a}, \frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_z}}{a} \right). \quad (3.26)$$

Da $\mathcal{K}_{k,\mathbf{m}}$ bereits von $\phi_{k,\mathbf{m}}$ abhängt, haben wir in Gl. (3.25) anstelle des Vektors (3.26) der finiten Differenzen lediglich die Abhängigkeit von den Feldvariablen $\phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_i}$, $i = x, y, z$, aufgeführt.

3.2 Normierung der Funktionalintegraldarstellung der großkanonischen Zustandssumme

Alle für uns relevanten Hamilton–Dichten sind **quadratisch** in den kanonisch konjugierten Impulsen. Für das nichtwechselwirkende neutrale skalare Feld gilt $\pi = \partial\mathcal{L}_0/\partial\dot{\phi} = \dot{\phi}$, und da es keine erhaltene Quantenzahl, können wir außerdem $\mu = 0$ setzen. Die (verallgemeinerte) Hamilton–Dichte lautet dann

$$\mathcal{K}_0 \equiv \mathcal{H}_0 = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}_0 \Big|_{\dot{\phi}=\pi} = \pi\dot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \Big|_{\dot{\phi}=\pi} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 . \quad (3.27)$$

Die diskretisierte Version lautet entsprechend

$$\mathcal{K}_{0k,\mathbf{m}} = \frac{1}{2}\pi_{k,\mathbf{m}}^2 + \sum_{i=x,y,z} \left(\frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_i}}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{2}\phi_{k,\mathbf{m}}^2 . \quad (3.28)$$

Die Integration über die kanonisch konjugierten Felder in Gl. (3.24) ist daher ein **verschobenes Gauß–Integral**. Wir substituieren die neuen Integrationsvariablen

$$\pi'_{k,\mathbf{m}} \equiv \pi_{k,\mathbf{m}} - i \frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k-1,\mathbf{m}}}{\varepsilon} ,$$

was das Integrationsmaß in Gl. (3.24) nicht ändert. Es gilt offensichtlich

$$\frac{1}{2}\pi_{k,\mathbf{m}}^2 - \pi_{k,\mathbf{m}} i \frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k-1,\mathbf{m}}}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\pi'_{k,\mathbf{m}}{}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k-1,\mathbf{m}}}{\varepsilon} \right)^2 ,$$

so dass Gl. (3.24) in die folgende Form übergeht,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathfrak{N} \int \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{n}} \frac{d\pi'_{j,\mathbf{n}}}{2\pi} \exp \left(-\frac{\varepsilon a^3}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\mathbf{m}} \pi'_{k,\mathbf{m}}{}^2 \right) \int \prod_{j=0}^N \prod_{\mathbf{n}} d\phi_{j,\mathbf{n}} \delta^{(M^3)}(\phi_{0,\mathbf{n}} - \phi_{N,\mathbf{n}}) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\mathbf{m}} \left[\frac{a^3}{\varepsilon} (\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k-1,\mathbf{m}})^2 + \sum_{i=x,y,z} \varepsilon a (\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_i})^2 + \varepsilon a^3 \frac{m^2}{2} \phi_{k,\mathbf{m}}^2 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Der zusätzliche Index “0” an der großkanonischen Zustandssumme bedeutet hierbei, dass wir nun ein System nichtwechselwirkender Teilchen betrachten. Die Integration über die Felder $\pi'_{j,\mathbf{n}}$ ist nun ein gewöhnliches Gauß–Integral mit dem Wert

$$\int \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{n}} \frac{d\pi'_{j,\mathbf{n}}}{2\pi} \exp \left(-\frac{\varepsilon a^3}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\mathbf{m}} \pi'_{k,\mathbf{m}}{}^2 \right) = (2\pi\varepsilon a^3)^{-NM^3/2} . \quad (3.30)$$

Dieser Faktor hat die Dimension $\text{Länge}^{-2NM^3} = \text{Energie}^{2NM^3}$. Dies ist konsistent damit, dass jedes $\pi_{j,\mathbf{n}}$ die Dimension Energie^2 trägt und es genau NM^3 solche Felder gibt, über die integriert wird. Wir zerlegen die Normierungskonstante \mathfrak{N} nun wie folgt,

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{N}_\phi , \quad (3.31)$$

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

wobei \mathfrak{R}_π die Dimension der $\pi'_{j,\mathbf{n}}$ -Integration kompensiert und \mathfrak{R}_ϕ entsprechend die der $\phi_{j,\mathbf{n}}$ -Integration. Dann ist aufgrund der vorangegangenen Überlegung

$$\mathfrak{R}_\pi = (2\pi\varepsilon a^3)^{NM^3/2} . \quad (3.32)$$

Eine andere Möglichkeit dies zu sehen ist, anstelle der $\pi'_{j,\mathbf{n}}$ -Integration über $\pi''_{j,\mathbf{n}} \equiv (2\pi\varepsilon a^3)^{1/2} \pi'_{j,\mathbf{n}}$ zu integrieren. Das entsprechende Gauß-Integral ergibt dann genau 1, aber die Jacobi-Determinante dieser Variablensubstitution ist wieder $(2\pi\varepsilon a^3)^{-NM^3/2}$, was durch \mathfrak{R}_π kompensiert wird.

Nach der Integration über die kanonisch konjugierten Felder verbleibt folgender Ausdruck für die großkanonische Zustandssumme,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathfrak{R}_\phi \int \prod_{j=0}^N \prod_{\mathbf{n}} d\phi_{j,\mathbf{n}} \delta^{(M^3)}(\phi_{0,\mathbf{n}} - \phi_{N,\mathbf{n}}) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\mathbf{m}} \left[\frac{a^3}{\varepsilon} (\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k-1,\mathbf{m}})^2 + \sum_{i=x,y,z} \varepsilon a (\phi_{k,\mathbf{m}} - \phi_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_i})^2 + \varepsilon a^3 \frac{m^2}{2} \phi_{k,\mathbf{m}}^2 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Normierungskonstante \mathfrak{R}_ϕ kann nicht eindeutig bestimmt werden, da es mehrere Kombinationen der dimensionsbehafteten Größen a und ε gibt, um die Dimension von $\phi_{j,\mathbf{n}}$ zu kompensieren. Beispielsweise haben sowohl $\sqrt{a\varepsilon}$ als auch $\sqrt{a^3/\varepsilon}$ die Dimension Länge bzw. Energie⁻¹, und können mit $\phi_{j,\mathbf{n}}$ zu dimensionslosen Integrationsvariablen kombiniert werden. Wir treffen im Folgenden die Wahl, die den Koeffizienten des ersten Terms (der der Zeitableitung entspricht) im Exponenten in Gl. (3.33) gleich 1 macht, also

$$\phi'_{j,\mathbf{n}} \equiv \sqrt{\frac{a^3}{\varepsilon}} \phi_{j,\mathbf{n}} . \quad (3.34)$$

Wie wir sehen werden, wird durch diese Wahl \mathfrak{R}_ϕ ausschließlich eine Funktion des Volumens V und hängt nicht von der Temperatur T ab. Mit der Substitution (3.34) wird Gl. (3.33) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathfrak{R}_\phi \left(\frac{a^3}{\varepsilon} \right)^{-NM^3/2} \int \prod_{j=0}^N \prod_{\mathbf{n}} d\phi'_{j,\mathbf{n}} \delta^{(M^3)}(\phi'_{0,\mathbf{n}} - \phi'_{N,\mathbf{n}}) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\mathbf{m}} \left[(\phi'_{k,\mathbf{m}} - \phi'_{k-1,\mathbf{m}})^2 + \sum_{i=x,y,z} \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^2 (\phi'_{k,\mathbf{m}} - \phi'_{k,\mathbf{m}-\mathbf{e}_i})^2 + \varepsilon^2 \frac{m^2}{2} \phi'^2_{k,\mathbf{m}} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Man beachte, dass ein zusätzlicher Faktor $(a^3/\varepsilon)^{-M^3/2}$ aus dem Integrationsmaß (da man $N + 1$ Gitterpunkte in der imaginären Zeitrichtung hat) durch einen Faktor $(a^3/\varepsilon)^{M^3/2}$ aus der Delta-Funktion kompensiert wird. Wir wählen nun

$$\mathfrak{R}_\phi \equiv \left(\frac{a^3}{2\pi\varepsilon} \right)^{NM^3/2} . \quad (3.36)$$

Dadurch verbleibt ein konstanter Faktor $(2\pi)^{-NM^3/2}$ vor dem Integral, der aber für die Thermodynamik des Systems (in der lediglich Ableitungen von $\ln \mathcal{Z}$ nach den thermodynamischen Variablen T , V und μ auftreten) keine Rolle spielt.

Die Normierungskonstante (3.31) nimmt nun mit den Glgen. (3.32) und (3.36) die Form

$$\mathfrak{N} = \left(2\pi\epsilon a^3 \frac{a^3}{2\pi\epsilon} \right)^{NM^3/2} = (a^3)^{NM^3} = \left(\frac{L^3}{M^3} \right)^{NM^3} = V^{NM^3} M^{-3NM^3} . \quad (3.37)$$

Der letzte Faktor ist eine (für die Thermodynamik) irrelevante Konstante und kann (wie schon vorher der Faktor $(2\pi)^{-NM^3/2}$) vernachlässigt werden. Damit ist, wie angekündigt, \mathfrak{N} lediglich eine Funktion des Volumens V , nicht aber der Temperatur T . Der Exponent NM^3 ist die Zahl der Gitterpunkte in der diskretisierten Raum-Zeit und entspricht gleichzeitig der Anzahl der Integrationen über Felder $\phi_{j,\mathbf{n}}$ und kanonisch konjugierte Felder $\pi_{j,\mathbf{n}}$.

Wir definieren (mathematisch allerdings nicht wohldefiniert) die Zahl der Raum-Zeit-Punkte im Kontinuumsliches als

$$\mathcal{F} \equiv \lim_{N,M \rightarrow \infty} NM^3 . \quad (3.38)$$

Dann ist aufgrund von Gl. (3.37) im Kontinuumsliches und bis auf einen für die Thermodynamik irrelevanten konstanten Faktor

$$\mathfrak{N} = V^{\mathcal{F}} . \quad (3.39)$$

3.3 Periodizität der Integration über kanonisch konjugierte Felder

3.11.2021

Die Integration in Gl. (3.18) erfolgt über im Intervall $[0, 1/T]$ periodische Felder $\phi(\tau, \mathbf{x})$. Die Integration über kanonisch konjugierte Felder $\pi(\tau, \mathbf{x})$ unterliegt dagegen keiner Einschränkung. Man kann aber ohne weiteres auch die Integration über die letzteren auf **periodische Feldkonfigurationen** beschränken. Um dies einzusehen, betrachten wir das Integrationsmaß über die kanonisch konjugierten Felder in der diskretisierten Raum-Zeit, s. Gl. (3.24), und fügen eine Eins in der Form

$$1 = \int \prod_{\mathbf{n}} d\pi_{0,\mathbf{n}} \delta^{(M^3)}(\pi_{0,\mathbf{n}} - \pi_{N,\mathbf{n}}) \quad (3.40)$$

hinzu. Die (spuriöse) Integrationsvariable $\pi_{0,\mathbf{n}}$ tritt nicht im Integranden in Gl. (3.24) auf und kann daher frei gewählt. In Gl. (3.40) haben wir sie mit Hilfe der Delta-Funktion ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Wert des kanonisch konjugierten Feldes $\pi_{N,\mathbf{n}}$ gesetzt. Im Kontinuumsliches bedeutet dies aber nichts anderes, als dass wir das Feld $\pi(\tau, \mathbf{x})$ **periodisch** im Intervall $[0, 1/T]$ gemacht haben,

$$\pi(0, \mathbf{x}) \equiv \pi(1/T, \mathbf{x}) . \quad (3.41)$$

Für das Integrationsmaß über die kanonisch konjugierten Felder in Gl. (3.24) haben wir dann

$$\begin{aligned} \int \prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{n}} \frac{d\pi_{j,\mathbf{n}}}{2\pi} &= (2\pi)^{M^3} \int \prod_{j=0}^N \prod_{\mathbf{n}} \frac{d\pi_{j,\mathbf{n}}}{2\pi} \delta^{(M^3)}(\pi_{0,\mathbf{n}} - \pi_{N,\mathbf{n}}) \\ &\longrightarrow \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\pi(\tau, \mathbf{x}) \quad (N, M \rightarrow \infty, \varepsilon, a \rightarrow 0), \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei wir die irrelevante Konstante $(2\pi)^{M^3}$ vernachlässigt haben.

Der tiefere Grund, warum die Beschränkung auf im Intervall $[0, 1/T]$ periodischen kanonisch konjugierten Feldern möglich ist, ist, dass das Funktionalintegral (3.18) nur von den kanonisch konjugierten Feldern im **halboffenen** Intervall $(0, 1/T]$ abhängt. Dies sieht man am schnellsten in der diskretisierten Version (3.24). Man kann daher trivialerweise eine Integration über das kanonisch konjugierte Feld $\pi(0, \mathbf{x})$ am Zeitpunkt $\tau = 0$ hinzufügen und den Wert des Feldes dort frei wählen, also beispielsweise wie in Gl. (3.41). Effektiv hat man damit den Definitionsbereich der kanonisch konjugierten Felder vom halboffenen Intervall $(0, 1/T]$ auf das geschlossene Intervall $[0, 1/T]$ ausgedehnt.

Natürlich bedeutet dies, dass die kanonisch konjugierten Felder hochgradig unstetig sein können, weil sie lediglich am Punkt $\tau = 0$ mit ihrem Wert am Punkt $\tau = 1/T$ übereinstimmen müssen, was aber nichts über ihren Wert am Punkt $\tau = \varepsilon$, mit $0 < \varepsilon \ll 1$ aussagt. Dies ist aber irrelevant, denn die Felder, über die man im Funktionalintegral integriert, müssen generell nicht stetig sein. Es ist eine bekannte Tatsache, dass die Pfade des quantenmechanischen Pfadintegrals Ähnlichkeiten mit der Brownschen Molekularbewegung aufweisen, welche innerhalb eines Zeitintervalls $\Delta\tau$ räumliche ‘‘Sprünge’’ von der Größenordnung $\sim \sqrt{\Delta\tau} \gg \Delta\tau$ erlaubt [6].

Wir erhalten also aus Gl. (3.18) mit Gl. (3.42) den finalen Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathfrak{R} \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\pi(\tau, \mathbf{x}) \mathcal{D}\phi(\tau, \mathbf{x}) \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3\mathbf{x} \left[\pi(\tau, \mathbf{x}) i \frac{\partial\phi(\tau, \mathbf{x})}{\partial\tau} - \mathcal{K}(\phi, \pi, \nabla\phi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

für die großkanonische Zustandssumme, von dem wir im Folgenden ausgehen werden.

3.4 Das neutrale skalare Feld

Die Lagrange–Dichte des neutralen skalaren Feldes ist durch Gl. (3.19) gegeben. Die Hamilton–Dichte ergibt sich daraus durch eine Legendre–Transformation, vgl. Gl. (3.27). Das neutrale skalare Feld hat keine erhaltene Quantenzahl, daher ist $\mu = 0$ und $\mathcal{K}_0 = \mathcal{H}_0$, wie in Gl. (3.27). Die großkanonische Zustandssumme lautet dann gemäß Gl. (3.43)

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \exp \left[\int_X (\pi i \partial_\tau \phi - \mathcal{K}_0) \right], \quad (3.44)$$

wobei wir die Abkürzung

$$\int_X \equiv \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3\mathbf{x} \quad (3.45)$$

eingeführt haben. Mit der Substitution $\pi' = \pi - i\partial_\tau\phi$ separiert die π' -Integration von der ϕ -Integration,

$$\pi i\partial_\tau\phi - \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] = -\frac{1}{2}\pi'^2 + \frac{1}{2} [(i\partial_\tau\phi)^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2] ,$$

und mit $i\partial_\tau \equiv \partial_t$ können wir den Term in quadratischen Klammern wieder als freie Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 , vgl. Gl. (3.19), schreiben, so dass

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\pi \exp\left(-\frac{1}{2} \int_X \pi'^2\right) \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\phi \exp\left(\int_X \mathcal{L}_0\right) , \quad (3.46)$$

wobei wir π' in π umbenannt haben. Beide Funktionalintegrale sind Gauß-Integrale, können also exakt gelöst werden. Dazu führen wir zunächst die **Fourier-Entwicklung** der Felder und kanonisch konjugierten Felder ein,

$$\phi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_{n, \mathbf{k}} e^{i\omega_n\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{k}) , \quad (3.47)$$

$$\pi(\tau, \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{T}{V}} \sum_{n, \mathbf{k}} e^{i\omega_n\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\pi}(\omega_n, \mathbf{k}) . \quad (3.48)$$

Hier sind die Normierungsfaktoren so gewählt worden, dass die Fourier-Amplituden $\tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{k})$, $\tilde{\pi}(\omega_n, \mathbf{k})$ **dimensionslos** sind,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{TV}} \right] = \text{MeV} , \quad \left[\sqrt{\frac{T}{V}} \right] = \text{MeV}^2 .$$

Mit dieser Wahl wird außerdem sichergestellt, dass sich der dimensionsbehaftete Anteil des Normierungsfaktors \mathfrak{R} wegekürzt, denn in diskretisierter Raum-Zeit gilt

$$\frac{1}{\sqrt{TV}} \times \sqrt{\frac{T}{V}} \equiv \frac{1}{V} ,$$

so dass die Funktionalintegrale über die Felder in Gl. (3.46) insgesamt einen Faktor $V^{-\mathcal{F}}$ liefern, während die Normierungskonstante $\mathfrak{R} \sim V^{\mathcal{F}}$, vgl. Gl. (3.39). Damit verbleibt lediglich eine (irrelevante, dimensionslose) Konstante vor dem Funktionalintegral in Gl. (3.46).

Es stellt sich nun noch die Frage, warum diskrete Summen in den Fourier-Entwicklungen (3.47) und (3.48) anstelle der (in der Quantenfeldtheorie im Vakuum üblichen) Integrale auftreten. Betrachten wir zunächst die Summe über die diskrete Variable n . Hierzu ist zu bemerken, dass sowohl die Felder ϕ wie auch die kanonisch konjugierten Felder π **periodisch** im Intervall $[0, 1/T]$ sind, d.h. die Fourier-Funktionen müssen bei den Zeiten $\tau = 0$ und $\tau = 1/T$ übereinstimmen,

$$1 = e^{i\omega_n \cdot 0} = e^{i\omega_n/T} . \quad (3.49)$$

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

Aus der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion folgt daraus sofort

$$\omega_n = 2\pi nT; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.50)$$

Diese diskreten Energie- bzw. Frequenzvariablen bezeichnet man als **bosonische Matsubara-Frequenzen**.

Die diskrete Summe über die Impulse \mathbf{k} erklärt sich prinzipiell aus der Diskretisierung der Impulseigenzustände in einem endlichen Volumen V , vgl. Gl. (1.43). Wir können aber auch fordern, dass die Felder und kanonisch konjugierten Felder **periodische Randbedingungen** im Volumen $V = L^3$ erfüllen sollen, z.B. $\phi(\tau, x, y, 0) = \phi(\tau, x, y, L)$ und entsprechend für die anderen Raumrichtungen und die kanonisch konjugierten Felder. Dann gilt analog zu Gl. (3.49)

$$1 = e^{ik_z \cdot 0} = e^{ik_z L}, \quad (3.51)$$

was auf $k_z = 2\pi n_z/L$, bzw. verallgemeinert auf alle drei Raumrichtungen auf

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad i = x, y, z, \quad (3.52)$$

führt. Formal scheinen nun lediglich die Hälfte der Moden aus Gl. (1.43) aufzutreten, aber dort wurde nur über $n_i \in \mathbb{N}$ summiert, während nun auch die null und negative ganze Zahlen berücksichtigt werden. Im Endeffekt liefert dies das gleiche Ergebnis, vgl. Glgen. (1.44), (1.45). Im thermodynamischen Limes geht die Fourier-Summe über \mathbf{k} wieder in ein Integral über den drei-dimensionalen Impulsraum über, vgl. Gl. (1.45).

Wir vereinbaren nun folgende Vereinfachung der Notation:

$$K^\mu \equiv (k_0, \mathbf{k}), \quad k_0 \equiv -i\omega_n, \quad X^\mu = (t, \mathbf{x}), \quad t \equiv -i\tau. \quad (3.53)$$

Hierbei ist zu beachten, dass k_0 und t **rein imaginär** und durch $-i\omega_n$ bzw. $-i\tau$ gegeben sind. Es handelt sich dabei um eine **Definition**, und nicht etwa um eine analytische Fortsetzung im Sinne der Wick-Rotation, wie sie in der Quantenfeldtheorie im Vakuum durchgeführt wurde. Diese Definition erlaubt, die aus der Minkowski-Raum-Zeit bekannte Notation beizubehalten. Wir haben dann beispielsweise

$$\omega_n \tau + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = (ik_0)(it) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = -k_0 t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \equiv -K \cdot X. \quad (3.54)$$

Desweiteren benutzen wir, neben der Bezeichnung (3.45) für die Raum-Zeit-Integration, noch folgende weitere abkürzende Schreibweisen:

$$\sum_{n, \mathbf{k}} \equiv \sum_K, \quad \phi(\tau, \mathbf{x}) \equiv \phi(X), \quad \tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{k}) \equiv \tilde{\phi}_K, \quad \tilde{\pi}(\omega_n, \mathbf{k}) \equiv \tilde{\pi}_K. \quad (3.55)$$

Die Fourier-Entwicklungen (3.47) und (3.48) schreiben sich damit kompakt als

$$\phi(X) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{\phi}_K, \quad \pi(X) = \sqrt{\frac{T}{V}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{\pi}_K. \quad (3.56)$$

Die **Orthogonalität** der Fourier-Funktionen lautet (mit $q_0 = -i\omega_m$, $\mathbf{q} = 2\pi\mathbf{m}/L$)

$$\begin{aligned}
 \int_X e^{-i(K+Q)\cdot X} &= \int_0^{1/T} d\tau e^{i(\omega_n+\omega_m)\tau} \int_V d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
 &= \int_0^{1/T} d\tau e^{2\pi iT(n+m)\tau} \prod_{i=x,y,z} \int_0^L dx_i e^{2\pi i(n_i+m_i)x_i/L} \\
 &= \frac{1}{2\pi T} \int_0^{2\pi} dz e^{i(n+m)z} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \prod_{i=x,y,z} \int_0^{2\pi} dz_i e^{i(n_i+m_i)z_i} \\
 &= \frac{V}{T} \delta_{n,-m} \delta_{\mathbf{n},-\mathbf{m}} \equiv \frac{V}{T} \delta_{K,-Q} , \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten zur dritten Zeile die Variablen $z \equiv 2\pi T\tau$ und $z_i \equiv 2\pi x_i/L$, $i = x, y, z$, substituiert haben.

Für die Vollständigkeit der Fourier-Funktionen erinnern wir uns zunächst an ein Resultat aus der Theorie der Fourier-Funktionen,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi iT\tau n} \equiv 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi m - 2\pi T\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - \frac{m}{T}\right) . \tag{3.58}$$

Desweiteren ist im thermodynamischen Limes

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = V \delta^{(3)}(\mathbf{x}) . \tag{3.59}$$

Also lautet die **Vollständigkeitsrelation**

$$\sum_K e^{-iK\cdot X} = \frac{V}{T} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - \frac{m}{T}\right) . \tag{3.60}$$

Für den Fall, dass $\tau \in [0, 1/T)$, trägt lediglich der $m = 0$ Term in der Summe bei und die Vollständigkeitsrelation vereinfacht sich zu

$$\sum_K e^{-iK\cdot X} = \frac{V}{T} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \delta(\tau) \equiv \frac{V}{T} \delta^{(4)}(X) . \tag{3.61}$$

Falls τ nicht im Intervall $[0, 1/T)$ liegt, trägt entsprechend der Wert von m bei, bei dem die Delta-Funktion einen nichtverschwindenden Beitrag liefert.

Wir setzen nun die Fourier-Transformationen (3.56) in die Argumente der Exponenti-

alfunktionen in Gl. (3.46) ein und berechnen mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (3.57)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_X \pi^2(X) &= -\frac{T}{2V} \sum_{K,Q} \tilde{\pi}_K \tilde{\pi}_Q \int_X e^{-i(K+Q)\cdot X} = -\frac{T}{2V} \sum_{K,Q} \tilde{\pi}_K \tilde{\pi}_Q \frac{V}{T} \delta_{K,-Q}^{(4)} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_K \tilde{\pi}_K \tilde{\pi}_{-K}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \int_X \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{2TV} \sum_{K,Q} (K \cdot Q + m^2) \tilde{\phi}_K \tilde{\phi}_Q \int_X e^{-i(K+Q)\cdot X} \\ &= -\frac{1}{2TV} \sum_{K,Q} (K \cdot Q + m^2) \frac{V}{T} \tilde{\phi}_K \tilde{\phi}_Q \delta_{K,-Q}^{(4)} = -\frac{1}{2} \sum_K \frac{m^2 - K^2}{T^2} \tilde{\phi}_K \tilde{\phi}_{-K} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \sum_K \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} \tilde{\phi}_K \tilde{\phi}_{-K}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

wobei wir den inversen freien **Euklidischen** oder **thermischen Propagator** für neutrale skalare Teilchen,

$$\mathcal{D}_0^{-1}(K) \equiv m^2 - K^2 = m^2 + \mathbf{k}^2 + \omega_n^2 \equiv E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2, \quad (3.64)$$

definiert haben, mit der relativistischen Dispersionsrelation $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Um die Funktionalintegrale in Gl. (3.46) im Fourier-Raum zu berechnen, müssen wir zunächst beachten, dass das neutrale skalare Feld $\phi(X)$ **reellwertig** ist, und entsprechend auch das kanonisch konjugierte Feld $\pi(X)$. Daher ist

$$\tilde{\phi}_K^* = \tilde{\phi}_{-K}, \quad \tilde{\pi}_K^* = \tilde{\pi}_{-K}, \quad (3.65)$$

bzw.

$$\operatorname{Re} \tilde{\phi}_{-K} = \operatorname{Re} \tilde{\phi}_K, \quad \operatorname{Im} \tilde{\phi}_{-K} = -\operatorname{Im} \tilde{\phi}_K, \quad \operatorname{Re} \tilde{\pi}_{-K} = \operatorname{Re} \tilde{\pi}_K, \quad \operatorname{Im} \tilde{\pi}_{-K} = -\operatorname{Im} \tilde{\pi}_K. \quad (3.66)$$

Dies impliziert, dass

(i) nur die **Hälfte** der Fourier-Moden unabhängig sind. Wir wählen als unabhängige Moden [2]

- (1) $\tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{k})$ für $n \geq 1$,
- (2) $\tilde{\phi}(0, \mathbf{k})$ für $k_x > 0$,
- (3) $\tilde{\phi}(0, 0, k_y, k_z)$ für $k_y > 0$,
- (4) $\tilde{\phi}(0, 0, 0, k_z)$ für $k_z > 0$,
- (5) $\tilde{\phi}(0, \mathbf{0}) \equiv \tilde{\phi}_0$,

und entsprechend für $\tilde{\pi}_K$. Die unabhängigen Moden (1) – (4) kennzeichnen wir in Summen oder Produkten mit “ $K > 0$ ” und die abhängigen Moden entsprechend mit “ $K < 0$ ”.

(ii) die $K = 0$ -Moden $\tilde{\phi}_0, \tilde{\pi}_0$ reellwertig sind und keinen Imaginärteil besitzen.

In den beiden Funktionalintegralen in Gl. (3.46) ist aber lediglich über die **unabhängigen** Feldvariablen zu integrieren. Dies bedeutet, dass das Integrationsmaß inklusive der Normierungskonstante (3.39), aber ohne irrelevante konstante Faktoren, im Fourier-Raum folgende Gestalt besitzt,

$$\begin{aligned} \Re \mathcal{D}\pi(X) \mathcal{D}\phi(X) &\longrightarrow V^{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{T}{V}} \frac{1}{\sqrt{TV^{\mathcal{F}}}} d\tilde{\pi}_0 d\tilde{\phi}_0 \prod_{K>0} d\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K d\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K \\ &= d\tilde{\pi}_0 d\tilde{\phi}_0 \prod_{K>0} d\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K d\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K . \end{aligned} \quad (3.67)$$

Das Funktionalintegral über die Fourier-transformierten kanonisch konjugierten Felder berechnet sich dann mit Gl. (3.65) wie folgt,

$$\begin{aligned} &\int d\tilde{\pi}_0 \prod_{K>0} d\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_K |\tilde{\pi}_K|^2\right) = \\ &= \int d\tilde{\pi}_0 e^{-\tilde{\pi}_0^2/2} \int \prod_{K>0} d\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K \exp\left\{-\sum_{K>0} [(\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K)^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K)^2]\right\} \\ &= \int d\tilde{\pi}_0 e^{-\tilde{\pi}_0^2/2} \prod_{K>0} \int d\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K \exp[-(\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K)^2 - (\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K)^2] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \prod_{K>0} \pi \equiv \Re , \end{aligned} \quad (3.68)$$

wobei wir im ersten Schritt die Summe im Exponenten in drei Teile (die unabhängigen Moden, $K > 0$, die Nullmode, $K = 0$, und die abhängigen Moden, $K < 0$) aufgespalten und dann Gl. (3.66) benutzt haben, um die Summe über $K < 0$ in eine entsprechende über $K > 0$ umzuwandeln. Im letzten Schritt haben wir dann noch das Standardresultat für das Gauß-Integral benutzt. Wie erwartet, liefert das Integral über die kanonisch konjugierten Felder lediglich eine für die Thermodynamik irrelevante Konstante.

Für das Funktionalintegral über die Fourier-transformierten Felder erhalten wir entsprechend aufgrund der Symmetrie des inversen freien Propagators, $\mathcal{D}_0^{-1}(-K) \equiv \mathcal{D}_0^{-1}(K)$,

$$\begin{aligned} &\int d\tilde{\phi}_0 \prod_{K>0} d\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_K \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} |\tilde{\phi}_K|^2\right) = \int d\tilde{\phi}_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(0)}{2T^2} \tilde{\phi}_0^2\right) \\ &\quad \times \int \prod_{K>0} d\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K \exp\left\{-\sum_{K>0} \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} [(\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K)^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K)^2]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(0)}{T^2}\right)^{-1/2} \prod_{K>0} \int d\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K d\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K \exp\left\{-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} [(\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K)^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K)^2]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(0)}{T^2}\right)^{-1/2} \prod_{K>0} \pi \left(\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2}\right)^{-1} \\ &= \Re \prod_K \left(\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2}\right)^{-1/2} , \end{aligned} \quad (3.69)$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Symmetrie von $\mathcal{D}_0^{-1}(K)$ ausgenutzt haben, um das Produkt über die Moden mit $K > 0$ auf eines über alle Moden zu erweitern, sowie die für die Thermodynamik irrelevante Konstante wie in Gl. (3.68) mit \mathfrak{K} abgekürzt haben. Das Ergebnis (3.69) läßt sich als Determinante einer Matrix \mathcal{D}_0^{-1}/T^2 im Raum der Impulsmoden mit Eigenwerten $\mathcal{D}_0^{-1}(K)/T^2$ interpretieren,

$$\prod_K \left(\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} \right)^{-1/2} \equiv \left(\det_K \frac{\mathcal{D}_0^{-1}}{T^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.70)$$

Insgesamt erhalten wir dann (abgesehen von für die Thermodynamik irrelevanten additiven Konstanten) für den Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme (3.46)

$$\ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{1}{2} \ln \det_K \frac{\mathcal{D}_0^{-1}}{T^2} \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}_K \ln \frac{\mathcal{D}_0^{-1}}{T^2} = -\frac{1}{2} \sum_K \ln \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2}. \quad (3.71)$$

5.11.2021

Die Summe über die Matsubara-Frequenzen, oder kurz **Matsubara-Summe**, in Gl. (3.71) läßt sich analytisch auswerten. Dazu schreiben wir mit der Definition (3.50) von ω_n

$$\frac{1}{2} \sum_n \ln \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} = \frac{1}{2} \sum_n \ln \frac{\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} = \frac{1}{2} \sum_n \ln \left[(2\pi n)^2 + \frac{E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} \right]. \quad (3.72)$$

Den Logarithmus schreiben wir in ein Integral um,

$$\ln \left[(2\pi n)^2 + \frac{E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} \right] = \int_1^{(E_{\mathbf{k}}/T)^2} dx^2 \frac{1}{(2\pi n)^2 + x^2} + \ln \left[(2\pi n)^2 + 1 \right]. \quad (3.73)$$

Der letzte Term ist wieder eine für die Thermodynamik irrelevante Konstante und kann vernachlässigt werden, so dass

$$\frac{1}{2} \sum_n \ln \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} = \int_1^{E_{\mathbf{k}}/T} dx x \sum_n \frac{1}{(2\pi n)^2 + x^2}. \quad (3.74)$$

Es gibt nun zwei Methoden, die Matsubara-Summe zu berechnen:

- (1) Direkte Berechnung mit Hilfe einer Reihe. Hier benutzen wir z.B. Gl. (1.421.4) aus Ref. [7],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{\pi}{2x} \coth(\pi x) - \frac{1}{2x^2}, \quad (3.75)$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2 + x^2} &= \frac{1}{x^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2 + x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (x/2\pi)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\frac{\pi^2}{x} \coth \frac{x}{2} - \frac{2\pi^2}{x^2} \right) = \frac{1}{2x} \coth \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2x} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{1}{2x} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{2x} \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

- (2) Berechnung mit Hilfe eines Konturintegrals in der komplexen k_0 -Ebene. Dazu schreiben wir mit $k_0 = -i\omega_n = -2\pi niT$, bzw. $2\pi n = ik_0/T$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2\pi n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T^2}{(xT)^2 - k_0^2} \equiv T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n), \quad (3.77)$$

mit

$$f(k_0) \equiv \frac{T}{(xT)^2 - k_0^2}. \quad (3.78)$$

Wir berechnen nun die Matsubara-Summe nach analytischer Fortsetzung der Funktion $f(k_0)$ in die komplexe k_0 -Ebene mit Hilfe eines Konturintegrals.

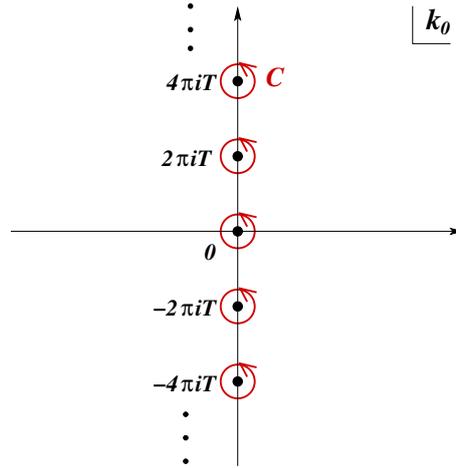


Abbildung 3.2: Kontur \mathcal{C} aus Gl. (3.79) in der komplexen k_0 -Ebene.

Satz: Sei $f(k_0)$ eine Funktion, die analytisch auf der imaginären k_0 -Achse ist. Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dk_0 f(k_0) \frac{1}{2T} \coth \frac{k_0}{2T}, \quad (3.79)$$

wobei die Kontur \mathcal{C} wie in Abb. 3.2 gezeigt aus unendlich vielen kleinen Kreisen um die Positionen $k_0 = -i\omega_n = -i(2n\pi T)$, $n \in \mathbb{Z}$, besteht.

Beweis: Die Funktion $\coth(k_0/2T) \equiv (e^{k_0/T} + 1)/(e^{k_0/T} - 1)$ hat offenbar einfache Pole bei $k_0 = -i(2n\pi T) \equiv -i\omega_n$, also genau an den Mittelpunkten der in Abb. 3.2 gezeigten Kreise auf der imaginären k_0 -Achse. Gleichzeitig hat die Funktion $f(k_0)$ nach Voraussetzung keine Pole auf der imaginären k_0 -Achse. Mit Hilfe des Residuensatzes berechnet man [zur Erinnerung: das Residuum einer Funktion $f(z)/g(z)$ an der Nullstelle z_0 von $g(z)$, $g(z_0) = 0$, ist $f(z_0)/g'(z_0)$]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dk_0 f(k_0) \frac{1}{2T} \coth \frac{k_0}{2T} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) \frac{1}{2T} \frac{e^{-i\omega_n/T} + 1}{\frac{1}{T} e^{-i\omega_n/T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n), \end{aligned}$$

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

wobei wir von $e^{-i\omega_n/T} = e^{-2n\pi i} \equiv 1$ Gebrauch gemacht haben, q.e.d.

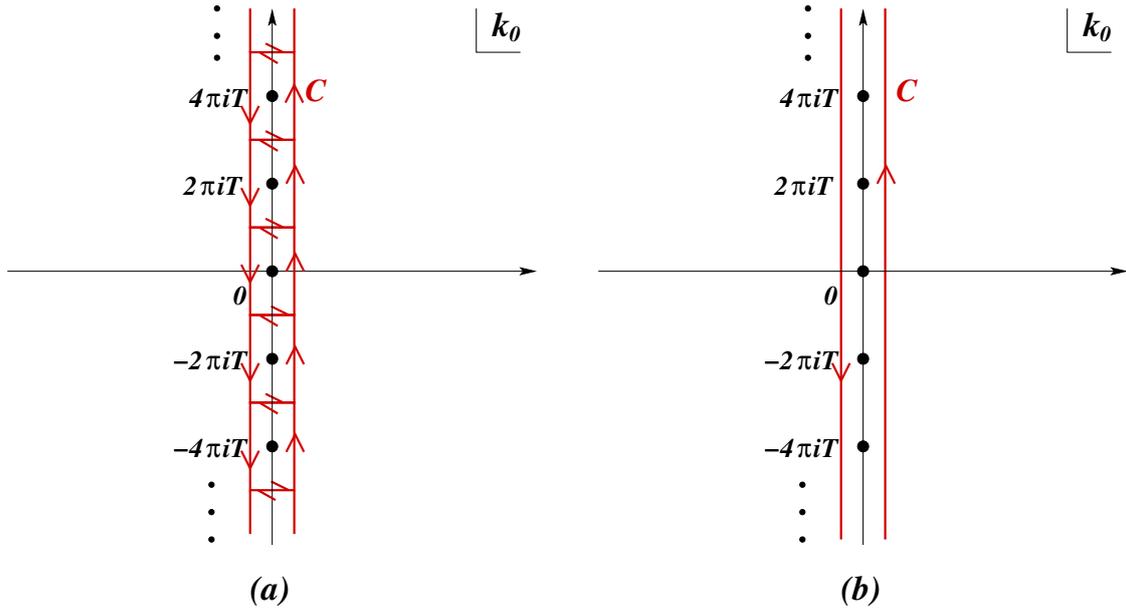


Abbildung 3.3: (a) Deformation der Kontur \mathcal{C} aus Abb. 3.2. Die gegenläufigen Teilstücke parallel zur reellen k_0 -Achse heben sich jeweils gegenseitig auf und es verbleibt die in (b) gezeigte Kontur.

Wir wenden diesen Satz nun an, um die Matsubara-Summe (3.77) mit der Funktion (3.78) zu berechnen. Diese Funktion ist offensichtlich analytisch auf der imaginären k_0 -Achse, $f(iy) = T/[(xT)^2 + y^2] > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ (sie besitzt lediglich zwei Pole auf der reellen k_0 -Achse, $k_0^\pm \equiv \pm xT$). Aufgrund der Analytizität von $f(k_0)$ auf der imaginären k_0 -Achse können wir die Integrationskontur \mathcal{C} aus Abb. 3.2 wie in Abb. 3.3 (a) gezeigt deformieren. Die gegenläufigen Teilstücke heben sich gegenseitig weg und es verbleibt die in Abb. 3.3 (b) gezeigte Kontur. Auf der Kontur rechts von der imaginären k_0 -Achse benutzen wir nun

$$\frac{1}{2} \coth \frac{k_0}{2T} = \frac{1}{2} \frac{e^{k_0/T} + 1}{e^{k_0/T} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{k_0/T} - 1},$$

und auf der Kontur links von der imaginären k_0 -Achse

$$\frac{1}{2} \coth \frac{k_0}{2T} = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-k_0/T}}{1 - e^{-k_0/T}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - e^{-k_0/T}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 f(k_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{k_0/T} - 1} \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\delta}^{-i\infty-\delta} dk_0 f(k_0) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - e^{-k_0/T}} \right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Im zweiten Integral substituieren wir $k_0 \rightarrow -k_0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\delta}^{-i\infty-\delta} dk_0 f(k_0) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - e^{-k_0/T}} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 f(-k_0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{k_0/T}} \right),$$

und erhalten aus Gl. (3.80)

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{2} [f(k_0) + f(-k_0)] \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 [f(k_0) + f(-k_0)] \frac{1}{e^{k_0/T} - 1}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Im ersten Integral durften wir die Kontur auf die imaginäre Achse verschieben ($\delta \rightarrow 0$), da der Integrand hier nach Voraussetzung keine Pole aufweist.

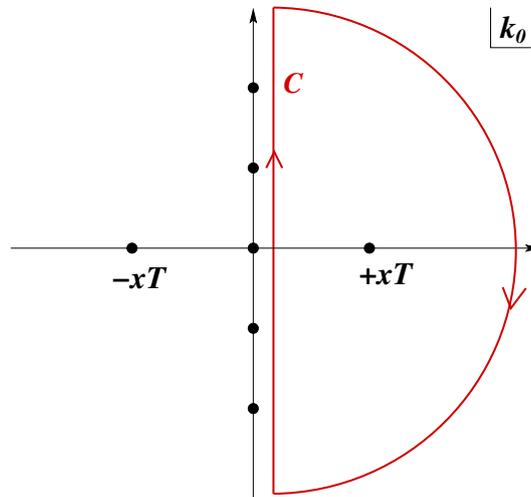


Abbildung 3.4: Schließen der in Abb. 3.3 (b) gezeigten Kontur im Unendlichen.

Nun schließen wir die Kontur mit einem Halbkreis im Unendlichen, wie in Abb. 3.4 gezeigt. Dieser Halbkreis trägt nichts bei, da $f(k_0) \sim O(k_0^{-2})$, also hinreichend schnell im Unendlichen abfällt. Da $xT > 0$, vgl. Gl. (3.74), liegt der Pol $k_0^+ = +xT$ der Funktion $f(k_0)$ innerhalb der Kontur. Da außerdem $f(k_0) = f(-k_0) = T/[(xT)^2 - k_0^2]$, erhalten wir mit Hilfe des Residuensatzes

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) = -\frac{T}{-2xT} - \frac{2T}{-2xT} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} \right), \quad (3.82)$$

was mit dem vormals erhaltenen Ergebnis (3.76) übereinstimmt.

Die Berechnung der Matsubara-Summe mittels Konturintegration erscheint zwar auf den ersten Blick komplizierter als die direkte Berechnung, aber sie ist, wie noch sehen werden, universeller einsetzbar, da die Funktion $f(k_0)$ zunächst beliebig sein kann (abgesehen von

der Analytizität auf der imaginären k_0 -Achse und dem hinreichend schnellen Verschwinden im Unendlichen).

Setzen wir das Resultat (3.82) in Gl. (3.74) ein, so erhalten wir mit $d \ln(1 - e^{-x})/dx = e^{-x}/(1 - e^{-x}) = 1/(e^x - 1)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_n \ln \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} &= \int_1^{E_{\mathbf{k}}/T} dx \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} \right) \\ &= \frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} - \frac{1}{2} + \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) - \ln(1 - e^{-1}) \\ &\equiv \frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} + \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) + \text{const.} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Die für die Thermodynamik irrelevante additive Konstante wird wieder vernachlässigt. Damit erhalten wir für die großkanonische Zustandssumme (3.71) des nichtwechselwirkenden neutralen skalaren Feldes das Ergebnis

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_0 &= - \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} + \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right] \\ &\longrightarrow - \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} + \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right], \end{aligned} \quad (3.84)$$

wobei wir im letzten Schritt zum thermodynamischen Limes übergegangen sind. Der zweite Term im Integranden stellt den **thermischen Beitrag** dar und stimmt mit Gl. (1.41) überein, wenn wir $\theta = -1$ (für Bosonen), $\mu = 0$ (für neutrale Teilchen ohne erhaltene Quantenzahl), sowie Gl. (1.45) für die Summe über Quantenzustände benutzen.

Der erste Term im Integranden, der formal einen divergierenden Beitrag zur Zustandssumme liefert, stellt die **Nullpunktenergie** des Systems dar und ist durch **Renormierung** zu eliminieren. Wir überzeugen uns davon, dass er die Nullpunktenergie darstellt, indem wir den Druck aus Gl. (3.84) mit Hilfe von Gl. (1.30) berechnen,

$$\begin{aligned} p_0(T) = \frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}_0 &= - \frac{T}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} + \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right] \\ &= - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} - T \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Im Limes $T \rightarrow 0$ verschwindet der thermische Beitrag und wir erhalten

$$p_0(0) = - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2}. \quad (3.86)$$

Andererseits gilt bei $T = \mu = 0$ gemäß der Fundamentalrelation (1.10)

$$E_0(0) = -p_0(0)V = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2}. \quad (3.87)$$

Dies ist die aus der Quantenfeldtheorie im Vakuum bekannte Nullpunktenergie eines Systems neutraler skalarer Teilchen.

3.5 Das geladene skalare Feld

Die Lagrange–Dichte des geladenen skalaren Feldes lautet (vgl. Gl. (2.79) der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”)

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi . \quad (3.88)$$

Das geladene Feld Φ ist komplexwertig. Mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) , \quad (3.89)$$

kann die Lagrange–Dichte (3.88) als Summe von zwei neutralen skalaren Feldern ϕ_1, ϕ_2 gleicher Masse geschrieben werden, vgl. Gl. (2.79) der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)] . \quad (3.90)$$

Die Lagrange–Dichte (3.88) ist **invariant** unter **globalen $U(1)$ –Transformationen**,

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\Lambda} \Phi . \quad (3.91)$$

Dies führt gemäß dem **Noether–Theorem** zu einer **erhaltenen Ladung**,

$$\mathcal{Q} = \int_V d^3\mathbf{x} \mathcal{J}^0 , \quad (3.92)$$

wobei \mathcal{J}^0 die nullte Komponente des **Noether–Stroms**

$$\mathcal{J}^\mu = i [\Phi^* \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^*) \Phi] \equiv \phi_2 \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2 \quad (3.93)$$

ist, vgl. Glgen. (2.89), (2.90) der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”. Die nullte Komponente des Stromes entspricht auch der in Gl. (3.11) eingeführten Dichte der erhaltenen Quantenzahl, $\mathcal{J}^0 \equiv \mathcal{N}$. Mit den kanonisch konjugierten Feldern

$$\pi_1 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}_1} = \dot{\phi}_1 , \quad \pi_2 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}_2} = \dot{\phi}_2 , \quad (3.94)$$

erhalten wir aus Gl. (3.93)

$$\mathcal{N} = \mathcal{J}^0 = \phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2 . \quad (3.95)$$

Die Hamilton–Dichte lautet

$$\mathcal{H}_0 = \pi_1 \dot{\phi}_1 + \pi_2 \dot{\phi}_2 - \mathcal{L}_0 \Big|_{\dot{\phi}_i = \pi_i, i=1,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\pi_i^2 + \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i + m^2 \phi_i^2) . \quad (3.96)$$

Die großkanonische Zustandssumme ist dann gemäß Gl. (3.43) und mit der üblichen Abkürzung $i\partial_\tau \phi_i = \partial_t \phi_i \equiv \dot{\phi}_i$, $i = 1, 2$,

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\pi_1 \mathcal{D}\pi_2 \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp \left[\int_X \left(\pi_1 \dot{\phi}_1 + \pi_2 \dot{\phi}_2 - \mathcal{H}_0 + \mu \mathcal{N} \right) \right] . \quad (3.97)$$

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

Jetzt ist allerdings zu beachten, dass $\mathfrak{R} \sim V^{2\mathcal{F}}$, da nun an jedem Raum-Zeit-Punkt **zwei** Felder, ϕ_1 und ϕ_2 , existieren. Den Exponenten berechnen wir mit Hilfe der Glgen. (3.95), (3.96) zu

$$\begin{aligned}
& \pi_1 \dot{\phi}_1 + \pi_2 \dot{\phi}_2 - \mathcal{H}_0 + \mu \mathcal{N} \\
&= \pi_1 \dot{\phi}_1 + \pi_2 \dot{\phi}_2 - \frac{1}{2} \pi_1^2 - \frac{1}{2} \pi_2^2 + \mu (\phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i + m^2 \phi_i^2) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\pi_1^2 - 2\pi_1 (\dot{\phi}_1 + \mu \phi_2) \right] - \frac{1}{2} \left[\pi_2^2 - 2\pi_2 (\dot{\phi}_2 - \mu \phi_1) \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i + m^2 \phi_i^2) \\
&= -\frac{1}{2} (\pi_1'^2 + \pi_2'^2) + \frac{1}{2} (\dot{\phi}_1 + \mu \phi_2)^2 + \frac{1}{2} (\dot{\phi}_2 - \mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i + m^2 \phi_i^2) ,
\end{aligned} \tag{3.98}$$

wobei wir die neuen Felder

$$\pi_1' \equiv \pi_1 - \dot{\phi}_1 - \mu \phi_2 , \quad \pi_2' \equiv \pi_2 - \dot{\phi}_2 + \mu \phi_1 ,$$

definiert haben. Substituieren wir diese Felder als neue Integrationsvariablen im Funktionalintegral (3.97) (die dazugehörige Jacobi-Determinante ist eins), so separieren die Gaußschen π_i' -Integrale von den ϕ_i -Integralen. Die übrigen Terme in Gl. (3.98) ergeben

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (\dot{\phi}_1 + \mu \phi_2)^2 + \frac{1}{2} (\dot{\phi}_2 - \mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i + m^2 \phi_i^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \left[\dot{\phi}_i^2 - \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_i - (m^2 - \mu^2) \phi_i^2 \right] + \mu (\dot{\phi}_1 \phi_2 - \dot{\phi}_2 \phi_1) .
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Der erste Term ist wieder die Lagrange-Dichte für das geladene skalare Feld, allerdings mit der Masse $m' \equiv \sqrt{m^2 - \mu^2}$. Es folgt sofort, dass für $m' \in \mathbb{R}$ das chemische Potential $\mu \leq m$ sein muss, wie schon in Abschnitt 1.5 angemerkt. Für $\mu = m$ werden die Felder ϕ_1, ϕ_2 effektiv masselos und es findet **Bose-Einstein-Kondensation** im Grundzustand des Systems (welcher der $K = 0$ -Mode entspricht) statt. Wir werden dies im Folgenden noch im Detail sehen. Der zweite Term in Gl. (3.99) ist gemäß Gl. (3.95) wieder identisch mit der Quantenzahldichte \mathcal{N} , wobei die Relation (3.94) zu benutzen ist.

Wir merken an, dass man mit Hilfe der Glgen. (3.88), (3.93) Gl. (3.99) auch in der Form

$$(\partial_0 + i\mu) \Phi^* (\partial_0 - i\mu) \Phi - \nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \tag{3.100}$$

schreiben kann, wie man sich durch Einsetzen von Gl. (3.89) leicht überzeugt. Mit der “kovarianten Ableitung”

$$\bar{D}_\mu \equiv \partial_\mu - i\mu g_{\mu 0} \tag{3.101}$$

nimmt dies die übliche Form

$$(\bar{D}_\mu \Phi)^* \bar{D}^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \tag{3.102}$$

für ein geladenes skalares Feld an, welches an das “Eichfeld” $e\bar{A}_\mu \equiv (-\mu, \mathbf{0})$ koppelt.

Als Zwischenresultat halten wir fest, dass (nach Umbenennung $\pi'_i \rightarrow \pi_i$, $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \Re \int_{\text{periodisch}} \prod_{i=1,2} \mathcal{D}\pi_i \exp \left(-\frac{1}{2} \int_X \sum_{i=1,2} \pi_i^2 \right) \\ &\times \int_{\text{periodisch}} \prod_{i=1,2} \mathcal{D}\phi_i \exp \left\{ \int_X [\mathcal{L}_0(m \rightarrow m') + \mu\mathcal{N}] \right\}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

10.11.2021

Zur Berechnung der Funktionalintegrale führen wir wie im Fall des neutralen skalaren Feldes eine Fourier–Transformation aller Felder durch. Für die kanonisch konjugierten Felder können wir Gl. (3.48) unbesehen übernehmen. Das Resultat ist ein Faktor $\sqrt{T/V}^{2\mathcal{F}}$ (vom Normierungsfaktor in der Fourier–Entwicklung der kanonisch konjugierten Felder π_1, π_2), multipliziert mit dem Quadrat von Gl. (3.68) (da wir nun zweimal so viele unabhängige Felder haben wie im Fall des neutralen skalaren Feldes), also einer für die Thermodynamik irrelevanten Konstante.

Für die Felder ϕ_1, ϕ_2 setzen wir die Gl. (3.47) entsprechende Fourier–Entwicklung in Gl. (3.99) ein, integrieren über die Raum-Zeit und erhalten nach ganz ähnlicher Rechnung wie in Gl. (3.63),

$$\begin{aligned} &\int_X [\mathcal{L}_0(m \rightarrow m') + \mu\mathcal{N}] \\ &= \frac{1}{TV} \sum_{K,Q} \frac{V}{T} \delta_{K,-Q}^{(4)} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (K \cdot Q + m^2 - \mu^2) \tilde{\phi}_{i,K} \tilde{\phi}_{i,Q} - \mu i k_0 (\tilde{\phi}_{1,K} \tilde{\phi}_{2,Q} - \tilde{\phi}_{2,K} \tilde{\phi}_{1,Q}) \right] \\ &= -\frac{1}{2T^2} \sum_K \left[\sum_{i=1,2} (m^2 - \mu^2 - K^2) \tilde{\phi}_{i,K} \tilde{\phi}_{i,-K} + 2\mu i k_0 (\tilde{\phi}_{1,K} \tilde{\phi}_{2,-K} - \tilde{\phi}_{2,K} \tilde{\phi}_{1,-K}) \right]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Wir führen nun neue (komplexwertige) Felder als Linearkombinationen der alten (komplexwertigen) Felder ein,

$$\tilde{\phi}_K^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\phi}_{1,K} + i\tilde{\phi}_{2,K}), \quad \tilde{\phi}_K^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\phi}_{1,K} - i\tilde{\phi}_{2,K}), \quad (3.105)$$

also

$$\tilde{\phi}_{1,K} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\phi}_K^+ + \tilde{\phi}_K^-), \quad \tilde{\phi}_{2,K} = \frac{1}{\sqrt{2}i} (\tilde{\phi}_K^+ - \tilde{\phi}_K^-).$$

Diese Transformation (deren Jacobi–Determinante im Funktionalintegral einen irrelevanten konstanten Faktor liefert) bewirkt, dass die Mischterme im Ausdruck (3.104) verschwinden,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{1,K} \tilde{\phi}_{1,-K} + \tilde{\phi}_{2,K} \tilde{\phi}_{2,-K} &= \tilde{\phi}_K^- \tilde{\phi}_K^+ + \tilde{\phi}_K^+ \tilde{\phi}_K^-, \\ i (\tilde{\phi}_{1,K} \tilde{\phi}_{2,-K} - \tilde{\phi}_{2,K} \tilde{\phi}_{1,-K}) &= \tilde{\phi}_K^- \tilde{\phi}_K^+ - \tilde{\phi}_K^+ \tilde{\phi}_K^-, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 & \int_X [\mathcal{L}_0(m \rightarrow m') + \mu \mathcal{N}] \\
 &= -\frac{1}{2T^2} \sum_K \left[(m^2 - \mu^2 - K^2 + 2\mu k_0) \tilde{\phi}_K^- \tilde{\phi}_{-K}^+ + (m^2 - \mu^2 - K^2 - 2\mu k_0) \tilde{\phi}_K^+ \tilde{\phi}_{-K}^- \right] \\
 &= -\frac{1}{T^2} \sum_K (m^2 - \mu^2 - K^2 + 2\mu k_0) \tilde{\phi}_K^- \tilde{\phi}_{-K}^+, \tag{3.106}
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Summationsvariablen im zweiten Term umbenannt haben, $K \rightarrow -K$.

Genau wie beim neutralen skalaren Feld sind die komplexwertigen Fourier-Moden $\tilde{\phi}_{1,K}$, $\tilde{\phi}_{2,K}$ der reellen Felder $\phi_1(X)$, $\phi_2(X)$ nicht alle unabhängig, es gelten der Gl. (3.66) entsprechende Relationen. Damit beweist man, dass

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \tilde{\phi}_{-K}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Re} \tilde{\phi}_{1,-K} - \operatorname{Im} \tilde{\phi}_{2,-K} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Re} \tilde{\phi}_{1,K} + \operatorname{Im} \tilde{\phi}_{2,K} \right) \equiv \operatorname{Re} \tilde{\phi}_K^-, \\
 \operatorname{Im} \tilde{\phi}_{-K}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Im} \tilde{\phi}_{1,-K} + \operatorname{Re} \tilde{\phi}_{2,-K} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Im} \tilde{\phi}_{1,K} - \operatorname{Re} \tilde{\phi}_{2,K} \right) \equiv -\operatorname{Im} \tilde{\phi}_K^-,
 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}_K^- \tilde{\phi}_{-K}^+ &= \left(\operatorname{Re} \tilde{\phi}_K^- + i \operatorname{Im} \tilde{\phi}_K^- \right) \left(\operatorname{Re} \tilde{\phi}_{-K}^+ + i \operatorname{Im} \tilde{\phi}_{-K}^+ \right) \\
 &= \left(\operatorname{Re} \tilde{\phi}_K^- + i \operatorname{Im} \tilde{\phi}_K^- \right) \left(\operatorname{Re} \tilde{\phi}_K^- - i \operatorname{Im} \tilde{\phi}_K^- \right) \\
 &\equiv \left(\operatorname{Re} \tilde{\phi}_K^- \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \tilde{\phi}_K^- \right)^2. \tag{3.107}
 \end{aligned}$$

Es treten daher in Gl. (3.106) lediglich die Real- und Imaginärteile der Fourier-Moden $\tilde{\phi}_K^-$ auf. Nur diese sind daher **unabhängige Variable** im Funktionalintegral über die Felder. Entsprechendes gilt dann für die Fourier-Moden der kanonisch konjugierten Felder, die man auch durch die entsprechenden Variablen $\operatorname{Re} \tilde{\pi}_K^-$, $\operatorname{Im} \tilde{\pi}_K^-$ ausdrücken kann. Das Integralmaß in Gl. (3.103) transformiert sich daher nach Substitution der Felder durch die entsprechenden Fourier-Moden in

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R} \prod_{i=1,2} \mathcal{D}\pi_i(X) \mathcal{D}\phi_i(X) &\longrightarrow V^{2\mathcal{F}} \sqrt{\frac{T}{V}}^{2\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{TV}^{2\mathcal{F}}} \prod_K d \operatorname{Re} \tilde{\pi}_K^- d \operatorname{Im} \tilde{\pi}_K^- d \operatorname{Re} \tilde{\phi}_K^- d \operatorname{Im} \tilde{\phi}_K^- \\
 &= \prod_K d \operatorname{Re} \tilde{\pi}_K^- d \operatorname{Im} \tilde{\pi}_K^- d \operatorname{Re} \tilde{\phi}_K^- d \operatorname{Im} \tilde{\phi}_K^-. \tag{3.108}
 \end{aligned}$$

Der wesentliche Unterschied zum neutralen skalaren Feld, Gl. (3.67), ist, dass nun die Unterscheidung zwischen $K > 0$ und $K < 0$ wegfällt, es ist über **alle** Impulsmoden unabhängig vom Vorzeichen von K zu integrieren. Der Grund liegt natürlich darin, dass man für das geladene skalare Feld doppelt so viele Freiheitsgrade hat wie für das neutrale skalare Feld.

Es gibt allerdings eine wichtige Ausnahme. Im Fall, dass $\mu = m$ ist, verschwindet der $K = 0$ -Term in Gl. (3.106). Dies bedeutet, dass die **Nullmoden** $\operatorname{Re} \tilde{\phi}_0^-$, $\operatorname{Im} \tilde{\phi}_0^-$ nicht in der

Wirkung (3.106) auftreten, es sind **zyklische Variablen**. Man darf daher im Integrationsmaß (3.108) **nicht** über diese Variablen integrieren. Der Fall $\mu = m$ entspricht gerade der Bose–Einstein–Kondensation: ein makroskopisch großer Anteil der Teilchen **kondensiert im Grundzustand**, d.h. in der $K = 0$ -Mode. Diese Situation mutet zunächst paradox an: die Nullmoden treten nicht in der Wirkung der Theorie auf, besitzen aber makroskopische Besetzungszahlen. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, wie dieser scheinbare Widerspruch aufgelöst werden kann.

Zunächst aber betrachten wir den Fall $\mu < m$ und berechnen die Zustandssumme (3.103) mit den Zwischenresultaten (3.106), (3.107) und (3.108). Bis auf für die Thermodynamik irrelevante konstante Faktoren erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \int \prod_K d\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K^- d\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K^- d\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K^- d\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K^- \exp \left\{ - \sum_K \left[(\operatorname{Re}\tilde{\pi}_K^-)^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\pi}_K^-)^2 \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \sum_K \frac{m^2 - \mu^2 - K^2 + 2\mu k_0}{T^2} \left[(\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K^-)^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K^-)^2 \right] \right\} \\ &= \mathfrak{R} \prod_K \left(\frac{m^2 - \mu^2 - K^2 + 2\mu k_0}{T^2} \right)^{-1} \equiv \mathfrak{R} \prod_K \left[\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 - \mu)^2}{T^2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

wobei die bei den Gauß-Integralen auftretenden Faktoren $\sqrt{\pi}$ in der irrelevanten Konstante \mathfrak{R} absorbiert wurden.

Zur weiteren Auswertung empfiehlt sich folgender Rechenrick. Wir betrachten paarweise die Terme $-K$ und K im Produkt in Gl. (3.109),

$$\begin{aligned} & [E_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 + \mu)^2] [E_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 - \mu)^2] \\ &= (E_{\mathbf{k}}^2 - \mu^2 - k_0^2)^2 - 4\mu^2 k_0^2 \equiv (E_{\mathbf{k}}^2 - \mu^2 + \omega_n^2)^2 + 4\mu^2 \omega_n^2 \\ &= (E_{\mathbf{k}}^2 - \mu^2 + \omega_n^2)^2 - 2\omega_n^2 (E_{\mathbf{k}}^2 - \mu^2) + 2\omega_n^2 (E_{\mathbf{k}}^2 + \mu^2) \\ &= (E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 (E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^4 + 2\omega_n^2 (E_{\mathbf{k}}^2 + \mu^2) \\ &= (E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 (E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^4 + \omega_n^2 [(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + (E_{\mathbf{k}} + \mu)^2] \\ &= [(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2] [(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2]. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Gleichung (3.109) wird damit bis auf irrelevante konstante Faktoren

$$\mathcal{Z}_0 = \left(\frac{m^2 - \mu^2}{T^2} \right)^{-1} \prod_{(K, -K), K \neq 0} \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^{-1} \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^{-1}. \quad (3.111)$$

Hier haben wir den Beitrag von $K = 0$ aus dem Produkt herausfaktorisiert und den Rest als Produkt über alle Paare $(K, -K)$ mit $K \neq 0$ geschrieben. Der letzte Ausdruck ist allerdings symmetrisch unter $K \leftrightarrow -K$ und man daher (unter Wiedereinbeziehung des $K = 0$ -Terms) das Produkt auch über alle K führen, wenn man eine zusätzliche Wurzel zieht,

$$\mathcal{Z}_0 = \prod_K \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^{-1/2} \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^{-1/2}, \quad (3.112)$$

bzw.

$$\ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{1}{2} \sum_K \left[\ln \frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} + \ln \frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]. \quad (3.113)$$

Dies ist das erwartete Endresultat: im Vergleich zum neutralen skalaren Feld, Gl. (3.71), erhalten wir zwei Beiträge, einen für Teilchen mit chemischem Potential $+\mu$ und einen für Antiteilchen mit chemischem Potential $-\mu$.

Die Auswertung der Matsubara-Summe läuft völlig analog wie beim neutralen skalaren Feld, nur ist die Energie $E_{\mathbf{k}}$ beim Teilchen- bzw. Antiteilchenbeitrag durch $E_{\mathbf{k}} - \mu$ bzw. $E_{\mathbf{k}} + \mu$ zu ersetzen. Das Endergebnis für den Fall $\mu < m$ lautet also analog zu Gl. (3.84)

$$\ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{E_{\mathbf{k}}}{T} + \ln [1 - e^{-(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T}] + \ln [1 - e^{-(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T}] \right\}. \quad (3.114)$$

Die Nullpunktsenergie tritt nun jeweils für Teilchen und Antiteilchen auf, was den zusätzlichen Faktor 2 vor diesem Term im Vergleich zu Gl. (3.84) erklärt. Der zweite Term entspricht dem Beitrag der Teilchen, der dritte dem Beitrag der Antiteilchen.

3.6 Anwendung: Bose–Einstein–Kondensation

Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, sind im Fall $\mu = m$ die Nullmoden $\text{Re}\tilde{\phi}_0^-$, $\text{Im}\tilde{\phi}_0^-$ zyklische Variable und man darf im Funktionalintegral nicht über sie integrieren. Wie kann man dennoch dafür sorgen, dass makroskopisch viele Teilchen im Grundzustand, also in den Nullmoden kondensieren? Wir betrachten zunächst wieder den Fall $\mu < m$, so dass alle Zwischenschritte wohldefiniert sind, und nehmen erst am Schluss den Grenzwert $\mu \rightarrow m$.

Das System benötigt einen weiteren Freiheitsgrad, der ihm ermöglicht, den Grundzustand mit makroskopisch vielen Teilchen zu besetzen. Diesen führen wir über die **Erwartungswerte** $\langle \phi_i(X) \rangle_0$ der Felder ein. Folglich spalten wir die Felder in ihre Erwartungswerte und die **Quantenfluktuationen** ϕ'_i um letztere auf,

$$\phi_i(X) \equiv \langle \phi_i(X) \rangle_0 + \phi'_i(X), \quad i = 1, 2. \quad (3.115)$$

Hierbei ist der Erwartungswert eines Funktionals $F[\phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2]$ der Felder allgemein definiert als

$$\begin{aligned} & \langle F[\phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2] \rangle_0 \\ & \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \mathfrak{R} \int_{\text{periodisch}} \prod_{i=1,2} \mathcal{D}\pi_i \mathcal{D}\phi_i F[\phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2] \exp \left[\int_X \left(\sum_{i=1,2} \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{K}_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Im Fall der Bose–Einstein–Kondensation nehmen die Erwartungswerte **nichtverschwindende Werte** an und zwar so, dass

$$\langle \Phi(X) \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \phi_1(x) + i\phi_2(X) \rangle_0 \equiv \zeta e^{i\theta}, \quad (3.117)$$

wobei $\zeta \in \mathbb{R}$ der Betrag von $\langle \Phi(X) \rangle_0$ und $\theta \in \mathbb{R}$ seine Phase sind. Sowohl ζ wie auch θ werden als **raum-zeitlich konstant** angenommen. Wir können die globale $U(1)$ –Invarianz der Theorie ausnutzen, um $\theta \equiv 0$ zu wählen, was bedeutet, dass

$$\langle \phi_1(X) \rangle_0 = \sqrt{2} \zeta, \quad \text{und} \quad \langle \phi_2(X) \rangle_0 = 0. \quad (3.118)$$

Ein nichtverschwindender Wert von ζ bedeutet, dass Bose–Einstein–Kondensation auftritt, d.h. dass ein makroskopischer Anteil der Teilchen im Grundzustand “kondensiert”. Wir sprechen daher im Folgenden von ζ als dem “Bose–Einstein–Kondensat” oder kurz “Kondensat”.

Wir nehmen darüberhinaus an, dass die Quantenfluktuationen $\phi'_i(X)$ keinen raum-zeitlich konstanten Anteil enthalten, bzw. dass ein solcher im raum-zeitlich konstanten Erwartungswert $\langle \phi_i(X) \rangle_0 = \text{const}$ absorbiert werden kann. Dies bedeutet, dass die Fourier–Entwicklung der Quantenfluktuationen **keine Nullmoden** enthält,

$$\phi'_i(X) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_{K \neq 0} e^{-iK \cdot X} \tilde{\phi}'_{i,K}, \quad i = 1, 2, \quad (3.119)$$

denn eine nichtverschwindende Nullmode würde gerade einem nichtverschwindenden raum-zeitlich konstanten Anteil entsprechen.

Die Fourier–Entwicklung der Felder ϕ_1, ϕ_2 lautet nun mit der Zerlegung (3.115) und Gl. (3.118)

$$\begin{aligned} \phi_1(X) &= \sqrt{2} \zeta + \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_{K \neq 0} e^{-iK \cdot X} \tilde{\phi}'_{1,K}, \\ \phi_2(X) &= \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_{K \neq 0} e^{-iK \cdot X} \tilde{\phi}'_{2,K}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Die Nullmode $\tilde{\phi}_{1,0}$ berechnet man aus der Inversen der Fourier–Entwicklung (3.56),

$$\tilde{\phi}_{1,K} = \sqrt{\frac{T^3}{V}} \int_X e^{iK \cdot X} \phi_1(X), \quad (3.121)$$

was man leicht mit Gl. (3.57) beweist. Also ist die Nullmode proportional zum Kondensat,

$$\tilde{\phi}_{1,0} = \sqrt{2TV} \zeta. \quad (3.122)$$

Da $\phi_2(X)$ keine Nullmode besitzt, liefert Gl. (3.105)

$$\tilde{\phi}_0^+ = \tilde{\phi}_0^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\phi}_{1,0} = \sqrt{TV} \zeta. \quad (3.123)$$

Dieselben Rechenschritte, die auf Gl. (3.106) geführt haben, liefern nun

$$\int_X [\mathcal{L}_0(m \rightarrow m') + \mu \mathcal{N}] = -\frac{V}{T} (m^2 - \mu^2) \zeta^2 - \sum_{K \neq 0} \frac{m^2 - \mu^2 - K^2 + 2\mu k_0}{T^2} \tilde{\phi}_K^- \tilde{\phi}_{-K}^+. \quad (3.124)$$

Der erste Term faktorisiert aus dem Funktionalintegral (3.103) heraus. Das Funktionalintegral selbst läßt sich wie vorher berechnen, es tritt lediglich keine Nullmode mehr auf. Wir erhalten also anstelle der Gln. (3.112), (3.113) das Resultat

$$\mathcal{Z}_0 = \exp \left[-\frac{V}{T} (m^2 - \mu^2) \zeta^2 \right] \prod_{K \neq 0} \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^{-1/2} \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^{-1/2}, \quad (3.125)$$

bzw.

$$\ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{V}{T} (m^2 - \mu^2) \zeta^2 - \frac{1}{2} \sum_{K \neq 0} \left[\ln \frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} + \ln \frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]. \quad (3.126)$$

Um die Matsubara-Summen wie gehabt ausführen zu können, müssen wir die Nullmode zur Summe über K wieder dazuaddieren. Dies ist im thermodynamischen Limes erlaubt, denn der entsprechende Term $\sim \frac{1}{2} \ln[(m - \mu)^2(m + \mu)^2/T^4] = \ln[(m^2 - \mu^2)/T^2]$ ist im thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$ gegenüber den anderen Termen um einen Faktor $T/V \rightarrow 0$ unterdrückt. Wir erhalten also für den Druck als Funktion der thermodynamischen Variablen T, μ , sowie des Kondensats ζ das Resultat

$$p_0(T, \mu; \zeta) = (\mu^2 - m^2)\zeta^2 - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ E_{\mathbf{k}} + T \ln [1 - e^{-(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T}] + T \ln [1 - e^{-(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T}] \right\}. \quad (3.127)$$

Daraus berechnet man durch Ableiten nach μ (s. Übungsaufgabe 1.1) die **Netto-Ladungsdichte**,

$$n_0 \equiv \left. \frac{\partial p_0}{\partial \mu} \right|_T = 2\zeta^2 \mu + n^*(T, \mu), \quad (3.128)$$

wobei der erste Term die Netto-Ladungsdichte im Grundzustand und

$$n^*(T, \mu) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T} - 1} - \frac{1}{e^{(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T} - 1} \right] \quad (3.129)$$

die Netto-Ladungsdichte in thermisch angeregten Zuständen darstellt. Hier ist der erste Term im Integrand die Teilchen-Besetzungszahl und der zweite Term die Antiteilchen-Besetzungszahl. Die Netto-Ladungsdichte ergibt sich aufgrund der unterschiedlichen Ladung von Teilchen und Antiteilchen als Impulsintegral über die **Differenz** dieser Besetzungszahlen.

Übungsaufgabe 3.1: Berechne die Entropie- und Energiedichte aus dem Druck (3.127).

Lösung: Die Entropiedichte berechnet sich analog zur Netto-Ladungsdichte durch die partielle Ableitung des Druckes nach der Temperatur,

$$s_0 \equiv \left. \frac{\partial p_0}{\partial T} \right|_{\mu} = - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \ln [1 - e^{-(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T}] + \ln [1 - e^{-(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T}] \right\} + \frac{1}{T} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}} - \mu}{e^{(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T} - 1} + \frac{E_{\mathbf{k}} + \mu}{e^{(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T} - 1} \right].$$

Die Energiedichte berechnet man aus der Fundamentalrelation der Thermodynamik,

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &\equiv Ts_0 + \mu n_0 - p_0 \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{k}} \left[1 + \frac{1}{e^{(E_{\mathbf{k}}-\mu)/T} - 1} + \frac{1}{e^{(E_{\mathbf{k}}+\mu)/T} - 1} \right] + (\mu^2 + m^2) \zeta^2.\end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man das Kondensat ζ bestimmt. Bislang ist ζ ein neuer Parameter in der Zustandssumme, der aber nicht von außen vorgegeben ist, sondern sich **dynamisch** einstellen muss. Das System wird dann immer den Wert von ζ wählen, der den Druck **maximiert** (bzw. das großkanonische Potential minimiert). Wir berechnen ζ also aus der Bedingung

$$0 = \left. \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \right|_{T, \mu} = 2\zeta(\mu^2 - m^2). \quad (3.130)$$

Falls $\mu < m$, so muss folglich $\zeta = 0$ sein. Das Kondensat verschwindet, es findet **keine Bose–Einstein–Kondensation** statt. Der Druck (3.127) ist (nach Multiplikation mit V/T) identisch mit dem vormals erhaltenen Ausdruck (3.114).

Falls jedoch $\mu = m$, bleibt ζ durch die Bedingung (3.130) **unbestimmt**. Wie können wir den Wert des Kondensats dann bestimmen? Falls $\mu = m$, entfällt μ als unabhängige thermodynamische Variable. Bei festem T ist dann der durch Gl. (3.129) gegebene Anteil der Ladungsdichte in thermisch angeregten Zuständen, $n^*(T, m)$, fixiert. Allerdings kann man prinzipiell nach wie vor Teilchen oder Antiteilchen zum System hinzufügen oder wegnehmen, was die Gesamtladungsdichte n_0 ändert. Die Gesamtladungsdichte n_0 übernimmt also die Rolle des chemischen Potentials als unabhängige thermodynamische Variable. Bei vorgegebenem T, n_0 läßt sich das Kondensat aus Gl. (3.128) bestimmen,

$$\zeta = \sqrt{\frac{n_0 - n^*(T, m)}{2m}}. \quad (3.131)$$

Falls bei vorgegebenem T die Gesamtladungsdichte $n_0 > n^*(T, m)$, müssen die Ladungen, die nicht in thermisch angeregten Zuständen Platz finden, im Grundzustand kondensieren und sorgen so für ein nichtverschwindendes Bose–Einstein–Kondensat $\zeta > 0$. Insbesondere ist für $T = 0$ die Ladungsdichte in thermisch angeregten Zuständen $n^*(0, m) = 0$ und alle Ladungen kondensieren, $n_0 \equiv 2\zeta^2 m$. Bei Erhöhung der Temperatur wächst $n^*(T, m)$ stetig an, bis bei einer **kritischen Temperatur** T_c alle Ladungen in thermisch angeregten Zuständen Platz finden, $n_0 = n^*(T_c, m)$, und das Kondensat verschwindet, $\zeta = 0$. Bei Temperaturen oberhalb von T_c bleibt das Kondensat null. Offenbar handelt es sich bei der Bose–Einstein–Kondensation um einen **Phasenübergang zweiter Ordnung**, mit ζ als **Ordnungsparameter**.

Die Berechnung der kritischen Temperatur ist kompliziert, sobald man Wechselwirkungen berücksichtigt. Hier ist die Debatte in der Fachliteratur hinsichtlich des korrekten Wertes für T_c noch im Gange. Für das ideale, nichtwechselwirkende Bose–Einstein–Gas ist das Resultat jedoch wohldefiniert. Wir zeigen dies für den ultra-relativistischen und nicht-relativistischen Grenzwert in der folgenden

Übungsaufgabe 3.2: Berechne $n^*(T, m)$ im ultra-relativistischen ($T \gg m$) und nicht-relativistischen ($T \ll m$) Grenzfall und bestimme die kritische Temperatur T_c als Funktion der Netto-Ladungsdichte n_0 .

Lösung: (a) Im **ultra-relativistischen Grenzfall**, $T \gg m$, können wir die Energie durch den Impuls ersetzen, $E_{\mathbf{k}} = k + O(m^2/k) \simeq k$. In diesem Fall lässt sich die Ladungsdichte in thermisch angeregten Zuständen analytisch bestimmen. In Kugelkoordinaten und mit $\alpha \equiv \mu/T$ gilt

$$\begin{aligned}
 n^*(T, \mu) &= \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \left[\frac{1}{e^{x-\alpha} - 1} - \frac{1}{e^{x+\alpha} - 1} \right] \\
 &= \frac{T^3}{2\pi^2} \left[\int_{-\alpha}^\infty dy (y + \alpha)^2 \frac{1}{e^y - 1} - \int_\alpha^\infty dy (y - \alpha)^2 \frac{1}{e^y - 1} \right] \\
 &= \frac{T^3}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty dy [(y + \alpha)^2 - (y - \alpha)^2] \frac{1}{e^y - 1} \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\alpha}^0 dy (y + \alpha)^2 \frac{1}{e^y - 1} + \int_0^\alpha dy (y - \alpha)^2 \frac{1}{e^y - 1} \right] \\
 &= \frac{T^3}{2\pi^2} \left[4\alpha \int_0^\infty dy \frac{y}{e^y - 1} + \int_0^\alpha dy (y - \alpha)^2 \left(\frac{1}{e^{-y} - 1} + \frac{1}{e^y - 1} \right) \right] \\
 &= \frac{T^3}{2\pi^2} \left[4\alpha \Gamma(2)\zeta(2) - \int_{-\alpha}^0 dx x^2 \right] \\
 &= \frac{T^3}{2\pi^2} \left(4\alpha \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha^3}{3} \right) = \frac{\mu T^2}{3} - \frac{\mu^3}{6\pi^2}. \tag{3.132}
 \end{aligned}$$

Hier haben wir vom vierten zum fünften Gleichheitszeichen Gl. (3.411.1) aus Ref. [7] benutzt. Da $\mu \leq m$ und im ultra-relativistischen Grenzfall $m \ll T$, ist auch $\mu \ll T$ und wir dürfen höhere Ordnungen in μ vernachlässigen. Also gilt am kritischen Punkt, $T = T_c, \mu = m$,

$$n_0 \equiv n^*(T_c, m) \simeq \frac{mT_c^2}{3} \implies T_c = \sqrt{\frac{3n_0}{m}}. \tag{3.133}$$

In der Tat geht mit $m \rightarrow 0$ die kritische Temperatur $T_c \rightarrow \infty$. Für (nahezu) masselose Teilchen kondensiert also auch bei beliebig hohen Temperaturen immer ein gewisser Teil im Grundzustand.

(b) Im **nicht-relativistischen Grenzfall**, $T \ll m$, können wir die nicht-relativistische Entwicklung für die Energie verwenden, $E_{\mathbf{k}} = m + k^2/(2m) + O(k^4/m^3) \simeq m + k^2/(2m)$. Für Teilchen gilt dann bei $\mu = m$, dass $E_{\mathbf{k}} - m \simeq k^2/(2m)$, während für Antiteilchen gilt, dass $E_{\mathbf{k}} + m \simeq 2m \gg T$. Deshalb können wir den Antiteilchenbeitrag in der Ladungsdichte $n^*(T, m)$ vernachlässigen und erhalten

$$\begin{aligned}
 n^*(T, m) &\simeq \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{e^{k^2/(2mT)} - 1} = \frac{(2mT)^{3/2}}{4\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \\
 &= \frac{(2mT)^{3/2}}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \tag{3.134}
 \end{aligned}$$

wobei wir wieder Gl. (3.411.1) aus Ref. [7] benutzt haben. Daraus folgt bei $T = T_c$, $n^*(T_c, m) = n_0$,

$$T_c = \frac{2\pi}{m} \left(\frac{n_0}{\zeta(\frac{3}{2})} \right)^{2/3}. \quad (3.135)$$

12.11.2021

3.7 Das Dirac–Feld

Nichtwechselwirkende relativistische Fermionen werden durch die Lagrange–Dichte des Dirac–Feldes beschrieben,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} (i\rlap{\not{\partial}} - m) \psi. \quad (3.136)$$

Hier ist $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, $\rlap{\not{\partial}} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, wobei

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

die Dirac–Matrizen (in der Diracschen Konvention) sind, mit der (2×2) –Einheitsmatrix $\mathbb{1}_2$ und den Pauli–Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.138)$$

Die Euler–Lagrange–Gleichungen liefern die Bewegungsgleichungen für ψ und $\bar{\psi}$,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi} \iff 0 = (i\rlap{\not{\partial}} - m) \psi, \quad (3.139)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \bar{\psi}} \iff \partial_\mu \bar{\psi} i \overleftarrow{\gamma}^\mu = -\bar{\psi} m \iff 0 = \bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\rlap{\not{\partial}}} + m \right). \quad (3.140)$$

Dies sind die Dirac–Gleichungen für den Dirac–Spinor ψ und den Dirac–adjungierten Spinor $\bar{\psi}$.

Übungsaufgabe 3.3: Leite die Bewegungsgleichung (3.140) für den Dirac–adjungierten Spinor direkt aus der Dirac–Gleichung (3.139) her.

Lösung: Wir bilden das Hermitisch-Konjugierte von Gl. (3.139) und benutzen $\gamma_0^2 = \mathbb{1}_4$,

$$0 = [(i\rlap{\not{\partial}} - m) \psi]^\dagger = -i \psi^\dagger \overleftarrow{\rlap{\not{\partial}}}^\dagger - \psi^\dagger m = -\bar{\psi} i \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\partial}_\mu - \bar{\psi} \gamma^0 m.$$

Wir multiplizieren von rechts mit $-\gamma^0$ und erhalten mit $\gamma_0^2 = \mathbb{1}_4$ sowie $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$,

$$0 = \bar{\psi} \left(i \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) = \bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\rlap{\not{\partial}}} + m \right), \quad \text{q.e.d.}$$

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

Die kanonisch konjugierten Felder sind gemäß Definition

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}} = \bar{\psi} i \gamma^0 = i \psi^\dagger, \quad \bar{\Pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \quad (3.141)$$

Dies zeigt, dass das hermitisch konjugierte Feld ψ^\dagger ein **unabhängiger Freiheitsgrad** ist, denn abgesehen von einem Faktor i ist es identisch mit dem kanonisch konjugierten Feld. Gleichzeitig besitzt $\bar{\psi}$ aber kein kanonisch konjugiertes Feld, denn es ist im wesentlichen identisch mit dem kanonisch konjugierten Feld Π .

Die Dirac–Lagrange–Dichte (3.136) hat eine globale $U(1)$ –Symmetrie, sie ist invariant unter der Transformation

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\Lambda} \psi. \quad (3.142)$$

Dies führt auf den Noether–Strom

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (3.143)$$

vgl. Gl. (2.122) der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”. Die erhaltene Quantenzahl ist die Netto-Ladung, mit der Netto-Ladungsdichte

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{J}^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = -i \Pi \psi. \quad (3.144)$$

Die Hamilton–Dichte erhalten wir wie gehabt durch Legendre–Transformation der Lagrange–Dichte,

$$\mathcal{H}_0 = \Pi \dot{\psi} - \mathcal{L}_0 \Big|_{\bar{\psi} = -i \Pi \gamma^0} = \Pi \dot{\psi} + i \Pi \gamma^0 (i \gamma^0 \partial_t + i \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m) \psi = -\Pi (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + i m \gamma^0) \psi, \quad (3.145)$$

wobei $\boldsymbol{\alpha} \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$. Es ist zweckmäßig, anstelle des kanonisch konjugierten Feldes Π das Dirac–adjungierte Feld $\bar{\psi}$ zu benutzen. Man muss allerdings im Hinterkopf behalten, dass dieses Feld ein unabhängiger Freiheitsgrad ist und nicht einfach durch hermitesches Konjugieren und Multiplikation von rechts mit γ^0 aus ψ erhalten werden kann. Dann schreibt sich die Hamilton–Dichte in der (gebräuchlicheren) Form als

$$\mathcal{H}_0 = \bar{\psi} (-i \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi. \quad (3.146)$$

Die großkanonische Zustandssumme lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathfrak{N} \int \mathcal{D}\Pi \mathcal{D}\psi \exp \left[\int_X (\Pi \dot{\psi} - \mathcal{H}_0 + \mu \mathcal{N}) \right] \\ &= \mathfrak{N}' \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_X [\bar{\psi} i \gamma^0 \partial_t \psi - \bar{\psi} (-i \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi + \mu \bar{\psi} \gamma^0 \psi] \right\} \\ &= \mathfrak{N}' \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[\int_X \bar{\psi} (i \not{D} + \mu \gamma^0 - m) \psi \right], \end{aligned} \quad (3.147)$$

wobei wir zur zweiten Zeile die unabhängige Variable Π gemäß Gl. (3.141) durch $\bar{\psi}$ substituiert und die dabei auftretende konstante Jacobi–Determinante in der neuen Normierungskonstanten \mathfrak{N}' absorbiert haben. Mit der kovarianten Ableitung (3.101) läßt sich der Exponent auch als

$$\int_X \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi \quad (3.148)$$

schreiben.

In Gl. (3.147) haben wir noch offen gelassen, ob die Funktionalintegration über im Euklidischen Zeitintervall $[0, 1/T]$ periodische Funktionen erfolgt. Wir werden nun zeigen, dass aufgrund der fermionischen Natur des Dirac-Feldes diese Integration in der Tat über **antiperiodische Funktionen** geführt werden muss, also über solche, die

$$\psi(0, \mathbf{x}) = -\psi(1/T, \mathbf{x}), \quad \bar{\psi}(0, \mathbf{x}) = -\bar{\psi}(1/T, \mathbf{x}) \quad (3.149)$$

erfüllen. Der tiefere Grund ist, dass die fermionischen Felder im Funktionalintegral **Graßmann-Variablen** sind, also **antivertauschende Zahlen**.

Zum Beweis von Gl. (3.149) betrachten wir zunächst die **thermische Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** von **bosonischen Feldoperatoren** $\hat{\phi}(\tau, \mathbf{x})$ im Imaginärzeit-Formalismus,

$$\langle \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) \rangle \equiv \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) \right], \quad (3.150)$$

mit der **Dichte-Matrix** des großkanonischen Ensembles

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\hat{K}/T}, \quad (3.151)$$

wobei $\hat{K} = \hat{H} - \mu \hat{N}$, s. Gl. (3.1). In Analogie zur Realzeit-Evolution von Feldoperatoren,

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{y}) = e^{i\hat{H}t} \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) e^{-i\hat{H}t}, \quad (3.152)$$

kann man auch eine ‘‘Evolution’’ in der Imaginärzeit definieren,

$$\hat{\phi}(\tau, \mathbf{y}) = e^{\hat{K}\tau} \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) e^{-\hat{K}\tau}, \quad (3.153)$$

bzw. für $\tau = 1/T$

$$\hat{\phi}(1/T, \mathbf{y}) = e^{\hat{K}/T} \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) e^{-\hat{K}/T} \iff \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) = e^{-\hat{K}/T} \hat{\phi}(1/T, \mathbf{y}) e^{\hat{K}/T}. \quad (3.154)$$

Man beachte, dass die Imaginärzeit-Evolution (3.153) **nicht unitär**, also nicht wahrscheinlichkeitserhaltend ist. Mit den Glgen. (3.151), (3.154) schreibt sich Gl. (3.150)

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) \rangle &\equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left[e^{-\hat{K}/T} \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) e^{-\hat{K}/T} \hat{\phi}(1/T, \mathbf{y}) e^{\hat{K}/T} \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left[e^{-\hat{K}/T} \hat{\phi}(1/T, \mathbf{y}) \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (3.155)$$

wobei wir die Symmetrie der Spur unter zyklischen Vertauschungen der Argumente benutzt haben. Wir benutzen nun die Gleichzeit-Vertauschungsrelation für die Feldoperatoren, $[\hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\phi}(\sigma, \mathbf{y})] = 0$ für $\tau \neq \sigma$, und erhalten

$$\langle \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\phi}(0, \mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left[e^{-\hat{K}/T} \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\phi}(1/T, \mathbf{y}) \right] \equiv \langle \hat{\phi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\phi}(1/T, \mathbf{y}) \rangle. \quad (3.156)$$

Diese Gleichung wird erfüllt, falls die bosonischen Feldoperatoren **periodisch** im Zeitintervall $[0, 1/T]$ sind,

$$\hat{\phi}(0, \mathbf{y}) \equiv \hat{\phi}(1/T, \mathbf{y}). \quad (3.157)$$

Aus diesem Grund muss die Funktionalintegration in der großkanonischen Zustandssumme (3.43) für **bosonische Felder** über im Zeitintervall $[0, 1/T]$ **periodische** Funktionen $\phi(\tau, \mathbf{x})$ geführt werden.

Die analoge Rechnung für fermionische Feldoperatoren benötigt jedoch die Gleichzeit-**Antivertauschungsrelation**

$$\left\{ \hat{\psi}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\psi}(\sigma, \mathbf{x}) \right\} = 0, \quad \tau \neq \sigma. \quad (3.158)$$

Dies führt zu einem zusätzlichen Minuszeichen in der zu Gl. (3.156) analogen Relation,

$$\left\langle \hat{\psi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\psi}(0, \mathbf{y}) \right\rangle = - \left\langle \hat{\psi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\psi}(1/T, \mathbf{y}) \right\rangle. \quad (3.159)$$

Dies Gleichung wird erfüllt, falls die fermionischen Feldoperatoren **antiperiodisch** im Zeitintervall $[0, 1/T]$ sind, s. Gl. (3.149).

Aus der Analogie der großkanonischen Zustandssumme zum erzeugenden Funktional von n -Punkt-Funktionen in der Quantenfeldtheorie im Vakuum wissen wir zudem, dass das Funktionalintegral in Gl. (3.147) über **Graßmann-wertige** Funktionen läuft. Wir erinnern uns im Folgenden an die **Eigenschaften von Graßmann-Zahlen**:

(i) Sei η eine Graßmann-Zahl, d.h.

$$\{\eta, \eta\} = 0 \iff \eta^2 = 0. \quad (3.160)$$

Eine allgemeine (nach Taylor entwickelbare) Graßmann-wertige Funktion dieser Graßmann-Variable ist dann

$$f(\eta) = a + b\eta, \quad (3.161)$$

wobei a, b klassische c -Zahlen sind.

(ii) Seien $\eta_1, \dots, \eta_N, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_N$ Graßmann-Zahlen, d.h.

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_j\} = \{\eta_i, \bar{\eta}_j\} = 0 \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.162)$$

Eine allgemeine (nach Taylor entwickelbare) Graßmann-wertige Funktion dieser Graßmann-Variablen ist dann

$$\begin{aligned} f(\eta_1, \dots, \eta_N, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_N) &= a + \sum_{i=1}^N (a_i \eta_i + b_i \bar{\eta}_i) + \sum_{i,j=1}^N (a_{ij} \eta_i \eta_j + b_{ij} \bar{\eta}_i \bar{\eta}_j + c_{ij} \eta_i \bar{\eta}_j) \\ &\quad + \dots + b \bar{\eta}_1 \eta_1 \cdots \bar{\eta}_N \eta_N, \end{aligned} \quad (3.163)$$

wobei $a, a_i, b_i, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots, b$ klassische c -Zahlen sind.

(iii) Die **Differentiation** nach Graßmann-Zahlen kann man links- oder rechtsseitig definieren. Für die linksseitige Differentiation gilt

$$\frac{\partial^L}{\partial \eta_i} (\eta_1 \eta_2) = \frac{\partial^L \eta_1}{\partial \eta_i} \eta_2 - \frac{\partial^L \eta_2}{\partial \eta_i} \eta_1 = \delta_{1i} \eta_2 - \delta_{2i} \eta_1, \quad (3.164)$$

wobei wir die Produktregel und die Tatsache, dass $\{\eta_1, \eta_2\} = 0$ ist, benutzt haben. Entsprechend gilt für die rechtsseitige Differentiation

$$\frac{\partial^R}{\partial \eta_i}(\eta_1 \eta_2) = \eta_1 \frac{\partial^R \eta_2}{\partial \eta_i} - \eta_2 \frac{\partial^R \eta_1}{\partial \eta_i} = \eta_1 \delta_{2i} - \eta_2 \delta_{1i} \equiv -\frac{\partial^L}{\partial \eta_i}(\eta_1 \eta_2). \quad (3.165)$$

Wir benutzen im Folgenden stets die linksseitige Differentiation und lassen das Superskript “ L ” weg.

- (iv) **Korollar:** Für eine beliebige Funktion $f(\{\eta\})$ eines Satzes $\{\eta\} \equiv \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ von Graßmann-Zahlen gilt

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} [\eta_j f(\{\eta\})] = \delta_{ij} f(\{\eta\}) - \eta_j \frac{\partial f(\{\eta\})}{\partial \eta_i}. \quad (3.166)$$

Da $f(\{\eta\})$ beliebig war, folgt daraus

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_i}, \eta_j \right\} = \delta_{ij}, \quad (3.167)$$

und ferner

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_i}, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right\} = 0 \implies \left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} \right)^2 = 0, \quad (3.168)$$

d.h. auch die Ableitungen nach Graßmann-wertigen Zahlen sind Graßmann-wertig.

- (v) **Integration:** Die Integration über Graßmann-Zahlen ist nicht wie üblich das Inverse der Differentiation. Wäre dem so, dann würde beispielsweise für den Fall einer Graßmann-Variablen η (wo eine allgemeine Funktion die Form (3.161) hat) gelten

$$0 = \int d\eta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 f(\eta) = \int d\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial(a + b\eta)}{\partial \eta} = \int d\eta \frac{\partial}{\partial \eta} b = b, \quad (3.169)$$

da sich die beiden Operationen Integration und Differentiation auf der linken Seite des letzten Gleichheitszeichens aufheben müssten, wenn sie invers zueinander wären. Dies ist aber ein Widerspruch, da i.a. $b \neq 0$.

Der Ausweg ist zu fordern, dass Differentiation und Integration **dieselbe** Wirkung haben, also für die Funktion (3.161)

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} = b \quad \text{und} \quad \int d\eta f(\eta) = b. \quad (3.170)$$

Dies bedeutet mit $f(\eta) = a + b\eta$, dass

$$\int d\eta = 0 \quad \text{und} \quad \int d\eta \eta = 1 \quad (3.171)$$

zu fordern ist. Für den Satz $\{\eta_1, \dots, \eta_N, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_N\}$ gilt

$$\int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \cdots d\bar{\eta}_N d\eta_N \exp \left(- \sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i D_{ij} \eta_j \right) = \det D. \quad (3.172)$$

Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe.

Wir kehren nun zur Auswertung der großkanonischen Zustandssumme (3.147) zurück. Wie wir gesehen haben, ist die Funktionalintegration über im Euklidischen Zeitintervall $[0, 1/T]$ **antiperiodische, Graßmann-wertige** Funktionen zu führen. Die Fourier-Entwicklung der Felder lautet

$$\psi(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{\psi}_K, \quad \bar{\psi}(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_K e^{iK \cdot X} \tilde{\bar{\psi}}_K. \quad (3.173)$$

Die Normierungskonstante ergibt sich aus folgender Überlegung. Die Wirkung S_0 ist dimensionlos, $[S_0] = 1$, also muss die Lagrange-Dichte die Dimension $[\mathcal{L}_0] = \text{MeV}^4$ haben. Damit gilt auch $[m\bar{\psi}\psi] = \text{MeV}^4$ und $[\psi] = [\bar{\psi}] = \text{MeV}^{3/2}$. Damit die Fourier-Amplituden $\tilde{\psi}_K, \tilde{\bar{\psi}}_K$ dimensionslos werden, muss der Normierungsfaktor in Gl. (3.173) also die Dimension $\text{MeV}^{3/2}$ haben, was durch die Wahl $1/\sqrt{V}$ gewährleistet ist.

Die **Antiperiodizität** (3.149) der Felder hat die Konsequenz, dass in der Fourier-Entwicklung (3.173)

$$e^{i\omega_n/T} = -e^{i\omega_n \cdot 0} = -1 \quad (3.174)$$

sein muss, was mit der Wahl

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.175)$$

erreicht wird. Dies sind die **fermionischen Matsubara-Frequenzen**.

Wir setzen nun die Fourier-Entwicklung (3.173) in den Exponenten in Gl. (3.147) ein und erhalten mit Gl. (3.57)

$$\begin{aligned} \int_X \bar{\psi} (i\partial + \mu\gamma^0 - m) \psi &= \frac{1}{V} \sum_{K,Q} \tilde{\bar{\psi}}_K (\not{Q} + \mu\gamma^0 - m) \tilde{\psi}_Q \int_X e^{i(K-Q) \cdot X} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{K,Q} \tilde{\bar{\psi}}_K (\not{Q} + \mu\gamma^0 - m) \tilde{\psi}_Q \frac{V}{T} \delta_{K,Q}^{(4)} \\ &\equiv - \sum_{K,Q} \tilde{\bar{\psi}}_K D_{K,Q} \tilde{\psi}_Q, \end{aligned} \quad (3.176)$$

wobei

$$D_{K,Q} \equiv \frac{\mathcal{S}_0^{-1}(K)}{T} \delta_{K,Q}^{(4)}, \quad (3.177)$$

mit dem **freien, inversen thermischen Dirac-Propagator**

$$\mathcal{S}_0^{-1}(K) \equiv m - \not{K} - \mu\gamma^0. \quad (3.178)$$

Bis auf für die Thermodynamik irrelevante Konstanten erhalten wir also mit Gl. (3.172) für die großkanonische Zustandssumme des nichtwechselwirkenden Dirac-Feldes

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}} \mathcal{D}\tilde{\psi} \exp \left(- \sum_{K,Q} \tilde{\bar{\psi}}_K D_{K,Q} \tilde{\psi}_Q \right) = \det_{K,4 \times 4} D \equiv \prod_K \det_{4 \times 4} \frac{\mathcal{S}_0^{-1}(K)}{T}, \quad (3.179)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass D diagonal im Impulsraum ist, s. Gl. (3.177). Die Determinante über den Dirac–Raum berechnet man mit Hilfe der wohlbekannten Formel

$$\det_{2N \times 2N} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det_{N \times N} (AD - BD^{-1}CD) , \quad (3.180)$$

und der expliziten Form (3.137) der Dirac– Matrizen zu

$$\begin{aligned} \det_{4 \times 4} \left(\frac{m - \cancel{K} - \mu \gamma^0}{T} \right) &= \det_{4 \times 4} \begin{pmatrix} \frac{m - k_0 - \mu}{T} \mathbb{1}_2 & \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{T} \\ -\frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{T} & \frac{m + k_0 + \mu}{T} \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \\ &= \det_{2 \times 2} \left(\frac{m^2 - (k_0 + \mu)^2}{T^2} \mathbb{1}_2 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2}{T^2} \right) \\ &\equiv \left[\frac{m^2 - (k_0 + \mu)^2 + \mathbf{k}^2}{T^2} \right]^2 \equiv \left[\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 + \mu)^2}{T^2} \right]^2 , \end{aligned} \quad (3.181)$$

wobei wir von der Identität $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = k_i k_j \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} k_i k_j \{\sigma_i, \sigma_j\} = \frac{1}{2} k_i k_j 2\delta_{ij} \mathbb{1}_2 = \mathbf{k}^2 \mathbb{1}_2$ und der relativistischen Energie-Impuls-Relation $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ Gebrauch gemacht haben. Damit wird Gl. (3.179)

$$\mathcal{Z}_0 = \prod_K \left[\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 + \mu)^2}{T^2} \right]^2 . \quad (3.182)$$

Dieses Ergebnis ist sehr ähnlich dem Resultat für das geladene skalare Feld, s. Gl. (3.109). Wir können daher denselben Rechenrick wie in Gl. (3.110) anwenden, indem wir im Produkt über K in Gl. (3.182) Impulspaare $(K, -K)$ zusammengruppieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \prod_{(K, -K)} \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^2 \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right]^2 \\ &\equiv \prod_K \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] \left[\frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] . \end{aligned} \quad (3.183)$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass der Term unter dem Produkt symmetrisch unter $K \leftrightarrow -K$ ist. Man kann daher das Produkt über alle K nehmen, muss aber die Potenz des Terms entsprechend erniedrigen. Eine Nullmode tritt im fermionischen Fall nicht auf, weil die Matsubara–Frequenzen **ungerade Vielfache** von πT sind, also die niedrigste Frequenz bereits ungleich null ist.

Für den Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme folgt sofort, dass

$$\ln \mathcal{Z}_0 = \sum_K \left[\ln \frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} + \ln \frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] . \quad (3.184)$$

Dieses Ergebnis ist sehr ähnlich dem des geladenen skalaren Feldes, Gl. (3.113). Der erste Term stellt wieder den Beitrag der Teilchen mit chemischem Potential $+\mu$, der zweite den der Antiteilchen mit chemischem Potential $-\mu$ dar. Der Unterschied im Vorzeichen

vor der Summe folgt aus der Tatsache, dass wir nun Fermionen anstelle von Bosonen vorliegen haben, vgl. Gl. (1.41). Der zusätzliche Faktor 2 in Gl. (3.184) berücksichtigt die beiden Spin-Freiheitsgrade der Fermionen ($s = \pm 1/2$) gegenüber einem ($s = 0$) für skalare Bosonen. Ein weiterer Unterschied ist das Auftreten der fermionischen Matsubara-Frequenzen (3.175) gegenüber den bosonischen.

Wir werten nun die Matsubara-Summe in Gl. (3.184) aus. Dies erfolgt in enger Analogie zum bosonischen Fall. Zunächst schreiben wir die Logarithmen in Integrale um,

$$\begin{aligned} \ln \frac{(E_{\mathbf{k}} \mp \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} &= \ln \left[\left(\frac{E_{\mathbf{k}} \mp \mu}{T} \right)^2 + (2n+1)^2 \pi^2 \right] \\ &= \int_1^{[(E_{\mathbf{k}} \mp \mu)/T]^2} dx^2 \frac{1}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} + \ln [1 + (2n+1)^2 \pi^2] . \end{aligned} \quad (3.185)$$

Der letzte Term ist eine für die Thermodynamik irrelevante Konstante und wird im Folgenden vernachlässigt. Die Matsubara-Summe in Gl. (3.184) lautet dann

$$\begin{aligned} &\sum_n \left[\ln \frac{(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} + \ln \frac{(E_{\mathbf{k}} + \mu)^2 + \omega_n^2}{T^2} \right] \\ &= 2 \left[\int_1^{(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T} dx x \sum_n \frac{1}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} + \int_1^{(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T} dx x \sum_n \frac{1}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \right] . \end{aligned} \quad (3.186)$$

Wie im bosonischen Fall gibt es zwei Möglichkeiten, die Matsubara-Summe zu berechnen:

- (1) Direkte Berechnung mit Hilfe einer Reihe. Hier benutzen wir Gl. (1.421.2) aus Ref. [7],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n-1)^2} = \frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} . \quad (3.187)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n-1)^2 \pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (-2n+1)^2 \pi^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n-1)^2 \pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x/\pi)^2 + (2n-1)^2} \\ &\equiv \frac{1}{2x} \tanh \frac{x}{2} = \frac{1}{2x} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2x} \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^x + 1} \right) , \end{aligned} \quad (3.188)$$

vgl. Gl. (3.76) im bosonischen Fall.

- (2) Berechnung mit Hilfe eines Konturintegrals in der komplexen k_0 -Ebene. Dazu schreiben wir mit $k_0 = -i\omega_n = -i(2n+1)\pi T$, bzw. $(2n+1)\pi = ik_0/T$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (2n+1)^2\pi^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T^2}{(xT)^2 - k_0^2} \equiv T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n), \quad (3.189)$$

genau wie in Gl. (3.77), mit derselben Funktion $f(k_0) = T/[(xT)^2 - k_0^2]$ wie in Gl. (3.78). Dennoch können wir das bosonische Ergebnis natürlich nicht direkt übernehmen, denn wir müssen über die fermionischen Matsubara-Frequenzen (und nicht über die bosonischen) summieren. Der entsprechende Satz lautet nun:

Satz: Sei $f(k_0)$ eine Funktion, die analytisch auf der imaginären k_0 -Achse ist. Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dk_0 f(k_0) \frac{1}{2T} \tanh \frac{k_0}{2T}, \quad (3.190)$$

wobei die Kontur \mathcal{C} wie in Abb. 3.5 gezeigt aus unendlich vielen kleinen Kreisen um die Positionen $k_0 = -i\omega_n = -i(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, besteht.

Beweis: Die Funktion $\tanh(k_0/2T) \equiv (e^{k_0/T} - 1)/(e^{k_0/T} + 1)$ hat offenbar einfache Pole bei $k_0 = -i(2n+1)\pi T \equiv -i\omega_n$, also genau an den Mittelpunkten der in Abb. 3.5 gezeigten Kreise auf der imaginären k_0 -Achse. Gleichzeitig hat die Funktion $f(k_0)$ nach Voraussetzung keine Pole auf der imaginären k_0 -Achse. Mit Hilfe des Residuensatzes berechnet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dk_0 f(k_0) \frac{1}{2T} \tanh \frac{k_0}{2T} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) \frac{1}{2T} \frac{e^{-i\omega_n/T} - 1}{\frac{1}{T}e^{-i\omega_n/T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n), \end{aligned}$$

wobei wir von $e^{-i\omega_n/T} = e^{-(2n+1)\pi i} \equiv -1$ Gebrauch gemacht haben, q.e.d.

Wir deformieren jetzt die Kontur auf die gleiche Weise wie in Abb. 3.3. Dies ist erlaubt, da die Funktion $f(k_0)$ keine Pole auf der imaginären Achse hat. Auf der rechts der imaginären Achse verlaufenden Kontur schreiben wir

$$\frac{1}{2} \tanh \frac{k_0}{2T} = \frac{1}{2} \frac{e^{k_0/T} - 1}{e^{k_0/T} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{k_0/T} + 1},$$

und auf der links verlaufenden

$$\frac{1}{2} \tanh \frac{k_0}{2T} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-k_0/T}}{1 + e^{-k_0/T}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^{-k_0/T}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 f(k_0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{k_0/T} + 1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\delta}^{-i\infty-\delta} dk_0 f(k_0) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^{-k_0/T}} \right). \end{aligned} \quad (3.191)$$

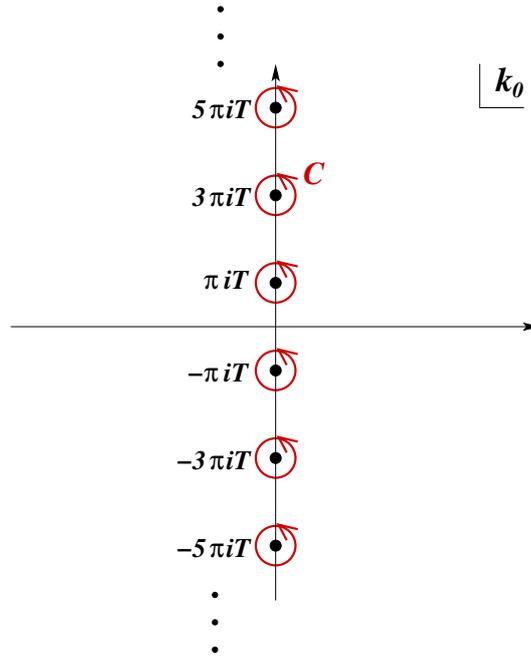


Abbildung 3.5: Kontur \mathcal{C} aus Gl. (3.190) in der komplexen k_0 -Ebene.

Im zweiten Integral substituieren wir $k_0 \rightarrow -k_0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\delta}^{-i\infty-\delta} dk_0 f(k_0) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^{-k_0/T}} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 f(-k_0) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^{k_0/T}} \right),$$

und erhalten aus Gl. (3.191)

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{2} [f(k_0) + f(-k_0)] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 [f(k_0) + f(-k_0)] \frac{1}{e^{k_0/T} + 1}. \end{aligned} \quad (3.192)$$

Im ersten Integral durften wir die Kontur auf die imaginäre Achse verschieben ($\delta \rightarrow 0$), da der Integrand hier nach Voraussetzung keine Pole aufweist.

Wir schließen nun die Kontur genau wie Abb. 3.4 gezeigt. Der Halbkreis im Unendlichen trägt nichts bei, da die Funktion $f(k_0)$ dort hinreichend schnell gegen null geht. Allerdings müssen wir nun mit den Polen der Funktion $f(k_0)$ auf der reellen Achse aufpassen. Für das Antiteilchen-Integral mit der oberen Grenze $E_{\mathbf{k}} + \mu$ in Gl. (3.186) ist $x > 0$ im gesamten Integrationsbereich und daher der in der Kontur liegende Pol immer $k_0^+ = +xT$. Für das Teilchen-Integral mit der oberen Grenze $E_{\mathbf{k}} - \mu$ in Gl. (3.186) ist $x > 0$ im gesamten Integrationsbereich für $E_{\mathbf{k}} > \mu$, aber $x < 0$ in einem Teil des Integrationsbereichs für $E_{\mathbf{k}} < \mu$. Im ersten Fall ist der in der Kontur liegende Pol k_0^+ , im zweiten $k_0^- = -xT > 0$. Wir können beide Fälle jedoch gemeinsam betrachten, wenn wir die Pole als $\bar{k}_0^\pm = \pm|x|T$ schreiben. Dann

liegt immer der Pol \bar{k}_0^+ in der Integrationskontur. Der Residuensatz liefert dann mit $f(k_0) = f(-k_0)$ für Gl. (3.192)

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = -i\omega_n) = \frac{1}{|x|} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{|x|} + 1} \right) = \frac{1}{2|x|} \tanh \frac{|x|}{2}. \quad (3.193)$$

Da dies aber eine gerade Funktion von $|x|$ ist, können wir den Betrag weglassen und das Ergebnis auch für $x < 0$ verwenden. Das ist dann aber identisch mit Gl. (3.188), also dem aus der direkten Berechnung der Matsubara-Summe erhaltenen Resultat.

Wir fahren nun mit der Berechnung der großkanonischen Zustandssumme fort, indem wir das Resultat (3.188) in Gl. (3.186) einsetzen und die Integrale mit Hilfe von $d \ln(1 + e^{-x})/dx = -1/(e^x + 1)$ berechnen,

$$\begin{aligned} & 2 \left[\int_1^{(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T} dx x \sum_n \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} + \int_1^{(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T} dx x \sum_n \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} \right] \\ &= \int_1^{(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T} dx \left(1 - \frac{2}{e^x + 1} \right) + \int_1^{(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T} dx \left(1 - \frac{2}{e^x + 1} \right) \\ &= \frac{E_{\mathbf{k}} - \mu}{T} - 1 + 2 \ln [1 + e^{-(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T}] - 2 \ln(1 + e^{-1}) \\ &+ \frac{E_{\mathbf{k}} + \mu}{T} - 1 + 2 \ln [1 + e^{-(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T}] - 2 \ln(1 + e^{-1}). \end{aligned} \quad (3.194)$$

Die konstanten Terme sind wieder für die Thermodynamik irrelevant und können vernachlässigt werden. Eingesetzt in Gl. (3.184) erhalten wir im thermodynamischen Limes für den Druck das Endresultat

$$p_0 = 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \{ E_{\mathbf{k}} + T \ln [1 + e^{-(E_{\mathbf{k}} - \mu)/T}] + T \ln [1 + e^{-(E_{\mathbf{k}} + \mu)/T}] \}. \quad (3.195)$$

Wie schon angemerkt, repräsentiert der Vorfaktor 2 die beiden Spin-Richtungen des Fermions. Der erste Term unter dem Integral ist die Nullpunktsenergie und muss wieder durch Renormierung beseitigt werden. Die letzten beiden Terme stellen die Beiträge von Teilchen bzw. Antiteilchen dar.

Übungsaufgabe 3.4: Berechne n_0 , s_0 und ϵ_0 aus Gl. (3.195).

3.8 Das massive neutrale Vektorfeld

17.11.2021

Es gibt zwei Varianten, die großkanonische Zustandssumme für das massive neutrale Vektorfeld zu berechnen. Die erste ist die direkte Methode ausgehend von der Lagrange-Dichte des massiven neutralen Vektorfelds und wird in diesem Abschnitt erläutert. Dabei muss eine Komponente des 4-Vektorfelds V^μ eliminiert werden, da sie unphysikalisch ist. Die

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

zweite beruht auf einer von Stückelberg vorgeschlagenen Lagrange–Dichte, bei der ein Term addiert wird, der dafür sorgt, dass alle Komponenten von V^μ physikalisch sind. Das korrekte Ergebnis für das massive Vektorfeld erhält man dann im Grenzwert, wo dieser Term verschwindet. Diese Methode wird im nächsten Abschnitt erläutert. Wir folgen in diesem und dem nächsten Abschnitt im wesentlichen Ref. [8].

Die Lagrange–Dichte des neutralen Vektorfelds mit der Masse $m > 0$ lautet

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu, \quad (3.196)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu. \quad (3.197)$$

Abgesehen vom nichtverschwindenden Massenterm ist die Lagrange–Dichte (3.196) identisch mit der der Elektrodynamik. Der Massenterm sorgt dafür, dass die Eichinvarianz der Elektrodynamik für die durch Gl. (3.196) definierte Feldtheorie nicht mehr gilt. Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu V_\nu)} = -F^{\mu\nu} \quad (3.198)$$

erhalten wir die Bewegungsgleichung aus der Euler–Lagrange–Gleichung,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu V_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial V_\nu} \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 V^\nu = 0. \quad (3.199)$$

Dies ist die **Proca–Gleichung** für das massive Vektorfeld. Für $m \rightarrow 0$ erhalten wir daraus die inhomogenen Maxwell–Gleichungen der Elektrodynamik (in Abwesenheit äußerer Quellen). Setzen wir den Feldstärketensor (3.197) in die Bewegungsgleichung ein, so lautet diese

$$\partial_\mu(\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu) + m^2 V^\nu = (\square + m^2)V^\nu - \partial^\nu(\partial \cdot V) = 0. \quad (3.200)$$

Die kanonisch konjugierten Felder sind nach Definition und mit Gl. (3.198)

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{V}^\mu} \equiv -F_{0\mu} = \left(0, \{-\dot{V}_i + \partial_i V_0\}_{i=1,2,3}\right) \equiv \left(0, \dot{\mathbf{V}} + \nabla V^0\right) \equiv (0, -\mathbf{\Pi}), \quad (3.201)$$

wobei $V_i = -V^i$ und $\mathbf{V} \equiv (V^1, V^2, V^3)$ benutzt wurde. Die Tatsache, dass $\Pi_0 = 0$ bedeutet, dass V^0 **kein unabhängiger Freiheitsgrad** ist. Dies ist das erwartete Resultat: ein massives Vektorfeld hat drei Freiheitsgrade, die zu den drei Spin- oder Polarisationsrichtungen $s = -1, 0, +1$ korrespondieren und durch die räumlichen Komponenten \mathbf{V} des 4-Vektors V^μ parametrisiert werden können. Die Nullkomponente V^0 ist unphysikalisch und muss in geeigneter Weise eliminiert werden. In der Tat erhalten wir, wenn wir die 4-Divergenz der Proca–Gleichung (3.199) bilden, aufgrund der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ die Bedingung

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial \cdot V = m^2 \partial \cdot V, \quad (3.202)$$

welche nach Division durch m^2 zwar wie eine Lorenz–Eichbedingung aussieht,

$$\partial \cdot V = 0, \quad (3.203)$$

aber eigentlich keine ist, da die durch Gl. (3.196) definierte Theorie keine Eichsymmetrie besitzt. Man kann diese Bedingung jedoch benutzen, um V^0 zu eliminieren. Dies ist jedoch unpraktisch, da eine Zeitintegration erforderlich ist, um nach V^0 aufzulösen, was zu nicht-lokalen Ausdrücken führen würde. Stattdessen ist es zweckmäßiger, die nullte Komponente der Bewegungsgleichung (3.199) zu benutzen,

$$m^2 V^0 = -\partial_\mu F^{\mu 0} = -\partial_i F^{i0} = -\partial_i F_{0i} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} \iff V^0 = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (3.204)$$

wobei wir Gl. (3.201) benutzt haben. In der Hamiltonschen Formulierung sind die Komponenten von $\mathbf{\Pi}$ neben denen von \mathbf{V} unabhängige Freiheitsgrade. Wenn wir konsequent V^0 gemäß Gl. (3.204) ersetzen, erhalten wir eine lokale Theorie, die lediglich unabhängige Felder enthält.

Die Hamilton-Dichte berechnen wir durch Legendre-Transformation der Lagrange-Dichte. Dazu bemerken wir zunächst, dass wie in der Elektrodynamik

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \quad \mathbf{E} = -\nabla V^0 - \dot{\mathbf{V}} \equiv \mathbf{\Pi}, \quad B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk}. \quad (3.205)$$

Die Hamilton-Dichte lautet dann

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \Pi_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{L}_0 \Big|_{\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{\Pi} - \nabla V^0, V^0 = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} / m^2} \\ &= -\mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{L}_0 \Big|_{\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{\Pi} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) / m^2, V^0 = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} / m^2} \\ &= \mathbf{\Pi}^2 - \frac{1}{m^2} \mathbf{\Pi} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) - \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{m^2}{2} \left[\frac{1}{m^4} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi})^2 - \mathbf{V}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Den zweiten Term kann man auch wie folgt schreiben,

$$-\frac{1}{m^2} \mathbf{\Pi} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) = -\frac{1}{m^2} \nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}) + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi})^2.$$

Nach Integration über den Raum stellt der erste Term einen Oberflächenbeitrag dar, den man vernachlässigen kann (sofern die Felder und ihre Ableitungen an der Oberfläche verschwinden). Damit erhalten wir für die Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{\Pi}^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi})^2 + m^2 \mathbf{V}^2 + \mathbf{B}^2 \right]. \quad (3.207)$$

Das neutrale skalare Vektorfeld hat keine erhaltene Quantenzahl, daher ist $\mu = 0$ und die großkanonische Zustandssumme ist gegeben durch

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\mathbf{\Pi} \mathcal{D}\mathbf{V} \exp \left[\int_X \left(-\mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{H}_0 \right) \right]. \quad (3.208)$$

Die Fourier-Entwicklung der Felder ist analog zum skalaren Fall

$$\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{\mathbf{V}}_K, \quad \mathbf{\Pi}(X) = \sqrt{\frac{T}{V}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{\mathbf{\Pi}}_K. \quad (3.209)$$

Der Exponent in Gl. (3.208) lautet damit, sowie aufgrund von Gl. (3.205) mit der Relation

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{4} \epsilon^{nij} \epsilon^{nlm} F^{ij} F^{lm} = \frac{1}{4} (\delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}) F^{ij} F^{lm} = \frac{1}{2} F^{ij} F^{ij} = (\partial^i V^j - \partial^j V^i) \partial^i V^j ,$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_X \left(-\boldsymbol{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{H}_0 \right) &= \sum_{K,Q} \left[-\frac{1}{V} \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_K \cdot (-iq_0) \tilde{\mathbf{V}}_Q - \frac{T}{2V} \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_K \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_Q + \frac{T}{2m^2 V} \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_K \cdot \mathbf{k} \mathbf{q} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_Q \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{2TV} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \tilde{\mathbf{V}}_Q + \frac{1}{2TV} \left(k^i \tilde{V}_K^j - k^j \tilde{V}_K^i \right) q^i \tilde{V}_Q^j \right] \frac{V}{T} \delta_{K,-Q}^{(4)} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_K \left[\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{-K} + 2i \frac{k_0}{T} \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_K \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} + \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \right] . \end{aligned} \quad (3.210)$$

Hier haben wir die symmetrischen (3×3) -Matrizen

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) \equiv \mathbb{1}_3 + \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{m^2} , \quad \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) \equiv \frac{E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} \mathbb{1}_3 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{T^2} \quad (3.211)$$

definiert, sowie für das Produkt von zwei 3-Vektoren \mathbf{A} , \mathbf{B} mit einer (3×3) -Matrix \mathbf{C} die Notation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \equiv A_i C_{ij} B_j$$

eingeführt. Für $m \neq 0$ ist die Matrix $\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k})$ invertierbar, d.h. $\mathbf{N}(\mathbf{k})$ existiert. Ebenso existiert $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k})$. Wir substituieren nun (mit Jacobi-Determinante mit Betrag eins)

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_K = \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_K - i \frac{k_0}{T} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_K \equiv \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_K - i \frac{k_0}{T} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) , \quad (3.212)$$

und entkoppeln damit die Integration über Felder und kanonisch konjugierte Felder,

$$\begin{aligned} &\int_X \left(-\boldsymbol{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{H}_0 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_K \left\{ \left[\tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_K + i \frac{k_0}{T} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \left[\tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_{-K} - i \frac{k_0}{T} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2i \frac{k_0}{T} \left[\tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_K + i \frac{k_0}{T} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} + \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_K \left[\tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_{-K} - i \frac{k_0}{T} \tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_K \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} + i \frac{k_0}{T} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_{-K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_0^2}{T^2} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} + 2i \frac{k_0}{T} \tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_K \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} - 2 \frac{k_0^2}{T^2} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_K \left\{ \tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}'_{-K} + \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \right\} , \end{aligned} \quad (3.213)$$

wobei wir zum letzten Gleichheitszeichen beim dritten Term $K \leftrightarrow -K$ substituiert haben. Wie beim skalaren Feld sind nicht alle Fourier-Amplituden unabhängig. Da auch das Vektorfeld reellwertig ist, gilt, dass die Nullmoden $\tilde{\Pi}'_0, \tilde{\mathbf{V}}_0$ reellwertig sind und dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{\Pi}'_K &= \operatorname{Re} \tilde{\Pi}'_{-K}, & \operatorname{Im} \tilde{\Pi}'_K &= -\operatorname{Im} \tilde{\Pi}'_{-K}, \\ \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{V}}_K &= \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{V}}_{-K}, & \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{V}}_K &= -\operatorname{Im} \tilde{\mathbf{V}}_{-K}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}'_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\Pi}'_{-K} &= \operatorname{Re} \tilde{\Pi}'_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \operatorname{Re} \tilde{\Pi}'_{-K} + \operatorname{Im} \tilde{\Pi}'_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \operatorname{Im} \tilde{\Pi}'_{-K}, \\ \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} &= \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \\ &+ \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{V}}_{-K}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in Gl. (3.213) ein und berücksichtigen, dass im Funktionalintegral in (3.208) nur über unabhängige Freiheitsgrade integriert wird, so erhalten wir bis auf irrelevante konstante Faktoren

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \int d\tilde{\Pi}'_0 d\tilde{\mathbf{V}}_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{\Pi}'_0 \cdot \mathbf{M}(0) \cdot \tilde{\Pi}'_0 - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{V}}_0 \cdot \mathbf{N}^{-1}(0) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_0 \right) \\ &\times \prod_{K>0} \int d \operatorname{Re} \tilde{\Pi}'_K d \operatorname{Im} \tilde{\Pi}'_K \exp \left[-\operatorname{Re} \tilde{\Pi}'_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \operatorname{Re} \tilde{\Pi}'_K - \operatorname{Im} \tilde{\Pi}'_K \cdot \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \operatorname{Im} \tilde{\Pi}'_K \right] \\ &\times \prod_{K>0} \int d \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{V}}_K d \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{V}}_K \exp \left\{ -\operatorname{Re} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{V}}_K \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \cdot \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{V}}_K \right\} \\ &= \left\{ \det_{3 \times 3} [\mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{N}^{-1}(0)] \right\}^{-1/2} \prod_{K>0} \left(\det_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \right\} \right)^{-1} \\ &\equiv \prod_K \left(\det_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] \right\} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.214)$$

Hier haben wir im letzten Schritt das Produkt wieder über alle K ausgedehnt, da die Determinante symmetrisch unter $K \leftrightarrow -K$ ist. Entsprechend wurde der Exponent um einen Faktor $1/2$ reduziert, was auch erlaubt, die Nullmode wieder mit ins Produkt einzubeziehen.

Das Produkt der Matrizen ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \left[\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{k}) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k}) \right] &= \left(\mathbb{1}_3 + \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{m^2} \right) \cdot \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} \mathbb{1}_3 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{T^2} \right) - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbb{1}_3 \\ &= \frac{E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} \mathbb{1}_3 + \frac{E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{m^2} - \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{T^2} - \frac{\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{k}^2}{m^2 T^2} - \frac{k_0^2}{T^2} \mathbb{1}_3 \\ &= \frac{E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2}{T^2} \mathbb{1}_3, \end{aligned} \quad (3.215)$$

und damit

$$\mathcal{Z}_0 = \prod_K \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2}{T^2} \right)^{-3/2}, \quad (3.216)$$

bzw.

$$\ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{3}{2} \sum_K \ln \frac{E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2}{T^2}. \quad (3.217)$$

Dies ist das erwartete Resultat, nämlich die Zustandssumme für **drei Freiheitsgrade** von neutralen skalaren Bosonen, vgl. Gl. (3.71) mit Gl. (3.64), die den drei Spin- oder Polarisationsrichtungen des Vektorfeldes entsprechen. Man beachte, dass die Integration über die kanonisch konjugierten Felder diesmal nicht einfach eine irrelevante Konstante ergibt, die man vernachlässigen darf, sondern die Determinante einer Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{k})$, die mit dem Integral über die Felder kombiniert werden muss, um das richtige Ergebnis zu erhalten.

3.9 Das Stückelberg–Feld

In diesem Abschnitt besprechen wir eine Alternative, die Zustandssumme für das neutrale Vektorfeld zu berechnen. Ausgangspunkt ist die Lagrange–Dichte für das **Stückelberg–Feld**

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} V_\mu V^\mu - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot V)^2. \quad (3.218)$$

Der gegenüber Gl. (3.196) zusätzliche Term hat dieselbe Form wie ein eichfixierender Term in der Lagrange–Dichte der Elektrodynamik. Allerdings hat, wie schon erwähnt, die durch Gl. (3.218) definierte Theorie aufgrund des nichtverschwindenden Massenterms keine Eichsymmetrie.

Wir berechnen nun die großkanonische Zustandssumme für das Stückelberg–Feld und lassen am Ende $\lambda \rightarrow 0$ gehen. Wie erwartet werden wir das Resultat (3.217) reproduzieren.

Die Bewegungsgleichungen für die Lagrange–Dichte (3.218) lauten

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu V_\nu)} &= \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial V_\nu} \\ \iff \partial_\mu (-F^{\mu\nu} - \lambda \partial \cdot V g^{\mu\nu}) &= m^2 V^\nu \\ \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 V^\nu + \lambda \partial^\nu \partial \cdot V &= 0 \\ \iff (\square + m^2) V^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu \partial \cdot V &= 0. \end{aligned} \quad (3.219)$$

Bilden wir die 4-Divergenz der letzten Gleichung, so erhalten wir

$$0 = (\square + m^2) \partial \cdot V - (1 - \lambda) \square \partial \cdot V = \left(\square + \frac{m^2}{\lambda} \right) \lambda \partial \cdot V. \quad (3.220)$$

Dies ist die Wellengleichung für das “Feld” $\lambda \partial \cdot V$ mit der Masse $m/\sqrt{\lambda}$. Im Limes $\lambda \rightarrow 0$ wird dieses Feld unendlich schwer und entkoppelt aus dem Spektrum der physikalischen Anregungen der Theorie.

Die kanonisch konjugierten Felder lauten

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{V}^\mu} = -F_{0\mu} - \lambda \partial \cdot V g_{0\mu} = (-\lambda \partial \cdot V, -\mathbf{\Pi}) . \quad (3.221)$$

Die räumlichen Komponenten sind identisch mit denen in Gl. (3.201). Im Gegensatz dazu existiert nun jedoch auch ein nicht-triviales kanonisch konjugiertes Feld Π_0 , d.h. V^0 ist ein **physikalischer Freiheitsgrad**. Das Feld Π_0 ist gerade (bis auf ein Vorzeichen) identisch mit dem Feld $\lambda \partial \cdot V$, welches die Wellengleichung (3.220) erfüllt.

Für die Berechnung der Hamilton–Dichte müssen wir die Lagrange–Dichte (3.218) Legendre–transformieren und die Zeitableitungen der Felder durch die kanonisch konjugierten Felder ersetzen,

$$\Pi_0 = -\lambda \partial \cdot V = -\lambda \dot{V}^0 - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \implies \dot{V}^0 = -\frac{\Pi_0}{\lambda} - \nabla \cdot \mathbf{V} , \quad (3.222)$$

$$\mathbf{\Pi} = -\dot{\mathbf{V}} - \nabla V^0 \implies \dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{\Pi} - \nabla V^0 . \quad (3.223)$$

Für die Hamilton–Dichte erhalten wir also

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \Pi_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{L}_0 \Big|_{\dot{V}^0 = -\Pi_0/\lambda - \nabla \cdot \mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{\Pi} - \nabla V^0} \\ &= \Pi_0 \left(-\frac{\Pi_0}{\lambda} - \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \mathbf{\Pi} \cdot (-\mathbf{\Pi} - \nabla V^0) - \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{m^2}{2} V_\mu V^\mu + \frac{\lambda}{2} \left(-\frac{\Pi_0}{\lambda} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \Pi_0^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{B}^2) - \frac{m^2}{2} V_\mu V^\mu - \Pi_0 \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{\Pi} \cdot \nabla V^0 . \end{aligned} \quad (3.224)$$

Die großkanonische Zustandssumme lautet

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\Pi_\mu \mathcal{D}V^\mu \exp \left[\int_X \left(\Pi_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{H}_0 \right) \right] . \quad (3.225)$$

Den Integranden im Exponent berechnen wir mit Gl. (3.224) zu

$$\begin{aligned} \Pi_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{H}_0 &= \Pi_0 \dot{V}^0 - \mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \frac{1}{2\lambda} \Pi_0^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{m^2}{2} V_\mu V^\mu + \Pi_0 \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{\Pi} \cdot \nabla V^0 \\ &= \frac{1}{2\lambda} \left(\Pi_0 + \lambda \dot{V}^0 + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \right)^2 - \frac{1}{2\lambda} \left(\lambda \dot{V}^0 + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\mathbf{\Pi} + \dot{\mathbf{V}} + \nabla V^0 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{V}} + \nabla V^0 \right)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \frac{m^2}{2} V_\mu V^\mu \\ &\equiv \frac{1}{2\lambda} \Pi_0'^2 - \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}'^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot V)^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{m^2}{2} V_\mu V^\mu \\ &\equiv \frac{1}{2\lambda} \Pi_0'^2 - \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}'^2 + \mathcal{L}_0 , \end{aligned} \quad (3.226)$$

wobei wir zur vorletzten Zeile die Felder

$$\Pi_0' \equiv \Pi_0 + \lambda \dot{V}^0 + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} , \quad \mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} + \dot{\mathbf{V}} + \nabla V^0 \quad (3.227)$$

definiert, das elektrische Feld $\mathbf{E} \equiv -\dot{\mathbf{V}} - \nabla V^0$ eingesetzt und zur letzten Zeile die letzten drei Terme als Lagrange–Dichte (3.218) identifiziert haben. Das Vorzeichen vor dem ersten

Term und vor dem Term $\sim m^2 V_0^2$ wirft die Frage auf, ob wir es noch mit Gauß-Integralen zu tun haben. Hier ist zu bemerken, dass im Imaginärzeitformalismus nicht nur die nullte Komponente des Raum-Zeit-Vektors X^μ , sondern auch die nullten Komponenten von anderen 4-Vektoren **rein imaginär** sind. Daher ist

$$\Pi'_0 \equiv i\Pi'_\tau, \quad V^0 \equiv iV_\tau, \quad \text{mit } \Pi'_\tau, V_\tau \in \mathbb{R}, \quad (3.228)$$

und die Funktionalintegrale über diese Variablen sind wie erwartet Gauß-Integrale.

Wir setzen nun Gl. (3.226) in den Exponenten in Gl. (3.225) ein und entwickeln alle Felder nach Fourier gemäß

$$V^\mu(X) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{V}_K^\mu, \quad \Pi'_\mu(X) = \sqrt{\frac{T}{V}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{\Pi}'_{K,\mu}. \quad (3.229)$$

Damit erhalten wir für den Exponenten in Gl. (3.225)

$$\begin{aligned} \int_X \left(\Pi_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{H}_0 \right) &= \frac{1}{2} \sum_K \left\{ \frac{1}{\lambda} \tilde{\Pi}'_{K,0} \tilde{\Pi}'_{-K,0} - \tilde{\Pi}'_K \cdot \tilde{\Pi}'_{-K} \right. \\ &+ \frac{1}{T^2} \left[\lambda \left(K \cdot \tilde{V}_K \right) \left(-K \cdot \tilde{V}_{-K} \right) + k_0^2 \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} - 2k_0 \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{k} \tilde{V}_{-K}^0 + \mathbf{k}^2 \tilde{V}_K^0 \tilde{V}_{-K}^0 \right. \\ &\left. \left. - \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \left(E_{\mathbf{k}}^2 \mathbb{1}_3 - \mathbf{k} \mathbf{k} \right) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} + m^2 \tilde{V}_K^0 \tilde{V}_{-K}^0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.230)$$

19.11.2021

Der Term in eckigen Klammern läßt sich weiter vereinfachen,

$$\begin{aligned} [\dots] &= -\lambda \tilde{V}_K \cdot K K \cdot \tilde{V}_{-K} + (E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2) \tilde{V}_K^0 \tilde{V}_{-K}^0 + k_0^2 \tilde{V}_K^0 \tilde{V}_{-K}^0 \\ &\quad - (E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2) \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} + \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} - \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{k} k_0 \tilde{V}_{-K}^0 - \tilde{V}_K^0 k_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_{-K} \\ &= (E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2) \tilde{V}_K \cdot \tilde{V}_{-K} + (1 - \lambda) \tilde{V}_K \cdot K K \cdot \tilde{V}_{-K} \\ &\equiv \tilde{V}_K^\mu \left[(E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2) g_{\mu\nu} + (1 - \lambda) K_\mu K_\nu \right] \tilde{V}_{-K}^\nu. \end{aligned} \quad (3.231)$$

Hier haben wir in der zweiten Zeile die Symmetrie der Summe über K unter $K \leftrightarrow -K$ ausgenutzt, um den Term $\sim -2k_0 \tilde{\mathbf{V}}_K \cdot \mathbf{k} \tilde{V}_{-K}^0$ in Gl. (3.230) in symmetrisierter Form zu schreiben. Damit wird Gl. (3.230) zu

$$\begin{aligned} \int_X \left(\Pi_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{H}_0 \right) &= -\frac{1}{2} \sum_K \left\{ -\frac{1}{\lambda} \tilde{\Pi}'_{K,0} \tilde{\Pi}'_{-K,0} + \tilde{\Pi}'_K \cdot \tilde{\Pi}'_{-K} + \tilde{V}_K^\mu \left[-\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2}{T^2} g_{\mu\nu} - (1 - \lambda) \frac{K_\mu K_\nu}{T^2} \right] \tilde{V}_{-K}^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (3.232)$$

Wir führen nun die Euklidischen Felder gemäß Gl. (3.228) ein, und definieren $\bar{V}_K^\mu \equiv (V_K^\tau, \mathbf{V}_K)$, $\bar{K}^\mu = (\omega_n, \mathbf{k})$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_X \left(\Pi_\mu \dot{V}^\mu - \mathcal{H}_0 \right) &= -\frac{1}{2} \sum_K \left\{ \frac{1}{\lambda} \tilde{\Pi}'_{K,\tau} \tilde{\Pi}'_{-K,\tau} + \tilde{\Pi}'_K \cdot \tilde{\Pi}'_{-K} + \bar{V}_K^\mu \left[\frac{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2}{T^2} \delta_{\mu\nu} - (1 - \lambda) \frac{\bar{K}_\mu \bar{K}_\nu}{T^2} \right] \bar{V}_{-K}^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (3.233)$$

Wir setzen dies in Gl. (3.225) und integrieren wie gewohnt über die unabhängigen Fourier–Amplituden. Das Ergebnis lautet (bis auf irrelevante Konstanten)

$$\mathcal{Z}_0 = \prod_K \lambda^{1/2} \prod_K \left\{ \det_{4 \times 4} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2}{T^2} \delta_{\mu\nu} - (1 - \lambda) \frac{\bar{K}_\mu \bar{K}_\nu}{T^2} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (3.234)$$

Man beachte, dass die Integration über $\tilde{\Pi}'_{K,\tau}$ der Zahl der Impulsmoden entsprechende Faktoren $\sqrt{\lambda}$ ergibt. Diese erscheinen zwar auf den ersten Blick als irrelevante Konstante, werden sich aber noch als wichtig herausstellen, um den Limes $\lambda \rightarrow 0$ bilden zu können. Die Determinante werten wir mit folgendem Satz aus.

Satz: Gegeben sei ein N –dimensionaler Vektorraum \mathcal{V} . Seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ zwei orthogonale Projektionsoperatoren auf zwei N_i –dimensionale Unterräume \mathcal{V}_i mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$, $N_1 + N_2 = N$,

$$\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = \mathbb{P}_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 = \mathbb{1}_N. \quad (3.235)$$

Dann gilt $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\det_{N \times N} (a_1 \mathbb{P}_1 + a_2 \mathbb{P}_2) = a_1^{N_1} a_2^{N_2}. \quad (3.236)$$

Beweis: Da die Projektionsoperatoren auf N_i –dimensionale Unterräume projizieren, existiert eine Basis von \mathcal{V} , in der

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_1 &= \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{P}}_1 \\ \tilde{\mathbb{P}}_2 \end{array}} \right\} N_1 \text{ Zeilen} \\ \tilde{\mathbb{P}}_2 &= \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{P}}_1 \\ \tilde{\mathbb{P}}_2 \end{array}} \right\} N_2 \text{ Zeilen} \end{aligned} \quad (3.237)$$

Für reelle a_1, a_2 läßt sich diese Basis durch eine orthogonale Transformation O , $O^{-1} = O^T$, finden,

$$O^T \mathbb{P}_i O = \tilde{\mathbb{P}}_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.238)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \det_{N \times N} (a_1 \mathbb{P}_1 + a_2 \mathbb{P}_2) &= \det_{N \times N} \left[O \left(a_1 \tilde{\mathbb{P}}_1 + a_2 \tilde{\mathbb{P}}_2 \right) O^T \right] \\
 &= \det_{N \times N} O \det_{N \times N} O^T \det_{N \times N} \left(a_1 \tilde{\mathbb{P}}_1 + a_2 \tilde{\mathbb{P}}_2 \right) \\
 &= \det_{N \times N} \left(a_1 \tilde{\mathbb{P}}_1 + a_2 \tilde{\mathbb{P}}_2 \right) \\
 &= \det_{N_1 \times N_1} (a_1 \mathbb{1}_{N_1}) \det_{N_2 \times N_2} (a_2 \mathbb{1}_{N_2}) \\
 &\equiv a_1^{N_1} a_2^{N_2}, \text{ q.e.d. .}
 \end{aligned} \tag{3.239}$$

Wir definieren nun den **eindimensionalen Projektionsoperator auf die Richtung von \bar{K}^μ** ,

$$P_L^{\mu\nu} \equiv \frac{\bar{K}^\mu \bar{K}^\nu}{\bar{K}^2}, \quad P_L^{\mu\nu} \bar{K}_\nu \equiv \bar{K}^\mu, \tag{3.240}$$

und den **Projektionsoperator auf den dreidimensionalen Unterraum orthogonal zu \bar{K}^μ** ,

$$P_\perp^{\mu\nu} \equiv \delta^{\mu\nu} - \frac{\bar{K}^\mu \bar{K}^\nu}{\bar{K}^2}, \quad P_\perp^{\mu\nu} \bar{K}_\nu \equiv 0, \tag{3.241}$$

Man kann zeigen, dass gilt

$$P_i P_j = P_i \delta_{ij}, \quad i, j = L, \perp, \quad P_L^{\mu\nu} + P_\perp^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}. \tag{3.242}$$

Der obige Satz liefert dann für Gl. (3.234)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_0 &= \prod_K \lambda^{1/2} \left(\det_{4 \times 4} \left\{ \frac{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2}{T^2} P_\perp^{\mu\nu} + \left[\frac{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2}{T^2} - (1 - \lambda) \frac{\bar{K}^2}{T^2} \right] P_L^{\mu\nu} \right\} \right)^{-1/2} \\
 &= \prod_K \lambda^{1/2} \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2}{T^2} \right)^{-3/2} \left[\frac{m^2 + \mathbf{k}^2 + \omega_n^2 - (1 - \lambda)(\mathbf{k}^2 + \omega_n^2)}{T^2} \right]^{-1/2} \\
 &= \prod_K \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2}{T^2} \right)^{-3/2} \left(\frac{m^2/\lambda + \mathbf{k}^2 + \omega_n^2}{T^2} \right)^{-1/2},
 \end{aligned} \tag{3.243}$$

bzw. mit der Energie $E_{\mathbf{k},\lambda} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2/\lambda}$ und $\omega_n^2 = -k_0^2$

$$\ln \mathcal{Z}_0 = -\frac{3}{2} \sum_K \ln \frac{E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2}{T^2} - \frac{1}{2} \sum_K \ln \frac{E_{\mathbf{k},\lambda}^2 - k_0^2}{T^2}. \tag{3.244}$$

Dies ist die Zustandssumme für ein nichtwechselwirkendes System von **drei** neutralen skalaren Bosonen der Masse m sowie **einem neutralen skalaren Boson der Masse $m/\sqrt{\lambda}$** . Im Limes $\lambda \rightarrow 0$ wird letzteres unendlich schwer und aus dem physikalischen Anregungsspektrum entfernt. Wir erhalten wieder die Zustandssumme (3.217) für das neutrale Vektorfeld aus dem vorangegangenen Abschnitt.

Man beachte, dass die Faktoren $\sqrt{\lambda}$ aus der Integration über $\tilde{\Pi}'_{K,\tau}$ wichtig waren, um dieses Resultat zu erhalten. Andernfalls hätte der letzte Faktor in Gl. (3.243) die Form $(m^2 + \lambda \bar{K}^2)/T^2 \rightarrow m^2/T^2$ ($\lambda \rightarrow 0$) angenommen, was zu einem unendlichen, aber temperaturabhängigen Zusatzterm in Gl. (3.244) geführt hätte.

3.10 Das elektromagnetische Feld

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad (3.245)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \quad (3.246)$$

Die Bewegungsgleichungen folgen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu V_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial V_\nu} \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 . \quad (3.247)$$

Dies sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (in Abwesenheit von elektrischen Ladungen). Die kanonisch konjugierten Felder lauten

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{A}^\mu} \equiv -F_{0\mu} = (0, -\mathbf{E}) \equiv (0, \dot{\mathbf{A}} + \nabla A^0) \equiv (0, -\mathbf{\Pi}) . \quad (3.248)$$

Dies zeigt, dass A^0 kein unabhängiger Freiheitsgrad ist. Von den verbleibenden drei Komponenten von \mathbf{A} muss aber eine weitere ebenfalls unphysikalisch sein, denn das elektromagnetische Feld hat nur zwei unabhängige Freiheitsgrade, die den zwei transversalen Polarisations- oder Spinrichtungen ($s = \pm 1$) entsprechen. Wie wir wissen, gibt es einen **zusätzlichen Eichfreiheitsgrad**, der von der **Symmetrie** von \mathcal{L}_0 unter **Eichtransformationen** (d.h. lokalen $U(1)$ -Transformationen) herrührt,

$$A^\mu(X) \longrightarrow A'^\mu(X) = A^\mu(X) - \partial^\mu \Lambda(X) . \quad (3.249)$$

Wir wählen nun $\Lambda(X)$ so, dass

$$A'^3(X) = 0 . \quad (3.250)$$

Dies ist die sog. **axiale Eichung** (vgl. Kapitel 5.6.1 der Vorlesung "Quantenfeldtheorie"). Dies ist möglich, da man für gegebenes $A^3(X)$ lediglich eine Funktion $\Lambda(X)$ finden muss, die

$$\partial^3 \Lambda(X) = -\partial_3 \Lambda(X) \equiv A^3(X)$$

erfüllt. Dann ist nach Gl. (3.249) $A'^3(X) = 0$. Man kann diese Funktion nach Integration über z explizit angeben,

$$\Lambda(t, x, y, z) = - \int_{z_0}^z dz' A^3(t, x, y, z') + F(t, x, y) .$$

Im Folgenden lassen wir der Einfachheit halber den Strich bei A'^μ weg, oder mit anderen Worten, wir nehmen an, dass A^μ bereits in der axialen Eichung vorliegt.

In der axialen Eichung hat man $A^3(X)$ eliminiert und es verbleiben lediglich $A^1(X)$ und $A^2(X)$ als unabhängige Freiheitsgrade, die den beiden transversalen Polarisationsrichtungen des elektromagnetischen Feldes entsprechen. Die dazugehörigen kanonisch konjugierten Felder sind

$$\Pi_i = -\Pi^i = -E^i = \partial_i A^0 - \partial_0 A_i = \partial_i A^0 + \dot{A}^i , \quad i = 1, 2 . \quad (3.251)$$

3 Nichtwechselwirkende Feldtheorien

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichung (3.247) kann man A^0 und $\Pi_3 = -E^3$ explizit eliminieren. Für $\nu = 0$ lautet Gl. (3.247)

$$\partial_\mu F^{\mu 0} \equiv \partial_i F^{i0} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 . \quad (3.252)$$

Dies ist das Gaußsche Gesetz (in Abwesenheit von elektrischen Ladungen). Wir lösen nach $\partial_3 E^3$ auf,

$$\partial_3 E^3 = -\partial_1 E^1 - \partial_2 E^2 \equiv +\partial_1 \Pi_1 + \partial_2 \Pi_2 ,$$

und integrieren über z ,

$$E^3(t, x, y, z) = \int_{z_0}^z dz' [\partial_1 \Pi_1(t, x, y, z') + \partial_2 \Pi_2(t, x, y, z')] + C_E(t, x, y) \equiv E^3[\Pi_1, \Pi_2] . \quad (3.253)$$

Dies legt E^3 als Funktional der unabhängigen Felder Π_1, Π_2 fest. Da ferner aufgrund der axialen Eichung (3.250)

$$E^3 \equiv \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = -\partial_3 A^0 - \partial_0 A^3 \equiv -\partial_3 A^0 , \quad (3.254)$$

können wir A^0 durch Integration über z aus E^3 bestimmen,

$$\begin{aligned} A^0(t, x, y, z) &= - \int_{z_0}^z dz' E^3(t, x, y, z') + C_A(t, x, y) \\ &= - \int_{z_0}^z dz' \left\{ \int_{z_0}^{z'} dz'' [\partial_1 \Pi_1(t, x, y, z'') + \partial_2 \Pi_2(t, x, y, z'')] + C_E(t, x, y) \right\} + C_A(t, x, y) \\ &= - \int_{z_0}^z dz' \int_{z_0}^{z'} dz'' [\partial_1 \Pi_1(t, x, y, z'') + \partial_2 \Pi_2(t, x, y, z'')] - C_E(t, x, y)(z - z_0) + C_A(t, x, y) \\ &\equiv A^0[\Pi_1, \Pi_2] . \end{aligned} \quad (3.255)$$

Dies legt A^0 als Funktional von Π_1, Π_2 fest. Die Integrationskonstanten sind durch

$$E^3(t, x, y, z_0) = C_E(t, x, y) , \quad A^0(t, x, y, z_0) = C_A(t, x, y)$$

bestimmt. Damit ist die Eichung **vollständig fixiert**.

Die Hamilton-Dichte lautet mit $\Pi_0 = 0$ und (aufgrund der axialen Eichung) $\dot{A}^3 = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \Pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}_0 = \sum_{i=1,2} \Pi_i \dot{A}^i - \mathcal{L}_0 \Big|_{\dot{A}^i = \Pi_i - \partial_i A^0, i=1,2} \\ &= - \sum_{i=1,2} \Pi^i (-\Pi^i - \partial_i A^0) - \frac{1}{2} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + E_3^2 - \mathbf{B}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1,2} \Pi_i^2 - E_3^2 + \mathbf{B}^2 \right) + \sum_{i=1,2} \Pi^i \partial_i A^0 . \end{aligned} \quad (3.256)$$

Da die Hamilton-Dichte im Funktionalintegral unter einem Raum-Zeit-Integral auftritt, dürfen wir den letzten Term auch partiell integrieren (und den Oberflächenterm vernachlässigen),

$$\sum_{i=1,2} \Pi^i \partial_i A^0 = -A^0 \sum_{i=1,2} \partial_i \Pi^i = -A^0 \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + A^0 \partial_3 E^3 \equiv A^0 \partial_3 E^3 ,$$

wobei im letzten Schritt das Gaußsche Gesetz (3.252) verwendet wurde. (In der vollständig fixierten Eichung wird das Feld E^3 mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes bestimmt, s. Gl. (3.253), es erfüllt also letzteres per Definition.) Eine weitere partielle Integration liefert (wiederum unter Vernachlässigung des Oberflächenterms) mit Gl. (3.254)

$$A^0 \partial_3 E^3 = -E^3 \partial_3 A^0 \equiv +E_3^2 .$$

Also erhalten wir für die Hamilton-Dichte letztlich

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + E_3^2 + \mathbf{B}^2) . \quad (3.257)$$

Da $\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + E_3^2 \equiv \mathbf{E}^2$, war dieses Resultat auch zu erwarten.

Die großkanonische Zustandssumme lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathfrak{R} \int \prod_{i=1,2} \mathcal{D}\Pi_i \mathcal{D}A^i \exp \left[\int_X \left(\sum_{i=1,2} \Pi_i \dot{A}^i - \mathcal{H}_0 \right) \right] \\ &= \mathfrak{R} \int \prod_{i=1,2} \mathcal{D}\Pi_i \mathcal{D}A^i \exp \left[\int_X \left(\sum_{i=1,2} \Pi_i \dot{A}^i - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1,2} \Pi_i^2 + E_3^2 [\Pi_1, \Pi_2] + \mathbf{B}^2 \right\} \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.258)$$

Im Grunde genommen handelt es sich hierbei wieder um (verschobene) Gauß-Integrale, die analytisch lösbar sind. Das Problem ist jedoch, dass E^3 ein (kompliziertes) Funktional von Π_1, Π_2 ist, s. Gl. (3.253), was die Auswertung erschwert. Wir lösen dieses Problem, indem wir ein zusätzliches Funktionalintegral in der Form

$$1 = \int \mathcal{D}\Pi_3 \delta [\Pi_3 + E^3 [\Pi_1, \Pi_2]] \quad (3.259)$$

eingeführen, mit einer funktionalen Delta-Funktion, die den Wert der neuen Variablen Π_3 auf $-E^3$ setzt. Dies führt (bis auf Vorzeichen, die wir in \mathfrak{R} absorbieren) zu

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\Pi \prod_{i=1,2} \mathcal{D}A^i \delta [\Pi_3 + E^3] \exp \left\{ \int_X \left[\sum_{i=1,2} \Pi_i \dot{A}^i - \frac{1}{2} (\Pi^2 + \mathbf{B}^2) \right] \right\} . \quad (3.260)$$

Zwar ist nun der Exponent quadratisch in den Integrationsvariablen, aber das Problem ist lediglich in das Argument der funktionalen Delta-Funktion verlagert worden, wo immer noch $E^3 [\Pi_1, \Pi_2]$ auftaucht. Deshalb schreiben wir diese nun mit Hilfe der bekannten Relation

$$\delta [\Pi_3 + E^3] = \left| \det \frac{\delta [\nabla \cdot \mathbf{\Pi}(X)]}{\delta \Pi_3(Y)} \right| \delta [\nabla \cdot \mathbf{\Pi}] \quad (3.261)$$

um, wobei E^3 durch Gl. (3.253) gegeben ist, also unter Zugrundelegung des Gaußschen Gesetzes $\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0$ berechnet wurde. Die Jacobi-Determinante

$$\det \frac{\delta [\nabla \cdot \mathbf{\Pi}(X)]}{\delta \Pi_3(Y)} = \det [-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] \quad (3.262)$$

entspricht der aus der Vorlesung “Quantenfeldtheorie” bekannten **Faddeev–Popov–Determinante** und kann formal aus dem Funktionalintegral herausfaktoriert werden. Anders als im erzeugenden Funktional für n -Punkt-Korrelationsfunktionen in der Quantenfeldtheorie im Vakuum darf man sie aber nicht einfach vernachlässigen. Wie wir noch sehen werden, liefert sie einen temperaturabhängigen Beitrag, der wichtig ist, um das korrekte Resultat für die Zustandssumme des elektromagnetischen Feldes zu erhalten.

Wir führen desweiteren noch ein Funktionalintegral über die Variable A^3 ein, die wir (natürlich) mit der z -Komponente des Feldes A^μ identifizieren. Da wir in axialer Eichung rechnen, setzen wir den Wert von A^3 mit Hilfe einer funktionalen Delta-Funktion auf null,

$$1 = \int \mathcal{D}A^3 \delta[A^3] . \quad (3.263)$$

Mit den Glgen. (3.261), (3.262) und (3.263) lautet die Zustandssumme (3.260) nun

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\boldsymbol{\Pi} \mathcal{D}\mathbf{A} \delta[\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}] \det[-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] \delta[A^3] \\ \times \exp \left\{ \int_X \left[-\boldsymbol{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Pi}^2 + \mathbf{B}^2) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.264)$$

wobei wir $-\Pi_3 \dot{A}^3 \equiv 0$ (aufgrund von $\delta[A^3]$) zum Exponenten hinzuaddiert haben. Der letzte Schritt besteht darin, $\delta[\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}]$ (mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation der ebenen Wellen) in ein Funktionalintegral über eine Variable $A^0 = iA^\tau$ umzuschreiben,

$$\delta[\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}] = \mathfrak{R}' \int \mathcal{D}A^\tau \exp \left(i \int_X A^\tau \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} \right) \equiv \mathfrak{R}'' \int \mathcal{D}A^0 \exp \left(\int_X A^0 \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} \right) . \quad (3.265)$$

Die Konstante \mathfrak{R}'' absorbieren wir in \mathfrak{R} und das Argument im Exponenten schreiben wir mit partieller Integration (und Vernachlässigung des Oberflächenterms) um. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\boldsymbol{\Pi} \mathcal{D}A^\mu \det[-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] \delta[A^3] \\ \times \exp \left\{ \int_X \left[-\boldsymbol{\Pi} \cdot (\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Pi}^2 + \mathbf{B}^2) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.266)$$

Wir entkoppeln nun die Integration über die kanonisch konjugierten Felder mittels der Substitution

$$\boldsymbol{\Pi}' \equiv \boldsymbol{\Pi} + \nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}} \equiv \boldsymbol{\Pi} - \mathbf{E} , \quad (3.267)$$

wobei wir wieder das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \dot{\mathbf{A}}$ eingeführt haben. Dies ergibt für die Zustandssumme

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\boldsymbol{\Pi}' \exp \left(-\frac{1}{2} \int_X \boldsymbol{\Pi}'^2 \right) \int \mathcal{D}A^\mu \det[-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] \delta[A^3] \exp \left(\int_X \mathcal{L}_0 \right) , \quad (3.268)$$

mit der Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$.

In einer **beliebigen Eichung**,

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda, \quad \text{so dass} \quad F_X[A'] = 0, \quad (3.269)$$

lautet die Zustandssumme entsprechend

$$\mathcal{Z}_0 = \mathfrak{N} \int \mathcal{D}\Pi' \exp\left(-\frac{1}{2} \int_X \Pi'^2\right) \int \mathcal{D}A^\mu \det \frac{\delta F_X[A]}{\delta \Lambda(Y)} \delta[F_X[A]] \exp\left(\int_X \mathcal{L}_0\right), \quad (3.270)$$

wobei zur Berechnung der Funktionaldeterminante das Eichfeld $A'^\mu(X)$ in die Eichbedingung einzusetzen und diese nach dem Parameter $\Lambda(Y)$ funktional abzuleiten ist.

Wir fahren nun mit der Berechnung der Zustandssumme (3.268) in axialer Eichung fort. Dazu betrachten wir zunächst die Lagrange-Dichte in axialer Eichung,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0|_{A^3=0} &= \frac{1}{2} \left[(\nabla A^0)^2 + 2(\nabla A^0) \cdot \dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{A}}^2 \right. \\ &\quad \left. - (\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2)^2 - (\partial_1 A^3 - \partial_3 A^1)^2 - (\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1)^2 \right]_{A^3=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[(\nabla A^0)^2 + 2(\partial_1 A^0) \dot{A}^1 + 2(\partial_2 A^0) \dot{A}^2 + (\dot{A}^1)^2 + (\dot{A}^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - (\partial_3 A^2)^2 - (\partial_3 A^1)^2 - (\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[A^0 \Delta A^0 + A^0 \partial_0 \partial_1 A^1 + A^1 \partial_0 \partial_1 A^0 + A^0 \partial_0 \partial_2 A^2 + A^2 \partial_0 \partial_2 A^0 + A^1 \partial_0^2 A^1 + A^2 \partial_0^2 A^2 \right. \\ &\quad \left. - A^2 \partial_3^2 A^2 - A^1 \partial_3^2 A^1 - A^2 \partial_1^2 A^2 - A^1 \partial_2^2 A^1 + A^1 \partial_1 \partial_2 A^2 + A^2 \partial_1 \partial_2 A^1 \right]. \quad (3.271) \end{aligned}$$

Hier haben wir zum dritten Gleichheitszeichen alle Terme partiell integriert (und die entsprechenden Oberflächenterme vernachlässigt) und dabei die Terme in den Indizes symmetrisiert. Gleichung (3.271) läßt sich kompakt in Matrixnotation schreiben,

$$\mathcal{L}_0|_{A^3=0} = -\frac{1}{2} (A^0, A^1, A^2) \begin{pmatrix} \Delta & \partial_0 \partial_1 & \partial_0 \partial_2 \\ \partial_0 \partial_1 & \partial_0^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 & \partial_1 \partial_2 \\ \partial_0 \partial_2 & \partial_1 \partial_2 & \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}. \quad (3.272)$$

Wir substituieren nun $A^0 = iA^\tau$ und entwickeln alle Felder nach Fourier,

$$A^\mu(X) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{A}_K^\mu, \quad \mu = \tau, 1, 2, \quad (3.273)$$

setzen diese Entwicklung in Gl. (3.272) ein und integrieren über das Raum-Zeit-Volumen. Mit $\partial_0 = i\partial_\tau$ ergibt dies

$$\begin{aligned} &\int_X \mathcal{L}_0|_{A^3=0} \\ &= -\frac{1}{2T^2} \sum_K (\tilde{A}_K^\tau, \tilde{A}_K^1, \tilde{A}_K^2) \begin{pmatrix} \mathbf{k}^2 & \omega_n k^x & \omega_n k^y \\ \omega_n k^x & \omega_n^2 + \mathbf{k}^2 - k_x^2 & -k^x k^y \\ \omega_n k^y & -k^x k^y & \omega_n^2 + \mathbf{k}^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{-K}^\tau \\ \tilde{A}_{-K}^1 \\ \tilde{A}_{-K}^2 \end{pmatrix} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \sum_K \tilde{\mathbf{A}}_K \cdot \frac{\mathbf{B}(K)}{T^2} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{-K}, \quad (3.274) \end{aligned}$$

mit $\tilde{\mathbf{A}}_K \equiv (\tilde{A}_K^\tau, \tilde{A}_K^1, \tilde{A}_K^2)$. Wir erkennen, dass die Nullmoden $\tilde{\mathbf{A}}_0$ nicht in der Wirkung (3.274) auftreten. Desweiteren tritt auch \tilde{A}_K^τ für $\mathbf{k} = 0$ und beliebiges ω_n nicht auf. Wir müssen diese Moden also von der Funktionalintegration ausschließen. Wir integrieren dann über die nach Gl. (3.66) gelisteten Moden (1), aber für \tilde{A}_K^τ ohne $\mathbf{k} = 0$, sowie die Moden (2) – (4), und bezeichnen diese wieder (etwas unpräzise) mit “ $K > 0$ ”.

Für die Zustandssumme erhalten wir dann mit den üblichen Rechenschritten (bis auf irrelevante Konstanten)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \det [-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] \int \prod_{K>0} d\text{Re}\tilde{\mathbf{A}}_K d\text{Im}\tilde{\mathbf{A}}_K \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_K \tilde{\mathbf{A}}_K \cdot \frac{\mathbf{B}(K)}{T^2} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{-K} \right) \\ &= \det [-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] \prod_{K \neq 0} \left(\det_{3 \times 3} \frac{\mathbf{B}(K)}{T^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.275)$$

Im letzten Schritt haben wir das Produkt wieder auf alle Moden mit Ausnahme der Nullmoden ausgedehnt. Die Determinante von $\mathbf{B}(K)/T^2$ ist

$$\begin{aligned} \det_{3 \times 3} \frac{\mathbf{B}(K)}{T^2} &= \mathbf{k}^2 [(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 - k_x^2)(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 - k_y^2) - k_x^2 k_y^2] \\ &\quad - \omega_n k^x [\omega_n k^x (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 - k_y^2) + \omega_n k^x k_y^2] \\ &\quad + \omega_n k^y [-\omega_n k^y k_x^2 - \omega_n k^y (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 - k_x^2)] \\ &= \mathbf{k}^2 [(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2)^2 - (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2)(\mathbf{k}^2 - k_z^2)] - \omega_n^2 (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2)(\mathbf{k}^2 - k_z^2) \\ &= (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2)^2 k_z^2. \end{aligned} \quad (3.276)$$

Die Faddeev–Popov–Determinante kann wie bekannt (s. Vorlesung “Quantenfeldtheorie”) als Integral über Graßmann–wertige Funktionen, die sog. **Faddeev–Popov–Geistfelder**, geschrieben werden,

$$\det [-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] = \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left[\int_{X,Y} \bar{\eta}(X) \partial_3 \delta^{(4)}(X - Y) \eta(Y) \right], \quad (3.277)$$

vgl. Gl. (3.172). Als Graßmann–wertige Funktionen erfüllen die Faddeev–Popov–Geistfelder **Antivertauschungsrelationen**, sind aber **periodisch** im Intervall $[0, 1/T]$, mit **bosonischen Matsubara–Frequenzen** $\omega_n = 2\pi nT$, d.h. sie gehorchen der **Bose–Einstein–Statistik**. Die Fourier–Entwicklung der Faddeev–Popov–Geistfelder lautet

$$\eta(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_K e^{-iK \cdot X} \tilde{\eta}_K, \quad \bar{\eta}(X) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_K e^{iK \cdot X} \tilde{\bar{\eta}}_K. \quad (3.278)$$

Der Normierungsfaktor ergibt sich aus der Tatsache, dass die Faddeev–Popov–Geistfelder in axialer Eichung die Dimension $[\text{MeV}]^{3/2}$ (wie Dirac–Fermionen) haben (in anderen Eichungen kann die Dimension u.U. eine andere sein, s. Übungsaufgabe 3.5). Setzen wir dies in den Exponenten in Gl. (3.277) ein, so erhalten wir

$$\int_{X,Y} \bar{\eta}(X) \partial_3 \delta^{(4)}(X - Y) \eta(Y) = \int_X \bar{\eta}(X) \partial_3 \eta(X) = \sum_K \tilde{\bar{\eta}}_K \frac{ik^z}{T} \tilde{\eta}_K. \quad (3.279)$$

Die Nullmode ist wieder vom Funktionalintegral auszuschließen. Damit haben wir

$$\det [-\partial_3 \delta^{(4)}(X - Y)] = \mathfrak{N} \det_{K \neq 0} \frac{k^z}{T} = \mathfrak{N} \prod_{K \neq 0} \frac{k^z}{T}. \quad (3.280)$$

Für die Zustandssumme erhalten wir damit (bis auf irrelevante Konstanten) das Endresultat

$$\mathcal{Z}_0 = \prod_{K \neq 0} \frac{k^z}{T} \left[\frac{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2)^2 k_z^2}{T^6} \right]^{-1/2} = \prod_{K \neq 0} \left(\frac{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2}{T^2} \right)^{-1}. \quad (3.281)$$

Man beachte, dass die Faddeev–Popov–Determinante den (unphysikalischen) Beitrag $\sim k_z^2$ zur Determinante der Eichfelder aufhebt. Für den Logarithmus der Zustandssumme haben wir dann

$$\ln \mathcal{Z}_0 = - \sum_{K \neq 0} \ln \frac{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2}{T^2} = - \sum_{K \neq 0} \ln \frac{\mathbf{k}^2 - k_0^2}{T^2}. \quad (3.282)$$

Dies ist die Zustandssumme für **zwei** Freiheitsgrade von masselosen skalaren neutralen Bosonen und damit das erwartete Resultat: Photonen sind masselose Teilchen mit der Energie $E_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}| \equiv k$ und zwei Polarisationsfreiheitsgraden.

Im thermodynamischen Limes kann die Beschränkung auf $K \neq 0$ aufgehoben werden (s. Diskussion in Abschnitt 3.6) und wir erhalten nach Ausführung der bosonischen Matsubara–Summe mit den gewohnten Methoden für den Druck eines Photonengases

$$p_0 = \frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}_0 = -2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{k}{2} + T \ln (1 - e^{-k/T}) \right]. \quad (3.283)$$

Der Faktor 2 spiegelt die beiden Polarisationsfreiheitsgrade des Photons wider. Der erste Term unter dem Integral ist wieder die Nullpunktenergie, die durch Renormierung beseitigt werden muss. Der zweite Term, d.h. der thermische Anteil, läßt sich exakt auswerten. Eine partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} p_{0,T} &= -2T \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-k/T}) = -2 \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 - e^{-x}) \\ &= 2 \frac{T^4}{6\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = 2 \frac{\pi^2 T^4}{90}, \end{aligned} \quad (3.284)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (3.411.1) aus Ref. [7] benutzt haben, sowie $\Gamma(4)\zeta(4) = 3! \pi^4/90$.

Übungsaufgabe 3.5: Berechne die Zustandssumme des Photonengases in Lorenz–Eichung, $F_X[A] = \partial_X \cdot A(X) = 0$.

4 Störungstheorie

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der störungstheoretischen Berechnung der Zustandssumme, d.h. mit der **Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten**. Wie in der Quantenfeldtheorie im Vakuum gibt es eine Darstellung der einzelnen Beiträge in Form von **Feynman-Diagrammen**. Wir geben die Feynman-Diagramme, die die Beiträge zur Zustandssumme in führender Ordnung in der Kopplungskonstanten repräsentieren, für die ϕ^4 -Theorie, die Yukawa-Theorie, die QED und die QCD an. Wir stellen die **Feynman-Regeln der Statistischen Feldtheorie** für die Berechnung der einzelnen Diagramme auf. Konkret berechnen wir die Diagramme führender Ordnung für die ϕ^4 -Theorie und die QED. Im Zuge der Berechnungen führen wir wichtige Konzepte ein, die helfen, Rechenschritte systematisch zu organisieren und zu vereinfachen: **Spektralfunktionen**, die sog. **gemischte Darstellung des Propagators** und die **Projektordarstellung des fermionischen Propagators**.

4.1 Entwicklung in Potenzen der Kopplungskonstanten

Für jede beliebige Feldtheorie können wir die Lagrange-Dichte in einen freien und einen wechselwirkenden Anteil aufspalten,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (4.1)$$

wobei der freie Anteil für bosonische Felder alle quadratischen und für fermionische Felder alle bilinearen Terme enthält und der wechselwirkende Anteil alle übrigen Terme (die gerade die Wechselwirkung der Felder untereinander charakterisieren) zusammenfasst.

Beispiele:

$$\begin{aligned} (1) \ \phi^4\text{-Theorie:} \quad \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \\ \mathcal{L}_I &= -\lambda \phi^4. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} (2) \ \text{Yukawa-Theorie:} \quad \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi} (i\not{\partial} - M) \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \\ \mathcal{L}_I &= g \bar{\psi} \phi \psi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} (3) \ \text{QED:} \quad \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi} (i\not{\partial} - M) \psi - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu, \\ \mathcal{L}_I &= e \bar{\psi} A^\mu \gamma_\mu \psi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hier haben wir den Feldstärketensor (3.246) eingesetzt, sowie seine Antisymmetrie ausgenutzt, um die Lagrange-Dichte (3.245) des elektromagnetischen Feldes explizit durch das Eichfeld A^μ auszudrücken und zu vereinfachen.

4 Störungstheorie

$$\begin{aligned}
(4) \text{ QCD: } \quad \mathcal{L}_0 &= \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{i=1}^{N_c} \bar{\psi}_i^f (i\not{\partial} - M_f) \psi_i^f - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \partial^\mu A_\nu^a, \\
\mathcal{L}_I &= g \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{i,j=1}^{N_c} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \bar{\psi}_i^f A_a^\mu (T_a)_{ij} \gamma_\mu \psi_j^f \\
&\quad - g \sum_{a,b,c=1}^{N_c^2-1} f_{abc} A_a^\mu A_b^\nu \partial_\mu A_\nu^c - \frac{g^2}{4} \sum_{a,b,c,d,e=1}^{N_c^2-1} f_{abe} f_{cde} A_a^\mu A_b^\nu A_\mu^c A_\nu^d. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Hier haben wir die nicht-Abelschen Wechselwirkungsterme aus der Yang–Mills–Lagrange–Dichte (vgl. Gl. (5.293) der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”) vom freien Anteil separiert und in die Wechselwirkungs–Lagrange–Dichte inkorporiert, sowie alle Flavor– (f) und Farbindices (i, j für fundamentale, a, b, c, d, e für adjungierte Farben) explizit ausgeschrieben.

Für alle Theorien kann man die großkanonische Zustandssumme in die folgende Form bringen

$$\mathcal{Z} = \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi e^{S[\phi]}, \quad (4.6)$$

wobei wir bereits über die bosonischen kanonisch konjugierten Felder integriert und das Ergebnis in der Normierungskonstanten \mathfrak{R} absorbiert haben (die damit neben der Volumenabhängigkeit, s. Gl. (3.39), auch noch eine Temperaturabhängigkeit bekommt, vgl. Gl. (3.67)). Hier steht $\mathcal{D}\phi$ generisch für die Funktionalintegration über **alle** Felder der jeweiligen Theorie und

$$\begin{aligned}
S[\phi] &= S_0[\phi] + S_I[\phi], \\
S[\phi] &= \int_X \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad S_0[\phi] = \int_X \mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu \phi), \quad S_I[\phi] = \int_X \mathcal{L}_I(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Im Falle von erhaltenen Ladungen muss man noch einen Term $\mu\mathcal{N}$ in \mathcal{L}_0 inkorporieren, sowie bei geladenen skalaren Bosonen den Massenterm modifizieren, s. Gl. (3.103).

Wir schreiben nun

$$e^{S[\phi]} = e^{S_0[\phi]+S_I[\phi]} = e^{S_0[\phi]} e^{S_I[\phi]} = e^{S_0[\phi]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (S_I[\phi])^n, \quad (4.8)$$

und setzen dies in Gl. (4.6) ein. Unter der Annahme, dass das Funktionalintegral absolut und gleichmäßig konvergiert, darf man die Exponentialreihe mit der Funktionalintegration vertauschen und erhält

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi (S_I[\phi])^n e^{S_0[\phi]} = \mathcal{Z}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi (S_I[\phi])^n e^{S_0[\phi]}}{\mathcal{Z}_0} \\
&\equiv \mathcal{Z}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S_I[\phi])^n \rangle_0, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

wobei wir den Erwartungswert, bzw. den **statistischen Mittelwert** eines Funktionals der Felder ähnlich wie in Gl. (3.116) definiert haben,

$$\langle F[\phi] \rangle_0 \equiv \frac{\Re \int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{S_0[\phi]}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{\Re \int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{S_0[\phi]}}{\Re \int \mathcal{D}\phi e^{S_0[\phi]}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{S_0[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{S_0[\phi]}} . \quad (4.10)$$

Wir definieren den Wechselwirkungsanteil der großkanonischen Zustandssumme als

$$\mathcal{Z}_I \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S_I[\phi])^n \rangle_0 , \quad (4.11)$$

so dass

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_I \implies \ln \mathcal{Z} = \ln \mathcal{Z}_0 + \ln \mathcal{Z}_I , \quad (4.12)$$

woraus man ersieht, dass die Wechselwirkungsanteile **additive Korrekturen** zum Logarithmus der Zustandssumme darstellen.

Bemerkungen:

- (i) $\ln \mathcal{Z}_I$ ist eine **Potenzreihe in der Wechselwirkung**. Dies ist offensichtlich, denn unter Benutzung der Potenzreihenentwicklung des Logarithmus,

$$\ln(1+x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} x^m ,$$

sowie Gl. (4.11) haben wir

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_I &= \ln \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S_I[\phi])^n \rangle_0 \right) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S_I[\phi])^n \rangle_0 \right)^m \\ &= \langle S_I[\phi] \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle (S_I[\phi])^2 \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle S_I[\phi] \rangle_0^2 + \dots . \end{aligned} \quad (4.13)$$

- (ii) $\ln \mathcal{Z}_I$ ist eine **Potenzreihe in der Kopplungskonstante**. Dies folgt unmittelbar aus (i), da $S_I[\phi]$ proportional zur Kopplungskonstanten (oder Potenzen der Kopplungskonstanten, s. Gl. (4.5)) ist. Beispielsweise haben wir für die ϕ^4 -Theorie

$$S_I[\phi] = -\lambda \int_X \phi^4(X) , \quad (4.14)$$

und damit

$$\ln \mathcal{Z}_I = -\lambda \int_X \langle \phi^4(X) \rangle_0 + \frac{\lambda^2}{2} \int_{X,Y} [\langle \phi^4(X)\phi^4(Y) \rangle_0 - \langle \phi^4(X) \rangle_0 \langle \phi^4(Y) \rangle_0] + \dots . \quad (4.15)$$

- (iii) $\mathcal{Z}_I - 1$ ist die **Summe aller Vakuumdiagramme**, d.h. Diagramme ohne äußere Beine. Dies ist weniger offensichtlich. In der Quantenfeldtheorie im Vakuum spielen

solche Diagramme keine Rolle, da sie durch die Normierung des erzeugenden Funktionals für N -Punkt-Korrelationsfunktionen eliminiert werden. In der Statistischen Feldtheorie sind sie dagegen von essentieller Bedeutung.

Zum Beweis definieren wir zunächst die großkanonische Zustandssumme **in Anwesenheit einer äußeren Quelle** $J(X)$,

$$\mathcal{Z}_0[J] \equiv \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ S_0[\phi] + \int_X J(X)\phi(X) \right\} . \quad (4.16)$$

Offensichtlich gilt

$$\mathcal{Z}_0[0] \equiv \mathcal{Z}_0 , \quad (4.17)$$

d.h. in Abwesenheit äußerer Quellen ist das Funktional (4.16) identisch mit der gewöhnlichen großkanonischen Zustandssumme des nichtwechselwirkenden Systems. Den statistischen Mittelwert des nichtwechselwirkenden Systems in Anwesenheit äußerer Quellen definieren wir analog zu Gl. (4.10),

$$\langle F[\phi] \rangle_{0,J} \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi F[\phi] \exp \left\{ S_0[\phi] + \int_X J(X)\phi(X) \right\} . \quad (4.18)$$

Damit läßt sich der Wechselwirkungsanteil der großkanonischen Zustandssumme in Anwesenheit äußerer Quellen definieren,

$$\mathcal{Z}_I[J] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S_I[\phi])^n \rangle_{0,J} . \quad (4.19)$$

Wiederum gilt

$$\mathcal{Z}_I[0] \equiv \mathcal{Z}_I . \quad (4.20)$$

Weil

$$\phi(X) \exp \left\{ S_0[\phi] + \int_Y J(Y)\phi(Y) \right\} \equiv \frac{\delta}{\delta J(X)} \exp \left\{ S_0[\phi] + \int_Y J(Y)\phi(Y) \right\} , \quad (4.21)$$

können wir schreiben

$$\begin{aligned} \langle (S_I[\phi])^n \rangle_{0,J} &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi (S_I[\phi])^n \exp \left\{ S_0[\phi] + \int_X J(X)\phi(X) \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi \left(S_I \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^n \exp \left\{ S_0[\phi] + \int_X J(X)\phi(X) \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \left(S_I \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^n \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ S_0[\phi] + \int_X J(X)\phi(X) \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \left(S_I \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^n \mathcal{Z}_0[J] . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Damit folgt

$$\mathcal{Z}_I[J] \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \left(S_I \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)^n \right\rangle_{0,J} \mathcal{Z}_0[J] \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \exp \left\{ S_I \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \mathcal{Z}_0[J] . \quad (4.23)$$

Dieser Ausdruck ist, mit Ausnahme der Normierung, formal **äquivalent zum erzeugenden Funktional für die N -Punkt-Korrelationsfunktionen** in der Quantenfeldtheorie im Vakuum, vgl. Gl. (6.11) der Vorlesung “Quantenfeldtheorie” (die Normierung ist nicht identisch, da $\mathcal{Z}_I[0] = \mathcal{Z}_I \neq 1$).

Betrachten wir als Beispiel wieder die ϕ^4 -Theorie. Dann können wir sofort Gl. (6.24) aus der Vorlesung “Quantenfeldtheorie” verwenden (man beachte, dass wir hier den dort auftretenden Faktor $1/4!$ in der Definition von λ absorbiert haben),

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_I[J] &\equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_0[J]} \left[1 + 3 \text{ (two circles)} + 6 \text{ (circle with external lines)} + \text{ (four external lines)} + O(\lambda^2) \right] \mathcal{Z}_0[J] \\ &= 1 + 3 \text{ (two circles)} + 6 \text{ (circle with external lines)} + \text{ (four external lines)} + O(\lambda^2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

da sich der Nenner gegen den letzten Faktor im Zähler weghebt. Setzen wir nun noch die Quellen (die durch die Kreise mit Kreuz symbolisiert werden) gleich null, erhalten wir

$$\mathcal{Z}_I \equiv \mathcal{Z}_I[0] = 1 + 3 \text{ (two circles)} + O(\lambda^2). \quad (4.25)$$

Offenbar besteht $\mathcal{Z}_I - 1$ nur aus Vakuumdiagrammen (da die äußeren Quellen in der Entwicklung von $\mathcal{Z}_I[J]$ gleich null gesetzt werden), was die Behauptung beweist.

- (iv) In \mathcal{Z}_I ist die Summe aller **verbundenen Vakuumdiagramme**. In der Quantenfeldtheorie im Vakuum erzeugt $W[J] \equiv -i \ln \mathcal{Z}[J]$ alle verbundenen N -Punkt-Korrelationsfunktionen, s. Abschnitt 6.2 der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”. Man macht sich nun mit analogen Argumenten wie dort klar, dass $\ln \mathcal{Z}_I[J]$ alle verbundenen Diagramme inklusive äußerer Quellen erzeugt und dementsprechend $\ln \mathcal{Z}_I[0] \equiv \ln \mathcal{Z}_I$ alle verbundenen Vakuumdiagramme.

Für die ϕ^4 -Theorie erhalten wir dann beispielsweise in führender Ordnung in λ

$$\ln \mathcal{Z}_I \equiv 3 \text{ (two circles)} + O(\lambda^2), \quad (4.26)$$

wobei wir Gl. (4.25) und die Reihenentwicklung des Logarithmus benutzt haben.

4.2 ϕ^4 -Theorie

In diesem Abschnitt berechnen wir die Korrektur in führender Ordnung in λ für den Wechselwirkungsanteil $\ln \mathcal{Z}_I$ der Zustandssumme in der ϕ^4 -Theorie. Unser Ausgangspunkt ist Gl. (4.15), aus der wir den $O(\lambda)$ -Term ablesen,

$$\ln \mathcal{Z}_I = -\lambda \int_X \langle \phi^4(X) \rangle_0 + O(\lambda^2). \quad (4.27)$$

Nach Definition ist

$$\int_X \langle \phi^4(X) \rangle_0 \equiv \int_X \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\phi \phi^4(X) e^{S_0[\phi]}. \quad (4.28)$$

4 Störungstheorie

Wir benutzen die Fourier-Entwicklung (3.56) und erhalten

$$\int_X \langle \phi^4(X) \rangle_0 = \frac{1}{T^2 V^2} \sum_{K_1, \dots, K_4} \int_X e^{-i \sum_{i=1}^4 K_i \cdot X} \frac{\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_K e^{S_0[\tilde{\phi}]} \tilde{\phi}_{K_1} \tilde{\phi}_{K_2} \tilde{\phi}_{K_3} \tilde{\phi}_{K_4}}{\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_K e^{S_0[\tilde{\phi}]}}. \quad (4.29)$$

Hier haben wir das Integrationsmaß

$$\mathcal{D}\tilde{\phi}_K \equiv d\tilde{\phi}_0 \prod_{K>0} d \operatorname{Re}\tilde{\phi}_K d \operatorname{Im}\tilde{\phi}_K \quad (4.30)$$

definiert, vgl. Gl. (3.67), und die Fourier-Darstellung der Wirkung,

$$S_0[\tilde{\phi}] \equiv -\frac{1}{2} \sum_K \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} \tilde{\phi}_K \tilde{\phi}_{-K}, \quad (4.31)$$

benutzt, vgl. Gl. (3.63), mit dem inversen thermischen Propagator (3.64). Weil die Funktionalintegration gaußsch ist, müssen die Impulse K_i paarweise (entgegengesetzt) gleich sein, ansonsten verschwindet der Ausdruck in Gl. (4.29),

$$\begin{aligned} & (K_1 = -K_2 \quad \text{und} \quad K_3 = -K_4) \\ \text{oder} & \quad (K_1 = -K_3 \quad \text{und} \quad K_2 = -K_4) \\ \text{oder} & \quad (K_1 = -K_4 \quad \text{und} \quad K_2 = -K_3). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Mit Gl. (3.57) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_X \langle \phi^4(X) \rangle_0 &= \frac{1}{T^2 V^2} \frac{V}{T} \sum_{K_1, \dots, K_4} \delta_{\sum_{i=1}^4 K_i, 0}^{(4)} \frac{1}{\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_K e^{S_0[\tilde{\phi}]}} \\ &\times \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_K e^{S_0[\tilde{\phi}]} \left[\delta_{K_1, -K_2}^{(4)} \delta_{K_3, -K_4}^{(4)} \tilde{\phi}_{K_1} \tilde{\phi}_{-K_1} \tilde{\phi}_{K_3} \tilde{\phi}_{-K_3} + \delta_{K_1, -K_3}^{(4)} \delta_{K_2, -K_4}^{(4)} \tilde{\phi}_{K_1} \tilde{\phi}_{-K_1} \tilde{\phi}_{K_2} \tilde{\phi}_{-K_2} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{K_1, -K_4}^{(4)} \delta_{K_2, -K_3}^{(4)} \tilde{\phi}_{K_1} \tilde{\phi}_{-K_1} \tilde{\phi}_{K_2} \tilde{\phi}_{-K_2} \right] \\ &= \frac{3}{T^2 V^2} \frac{V}{T} \sum_{K_1, K_2} \frac{\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_K e^{S_0[\tilde{\phi}]} \tilde{\phi}_{K_1} \tilde{\phi}_{-K_1} \tilde{\phi}_{K_2} \tilde{\phi}_{-K_2}}{\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_K e^{S_0[\tilde{\phi}]}} , \end{aligned} \quad (4.33)$$

wobei wir zum letzten Schritt die drei Terme in eckigen Klammern durch Umbenennung der Summationsindizes als identisch erkannt haben. Die Delta-Funktionen in den eckigen Klammern sorgen dafür, dass die erste Delta-Funktion gleich eins wird und dass zwei der vier Summen verschwinden. Die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{S_0[\tilde{\phi}]} &\equiv \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_K \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} \tilde{\phi}_K \tilde{\phi}_{-K} \right] = \prod_K \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} \tilde{\phi}_K \tilde{\phi}_{-K} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{D}_0^{-1}(0)}{T^2} \tilde{\phi}_0^2 \right] \prod_{K>0} \exp \left\{ -\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2} \left[\left(\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K \right)^2 + \left(\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

faktorisiert und kann auf die einzelnen Integrationen im Integrationsmass (4.30) verteilt werden,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\tilde{\phi}_K e^{S_0[\tilde{\phi}]} &= d\tilde{\phi}_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(0)}{T^2}\tilde{\phi}_0^2\right] \prod_{K>0} d\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2}\left(\operatorname{Re}\tilde{\phi}_K\right)^2\right] \\ &\times \prod_{K>0} d\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K)}{T^2}\left(\operatorname{Im}\tilde{\phi}_K\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Man erkennt dann, dass mit Ausnahme der Integrale über die Moden mit Impulsen K_1, K_2 sich alle anderen Integrale in Gl. (4.33) im Zähler und Nenner gegenseitig wegheben. Desweiteren faktorisieren die Integrale über diese beiden Moden. Wir betrachten im Folgenden einen dieser beiden Faktoren, z.B. den für K_1 .

(i) Falls $K_1 = 0$, so gilt

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}_0 \tilde{\phi}_0^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(0)}{T^2}\tilde{\phi}_0^2\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(0)}{T^2}\tilde{\phi}_0^2\right]} = T^2\mathcal{D}_0(0), \quad (4.36)$$

wobei wir die Glgen. (3.321.3) und (3.461.2) aus Ref. [7] für die Gauß-Integrale im Nenner und Zähler benutzt haben.

(ii) Falls $K_1 \neq 0$, so gilt wegen Gl. (3.66), dass

$$\tilde{\phi}_{K_1}\tilde{\phi}_{-K_1} = \left(\operatorname{Re}\tilde{\phi}_{K_1} + i\operatorname{Im}\tilde{\phi}_{K_1}\right)\left(\operatorname{Re}\tilde{\phi}_{K_1} - i\operatorname{Im}\tilde{\phi}_{K_1}\right) = \left(\operatorname{Re}\tilde{\phi}_{K_1}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\tilde{\phi}_{K_1}\right)^2.$$

Mit den Abkürzungen $x \equiv \operatorname{Re}\tilde{\phi}_{K_1}$, $y \equiv \operatorname{Im}\tilde{\phi}_{K_1}$ erhalten wir dann für den betreffenden Faktor

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx dy (x^2 + y^2) \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K_1)}{T^2}(x^2 + y^2)\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} dx dy \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K_1)}{T^2}(x^2 + y^2)\right]} &\equiv \frac{\int_0^{\infty} dr r^3 \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K_1)}{T^2}r^2\right]}{\int_0^{\infty} dr r \exp\left[-\frac{\mathcal{D}_0^{-1}(K_1)}{T^2}r^2\right]} \\ &\equiv T^2\mathcal{D}_0(K_1), \end{aligned} \quad (4.37)$$

wobei wir im ersten Schritt die Radialvariable $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ eingeführt und im letzten Schritt Gl. (3.461.3) aus Ref. [7] benutzt haben.

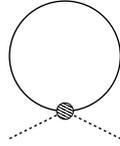
In beiden Fällen (i) und (ii) erhalten wir also dasselbe Resultat. Entsprechendes gilt für den Faktor mit dem Impuls K_2 . Eingesetzt in Gl. (4.33) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_X \langle \phi^4(X) \rangle_0 &= \frac{3}{T^2 V^2} \frac{V}{T} \sum_{K_1, K_2} T^2 \mathcal{D}_0(K_1) T^2 \mathcal{D}_0(K_2) = 3 \frac{V}{T} \sum_{K_1} \frac{T}{V} \mathcal{D}_0(K_1) \sum_{K_2} \frac{T}{V} \mathcal{D}_0(K_2) \\ &\equiv 3 \frac{V}{T} \left[\frac{T}{V} \sum_K \mathcal{D}_0(K) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Eingesetzt in Gl. (4.27) erhalten wir dann für den Logarithmus des Wechselwirkungsanteils der Zustandssumme

$$\ln \mathcal{Z}_I = -3\lambda \frac{V}{T} \mathcal{T}^2 + O(\lambda^2), \quad (4.39)$$

mit dem **Kaulquappen-Diagramm**

$$\mathcal{T} \equiv \frac{T}{V} \sum_K \mathcal{D}_0(K) \equiv \text{Diagramm} . \quad (4.40)$$


Hierbei wurde \mathcal{T} so definiert, dass der Vertexfaktor $-\lambda$ nicht zum Diagramm gehört. Damit ist Gl. (4.39) konsistent mit Gl. (4.26), denn das Quadrat von zwei Kaulquappen-Diagrammen ergibt gerade das Doppelblasen-Diagramm.

Mit Hilfe von Gl. (3.82) kann das Kaulquappen-Diagramm sofort ausgewertet werden, es ist in der Funktion $f(k_0)$ lediglich x durch $E_{\mathbf{k}}/T$, sowie der Faktor T im Zähler durch 1 zu ersetzen, vgl. Gl. (3.64),

$$\mathcal{T} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/T} - 1} \right). \quad (4.41)$$

Der erste Term unter dem Integral stellt den **Vakuumbeitrag** dar. Er divergiert und muss mit Hilfe von Regularisierung und Renormierung behandelt werden. Man kann sich davon überzeugen, dass er identisch mit der in der Vorlesung ‘‘Quantenfeldtheorie’’ bereits behandelten Ein-Schleifen-Korrektur zur nackten Masse ist. Der zweite Term repräsentiert den **thermischen Beitrag**, der durch die **Wechselwirkung** mit Teilchen im **Wärmebad** erzeugt wird,

$$\mathcal{T}_T \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/T} - 1}. \quad (4.42)$$

Im Allgemeinen gibt es keinen geschlossenen analytischen Ausdruck für das Integral, lediglich für $m = 0$ (so dass $E_{\mathbf{k}} \equiv k$) kann man letzteres exakt angeben,

$$\mathcal{T}_T = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{k} \frac{1}{e^{k/T} - 1} = \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} = \frac{T^2}{2\pi^2} \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{T^2}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{T^2}{12}, \quad (4.43)$$

wobei wir Gl. (3.411.1) aus Ref. [7] benutzt haben. Damit wird der thermische Wechselwirkungsbeitrag zum Druck

$$p_{I,T} \equiv \frac{T}{V} \ln \mathcal{Z}_{I,T} = -3\lambda \mathcal{T}_T^2 + O(\lambda^2) = -3\lambda \left(\frac{T^2}{12} \right)^2 + O(\lambda^2) = -\frac{\lambda}{48} T^4 + O(\lambda^2). \quad (4.44)$$

Der Druck eines wechselwirkungsfreien Bose-Gases (mit einem Freiheitsgrad) ist gemäß Gl. (3.284)

$$p_0 = \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (4.45)$$

so dass der thermische Anteil des Gesamtdruck der masselosen ϕ^4 -Theorie in erster Ordnung in λ die folgende Form annimmt,

$$p = p_0 + p_{I,T} = \frac{\pi^2}{90} T^4 - \frac{\lambda}{48} T^4 + O(\lambda^2) = \left(\frac{\pi^2}{90} - \frac{\lambda}{48} \right) T^4 + O(\lambda^2). \quad (4.46)$$

Offenbar wird der Druck aufgrund der Wechselwirkung **reduziert** (da $\lambda > 0$, um ein nach unten beschränktes Potential zu gewährleisten).

Die Berechnung des Kaulquappen-Diagramms war mit den bisher diskutierten Methoden problemlos möglich. Aber bei komplizierteren Schleifen-Diagrammen bietet es sich an, methodische Werkzeuge zu benutzen, die helfen, die Rechnungen systematischer und transparenter zu gestalten. Dies sind die **Spektraldichte** und die **gemischte Darstellung des Propagators**, die wir in den folgenden beiden Abschnitten besprechen werden.

4.3 Spektraldichte

26.11.2021

Wir erinnern uns zunächst an die **Cauchysche Integralformel** aus der Funktionentheorie.

Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Zahlenebene und $\Delta(z)$ eine Funktion, die analytisch in G ist. Dann gilt $\forall z \in G$

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dz' \frac{\Delta(z')}{z' - z}, \quad (4.47)$$

wobei $\mathcal{C} \subset G$ eine geschlossene Kurve ist, die den Punkt z umschließt.

Wir nehmen nun an, dass $\Delta(z)$ lediglich Singularitäten auf der reellen Achse hat, also für $z \in \mathbb{R}$, und dass $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Delta(z) = 0$, also dass die Funktion im Unendlichen verschwindet. Dann gilt $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|\text{Im}z| > \eta > 0$:

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\Delta(\omega + i\eta) - \Delta(\omega - i\eta)}{\omega - z}. \quad (4.48)$$

Beweis: Wir benutzen die Cauchysche Integralformel (4.47) für die in Abb. 4.1 gezeigte Kontur. Der Beitrag des Kreises im Unendlichen zur Kontur ist null, da die Funktion $\Delta(z)$ nach Voraussetzung dort verschwindet (für das Verschwinden des Beitrags des Kreises ist ein beliebig schwaches Abklingen im Unendlichen, $\Delta(z) \sim z^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, ausreichend). Also haben wir

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} dz' \frac{\Delta(z')}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\eta}^{\infty-i\eta} dz' \frac{\Delta(z')}{z' - z}, \quad (4.49)$$

wobei das Vorzeichen vor dem zweiten Integral aufgrund der Richtungsumkehr der Integrationskontur zustandekommt. Auf der Kontur im ersten Integral gilt $z' = \omega + i\eta$, auf der Kontur im zweiten Integral $z' = \omega - i\eta$, jeweils mit $\omega \in \mathbb{R}$. Wir substituieren in beiden Integralen die neue Integrationsvariable ω und erhalten

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\Delta(\omega + i\eta)}{\omega - z + i\eta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\Delta(\omega - i\eta)}{\omega - z - i\eta}. \quad (4.50)$$

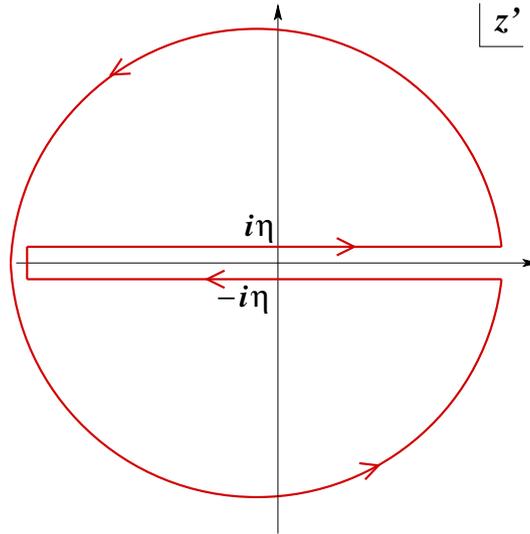


Abbildung 4.1: Kontur \mathcal{C} für den Beweis von Gl. (4.48) in der komplexen z' -Ebene.

Weil aber nach Voraussetzung $|\text{Im}z| > \eta$, haben die Integranden keinen Pol auf der Integrationskontur, den man mit der $\pm i\eta$ -Vorschrift umgehen müsste. Wir dürfen daher in beiden Nennern $\eta = 0$ setzen. Fassen wir die beiden Integrale zusammen, folgt Gl. (4.48), q.e.d..

Falls die Funktion $\Delta(\omega) \in \mathbb{R}$ für $\omega \in \mathbb{R}$, gilt

$$\Delta(\omega + i\eta) - \Delta(\omega - i\eta) \equiv \Delta(\omega + i\eta) - \Delta^*(\omega + i\eta) = 2i \text{Im} \Delta(\omega + i\eta) . \quad (4.51)$$

Wir definieren die **Spektraldichte** als

$$\rho(\omega) = 2 \text{Im} \Delta(\omega + i\eta) . \quad (4.52)$$

Sie ist per Definition **reellwertig**. Damit erhalten wir aus Gl. (4.48) die **Spektraldarstellung** der Funktion $\Delta(z)$,

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega - z} , \quad (4.53)$$

gültig $\forall z$ mit $|\text{Im}z| > \eta > 0$. Insbesondere gilt dann für $z = k_0 + i\delta$, $\delta > \eta$,

$$\begin{aligned} \Delta(k_0 + i\delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega - k_0 - i\delta} \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \mathbf{p} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega - k_0} + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\omega) \delta(\omega - k_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{p} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega - k_0} + \frac{i}{2} \rho(k_0) , \end{aligned} \quad (4.54)$$

wobei wir die Dirac-Identität

$$\frac{1}{x - i\delta} \equiv \mathbf{p} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) \quad (4.55)$$

angewendet haben und \mathfrak{P} für den Hauptwert steht. Da das Hauptwert-Integral in Gl. (4.54) reellwertig ist, erhalten wir $\text{Im}\Delta(k_0 + i\delta) = \rho(k_0)/2$, was mit der Definition (4.52) der Spektraldichte übereinstimmt.

Nun betrachten wir die analytische Fortsetzung des **freien thermischen Propagator**,

$$\mathcal{D}_0(K) = \frac{1}{E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2},$$

s. Gl. (3.64), in die komplexe k_0 -Ebene, d.h. wir lassen nicht nur die Werte $k_0 = -i\omega_n$ zu, sondern betrachten k_0 als **komplexe Variable**. Die **Pole** des Propagators liegen bei $k_0 = \pm E_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{D}_0(K)$ ist analytisch $\forall k_0$ mit $|\text{Im}k_0| > 0$. Desweiteren ist $\lim_{|k_0| \rightarrow \infty} \mathcal{D}_0(K) = 0$. Daher sind alle Voraussetzungen zur Anwendung von Gl. (4.53) gegeben. Es gilt also insbesondere für $k_0 = -i\omega_n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$,

$$\mathcal{D}_0(k_0 = -i\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\rho_0(\omega, \mathbf{k})}{\omega + i\omega_n}. \quad (4.56)$$

Hier musste die Nullmode $n = 0$ ausgeschlossen werden, da für sie $k_0 = 0$ auf der reellen Achse liegt und daher nicht die Voraussetzungen für Gl. (4.53) erfüllt.

Im Integranden von Gl. (4.56) tritt nun die **Spektraldichte des freien thermischen Propagators** $\rho_0(\omega, \mathbf{k})$ auf. Diese können wir aus der Definition (4.52) direkt berechnen,

$$\begin{aligned} \rho_0(\omega, \mathbf{k}) &= 2 \text{Im} \mathcal{D}_0(\omega + i\eta, \mathbf{k}) = 2 \text{Im} \left[\frac{1}{E_{\mathbf{k}}^2 - (\omega + i\eta)^2} \right] \\ &= \frac{2}{2E_{\mathbf{k}}} \text{Im} \left[\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - \omega - i\eta} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + \omega + i\eta} \right] \\ &= \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \text{Im} \left[\mathfrak{P} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - \omega} + \mathfrak{P} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + \omega} + i\pi \delta(E_{\mathbf{k}} - \omega) - i\pi \delta(E_{\mathbf{k}} + \omega) \right] \\ &= \frac{\pi}{E_{\mathbf{k}}} [\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}})], \end{aligned} \quad (4.57)$$

wobei wir zur dritten Zeile wieder die Dirac-Identität (4.55) benutzt haben. Die erste Delta-Funktion entspricht dem Beitrag der Teilchen mit positiver Energie $\omega = +E_{\mathbf{k}}$, die zweite dem Beitrag der Antiteilchen mit negativer Energie $\omega = -E_{\mathbf{k}}$. Da die Teilchen nicht wechselwirken, können sie nicht zerfallen. Typischerweise ist die Halbwertsbreite oder **Zerfallsbreite** der Spektraldichte invers proportional zur Halbwertszeit für den Zerfall eines Teilchens. Eine Delta-Funktion ist unendlich schmal, daher leben die Teilchen unendlich lang, sie sind **stabile Zustände** des Systems. Es gibt lediglich einen delta-funktionsartigen Beitrag “auf der Massenschale” $\omega = \pm E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, s. Abb. 4.2. Dies würde sich ändern, wenn wir die Spektraldichte für den Propagator in einem wechselwirkenden System betrachten. Die Wechselwirkung ermöglicht einerseits **Zerfälle**, welche die Delta-Funktion “ausschmieren”, andererseits aber auch **Streuprozesse** mit Teilchen im Wärmebad, die ebenfalls zu einer Verbreiterung der Spektraldichte führen.

Man beachte dass die Spektraldichte eine **ungerade Funktion** der Energie ω ist,

$$\rho_0(-\omega, \mathbf{k}) = -\rho_0(\omega, \mathbf{k}). \quad (4.58)$$

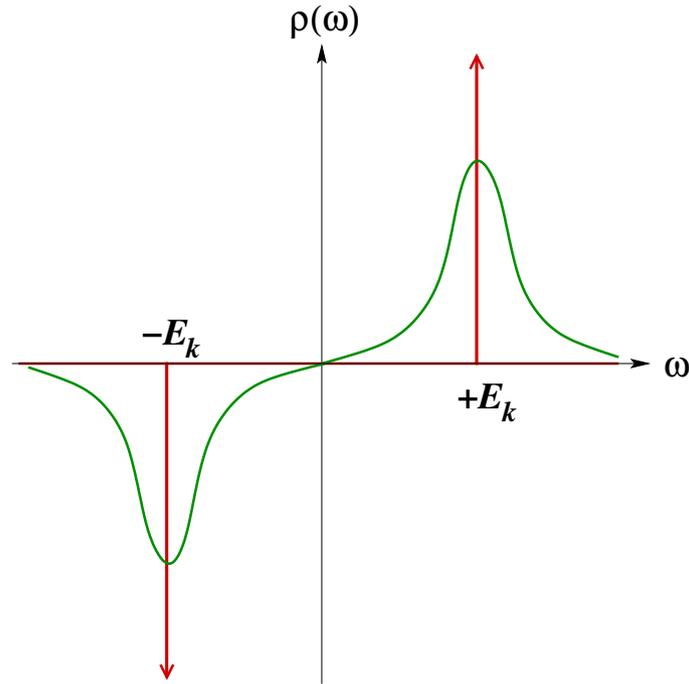


Abbildung 4.2: Die Spektraldichte (4.57) für nichtwechselwirkende Teilchen (rot) und eine mögliche Spektraldichte für ein wechselwirkendes System (grün).

4.4 Propagator in gemischter Darstellung

Wir definieren die **gemischte Darstellung** des Propagators als Fourier-Transformierte des thermischen Propagators bezüglich der Matsubara-Frequenzen,

$$\mathcal{D}_0(k_0 = -i\omega_n, \mathbf{k}) \equiv \int_0^{1/T} d\tau e^{-i\omega_n\tau} \bar{\mathcal{D}}_0(\tau, \mathbf{k}) . \quad (4.59)$$

Die inverse Fourier-Transformation, aus der man den Propagator in gemischter Darstellung berechnen kann, lautet dann

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_0(\tau, \mathbf{k}) &\equiv T \sum_n e^{i\omega_n\tau} \mathcal{D}_0(k_0 = -i\omega_n, \mathbf{k}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_0(\omega, \mathbf{k}) T \sum_n \frac{e^{i\omega_n\tau}}{\omega + i\omega_n} , \end{aligned} \quad (4.60)$$

wobei wir im letzten Schritt den thermischen Propagator in seiner Spektraldarstellung (4.56) eingesetzt haben.

Die Matsubara-Summe lässt sich mit Hilfe von Gl. (3.81) leicht auswerten. Wir wählen jetzt

$$f(k_0) \equiv \frac{e^{-k_0\tau}}{\omega - k_0} , \quad (4.61)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
 T \sum_n \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} + \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \right) \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 \left(\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} + \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \right) \frac{1}{e^{k_0/T} - 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 \left(\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} + \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \right) \frac{1}{e^{k_0/T} - 1}, \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

wobei wir den zweiten Term im ersten Integral durch die Substitution $k_0 \rightarrow -k_0$ in den ersten überführen konnten. Wir schließen nun beide Integrale wie in Abb. 3.4 gezeigt mit einem Halbkreis im Unendlichen rechts von der imaginären Achse. Solange $\tau \in (0, 1/T)$ ist dies erlaubt, da der Beitrag des Halbkreises verschwindet,

$$T \sum_n \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dk_0 \left[\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} \left(1 + \frac{1}{e^{k_0/T} - 1} \right) + \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \frac{1}{e^{k_0/T} - 1} \right], \tag{4.63}$$

mit der in Abb. 3.4 gezeigten Kontur \mathcal{C} . Der erste Term hat einen Pol bei $k_0 = \omega$. Er liegt innerhalb der Kontur, falls $\omega > 0$ ist. Der zweite Term hat einen Pol bei $k_0 = -\omega$. Er liegt innerhalb der Kontur, falls $\omega < 0$ ist. Mit Hilfe des Residuensatzes berechnen wir dann

$$\begin{aligned}
 T \sum_n \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} &= \theta(\omega) e^{-\omega \tau} \left(1 + \frac{1}{e^{\omega/T} - 1} \right) - \theta(-\omega) e^{-\omega \tau} \frac{1}{e^{-\omega/T} - 1} \\
 &= \theta(\omega) e^{-\omega \tau} \left(1 + \frac{1}{e^{\omega/T} - 1} \right) + \theta(-\omega) e^{-\omega \tau} \frac{1}{1 - e^{-\omega/T}} \\
 &= e^{-\omega \tau} \left(1 + \frac{1}{e^{\omega/T} - 1} \right), \tag{4.64}
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{e^x - 1} \tag{4.65}$$

und $\theta(\omega) + \theta(-\omega) = 1$ benutzt haben.

Setzen wir Gl. (4.64) in Gl. (4.60) ein, so erhalten wir für den gemischten Propagator

$$\bar{\mathcal{D}}_0(\tau, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_0(\omega, \mathbf{k}) e^{-\omega \tau} [1 + n_B(\omega)], \tag{4.66}$$

mit der **Bose–Einstein–Verteilungsfunktion**

$$n_B(\omega) \equiv \frac{1}{e^{\omega/T} - 1}. \tag{4.67}$$

Setzen wir nun Gl. (4.57) für die Spektraldichte ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{D}}_0(\tau, \mathbf{k}) &= \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \{ e^{-E_{\mathbf{k}} \tau} [1 + n_B(E_{\mathbf{k}})] - e^{E_{\mathbf{k}} \tau} [1 + n_B(-E_{\mathbf{k}})] \} \\
 &= \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \{ e^{-E_{\mathbf{k}} \tau} [1 + n_B(E_{\mathbf{k}})] + e^{E_{\mathbf{k}} \tau} n_B(E_{\mathbf{k}}) \}, \tag{4.68}
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (4.65) (für $x = -E_{\mathbf{k}}/T$) benutzt haben.

Das Kaulquappen-Diagramm (4.40) läßt sich sehr kompakt mit Hilfe des gemischten Propagators schreiben. Aufgrund von Gl. (4.60) haben wir nämlich

$$\mathcal{T} = \frac{T}{V} \sum_K \mathcal{D}_0(K) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} T \sum_n \mathcal{D}_0(K) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \bar{\mathcal{D}}_0(0, \mathbf{k}) . \quad (4.69)$$

Mit Gl. (4.68) für $\tau = 0$ ergibt dies gerade wieder Gl. (4.41).

4.5 Feynman–Regeln für die ϕ^4 –Theorie

In diesem Abschnitt geben wir die **Feynman–Regeln der Statistischen Feldtheorie für die ϕ^4 –Theorie im Impulsraum** zur Bestimmung von $\ln \mathcal{Z}_I$ an:

- (i) In n -ter Ordnung in Störungstheorie, zeichne alle topologisch inäquivalenten verbundenen Vakuumdiagramme mit n Vertizes.
- (ii) Bestimme die kombinatorischen Faktoren für jedes Diagramm. Berücksichtige in n -ter Ordnung einen zusätzlichen Faktor $1/n!$ (dieser ergibt sich aus der Entwicklung der Exponentialfunktion, s. Gl. (4.13)).
- (iii) Für jeden Vertex gibt es einen Faktor $-\lambda$ sowie eine energie- und impulserhaltende Delta-Funktion

$$\frac{V}{T} \delta_{K_f, K_i}^{(4)} \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \frac{1}{T} \delta_{n_f, n_i} , \quad (4.70)$$

wobei K_i die Summe der in den Vertex einlaufenden und K_f die Summe der aus dem Vertex auslaufenden 4–Impulse sind.

- (iv) Jede interne Linie eines Diagramms repräsentiert einen thermischen Propagator

$$\mathcal{D}_0(K) = \frac{1}{m^2 - K^2} = \frac{1}{E_{\mathbf{k}}^2 - k_0^2} = \frac{1}{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2} .$$

- (v) Es wird über alle internen Impulse summiert,

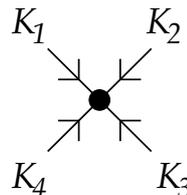
$$\frac{T}{V} \sum_K \equiv T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} .$$

Beispiele:

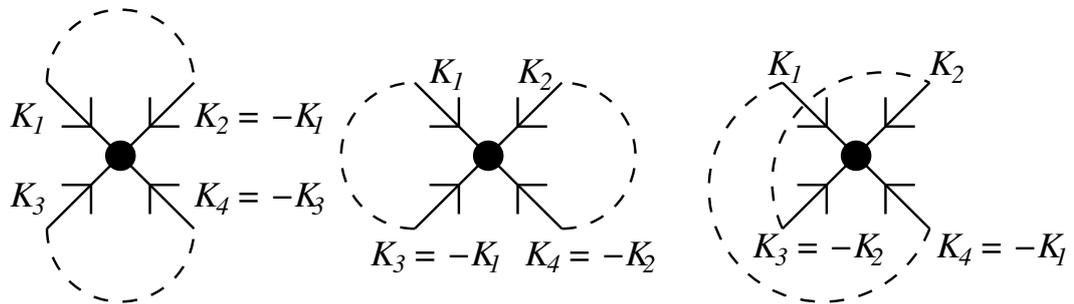
- (1) **Erste Ordnung in λ :**

$$\ln \mathcal{Z}_I^{(1)} = \langle S_I \rangle_0 . \quad (4.71)$$

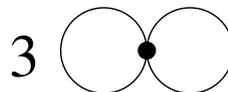
- (i) Erste Ordnung bedeutet, dass es einen Vertex gibt:



Hier haben wir alle Impulse als einlaufend genommen. Das einzige Vakuumdiagramm, das wir zeichnen können, ist dasjenige, bei dem alle Linien des Vertex in sich selbst geschlossen sind. Hierfür gibt es drei Möglichkeiten:



Alle drei Möglichkeiten sind topologisch äquivalent, deshalb gibt es nur ein Diagramm, das Doppelblasen-Diagramm aus Gl. (4.26):



- (ii) Den kombinatorischen Faktor haben wir bereits im vorangegangenen Schritt (i) ermittelt. Er ergibt sich aus den drei Möglichkeiten, die vier Beine des Vertex miteinander zu verbinden.
- (iii,iv,v) Den Ausdruck, den wir mit Hilfe der Feynman-Regeln (iii), (iv) und (v) ermitteln, ist (z.B. für das zweite oben gezeigte Diagramm)

$$\begin{aligned}
 3 \text{ (Diagram)} &= \overbrace{3}^{(ii)} \overbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_1} \mathcal{D}_0(K_1)}^{(v)} \overbrace{\mathcal{D}_0(K_1)}^{(iv)} \overbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_2} \mathcal{D}_0(K_2)}^{(v)} \overbrace{\mathcal{D}_0(K_2)}^{(iv)} \overbrace{(-\lambda) \frac{V}{T} \delta_{K_1+K_2, K_1+K_2}^{(4)}}^{(iii)} \\
 &= -3\lambda \frac{V}{T} \left[\frac{T}{V} \sum_K \mathcal{D}_0(K) \right]^2, \tag{4.72}
 \end{aligned}$$

was mit Gl. (4.39) übereinstimmt.

(2) **Zweite Ordnung in λ :**

$$\ln \mathcal{Z}_I^{(2)} = \frac{1}{2} [\langle S_I^2 \rangle_0 - \langle S_I \rangle_0^2]. \tag{4.73}$$

- (i) Nun gibt es zwei Vertizes:



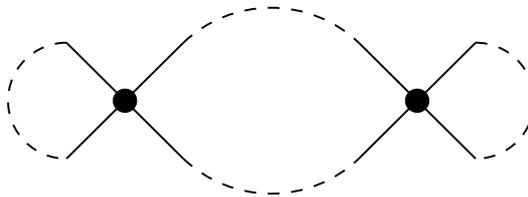
Es gibt drei topologisch inäquivalente Diagramme:

- (a) Man verbindet alle Beine eines Vertex untereinander. Dies ergibt zwei unverbundene Diagramme erster Ordnung:

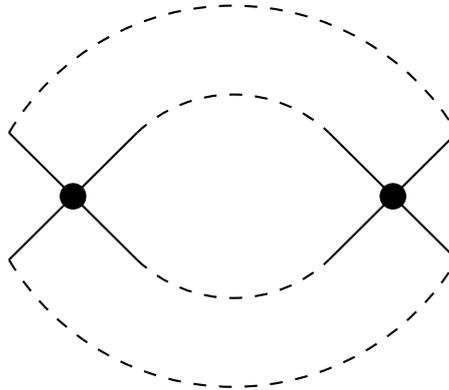


Dieses Diagramm gehört zu $\langle S_I^2 \rangle_0$, aber nicht zu $\ln \mathcal{Z}_I$, da es aus zwei unverbundenen Teilen besteht. Es ist offenbar identisch mit $\langle S_I \rangle_0^2$. In Gl. (4.73) wird dieses Diagramm gerade durch die Subtraktion von $\langle S_I \rangle_0^2$ eliminiert.

- (b) Man verbindet zwei Beine eines Vertex mit zwei Beinen des anderen Vertex und die anderen beiden Beine an jedem Vertex untereinander:



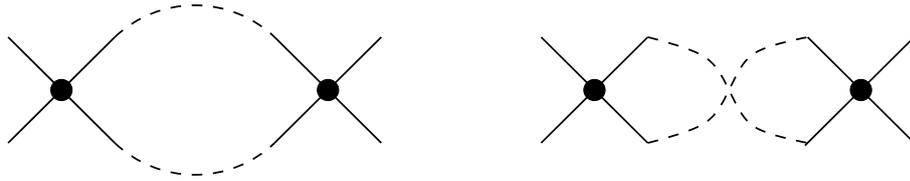
- (c) Alle vier Beine eines Vertex werden mit den vier Beinen des anderen Vertex verbunden:



- (ii) Der kombinatorische Faktor für das Diagramm in (b), welches aus drei Blasen besteht, ermittelt sich wie folgt. Es gibt

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Möglichkeiten, zwei beliebige Beine von vier an einem Vertex auszuwählen. Genausoviele Möglichkeiten gibt es, zwei beliebige Beine an dem anderen Vertex auszuwählen. Für das erste so ausgewählte Bein am ersten Vertex gibt es zwei Möglichkeiten, sich mit einem Bein am zweiten Vertex zu verbinden. Für das zweite Bein gibt es dann nur noch eine Möglichkeit:



Berücksichtigen wir noch den Faktor $1/2$, der in zweiter Ordnung auftritt, erhalten wir also insgesamt für den kombinatorischen Faktor des Diagramms (b):

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 36 .$$

Für das Diagramm (c) gibt es vier Möglichkeiten, das erste Bein des ersten Vertex mit einem des zweiten Vertex zu verbinden. Dann gibt es drei Möglichkeiten, das zweite Bein des ersten Vertex mit einem der drei verbleibenden Beine des zweiten Vertex zu verbinden. Schließlich bleiben noch zwei Möglichkeiten, das dritte Bein mit einem der zwei verbleibenden Beine des zweiten Vertex zu verbinden. Das vierte Bein des ersten Vertex muss dann mit dem letzten freien Bein des zweiten verbunden werden. Insgesamt erhalten wir als kombinatorischen Faktor des Diagramms (c):

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12 .$$

(iii,iv,v) Den Ausdruck, den wir mit Hilfe der Feynman-Regeln (iii), (iv) und (v) ermitteln, ist

$$\begin{aligned}
 & 36 \text{ (diagram with three loops } K_1, K_2, K_3, K_4) + 12 \text{ (diagram with two vertices and four internal lines } K_1, K_2, K_3, K_4) \\
 &= \underbrace{36}_{(ii)} \underbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_1}}_{(v)} \underbrace{\mathcal{D}_0(K_1)}_{(iv)} \underbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_2}}_{(v)} \underbrace{\mathcal{D}_0(K_2)}_{(iv)} \underbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_3}}_{(v)} \underbrace{\mathcal{D}_0(K_3)}_{(iv)} \underbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_4}}_{(v)} \underbrace{\mathcal{D}_0(K_4)}_{(iv)} \\
 &\quad \times \underbrace{(-\lambda)^2 \frac{V}{T} \delta_{K_1+K_2+K_3, K_1}}_{(iii)} \frac{V}{T} \delta_{K_2+K_3+K_4, K_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \overbrace{12}^{(ii)} \overbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_1}^{(v)} \mathcal{D}_0(K_1)}^{(iv)} \overbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_2}^{(v)} \mathcal{D}_0(K_2)}^{(iv)} \overbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_3}^{(v)} \mathcal{D}_0(K_3)}^{(iv)} \overbrace{\frac{T}{V} \sum_{K_4}^{(v)} \mathcal{D}_0(K_4)}^{(iv)} \\
 & \times \overbrace{(-\lambda)^2 \frac{V}{T} \delta_{K_1+K_2+K_3+K_4,0}^{(4)} \frac{V}{T} \delta_{0,K_1+K_2+K_3+K_4}^{(4)}}^{(iii)} \\
 & = 36\lambda^2 \frac{V}{T} \left[\frac{T}{V} \sum_K \mathcal{D}_0(K) \right]^2 \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{D}_0(Q) \mathcal{D}_0(-Q) \\
 & + 12\lambda^2 \frac{V}{T} \left(\frac{T}{V} \right)^3 \sum_{K,P,Q} \mathcal{D}_0(K) \mathcal{D}_0(P) \mathcal{D}_0(Q) \mathcal{D}_0(-K - P - Q). \quad (4.74)
 \end{aligned}$$

Hier haben wir im ersten Term K_1 bzw. K_4 in K umbenannt und $K_2 = -K_3 \equiv Q$ gesetzt. Im zweiten Term haben wir $K_1 = K$, $K_2 = Q$ und $K_3 = P$ gesetzt, $K_4 = -K - P - Q$ folgt dann aus der Energie-Impuls-Erhaltung am Vertex.

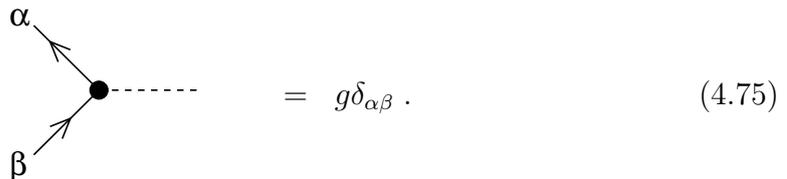
3.12.2021

4.6 Yukawa–Theorie

Die Lagrange–Dichte der Yukawa–Theorie wurde bereits in Gl. (4.3) angegeben. Aufgrund der $U(1)$ –Symmetrie des fermionischen Anteils gibt es eine erhaltene Ladung, die Fermionen–Zahl. Entsprechend ist noch ein Term $\mu \mathcal{N} \equiv \mu \bar{\psi} \gamma_0 \psi$ zur Lagrange–Dichte (4.3) hinzu zu addieren, vgl. Gl. (3.147).

Wir geben hier lediglich die Modifikationen der Feynman–Regeln für die Yukawa–Theorie an. Regeln, die im Folgenden nicht explizit aufgeführt werden, sind dieselben wie im letzten Abschnitt besprochen.

(iii) Der Vertex zwischen Fermion und skalarem Boson ist



$$\begin{array}{c} \alpha \\ \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \\ \beta \end{array} \text{---} = g \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.75)$$

Wir haben hier den Dirac–Index β des einlaufenden und den Dirac–Index α des auslaufenden Fermions explizit am Vertex notiert. Im Fall der Wechselwirkung mit einem skalaren Boson ändert sich dieser Index am Vertex nicht, daher das Kronecker–Delta in den Dirac–Indizes. Desweiteren ist an jedem Vertex eine energie- und impuls-erhaltende Delta-Funktion wie in Gl. (4.70) zu berücksichtigen.

(iv) Es gibt interne Fermionen-Linien,

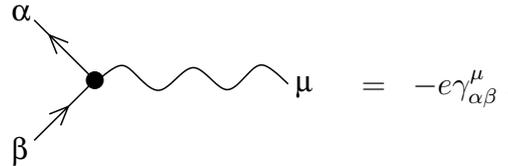
$$\begin{aligned}
 \beta \longrightarrow \alpha & = \mathcal{S}_{0,\alpha\beta}(K) = (M - \not{K} - \mu \gamma_0)_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{M \delta_{\alpha\beta} + K_\mu \gamma_{\alpha\beta}^\mu + \mu \gamma_{\alpha\beta}^0}{M^2 + \mathbf{k}^2 - (k_0 + \mu)^2} \\
 & = \frac{M \delta_{\alpha\beta} + K_\mu \gamma_{\alpha\beta}^\mu + \mu \gamma_{\alpha\beta}^0}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 + \mu)^2}, \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

4.7 QED

Die Lagrange-Dichte der QED wurde bereits in Gl. (4.4) angegeben. Die erhaltene Quantenzahl ist die elektrische Ladung, entsprechend ist wieder ein Term $\mu\mathcal{N} \equiv \mu\bar{\psi}\gamma_0\psi$ zur Lagrange-Dichte (4.4) hinzu zu addieren, vgl. Gl. (3.147).

Wir geben hier wieder nur die Modifikationen der Feynman-Regeln für die QED an. Regeln, die im Folgenden nicht explizit aufgeführt werden, sind dieselben wie in den letzten beiden Abschnitten besprochen.

(iii) Der Elektron-Photon-Vertex ist



$$= -e\gamma_{\alpha\beta}^{\mu} . \quad (4.81)$$

Die Dirac-Matrix γ^{μ} am Vertex wandelt den Dirac-Index β des einlaufenden Elektrons in einen Dirac-Index α des auslaufenden Elektrons um. Desweiteren ist an jedem Vertex eine energie- und impuls-erhaltende Delta-Funktion wie in Gl. (4.70) zu berücksichtigen.

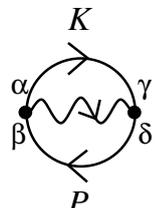
(iv) Die internen Bosonen-Linien korrespondieren zum Photon-Propagator. In Feynman-Eichung haben wir



$$= \Delta_0^{\mu\nu}(K) = \frac{g^{\mu\nu}}{K^2} = -\frac{g^{\mu\nu}}{\mathbf{k}^2 - k_0^2} . \quad (4.82)$$

Aus den gleichen Gründen wie in der Yukawa-Theorie verschwindet der Beitrag zur Zustandssumme in Ordnung $O(e)$.

Man würde nun zunächst annehmen, dass der Beitrag in Ordnung $O(e^2)$ wieder aus zwei Diagrammen besteht, die ganz ähnlich wie in Gl. (4.80) aussehen, nur dass der Vertex entsprechend zu modifizieren und der Propagator des skalaren Bosons durch einen Photon-Propagator zu ersetzen ist. Hier aber müssen wir uns daran erinnern, dass die Wirkung des elektromagnetischen Feldes **keine Nullmoden** enthält, s. Diskussion nach Gl. (3.274). Daher existiert auch kein Photon-Propagator $\Delta_0^{\mu\nu}(0)$, der keinen Impuls überträgt. Somit gibt es für das erste Diagramm in Gl. (4.80) kein Analogon in der QED. Wir haben damit



$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_I^{(2)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\mathcal{S}_0(K) \gamma^\nu \mathcal{S}_0(P) \gamma^\mu] \Delta_{0,\mu\nu}(P-K) \\ &= -\frac{1}{2} e^2 \frac{V}{T} \left(\frac{T}{V} \right)^2 \sum_{K,P} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \mathcal{S}_{0,\gamma\alpha}(K) \gamma_{\alpha\beta}^\nu \mathcal{S}_{0,\beta\delta}(P) \gamma_{\delta\gamma}^\mu \Delta_{0,\mu\nu}(P-K) \\ &= -\frac{1}{2} e^2 \frac{V}{T} \left(\frac{T}{V} \right)^2 \sum_{K,P} \text{Tr} [\mathcal{S}_0(K) \gamma^\nu \mathcal{S}_0(P) \gamma^\mu] \Delta_{0,\mu\nu}(P-K) . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Im Folgenden werden wir den thermischen Anteil dieses Diagramms als Übungsaufgabe explizit berechnen.

Übungsaufgabe 4.1: Berechne den thermischen Anteil von Gl. (4.83). Gib das Resultat im Limes $M \rightarrow 0$ in analytisch geschlossener Form an.

Lösung: Es empfiehlt sich, zunächst die **Projektordarstellung des fermionischen Propagators** einzuführen. Wir definieren dazu **Projektionsoperatoren auf Zustände positiver und negativer Energie**,

$$\Lambda_{\mathbf{k}}^{\pm} \equiv \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} [\varepsilon_{\mathbf{k}} \pm \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M)] . \quad (4.84)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Eigenschaften von Projektionsoperatoren erfüllt sind,

$$\Lambda_{\mathbf{k}}^{\pm} \Lambda_{\mathbf{k}}^{\pm} = \Lambda_{\mathbf{k}}^{\pm} , \quad \Lambda_{\mathbf{k}}^{\pm} \Lambda_{\mathbf{k}}^{\mp} = 0 , \quad \Lambda_{\mathbf{k}}^{+} + \Lambda_{\mathbf{k}}^{-} = \mathbb{1}_4 . \quad (4.85)$$

Desweiteren gilt

$$(\Lambda_{\mathbf{k}}^{+} + \Lambda_{\mathbf{k}}^{-}) \gamma_0 = \gamma_0 , \quad (\Lambda_{\mathbf{k}}^{+} - \Lambda_{\mathbf{k}}^{-}) \gamma_0 = \frac{M - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} . \quad (4.86)$$

Damit kann man den thermischen Fermion-Propagator (4.76) wie folgt schreiben,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(K) &= \frac{(k_0 + \mu) (\Lambda_{\mathbf{k}}^{+} + \Lambda_{\mathbf{k}}^{-}) \gamma_0 + \varepsilon_{\mathbf{k}} (\Lambda_{\mathbf{k}}^{+} - \Lambda_{\mathbf{k}}^{-}) \gamma_0}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - k_0 - \mu)(\varepsilon_{\mathbf{k}} + k_0 + \mu)} \\ &= - \sum_{\eta=\pm} \frac{k_0 + \mu + \eta \varepsilon_{\mathbf{k}}}{(k_0 + \mu + \varepsilon_{\mathbf{k}})(k_0 + \mu - \varepsilon_{\mathbf{k}})} \Lambda_{\mathbf{k}}^{\eta} \gamma_0 \\ &= - \sum_{\eta=\pm} \frac{1}{k_0 + \mu - \eta \varepsilon_{\mathbf{k}}} \Lambda_{\mathbf{k}}^{\eta} \gamma_0 \equiv \sum_{\eta=\pm} \mathcal{S}_0^{\eta}(K) \Lambda_{\mathbf{k}}^{\eta} \gamma_0 , \end{aligned} \quad (4.87)$$

wobei wir im letzten Schritt den skalaren thermischen Propagator für positive bzw. negative Energien

$$\mathcal{S}_0^{\eta}(K) = - \frac{1}{k_0 + \mu - \eta \varepsilon_{\mathbf{k}}} \quad (4.88)$$

definiert haben.

Der thermische Propagator $\mathcal{S}_0^{\eta}(K)$ hat eine **Spektraldarstellung**,

$$\mathcal{S}_0^{\eta}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\rho_0^{\eta}(\omega, \mathbf{k})}{\omega - k_0} , \quad (4.89)$$

mit der **Spektraldichte**

$$\begin{aligned} \rho_0^{\eta}(\omega, \mathbf{k}) &= 2 \operatorname{Im} \mathcal{S}_0^{\eta}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = 2 \operatorname{Im} \left(- \frac{1}{\omega + i\delta + \mu - \eta \varepsilon_{\mathbf{k}}} \right) \\ &= 2\pi \delta(\omega + \mu - \eta \varepsilon_{\mathbf{k}}) . \end{aligned} \quad (4.90)$$

Setzen wir dies zur Überprüfung in Gl. (4.89) ein, so erhalten wir wieder Gl. (4.88).

Der thermische Propagator $\mathcal{S}_0^\eta(K)$ hat auch eine **gemischte Darstellung**,

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{S}}_0^\eta(\tau, \mathbf{k}) &= T \sum_n e^{i\omega_n \tau} \mathcal{S}_0^\eta(K), \\ \mathcal{S}_0^\eta(K) &= \int_0^{1/T} d\tau e^{-i\omega_n \tau} \bar{\mathcal{S}}_0^\eta(\tau, \mathbf{k}).\end{aligned}\quad (4.91)$$

Mit der Spektraldarstellung (4.89) berechnen wir den gemischten Propagator,

$$\bar{\mathcal{S}}_0^\eta(\tau, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_0^\eta(\omega, \mathbf{k}) T \sum_n \frac{e^{i\omega_n \tau}}{\omega + i\omega_n}.\quad (4.92)$$

Die Matsubara-Summe läßt sich mit Gl. (3.192) auswerten, die Funktion $f(k_0)$ ist dieselbe wie in Gl. (4.61),

$$\begin{aligned}T \sum_n \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} + \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \right) \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 \left(\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} + \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \right) \frac{1}{e^{k_0/T} + 1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 \left(\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} + \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \right) \frac{1}{e^{k_0/T} + 1},\end{aligned}\quad (4.93)$$

wobei wir den zweiten Term im ersten Integral durch die Substitution $k_0 \rightarrow -k_0$ in den ersten überführen konnten. Wir schließen nun beide Integrale wie in Abb. 3.4 gezeigt mit einem Halbkreis im Unendlichen rechts von der imaginären Achse. Solange $\tau \in (0, 1/T)$ ist dies erlaubt, da der Beitrag des Halbkreises verschwindet,

$$T \sum_n \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} dk_0 \left[\frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} \left(1 - \frac{1}{e^{k_0/T} + 1} \right) - \frac{e^{k_0 \tau}}{\omega + k_0} \frac{1}{e^{k_0/T} + 1} \right],\quad (4.94)$$

mit der in Abb. 3.4 gezeigten Kontur \mathcal{C} . Der erste Term hat einen Pol bei $k_0 = \omega$. Er liegt innerhalb der Kontur, falls $\omega > 0$ ist. Der zweite Term hat einen Pol bei $k_0 = -\omega$. Er liegt innerhalb der Kontur, falls $\omega < 0$ ist. Mit Hilfe des Residuensatzes berechnen wir dann

$$\begin{aligned}T \sum_n \frac{e^{-k_0 \tau}}{\omega - k_0} &= \theta(\omega) e^{-\omega \tau} \left(1 - \frac{1}{e^{\omega/T} + 1} \right) + \theta(-\omega) e^{-\omega \tau} \frac{1}{e^{-\omega/T} + 1} \\ &= e^{-\omega \tau} \left(1 - \frac{1}{e^{\omega/T} + 1} \right),\end{aligned}\quad (4.95)$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}\quad (4.96)$$

und $\theta(\omega) + \theta(-\omega) = 1$ benutzt haben.

Setzen wir Gl. (4.95) in Gl. (4.92) ein, so erhalten wir für den gemischten Propagator

$$\bar{\mathcal{S}}_0^\eta(\tau, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_0^\eta(\omega, \mathbf{k}) e^{-\omega\tau} [1 - n_F(\omega)] , \quad (4.97)$$

mit der **Fermi–Dirac–Verteilungsfunktion**

$$n_F(\omega) \equiv \frac{1}{e^{\omega/T} + 1} . \quad (4.98)$$

Setzen wir nun Gl. (4.90) für die Spektraldichte ein, so ergibt sich

$$\bar{\mathcal{S}}_0^\eta(\tau, \mathbf{k}) = e^{-(\eta\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)\tau} [1 - n_F(\eta\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] . \quad (4.99)$$

Für $\eta = +$ erhalten wir

$$\bar{\mathcal{S}}_0^+(\tau, \mathbf{k}) = e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)\tau} [1 - n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] , \quad (4.100)$$

und für $\eta = -$

$$\bar{\mathcal{S}}_0^-(\tau, \mathbf{k}) = e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu)\tau} [1 - n_F(-\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] \equiv e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu)\tau} n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu) , \quad (4.101)$$

wobei wir Gl. (4.96) mit $x = -(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu)/T$ benutzt haben. Offensichtlich beschreibt $\bar{\mathcal{S}}_0^+$ die Propagation von Teilchen mit chemischem Potential μ und $\bar{\mathcal{S}}_0^-$ die von Antiteilchen mit chemischem Potential $-\mu$.

Die gemischte Darstellung des vollständigen thermischen Fermion-Propagators (4.87) lautet dann

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}_0(K) &= \sum_{\eta=\pm} \bar{\mathcal{S}}_0^\eta(\tau, \mathbf{k}) \Lambda_{\mathbf{k}}^\eta \gamma_0 \\ &= \bar{\mathcal{S}}_0^+(\tau, \mathbf{k}) \Lambda_{\mathbf{k}}^+ \gamma_0 + \bar{\mathcal{S}}_0^-(\tau, \mathbf{k}) \Lambda_{\mathbf{k}}^- \gamma_0 \\ &= e^{-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)\tau} [1 - n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] \Lambda_{\mathbf{k}}^+ \gamma_0 + e^{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu)\tau} n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu) \Lambda_{\mathbf{k}}^- \gamma_0 . \end{aligned} \quad (4.102)$$

Auch der Photon-Propagator (4.82) hat eine gemischte Darstellung. Offenbar kann man ihn in der Form

$$\Delta_0^{\mu\nu}(K) \equiv -g^{\mu\nu} \Delta_0(K) , \quad (4.103)$$

schreiben, wobei

$$\Delta_0(K) \equiv -\frac{1}{K^2} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - k_0^2} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2} \quad (4.104)$$

der Propagator für ein masseloses skalares Boson ist. Also gilt mit Gl. (4.68),

$$\bar{\Delta}_0(\tau, \mathbf{k}) = T \sum_n e^{i\omega_n\tau} \Delta_0(K) = \frac{1}{2k} \{ e^{-k\tau} [1 + n_B(k)] + e^{k\tau} n_B(k) \} , \quad (4.105)$$

wobei $k \equiv |\mathbf{k}|$.

Wir setzen nun die Glgen. (4.87) und (4.103) in Gl. (4.83) ein und erhalten

$$\ln \mathcal{Z}_I^{(2)} = \frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \left(\frac{T}{V} \right)^2 \sum_{K,P} \sum_{\eta_1, \eta_2} \text{Tr} (\Lambda_{\mathbf{k}}^{\eta_1} \gamma_0 \gamma_\mu \Lambda_{\mathbf{p}}^{\eta_2} \gamma_0 \gamma^\mu) \mathcal{S}_0^{\eta_1}(K) \mathcal{S}_0^{\eta_2}(P) \Delta_0(P-K) . \quad (4.106)$$

Die Spur über die Dirac–Matrizen werten wir mit den üblichen Regeln aus:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{T}}_{\eta_1\eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) &\equiv \text{Tr} \left(\Lambda_{\mathbf{k}}^{\eta_1} \gamma_0 \gamma_\mu \Lambda_{\mathbf{p}}^{\eta_2} \gamma_0 \gamma^\mu \right) \\
 &= \frac{1}{4\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}}} \text{Tr} \left\{ [\varepsilon_{\mathbf{k}} + \eta_1 \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M)] \gamma_0 \gamma^\mu [\varepsilon_{\mathbf{p}} + \eta_2 \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + M)] \gamma_0 \gamma_\mu \right\} \\
 &= \frac{1}{4\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}}} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}} \text{Tr} (\gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0 \gamma_\mu) + \eta_2 \varepsilon_{\mathbf{k}} \text{Tr} [\gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + M) \gamma_0 \gamma_\mu] \right. \\
 &\quad \left. + \eta_1 \varepsilon_{\mathbf{p}} \text{Tr} [\gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M) \gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0 \gamma_\mu] \right. \\
 &\quad \left. + \eta_1 \eta_2 \text{Tr} [\gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + M) \gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + M) \gamma_0 \gamma_\mu] \right\} \\
 &= \frac{1}{4\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}}} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}} \text{Tr} (\gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0 \gamma_\mu) - \eta_2 \varepsilon_{\mathbf{k}} \text{Tr} (\gamma_0 \gamma^\mu \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_\mu) \right. \\
 &\quad \left. - \eta_1 \varepsilon_{\mathbf{p}} \text{Tr} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \gamma^\mu \gamma_0 \gamma_\mu) + \eta_1 \eta_2 \text{Tr} [(M - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}) \gamma^\mu (M - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) \gamma_\mu] \right\} ,
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

weil die Spur über eine ungerade Anzahl von Dirac–Matrizen verschwindet und weil $\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma} \gamma_0$, $\gamma_0^2 = \mathbb{1}_4$. Mit

$$\gamma^\mu \gamma_0 \gamma_\mu = \gamma^\mu (2g_{0\mu} \mathbb{1}_4 - \gamma_\mu \gamma_0) = 2\gamma_0 - \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_0 = 2\gamma_0 - 4\gamma_0 = -2\gamma_0 ,$$

wobei wir $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{1}_4$ benutzt haben, sowie $\text{Tr}(\gamma^0 \gamma^i) = 4g^{0i} = 0$ haben wir dann

$$\bar{\mathcal{T}}_{\eta_1\eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}}} \left\{ -8 \varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}} + \eta_1 \eta_2 [16 M^2 + \text{Tr} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \gamma^\mu \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_\mu)] \right\} . \tag{4.108}$$

Für die letzte Spur verwenden wir

$$g_{\mu\nu} \text{Tr} (\gamma^i \gamma^\mu \gamma^j \gamma^\nu) = 4g_{\mu\nu} (g^{i\mu} g^{j\nu} - g^{ij} g^{\mu\nu} + g^{i\nu} g^{j\mu}) = 4(g^{ij} - 4g^{ij} + g^{ij}) = -8g^{ij} = +8\delta^{ij} ,$$

und erhalten

$$\bar{\mathcal{T}}_{\eta_1\eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = -2 \left(1 - \eta_1 \eta_2 \frac{2M^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}}} \right) . \tag{4.109}$$

8.12.2021

Dies setzen wir in Gl. (4.106) ein (behalten aber zunächst die abkürzende Schreibweise bei) und transformieren die Propagatoren in die gemischten Darstellungen,

$$\begin{aligned}
 \ln \mathcal{Z}_I^{(2)} &= \frac{e^2}{2} \frac{V}{T} T^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \sum_{\eta_1, \eta_2} \bar{\mathcal{T}}_{\eta_1\eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \mathcal{S}_0^{\eta_1}(K) \mathcal{S}_0^{\eta_2}(P) \Delta_0(P - K) \\
 &= \frac{e^2}{2} \frac{V}{T} T^2 \sum_{n,m} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \sum_{\eta_1, \eta_2} \bar{\mathcal{T}}_{\eta_1\eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \\
 &\quad \times \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 e^{-i\omega_n \tau_1 - i\omega_m \tau_2 - i(\omega_m - \omega_n) \tau_3} \bar{\mathcal{S}}_0^{\eta_1}(\tau_1, \mathbf{k}) \bar{\mathcal{S}}_0^{\eta_2}(\tau_2, \mathbf{p}) \bar{\Delta}_0(\tau_3, \mathbf{p} - \mathbf{k}) .
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Wir benutzen nun die zu Gl. (3.58) analoge Relation für fermionische Matsubara–Frequenzen,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(2n+1)\pi i T \tau} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - \frac{m}{T}\right) e^{i\pi m} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta\left(\tau - \frac{m}{T}\right) . \tag{4.111}$$

Damit werden die beiden Matsubara-Summen in Gl. (4.110)

$$T \sum_n e^{-i\omega_n(\tau_1 - \tau_3)} T \sum_m e^{-i\omega_m(\tau_2 + \tau_3)} = \sum_r (-1)^r \delta\left(\tau_1 - \tau_3 - \frac{r}{T}\right) \sum_s (-1)^s \delta\left(\tau_2 + \tau_3 - \frac{s}{T}\right). \quad (4.112)$$

Die Delta-Funktionen liefern die Bedingungen $\tau_3 = \tau_1 - r/T$ und $\tau_3 = s/T - \tau_2$. Man macht sich jetzt graphisch klar, s. Abb. 4.3, dass für $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in [0, 1/T]$ nur die Terme $r = 0$ und $s = 1$ in den obigen Summen in Frage kommen,

$$T \sum_n e^{-i\omega_n(\tau_1 - \tau_3)} T \sum_m e^{-i\omega_m(\tau_2 + \tau_3)} = -\delta(\tau_1 - \tau_3) \delta\left(\tau_2 + \tau_3 - \frac{1}{T}\right). \quad (4.113)$$

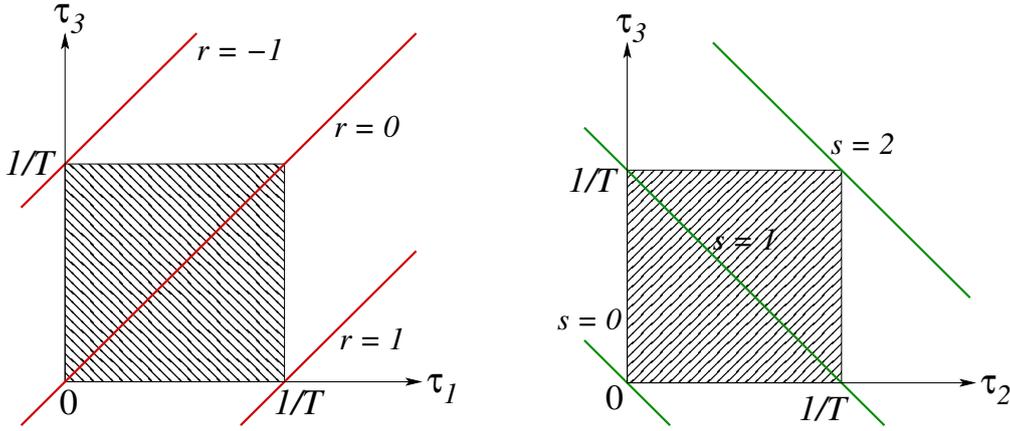


Abbildung 4.3: Ermittlung der nichtverschwindenden Terme in den Summen über r, s in Gl. (4.112). Im linken Diagramm sind die roten Geraden die Kurven $\tau_3 = \tau_1 - r/T$ für $r = -1, 0, 1$, im rechten Diagramm sind die grünen Geraden die Kurven $\tau_3 = s/T - \tau_2$ für $s = 0, 1, 2$.

Wir setzen dies in Gl. (4.110) ein und eliminieren die τ_2 - und τ_3 -Integrationen mit Hilfe der Delta-Funktionen. Mit der Umbenennung $\tau_1 \rightarrow \tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_I^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \sum_{\eta_1, \eta_2} \bar{\mathcal{T}}_{\eta_1 \eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \int_0^{1/T} d\tau \bar{\mathcal{S}}_0^{\eta_1}(\tau, \mathbf{k}) \bar{\mathcal{S}}_0^{\eta_2}(1/T - \tau, \mathbf{p}) \bar{\Delta}_0(\tau, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \\ &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \sum_{\eta_1, \eta_2} \bar{\mathcal{T}}_{\eta_1 \eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \int_0^{1/T} d\tau e^{-(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)\tau} [1 - n_F(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] \\ &\quad \times e^{(\eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\tau} e^{-(\eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)/T} [1 - n_F(\eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)] \frac{1}{2q} \{e^{-q\tau} [1 + n_B(q)] + e^{q\tau} n_B(q)\}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

wobei wir im zweiten Schritt die Glgen. (4.99) und (4.105), sowie $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} - \mathbf{k}$, $q \equiv |\mathbf{q}|$ benutzt haben. Mit Gl. (4.96) mit $x \equiv \eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$ und

$$e^{-q\tau} [1 + n_B(q)] + e^{q\tau} n_B(q) \equiv \sum_{\eta_3 = \pm} \eta_3 e^{-\eta_3 q\tau} [1 + n_B(\eta_3 q)], \quad (4.115)$$

wobei wir Gl. (4.65) benutzt haben, vereinfacht sich dies weiter zu

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_I^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2q} \sum_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} \bar{\mathcal{T}}_{\eta_1 \eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) [1 - n_F(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] n_F(\eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \\ &\times \eta_3 [1 + n_B(\eta_3 q)] \int_0^{1/T} d\tau e^{-(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu - \eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu + \eta_3 q)\tau} . \end{aligned} \quad (4.116)$$

Das τ -Integral ist elementar lösbar,

$$\int_0^{1/T} d\tau e^{-(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu - \eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu + \eta_3 q)\tau} = \frac{1}{\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} + \eta_3 q} \left[1 - e^{-(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)/T} e^{(\eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)/T} e^{-\eta_3 q/T} \right] .$$

Unter Benutzung der Glgen. (4.65), (4.96) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_I^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2q} \sum_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} \bar{\mathcal{T}}_{\eta_1 \eta_2}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{1}{\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} + \eta_3 q} \\ &\times \left\{ [1 - n_F(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)] n_F(\eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \eta_3 [1 + n_B(\eta_3 q)] \right. \\ &\quad \left. - n_F(\eta_1 \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) [1 - n_F(\eta_2 \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)] \eta_3 n_B(\eta_3 q) \right\} . \end{aligned} \quad (4.117)$$

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein:

$$n_1^\pm \equiv n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}} \mp \mu) , \quad n_2^\pm \equiv n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}} \mp \mu) , \quad n_3 \equiv n_B(q) . \quad (4.118)$$

(Das Superskript \pm steht für Teilchen/Antiteilchen.) Die acht verschiedenen Terme (entsprechend den möglichen Werten von η_1, η_2 und η_3), die die geschweifte Klammer annehmen kann, lauten dann

(i) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (+, +, +)$:

$$(1 - n_1^+) n_2^+ (1 + n_3) - n_1^+ (1 - n_2^+) n_3 = n_2^+ - n_1^+ n_2^+ - n_1^+ n_3 + n_2^+ n_3 , \quad (4.119)$$

(ii) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (+, +, -)$:

$$(1 - n_1^+) n_2^+ n_3 - n_1^+ (1 - n_2^+) (1 + n_3) = -n_1^+ + n_1^+ n_2^+ - n_1^+ n_3 + n_2^+ n_3 , \quad (4.120)$$

(iii) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (+, -, +)$:

$$(1 - n_1^+) (1 - n_2^-) (1 + n_3) - n_1^+ n_2^- n_3 = 1 - n_1^+ - n_2^- + n_3 + n_1^+ n_2^- - n_1^+ n_3 - n_2^- n_3 , \quad (4.121)$$

(iv) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (+, -, -)$:

$$(1 - n_1^+) (1 - n_2^-) n_3 - n_1^+ n_2^- (1 + n_3) = n_3 - n_1^+ n_3 - n_2^- n_3 - n_1^+ n_2^- , \quad (4.122)$$

(v) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (-, +, +)$:

$$n_1^- n_2^+ (1 + n_3) - (1 - n_1^-) (1 - n_2^+) n_3 = -n_3 + n_1^- n_2^+ + n_1^- n_3 + n_2^+ n_3 , \quad (4.123)$$

(vi) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (-, +, -)$:

$$n_1^- n_2^+ n_3 - (1 - n_1^-)(1 - n_2^+)(1 + n_3) = -1 + n_1^- + n_2^+ - n_3 - n_1^- n_2^+ + n_1^- n_3 + n_2^+ n_3, \quad (4.124)$$

(vii) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (-, -, +)$:

$$n_1^-(1 - n_2^-)(1 + n_3) - (1 - n_1^-)n_2^- n_3 = n_1^- - n_1^- n_2^- + n_1^- n_3 - n_2^- n_3, \quad (4.125)$$

(viii) $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (-, -, -)$:

$$n_1^-(1 - n_2^-)n_3 - (1 - n_1^-)n_2^-(1 + n_3) = -n_2^- + n_1^- n_2^- + n_1^- n_3 - n_2^- n_3. \quad (4.126)$$

Diese Terme symbolisieren **Streuprozesse im Wärme- und Teilchenbad**. Im Fall von Fermionen werden einlaufende Teilchen bzw. Antiteilchen mit einer Fermi–Dirac–Verteilungsfunktion $n_{1,2}^\pm$ und auslaufende mit einem **Pauli–Blocking–Faktor** $1 - n_{1,2}^\pm$ gewichtet. Dieser Faktor verhindert, dass (Anti-)Teilchen in Zustände gestreut werden, die bereits besetzt sind. Im Fall von Bosonen werden einlaufende Teilchen mit einer Bose–Einstein–Verteilung n_3 und auslaufende mit einem **Bose–Einstein–Verstärkungsfaktor** $1 + n_3$ gewichtet. Der erste Term auf der linken Seite symbolisiert die **Hinreaktion**, der zweite Term die **Rückreaktion**. Auf diese Weise kann man die entsprechenden Prozesse als Feynman–Graphen darstellen, s. Abb. 4.4. Die Terme (i) und (ii) sind gewöhnliche Streuprozesse eines Elektrons unter Emission bzw. Absorption eines Photons. Die Terme (vii) und (viii) sind die entsprechenden Prozesse für Positronen. Die Terme (iv) und (v) stellen Erzeugungs- bzw. Vernichtungsprozesse von Elektron-Positron-Paaren bei ein- bzw. auslaufendem Photon dar. Interessant sind die Terme (iii) und (vi). Hier werden auch Elektron-Positron-Paare erzeugt bzw. vernichtet, aber gleichzeitig wird auch ein Photon erzeugt (anstelle vernichtet) bzw. vernichtet (anstelle erzeugt). Diese Prozesse sind nur möglich, weil man sich in einem Wärme- und Teilchenbad befindet, im Vakuum können sie nicht auftreten. Man beachte, dass sich nach Ausmultiplizieren Terme mit drei Verteilungsfunktionen zwischen Hin- und Rückreaktion aufheben.

Uns interessiert lediglich der **thermische Anteil** von $\ln \mathcal{Z}_I^{(2)}$, d.h. derjenige, der keinerlei Renormierung bedarf. Dies bedeutet, dass man stets **zwei** Verteilungsfunktionen benötigt, die aufgrund ihres exponentiellen Abfalls für große Impulse die \mathbf{k} - und \mathbf{p} -Integrale regularisieren. Man darf also in (i) – (viii) alle Terme vernachlässigen, die keine oder nur eine Verteilungsfunktion enthalten (diese stellen Vakuumbeiträge dar und werden durch geeignet gewählte Renormierung eliminiert). Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2q} \\ &\times \left\{ \bar{\mathcal{T}}_+(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \left[\frac{-n_1^+ n_2^+ - n_1^+ n_3 + n_2^+ n_3}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + q} + \frac{n_1^+ n_2^+ - n_1^+ n_3 + n_2^+ n_3}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{-n_1^- n_2^- + n_1^- n_3 - n_2^- n_3}{-\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} + q} + \frac{n_1^- n_2^- + n_1^- n_3 - n_2^- n_3}{-\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} - q} \right] \\ &+ \bar{\mathcal{T}}_-(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \left[\frac{n_1^+ n_2^- - n_1^+ n_3 - n_2^- n_3}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} + q} + \frac{-n_1^+ n_2^- - n_1^+ n_3 - n_2^- n_3}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} - q} \right] \\ &\quad \left. + \frac{n_1^- n_2^+ + n_1^- n_3 + n_2^+ n_3}{-\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + q} + \frac{-n_1^- n_2^+ + n_1^- n_3 + n_2^+ n_3}{-\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q} \right] \Big\}. \quad (4.127) \end{aligned}$$

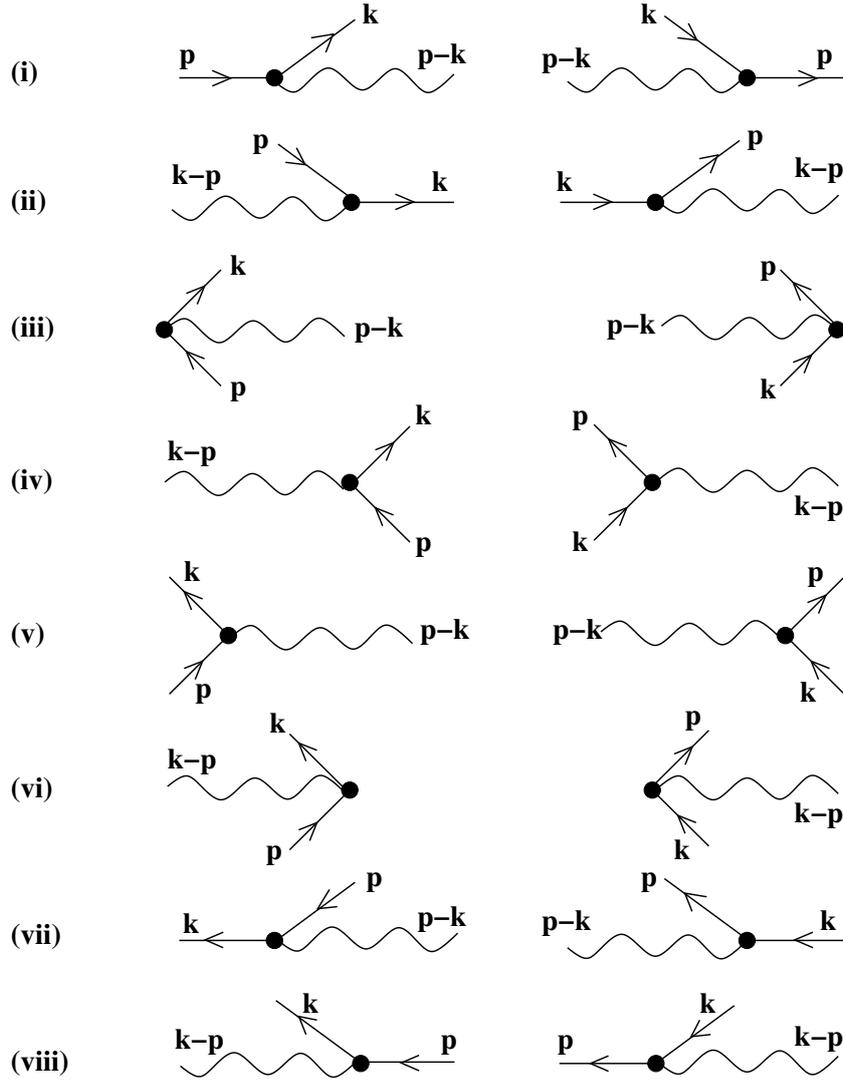


Abbildung 4.4: Streuprozesse im Wärme- und Teilchenbad. Alle Linien werden von links kommend als einlaufend und nach rechts gehend als auslaufend gezählt. Die Pfeile auf den Fermionenlinien deuten den Impuls- und Ladungsfluss an, d.h. ein ein- bzw. auslaufendes Antiteilchen erscheint hinsichtlich Impuls und Ladungsfluss aus- bzw. einlaufend.

Die Terme in den beiden eckigen Klammern lassen sich zusammenfassen. Für die erste erhalten wir mit

$$n_1 \equiv n_1^+ + n_1^- = n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) + n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu) , \quad n_2 \equiv n_2^+ + n_2^- = n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) + n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \mu) , \quad (4.128)$$

das Resultat

$$[\dots]_1 = \frac{2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} [q (n_1^+ n_2^+ + n_1^- n_2^-) - (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})(n_1 - n_2)n_3] , \quad (4.129)$$

und für die zweite

$$[\dots]_2 = \frac{2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \left[-q (n_1^+ n_2^- + n_1^- n_2^+) - (\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})(n_1 + n_2)n_3 \right], \quad (4.130)$$

Man überzeugt sich nun, dass

$$\bar{\mathcal{T}}_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \pm \frac{(\varepsilon_{\mathbf{k}} \mp \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + 2M^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{p}}} \equiv \pm \frac{(\varepsilon_{\mathbf{k}} \mp \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2 + 2M^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{p}}}. \quad (4.131)$$

Damit wird Gl. (4.127) zu

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^6} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{p}}} \\ &\times \left\{ \left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] \left[n_1^+ n_2^+ + n_1^- n_2^- - (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})(n_1 - n_2) \frac{n_3}{q} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] \left[n_1^+ n_2^- + n_1^- n_2^+ + (\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})(n_1 + n_2) \frac{n_3}{q} \right] \right\} \\ &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^6} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{p}}} \\ &\times \left(\left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] (n_1^+ n_2^+ + n_1^- n_2^-) + \left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] (n_1^+ n_2^- + n_1^- n_2^+) \right. \\ &\quad \left. - 2 n_1 \frac{n_3}{q} \left\{ \left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}) - \left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] (\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}}) \right\} \right), \end{aligned} \quad (4.132)$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie des Integranden unter $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{p}$ ausgenutzt haben. Die geschweifte Klammer lässt sich weiter umformen,

$$\begin{aligned} \{\dots\} &= -2\varepsilon_{\mathbf{p}} + 2M^2 \left[\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] \\ &= -2\varepsilon_{\mathbf{p}} + M^2 \left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + q} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - q} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} + q} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} - q} \right] \\ &= -2\varepsilon_{\mathbf{p}} + M^2 \left[\frac{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + q)^2 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2} + \frac{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - q)^2 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2} \right] \\ &= -2\varepsilon_{\mathbf{p}} \left\{ 1 - 2M^2 \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + q^2 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2}{[(\varepsilon_{\mathbf{k}} + q)^2 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2][(\varepsilon_{\mathbf{k}} - q)^2 - \varepsilon_{\mathbf{p}}^2]} \right\} \\ &= -2\varepsilon_{\mathbf{p}} \left[1 - 2M^2 \frac{2\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{p})}{(k^2 - p^2 + q^2)^2 - 4q^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}^2} \right] \\ &= -2\varepsilon_{\mathbf{p}} \left[1 + \frac{M^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2 - q^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.133)$$

10.12.2021

Wir können nun im Term $\sim n_1 n_3 / q$ in Gl. (4.132) die Integrationsvariable \mathbf{p} durch $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} - \mathbf{k}$ ersetzen. Dann erkennt man unschwer, dass der letzte Term $\sim M^2$ in Gl. (4.133)

aus Symmetriegründen verschwindet, da er ungerade in \mathbf{q} ist. Das Endergebnis lautet also

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}\varepsilon_{\mathbf{p}}} \\ &\times \left\{ \left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] (n_1^+ n_2^+ + n_1^- n_2^-) + \left[1 + \frac{2M^2}{(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 - q^2} \right] (n_1^+ n_2^- + n_1^- n_2^+) \right\} \\ &- 2e^2 \frac{V}{T} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \varepsilon_{\mathbf{k}}} n_1 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 q} n_B(q). \end{aligned} \quad (4.134)$$

Das letzte Integral kann man auch analytisch angeben, es entspricht dem wohlbekannten thermischen Anteil des Kaulquappen-Diagramms für masselose Bosonen, s. Gl. (4.43).

Falls man die Elektronenmasse gegenüber den anderen Skalen T , μ vernachlässigen kann, $M \ll T, \mu$, kann man Gl. (4.134) komplett analytisch auswerten. Dann haben wir einerseits mit Gl. (4.128) und der Abkürzung $\alpha \equiv \mu/T$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \varepsilon_{\mathbf{k}}} n_1 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 k} [n_F(k - \mu) + n_F(k + \mu)] \\ &= \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x \left(\frac{1}{e^{x-\alpha} + 1} + \frac{1}{e^{x+\alpha} + 1} \right) \\ &= \frac{T^2}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty dy \frac{y + \alpha}{e^y + 1} + \int_{-\alpha}^0 dy \frac{y + \alpha}{e^y + 1} + \int_0^\infty dy \frac{y - \alpha}{e^y + 1} - \int_0^\alpha dy \frac{y - \alpha}{e^y + 1} \right] \\ &= \frac{T^2}{2\pi^2} \left[2 \int_0^\infty dy \frac{y}{e^y + 1} - \int_0^\alpha dy (y - \alpha) \left(\frac{1}{e^{-y} + 1} + \frac{1}{e^y + 1} \right) \right] \\ &= \frac{T^2}{2\pi^2} \left(2 \frac{\pi^2}{12} + \frac{\alpha^2}{2} \right) = \frac{T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2}, \end{aligned} \quad (4.135)$$

wobei wir zur letzten Zeile Gl. (3.411.3) aus Ref. [7] benutzt haben. Andererseits ergibt das erste Integral in Gl. (4.134) im Limes $M \rightarrow 0$ wegen

$$n_1^+ n_2^+ + n_1^- n_2^- + n_1^+ n_2^- + n_1^- n_2^+ = n_1 n_2$$

das Resultat

$$\int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^6} \frac{1}{k p} n_1 n_2 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 k} n_1 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 p} n_2 \equiv \left(\frac{T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2} \right)^2, \quad (4.136)$$

wobei wir Gl. (4.135) benutzt haben. Mit den Glgen. (4.43), (4.135) und (4.136) wird Gl. (4.134) zu

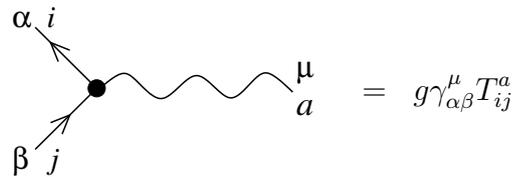
$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(2)} &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \left[\left(\frac{T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2} \right) \frac{T^2}{12} \right] \\ &= -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \left(\frac{T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2} \right) \left(\frac{5T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2} \right) = -\frac{e^2}{2} \frac{V}{T} \left(\frac{5T^4}{144} + \frac{T^2 \mu^2}{8\pi^2} + \frac{\mu^4}{16\pi^4} \right) \\ &= -\frac{e^2}{288} \frac{V}{T} \left(5T^4 + 18 \frac{T^2 \mu^2}{\pi^2} + 9 \frac{\mu^4}{\pi^4} \right). \end{aligned} \quad (4.137)$$

4.8 QCD

Die Lagrange-Dichte der QCD hatten wir bereits in Gl. (4.5) angegeben. Falls wir Prozesse der Schwachen Wechselwirkung vernachlässigen, welche die Quark-Flavors ineinander umwandeln, dann sind die erhaltenen Quantenzahlen die Anzahl der Quarks eines gegebenen Flavors. Entsprechend ist ein Term $\sum_{f=1}^{N_f} \mu_f \mathcal{N}_f \equiv \sum_{f=1}^{N_f} \mu_f \bar{\psi}^f \gamma_0 \psi^f$ zur Lagrange-Dichte (4.4) hinzu zu addieren, vgl. Gl. (3.147).

Wir geben hier wieder nur die Modifikationen der Feynman-Regeln für die QCD an. Regeln, die im Folgenden nicht explizit aufgeführt werden, sind dieselben wie in den letzten drei Abschnitten besprochen.

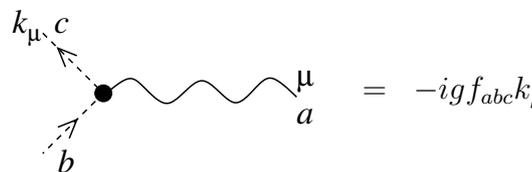
(iii) Der Quark-Gluon-Vertex ist



$$= g \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_{ij}^a. \quad (4.138)$$

Wie bei der QED wandelt die Dirac-Matrix γ^{μ} am Vertex den Dirac-Index β des einlaufenden Quarks in einen Dirac-Index α des auslaufenden Quarks um. Gleichzeitig wandelt der $SU(N_c)_c$ -Generator T_{ij}^a durch Kopplung an das entsprechende Gluon mit der adjungierten Gluon-Farbe a die fundamentale Quark-Farbe j des einlaufenden Quarks in eine fundamentale Quark-Farbe i des auslaufenden Quarks um.

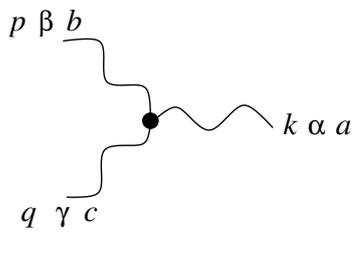
Der Geist-Gluon-Vertex ist (in Feynman-Eichung)



$$= -ig f_{abc} k_{\mu}. \quad (4.139)$$

Geister tragen wie Gluonen adjungierte Farben. Diese werden am Vertex aufgrund der Strukturkonstanten f_{abc} der $SU(N_c)_c$ -Gruppe ineinander umgewandelt. In der Feynman-Eichung ergibt die partielle Ableitung des auslaufenden Geist-Feldes in der Lagrange-Dichte (s. Gl. (6.295) der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”) im Impulsraum einen Faktor ik_{μ} .

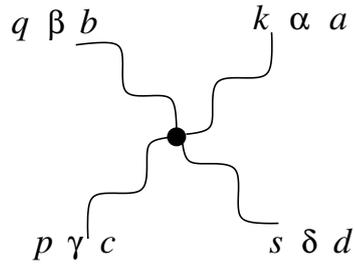
Der Drei-Gluon-Vertex ist



$$= ig f_{abc} [g_{\beta\gamma}(p - q)_{\alpha} + g_{\alpha\beta}(k - p)_{\gamma} + g_{\gamma\alpha}(q - k)_{\beta}], \quad (4.140)$$

wobei wir bereits in allen Indizes symmetrisiert haben.

Der Vier-Gluon-Vertex ist



$$= -g^2 [f_{ade}f_{bce} (g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) + f_{abe}f_{dce} (g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) + f_{ace}f_{dbe} (g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta})] , \quad (4.141)$$

wobei wir ebenfalls in allen Indizes symmetrisiert haben.

Desweiteren ist an jedem Vertex eine energie- und impulserhaltende Delta-Funktion wie in Gl. (4.70) zu berücksichtigen.

- (iv) Beim Quark-Propagator ist zu beachten, dass er neben Dirac-Indizes nun auch fundamentale Farbe und Flavor transportiert. In beiden Quantenzahlen ist er aber diagonal,

$$\mathcal{S}_{0,\alpha\beta ij}^{fg}(K) \equiv \mathcal{S}_{0,\alpha\beta}(K) \delta_{ij} \delta^{fg} , \quad (4.142)$$

mit dem Fermion-Propagator $\mathcal{S}_{0,\alpha\beta}(K)$ aus Gl. (4.76).

Beim Gluon-Propagator ist zu beachten, dass er neben Lorentz-Indizes nun auch adjungierte Farbe transportiert. Er ist aber diagonal in dieser Quantenzahl

$$\Delta_{0,ab}^{\mu\nu}(K) \equiv \Delta_0^{\mu\nu}(K) \delta_{ab} , \quad (4.143)$$

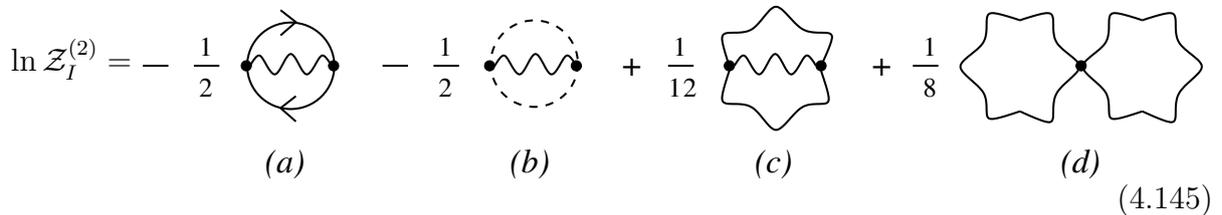
mit dem Boson-Propagator aus Gl. (4.82).

Der Geist-Propagator ist

$$b \text{-----} \triangleright \text{-----} a = \mathcal{W}_{0,ab}(K) = \frac{\delta_{ab}}{K^2} = -\frac{\delta_{ab}}{\mathbf{k}^2 - k_0^2} . \quad (4.144)$$

- (vi) Für jede geschlossene Geist-Schleife ist ein zusätzlicher Faktor -1 zu berücksichtigen.

In Ordnung $O(g^2)$ tragen folgende Diagramme zu $\log \mathcal{Z}_I$ bei,



$$\ln \mathcal{Z}_I^{(2)} = -\frac{1}{2} (a) - \frac{1}{2} (b) + \frac{1}{12} (c) + \frac{1}{8} (d) \quad (4.145)$$

Die kombinatorischen Faktoren ergeben sich aus folgender Überlegung.

- (a) Wie bei QED.
- (b) Wie bei QED.

- (c) Um die Beine zweier 3-Gluon-Vertizes zum gezeigten Diagramm zu verknüpfen, gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten. Die Symmetrisierung des Vertex (4.140) enthält aber bereits sechs Terme, d.h. bei zwei Vertizes haben wir einen Faktor 36, anstelle des Faktors 6 der kombinatorischen Möglichkeiten. Also müssen wir durch 6 teilen. Da es sich um ein Diagramm zweiter Ordnung in Störungstheorie handelt, gibt es einen zusätzlichen Faktor $1/2$, also insgesamt einen Faktor $1/12$. Man beachte, dass in der Übersetzung des Diagramms mit Hilfe der Feynman-Regeln nun der symmetrisierte Vertex (4.140) zu benutzen ist.
- (d) Um die Beine eines 4-Gluon-Vertex zum Doppelblasen-Diagramm zu verknüpfen, gibt es wie in der ϕ^4 -Theorie 3 Möglichkeiten. Der symmetrisierte Vertex (4.141) enthält aber bereits sechs Terme, also einen Faktor 2 zuviel. Allerdings berücksichtigt er nicht den Faktor $1/4$ aus der Lagrange-Dichte (4.5). Daher müssen wir mit einem Faktor $1/8$ multiplizieren. Es handelt sich hierbei zwar um ein Diagramm der Ordnung $O(g^2)$, es ist aber dennoch ein Diagramm **erster Ordnung** in Störungstheorie, genau wie das Doppelblasen-Diagramm bei der ϕ^4 -Theorie. Deshalb ist **kein** weiterer zusätzlicher Faktor zu berücksichtigen. Man beachte, dass in der Übersetzung des Diagramms mit Hilfe der Feynman-Regeln nun der symmetrisierte Vertex (4.141) zu benutzen ist.

Die Auswertung von Diagramm (a) ist analog zur QED. Im Fall, dass die Quarkmassen $M_f \ll T, \mu$, existiert wieder ein geschlossener analytischer Ausdruck. Es ist lediglich der Faktor e^2 durch g^2 zu ersetzen und über alle Quarkflavors zu summieren. Außerdem muss man noch die Summation über die Gluon-Farben berücksichtigen, was folgenden Faktor ergibt

$$\text{Tr}(T^a T^b) \delta_{ab} = \frac{1}{2} \delta^{ab} \delta_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{aa} = \frac{N_c^2 - 1}{2} .$$

Die Generatoren T^a, T^b stammen von den beiden Quark-Gluon-Vertizes, s. Gl. (4.138). Die Spur ergibt sich aufgrund der Fermionenschleife. In der fundamentalen Darstellung sind die Generatoren gemäß $\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}/2$ normiert. Das zweite Kronecker-Delta stammt vom Gluon-Propagator, s. Gl. (4.143), der die beiden Vertizes miteinander verknüpft. Insgesamt haben wir dann

$$\ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(a)} = -\frac{N_c^2 - 1}{2} \frac{g^2}{288} \frac{V}{T} \sum_f \left(5T^4 + 18 \frac{T^2 \mu_f^2}{\pi^2} + 9 \frac{\mu_f^4}{\pi^4} \right) . \quad (4.146)$$

Die anderen Diagramme (b), (c), (d) berechnen wir hier nicht explizit. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(b)} &= -\frac{1}{4} N_c (N_c^2 - 1) \frac{g^2}{144} \frac{V}{T} T^4 , \\ \ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(c)} &= +\frac{9}{4} N_c (N_c^2 - 1) \frac{g^2}{144} \frac{V}{T} T^4 , \\ \ln \mathcal{Z}_{I,T}^{(d)} &= -3 N_c (N_c^2 - 1) \frac{g^2}{144} \frac{V}{T} T^4 , \end{aligned} \quad (4.147)$$

was insgesamt den folgenden Beitrag in Ordnung $O(g^2)$ für den Druck der QCD ergibt,

$$\begin{aligned} p_I^{(2)} &= -\frac{N_c^2 - 1}{2} \frac{g^2}{288} \sum_f \left(5T^4 + 18 \frac{T^2 \mu_f^2}{\pi^2} + 9 \frac{\mu_f^4}{\pi^4} \right) - N_c(N_c^2 - 1) \frac{g^2}{144} T^4 \\ &= -(N_c^2 - 1) \frac{g^2}{4\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{36} \left(\frac{5}{4} N_f + N_c \right) T^4 + \frac{1}{16} \sum_f \left(2T^2 \mu_f^2 + \frac{\mu_f^4}{\pi^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Dies ist zu vergleichen mit dem Druck eines idealen Quark-Gluon-Gases,

$$\begin{aligned} p_{0,q} &= \frac{N_c}{180} \sum_f \left(7\pi^2 T^4 + 30 T^2 \mu_f^2 + 15 \frac{\mu_f^4}{\pi^2} \right), \\ p_{0,g} &= \frac{\pi^2}{45} (N_c^2 - 1) T^4, \end{aligned} \quad (4.149)$$

also

$$p_{0,q+g} = \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{7}{4} N_c N_f + N_c^2 - 1 \right) T^4 + \frac{N_c}{12} \sum_f \left(2T^2 \mu_f^2 + \frac{\mu_f^4}{\pi^2} \right). \quad (4.150)$$

Übungsaufgabe 4.2: Beweise die beiden Gleichungen (4.149).

5 Resummationsverfahren

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit **Resummationsverfahren**. Wir werden zunächst zeigen, dass diese Verfahren eine Notwendigkeit in der Statistischen Feldtheorie darstellen, da die naive Störungstheorie aufgrund von **Infrarot-Divergenzen** zusammenbricht: die Zustandssumme wird **nicht-analytisch** in der Kopplungskonstanten. Dann stellen wir die gängigsten Resummationsverfahren vor, die **1PI-effektive Wirkung**, die man im Rahmen der **Schleifenentwicklung** systematisch berechnen kann, und die **2PI-effektive Wirkung**, die insbesondere für die Untersuchung der **Restaurierung spontan gebrochener Symmetrien** Anwendung findet. Diese Wirkungen besitzen eine Entwicklung in Vakuumdiagrammen ähnlich wie in der Störungstheorie, die für konkrete Berechnungen in geeigneter Weise trunziert werden muss. Wir besprechen Symmetrierestauration im Rahmen der **Hartree-** und **Hartree-Fock-Näherungen**. Sodann diskutieren wir die **2PI-effektive Wirkung für Fermionen** und stellen das **Nambu-Jona-Lasinio (NJL)-Modell** vor. Mit der 2PI-effektiven Wirkung und dem NJL-Modell lassen sich auch sehr elegant **Suprafluidität** und **Supraleitung** diskutieren. Wir besprechen dann die sog. **“Hard-Thermal-Loop (HTL)”-Näherung** für Eichtheorien und geben zum Schluss noch einen kurzen Überblick über ein modernes und sehr elegantes Resummationsverfahren, die **Funktionale Renormierungsgruppe**.

5.1 Infrarot-Divergenzen: Zusammenbruch der naiven Störungstheorie

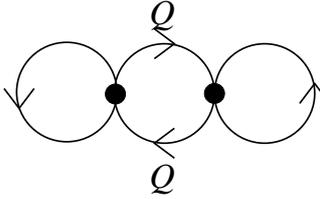
Wir betrachten die **masselose** ϕ^4 -Theorie. Gemäß der Diskussion in Abschnitt 4.1 erwarten wir, dass der der Ordnung $O(\lambda)$ folgende Beitrag zur Zustandssumme von der Ordnung $O(\lambda^2)$ ist, also

$$p = p_0 - 3\lambda\mathcal{T}^2 + O(\lambda^2), \quad (5.1)$$

mit \mathcal{T} aus Gl. (4.40). Wie wir im Folgenden sehen werden, ist dies aber bei der **masselosen** ϕ^4 -Theorie nicht der Fall: der nächstführende Beitrag ist von der Ordnung $O(\lambda^{3/2})$. Der Grund sind **Infrarot (IR)-Divergenzen**, die bei nichtverschwindenden Temperaturen auftreten. Bei nichtverschwindenden Massen werden sie durch letztere regularisiert, aber eben nicht für masselose Theorien.

Betrachten wir das erste Diagramm in Gl. (4.74), welches formal von der Ordnung

$O(\lambda^2)$ ist,

$$p_I^{(2a)} = 36 \cdot \text{Diagram} = 36\lambda^2 \mathcal{T}^2 \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{D}_0(Q) \mathcal{D}_0(-Q). \quad (5.2)$$


Um die IR-Divergenz zu isolieren, genügt es, den $n = 0$ -Beitrag der Matsubara-Summe über $q_0 = -i\omega_n$ zu betrachten,

$$p_{I,n=0}^{(2a)} = 36\lambda^2 \mathcal{T}^2 T \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{q}^2)^2}, \quad (5.3)$$

wobei wir bereits den thermischen Boson-Propagator (3.64) bei $n = 0$ im Fall verschwindender Masse eingesetzt haben. Wie man sofort erkennt, divergiert das Integral wie $dq/q^2 \sim q^{-1}$ im IR, d.h. für $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Bei nichtverschwindender Masse m haben wir dagegen

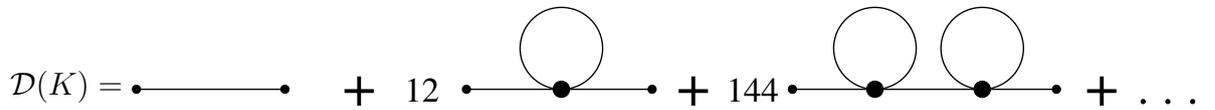
$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + m^2)^2} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{(q^2 + m^2)^2} = \frac{1}{2\pi^2 m} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 m} \left[-\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan x \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{4\pi^2 m} (\arctan \infty - \arctan 0) = \frac{1}{8\pi m}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei wir zur zweiten Zeile partiell integriert haben und das resultierende elementare Integral sofort lösen konnten. Daher ist im Fall $m \neq 0$

$$p_{I,n=0}^{(2a)} = 36\lambda^2 \mathcal{T}^2 \frac{T}{8\pi m} = \frac{9\lambda^2}{2\pi} \mathcal{T}^2 \frac{T}{m}. \quad (5.5)$$

Eine nichtverschwindende Masse regularisiert also die IR-Divergenz.

Nehmen wir nun an, dass die Masse **dynamisch** generiert wurde, z.B. durch die Korrektur, die der Propagator durch die **Selbstenergie** erhält,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(K) &= \text{Diagram 1} + 12 \cdot \text{Diagram 2} + 144 \cdot \text{Diagram 3} + \dots \\ &= \mathcal{D}_0(K) + 12 \mathcal{D}_0(K) (-\lambda \mathcal{T}) \mathcal{D}_0(K) + 144 \mathcal{D}_0(K) (-\lambda \mathcal{T}) \mathcal{D}_0(K) (-\lambda \mathcal{T}) \mathcal{D}_0(K) + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$


Die kombinatorischen Faktoren erklären sich wie folgt. Für jeden Vertex gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten, zwei der vier Beine zu einer Schleife zusammenzuschließen. Dann gibt es noch 2 Möglichkeiten, die zwei verbleibenden Beine mit den Propagatoren zu verbinden, also insgesamt $6 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten.

Offenbar handelt es sich bei Gl. (5.6) um eine geometrische Reihe,

$$\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}_0(K) [1 + 12\lambda\mathcal{T}\mathcal{D}_0(K)]^{-1} = [\mathcal{D}_0^{-1}(K) + 12\lambda\mathcal{T}]^{-1} . \quad (5.7)$$

Der Vakuumbbeitrag des Kaulquappen-Diagramms kann durch Wahl des minimalen Subtraktionsschemas nach Renormierung zum Verschwinden gebracht werden (s. Gl. (8.60) der Vorlesung ‘‘Quantenfeldtheorie’’). Der verbleibende thermische Beitrag \mathcal{T}_T wurde im Fall verschwindender Masse in Gl. (4.43) berechnet, so dass

$$12\lambda\mathcal{T} \equiv 12\lambda\mathcal{T}_T = 12\lambda\frac{T^2}{12} = \lambda T^2 \equiv m_T^2 \quad (5.8)$$

als **dynamisch generierte thermische Masse**

$$m_T \equiv \sqrt{\lambda}T \quad (5.9)$$

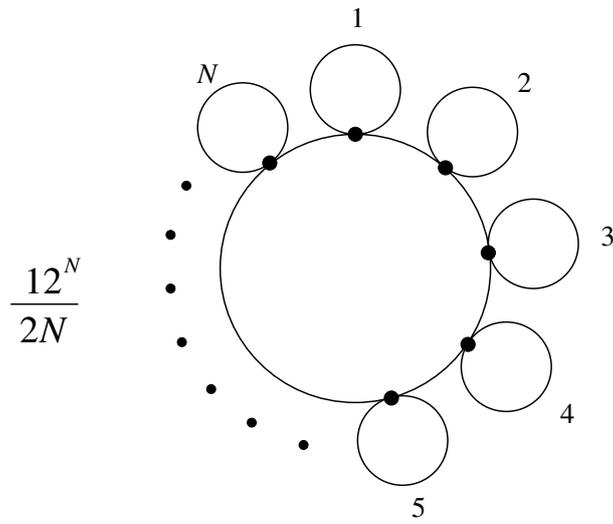
im Nenner des **resummierten Propagators** (5.7) identifiziert werden kann.

Nehmen wir nun an, dass wir im Diagramm (5.2) die beiden Propagatoren $\mathcal{D}_0(Q)$ und $\mathcal{D}_0(-Q)$ durch die entsprechenden resummierten Propagatoren (5.7) ersetzen. Dies entspricht nach Gl. (5.6) einer Resummation **unendlich vieler Diagramme**, wobei jeweils eine beliebige Anzahl von Kaulquappen-Schleifen an den Propagatoren der mittleren Schleife ‘‘hängen’’ können. Nach Gl. (5.5) wäre der $n = 0$ -Term aller dieser Diagramme dann

$$p_{I,n=0}^{(2a,res)} = \frac{9\lambda^2}{2\pi} \mathcal{T}^2 \frac{T}{m_T} = \frac{9\lambda^2}{2\pi} \left(\frac{T^2}{12}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda^{3/2}}{32\pi} T^4 . \quad (5.10)$$

In der Tat ist der Beitrag aller dieser Diagramme von der Ordnung $O(\lambda^{3/2})$, also von **geringerer** Potenz in λ als naiv erwartet, und zudem **nicht-analytisch** in λ !

Allerdings sind wir bei der Resummation der Diagramme, die in der Potenz $\lambda^{3/2}$ beitragen, unsystematisch vorgegangen. Wir zeigen nun, wie man das korrekte Resultat erhält. Offenbar handelt es sich um Diagramme, bei denen eine Anzahl N Kaulquappen-Schleifen an einer zentralen Schleife hängen,



$$\frac{12^N}{2N} \quad (5.11)$$

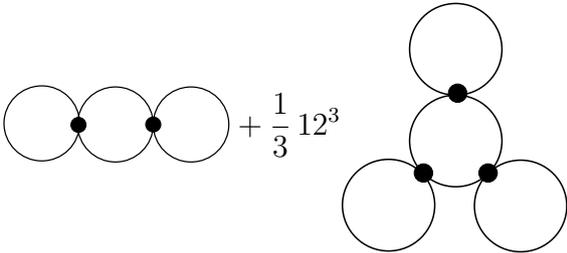
Der kombinatorische Faktor erklärt sich wie folgt. Für jeden der N Vertizes gibt es einen Faktor 12, genau wie oben. Sodann gibt es $(N - 1)!$ Möglichkeiten, N Vertizes in einem Kreis anzuordnen. Da aber vorwärts wie rückwärts gezählt keine unterschiedlichen Möglichkeiten darstellen, müssen wir noch durch 2 teilen. Letztlich gibt es in N -ter Ordnung Störungstheorie in der Kopplung noch einen Faktor $1/N!$ von der Exponentialreihenentwicklung von \mathcal{Z}_I , was insgesamt den oben gezeigten Faktor ergibt.

Um die IR-Divergenz zu isolieren, betrachten wir nun wieder den $n = 0$ -Term der zentralen Schleife, an der die Kaulquappen-Schleifen hängen,

$$p_{I,n=0}^{(N)} = \frac{12^N}{2N} (-\lambda \mathcal{T})^N T \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{q}^2)^N} . \quad (5.12)$$

Dieses Integral divergiert im IR wie $dq q^{-2(N-1)} \sim q^{-2N+3}$. Die IR-Divergenz wird also in jeder nächsthöheren Ordnung in λ um einen Faktor q^{-2} schlimmer!

Aufgrund der Ähnlichkeit der Struktur der Diagramme (5.11) ist es möglich, **alle** Ordnungen von $N = 2$ bis ∞ aufzusummieren,

$$\begin{aligned} p_I^{(PR)} &= \sum_{N=2}^{\infty} \frac{12^N}{2N} (-\lambda \mathcal{T})^N \frac{T}{V} \sum_Q [\mathcal{D}_0(Q)]^N \\ &= \frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_Q \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N} [-12\lambda \mathcal{T} \mathcal{D}_0(Q)]^N \\ &= \frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_Q \left\{ -\ln [1 + 12\lambda \mathcal{T} \mathcal{D}_0(Q)] + 12\lambda \mathcal{T} \mathcal{D}_0(Q) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} 12^2 \text{ (Diagramm 1)} + \frac{1}{3} 12^3 \text{ (Diagramm 2)} + \dots \right], \quad (5.13) \end{aligned}$$


wobei wir von der zweiten zur dritten Zeile die Reihenentwicklung

$$\ln(1 + x) = - \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N \frac{x^N}{N}$$

benutzt haben. Man erkennt, dass das Diagramm (5.2) gerade der erste Term dieser Entwicklung ist (mit dem korrekten kombinatorischen Faktor $12^2/4 = 36$). Gleichzeitig sind auch alle Diagramme, die wir in Gl. (5.10) heuristisch resummiert hatten, Teil dieses Ausdrucks.

Der unendliche Satz von Diagrammen vom Typ (5.11) heißt Satz der **Korrelations- oder Plasmon-Ring-Diagramme**. Jede Kaulquappen-Schleife enthält einen divergenten Vakuumbeitrag, der aber durch Renormierung eliminiert werden kann. Es genügt also, den thermischen Beitrag \mathcal{T}_T zu berücksichtigen. Mit Gl. (5.8) erhalten wir

$$p_I^{(PR)} = -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_Q \left\{ \ln [1 + m_T^2 \mathcal{D}_0(Q)] - m_T^2 \mathcal{D}_0(Q) \right\} . \quad (5.14)$$

5.1 Infrarot-Divergenzen: Zusammenbruch der naiven Störungstheorie

Wir betrachten wieder den dominanten IR-divergenten Beitrag, d.h. den $n = 0$ -Term der Matsubara-Summe, und berechnen diesen für $\mathcal{D}_0(0, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-2}$,

$$\begin{aligned} p_{I,n=0}^{(PR)} &= -\frac{1}{2} T \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + \frac{m_T^2}{\mathbf{q}^2} \right) - \frac{m_T^2}{\mathbf{q}^2} \right] \\ &= -\frac{T}{4\pi^2} m_T^3 \int_0^\infty dx x^2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{x^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

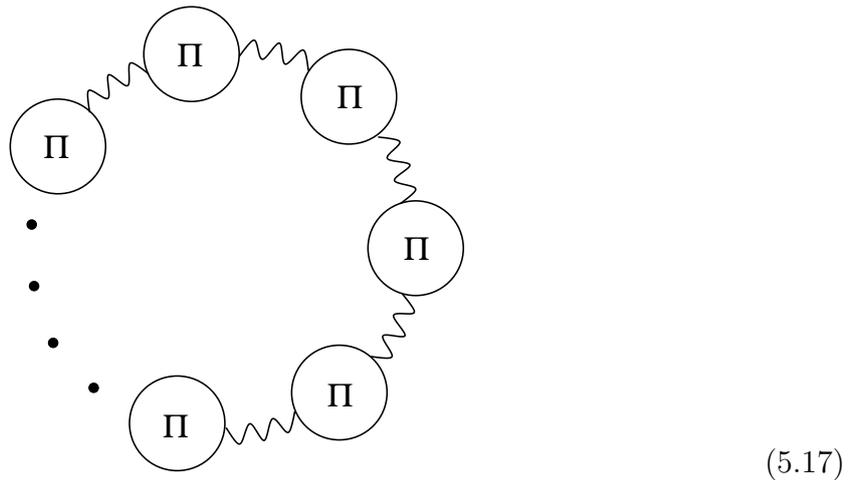
Wir zeigen in Übungsaufgabe 5.1, dass der Wert des Integrals $-\pi/3$ ist. Also haben wir

$$p_{I,n=0}^{(PR)} = \frac{T}{12\pi} m_T^3 = \frac{\lambda^{3/2}}{12\pi} T^4. \quad (5.16)$$

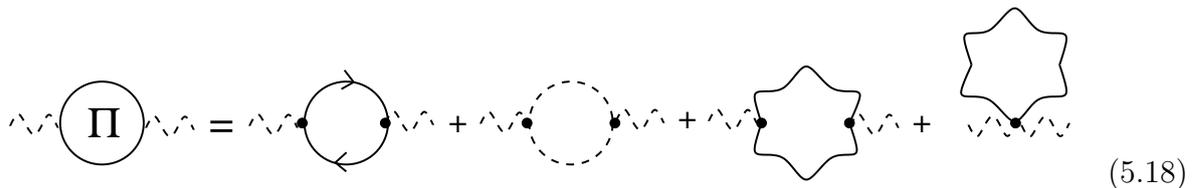
In der Tat ist dieser Beitrag von der Ordnung $O(\lambda^{3/2})$, wenngleich um einen Faktor $8/3$ größer als das heuristisch gefundene Resultat (5.10).

15.12.2021

Ganz ähnliche Argumente finden auch in QED und QCD Anwendung. Dort ist das Plasmon-Ring-Diagramm von folgender Gestalt,



Hier steht Π für die **Selbstenergie** des Eichbosons, die in niedrigster Ordnung in der Kopplung im Fall der QED aus einer Fermionen-Schleife und im Fall von QCD aus einer Fermionen-, einer Geist-, einer Gluon-Schleife mit einem 3-Gluon-Vertex und einer Gluon-Schleife mit einem 4-Gluon-Vertex (also vom Typ Kaulquappen-Diagramm) besteht,



Es stellt sich heraus, dass der im IR dominante Beitrag von der (00)-Komponente des Eichboson-Propagators für $n = 0$ stammt. In diesem Fall ist $\Pi(0, \mathbf{q}) = m_{el}^2$, die sog.

elektrische Abschirmmasse des Eichbosons, d.h. des Photons im Fall der QED und des Gluons im Fall der QCD,

$$\text{QED: } m_{\gamma,el}^2 = e^2 \left(\frac{T^2}{3} + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right), \quad (5.19)$$

$$\text{QCD: } m_{g,el}^2 = g^2 \left(\frac{2N_c + N_f}{6} T^2 + \sum_f \frac{\mu_f^2}{2\pi^2} \right). \quad (5.20)$$

Der Beitrag der Plasmon-Ring-Diagramme zum Druck ist (mit der jeweiligen elektrischen Abschirmmasse)

$$\begin{aligned} \text{QED: } p_{I,n=0}^{(PR)} &= \frac{T}{12\pi} m_{\gamma,el}^3, \\ \text{QCD: } p_{I,n=0}^{(PR)} &= \frac{T}{12\pi} (N_c^2 - 1) m_{g,el}^3, \end{aligned} \quad (5.21)$$

also von der Ordnung $O(e^3)$ im Fall der QED und von der Ordnung $O(g^3)$ im Fall der QCD. Im Fall von QCD ist der Beitrag um einen Faktor $N_c^2 - 1$ größer, weil dies der Zahl der Gluonen entspricht, die in der Schleife umlaufen können.

Übungsaufgabe 5.1: Zeige, dass

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^\infty dx x^2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{x^2} \right] = -\frac{\pi}{3}. \quad (5.22)$$

Lösung: Wir substituieren zunächst $x \equiv \tan u$, $dx = du / \cos^2 u$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^{\pi/2} du \frac{\tan^2 u}{\cos^2 u} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{\tan^2 u} \right) - \frac{1}{\tan^2 u} \right] \\ &= \int_0^{\pi/2} du \left[\frac{\tan^2 u}{\cos^2 u} \ln \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{\cos^2 u} \right]. \end{aligned}$$

Nun integrieren wir partiell mit $f = \ln \sin u$, $g = \tan^3 u/3$, d.h. $f' = 1/\tan u$, $g' = \tan^2 u / \cos^2 u$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -2 \left[\frac{1}{3} \tan^3 u \ln \sin u \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} du \tan^2 u \right] - \tan u \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{2}{3} \tan^3 u \ln \sin u + \frac{2}{3} (\tan u - u) - \tan u \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \tan u (1 + 2 \tan^2 u \ln \sin u) \Big|_0^{\pi/2}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

wobei wir von der ersten zur zweiten Zeile benutzt haben, dass die Stammfunktion von $\tan^2 u$ gerade $\tan u - u$ ist. Wir betrachten nun lediglich den zweiten Term. Offensichtlich

verschwindet dieser an der unteren Grenze. Die obere setzen wir zunächst gleich $\pi/2 - \varepsilon$ und betrachten am Ende den Limes $\varepsilon \rightarrow 0$. Zunächst ist

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{2} - \tan\varepsilon}{1 + \tan\frac{\pi}{2} \tan\varepsilon} \longrightarrow \frac{1}{\tan\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{3} + O(\varepsilon^3) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3}\right) + O(\varepsilon^3).$$

Desweiteren ist

$$\begin{aligned} \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) &= \ln\left(\sin\frac{\pi}{2} \cos\varepsilon + \cos\frac{\pi}{2} \sin\varepsilon\right) = \ln\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} + O(\varepsilon^6)\right] \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} - \frac{\varepsilon^4}{8} + O(\varepsilon^6) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{6} + O(\varepsilon^4)\right], \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} &1 + 2 \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \\ &= 1 + \frac{2}{\varepsilon^2} \left[1 - \frac{2\varepsilon^2}{3} + O(\varepsilon^4)\right] \left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{6} + O(\varepsilon^4)\right] \\ &= 1 - 1 + \frac{2\varepsilon^2}{3} - \frac{\varepsilon^2}{6} + O(\varepsilon^4) = \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^4) \\ &\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Also verschwindet der zweite Term in Gl. (5.23), was die Behauptung beweist, q.e.d..

Aufgrund des Zusammenbruchs der naiven Störungstheorie in der Kopplungskonstanten ist es angebracht, sich mit **Resummationsverfahren** in der Statistischen Feldtheorie vertraut zu machen.

5.2 1PI-effektive Wirkung und Schleifenentwicklung

Wir betrachten die großkanonische Zustandssumme in Anwesenheit von äußeren Quellen J ,

$$\mathcal{Z}[J] = \Re \int \mathcal{D}\phi e^{S[\phi] + \int_x J\phi}. \quad (5.24)$$

Gemäß der Diskussion in Abschnitt 4.1 können wir dies in Störungstheorie schreiben als

$$\mathcal{Z}[J] = \exp\left\{S_I\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\} \mathcal{Z}_0[J] \equiv \mathcal{Z}_0[J] \mathcal{Z}_I[J]. \quad (5.25)$$

Wie in Abschnitt 4.1 erläutert, besteht $\mathcal{Z}_I[0]$ aus der **Summe aller Vakuumbigramme**.

Wir definieren

$$W[J] = \ln \mathcal{Z}[J] = \ln \mathcal{Z}_0[J] + \ln \mathcal{Z}_I[J]. \quad (5.26)$$

Dann besteht $\ln \mathcal{Z}_J[0]$ aus der **Summe aller verbundenen Vakuondiagramme**.

Nun führen wir eine **Legendre–Transformation** von $W[J]$ bezüglich der Quelle J durch. Dabei benutzen wir die Tatsache, dass

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(X)} = \frac{1}{\mathcal{Z}[J]} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(X)} = \langle \phi(X) \rangle_J \equiv \varphi(X) \quad (5.27)$$

der **Erwartungswert des Feldes** bzw. die **Ein-Punkt-Funktion in Anwesenheit der Quelle J** ist. Die Legendre–Transformation lautet

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int_X J(X) \frac{\delta W[J]}{\delta J(X)} \equiv W[J] - \int_X J(X) \varphi(X), \quad (5.28)$$

wobei auf der rechten Seite die Quelle J ein Funktional von φ ist, $J[\varphi]$, das man durch Auflösen von Gl. (5.27) nach J bestimmt.

Wie schon $W[J]$ ist auch $\Gamma[\varphi]$ ein **erzeugendes Funktional**, nämlich das der sog. **1PI- n -Punkt-Vertexfunktionen** (1PI \cong “one-particle irreducible”, Ein-Teilchen-irreduzibel, das sind Diagramme, die bei Durchschneiden einer Linie nicht in zwei disjunkte Teile zerfallen). Dies ist ganz analog zur Quantenfeldtheorie im Vakuum (s. Abschnitt 6.5 der Vorlesung “Quantenfeldtheorie), lediglich Faktoren i tauchen in der Statistischen Feldtheorie nicht auf.

Um $\Gamma[\varphi]$ als erzeugendes Funktional der 1PI- n -Punkt-Vertexfunktionen zu erkennen, entwickeln wir es in eine Potenzreihe in $\varphi - \varphi_0$, wobei φ_0 ein beliebiges, fest vorgegebenes Feld ist,

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{X_1, \dots, X_n} [\varphi(X_1) - \varphi_0(X_1)] \cdots [\varphi(X_n) - \varphi_0(X_n)] \bar{\Gamma}^{(n)}(X_1, \dots, X_n). \quad (5.29)$$

Der $n = 0$ -Term ist $\Gamma[\varphi_0]$, das erzeugende Funktional der 1PI- n -Punkt-Vertexfunktionen, ausgewertet für die fest vorgegebene Feldkonfiguration φ_0 . Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet ist dies eine gewöhnliche Zahl. Wie $\Gamma[\varphi_0]$ in Form von Diagrammen aussieht, ist jedoch nicht-trivial und wird im Folgenden ersichtlich werden.

Wir definieren nun

$$\Gamma^{(n)}(X_1, \dots, X_n) \equiv \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(X_1) \cdots \delta \varphi(X_n)} \quad (5.30)$$

und

$$\bar{\Gamma}^{(n)}(X_1, \dots, X_n) \equiv \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(X_1) \cdots \delta \varphi(X_n)} \right|_{\varphi=\varphi_0}. \quad (5.31)$$

Falls $\Gamma[\varphi]$ das erzeugende Funktional der 1PI- n -Punkt-Vertexfunktionen ist, dann ist $\bar{\Gamma}^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$ der 1PI- n -Punkt-Vertex im Ortsraum. Diagrammatisch kann man ihn

folgendermaßen darstellen,

$$\bar{\Gamma}^{(n)}(X_1, \dots, X_n) \equiv \text{Diagramm} \quad , \quad (5.32)$$

wobei der “Inhalt” des Kreises noch zu klären ist. Es wird sich herausstellen, dass es sich hierbei um die (unendliche) Summe aller 1PI- n -Punkt-Vertex-Diagramme der Theorie handelt. Gleichung (5.29) läßt sich dann ebenfalls diagrammatisch wie folgt darstellen,

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Diagramm} \quad , \quad (5.33)$$

wobei die i -te “Stecknadel” Ankopplung der Differenz $\Delta\varphi(X_i) \equiv \varphi(X_i) - \varphi_0(X_i)$, inklusive einer Integration über X_i , bedeutet. Offensichtlich “resummiert” $\Gamma[\varphi]$ die Ein-Punkt-Funktion φ in allen Ordnungen. Wenn sich die oben vermutete Interpretation von $\bar{\Gamma}^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$ als Summe aller 1PI- n -Punkt-Vertex-Diagramme bestätigen sollte, dann handelt es sich bei $\Gamma[\varphi]$ um die Summe **aller** solcher Diagramme mit einer **beliebigen** Zahl von Vertices, an denen das Feld $\Delta\varphi(X)$ ankoppelt.

Wir wählen nun $\varphi_0 = 0$. Dann ist gemäß Gl. (5.33) $\Gamma[\varphi]$ die **Summe aller 1PI-Vertex-Diagramme mit einer beliebigen Zahl von Vertices**, an denen das Feld $\varphi(X)$ ankoppelt. Der ($n = 0$)-Term $\Gamma[0]$ in der Entwicklung (5.33) ist demzufolge die Summe aller 1PI-0-Punkt-Vertex-Diagramme, also die Summe aller **1PI-Vakuumdiagramme**. Diese Interpretation wird im Folgenden wichtig werden, weswegen wir sie noch einmal in einer Gleichung wiederholen,

$$\Gamma[0] = \text{Summe aller 1PI-Vakuumdiagramme} \quad . \quad (5.34)$$

Wir beweisen nun die Behauptung, dass es sich bei $\bar{\Gamma}^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$ um die **Summe aller 1PI- n -Punkt-Vertex-Diagramme** handelt. Dazu betrachten wir zunächst den

Fall $n = 1$. Mit der Ketten- und der Produktregel für Funktionale sowie Gl. (5.27) erhalten wir aus Gl. (5.28)

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}(X) &\equiv \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(X)} = \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi(X)} - \int_Y \frac{\delta J(Y)}{\delta\varphi(X)} \varphi(Y) - \int_Y J(Y) \frac{\delta\varphi(Y)}{\delta\varphi(X)} \\ &= \int_Y \frac{\delta W[J]}{\delta J(Y)} \frac{\delta J(Y)}{\delta\varphi(X)} - \int_Y \frac{\delta J(Y)}{\delta\varphi(X)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(Y)} - \int_Y J(Y) \delta^{(4)}(X - Y) \\ &= -J(X),\end{aligned}\tag{5.35}$$

wobei wir

$$\frac{\delta\varphi(Y)}{\delta\varphi(X)} \equiv \delta^{(4)}(X - Y)\tag{5.36}$$

benutzt haben. Gleichung (5.35) bedeutet, dass das **physikalische System ohne äußere Quellen**, $\mathbf{J} \equiv \mathbf{0}$, den **Extrema** von $\Gamma[\varphi]$ entspricht. Wir wählen nun das fest vorgegebene Feld $\varphi_0(X)$ als **Extremum** von $\Gamma[\varphi]$, welches wir mit $\bar{\varphi}(X)$ bezeichnen, also

$$\bar{\Gamma}^{(1)}(X) \equiv \left. \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(X)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} = 0.\tag{5.37}$$

Damit verschwindet der $(n = 1)$ -Term in der Entwicklung (5.29).

Differenzieren wir Gl. (5.35) nach $J(Y)$, erhalten wir unter Benutzung der Kettenregel sowie Gl. (5.27)

$$\int_Z \frac{\delta\varphi(Z)}{\delta J(Y)} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Z)\delta\varphi(X)} \equiv \int_Z \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(Y)\delta J(Z)} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Z)\delta\varphi(X)} = -\frac{\delta J(X)}{\delta J(Y)} \equiv -\delta^{(4)}(X - Y),\tag{5.38}$$

wobei wir die zu Gl. (5.36) analoge Relation für J benutzt haben. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(Y)\delta J(Z)} &= \frac{\delta}{\delta J(Y)} \left\{ \frac{1}{\mathcal{Z}[J]} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(Z)} \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}[J]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J]}{\delta J(Y)\delta J(Z)} - \frac{1}{\mathcal{Z}[J]} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(Y)} \frac{1}{\mathcal{Z}[J]} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(Z)} \\ &\equiv \langle \phi(Y)\phi(Z) \rangle_J - \langle \phi(Y) \rangle_J \langle \phi(Z) \rangle_J \\ &\equiv G^{(2)}(Y, Z)\end{aligned}\tag{5.39}$$

die **verbundene Zwei-Punkt-Funktion** in Anwesenheit äußerer Quellen. Also bedeutet Gl. (5.38), dass

$$\Gamma^{(2)}(Z, X) \equiv \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Z)\delta\varphi(X)}\tag{5.40}$$

bis auf ein Vorzeichen das **Inverse** der verbundenen Zwei-Punkt-Funktion in Anwesenheit äußerer Quellen ist,

$$\Gamma^{(2)}(Z, X) \equiv -[G^{(2)}]^{-1}(Z, X).\tag{5.41}$$

In Abwesenheit äußerer Quellen ist die Zwei-Punkt-Funktion der **volle Propagator**,

$$G^{(2)}(X, Y)|_{J=0} \equiv \mathcal{G}^{(2)}(X, Y),\tag{5.42}$$

und $\Gamma[\varphi]$ nimmt ein Extremum bei $\varphi = \bar{\varphi}$ an, so dass

$$\Gamma^{(2)}(X, Y)|_{\varphi=\bar{\varphi}} \equiv \bar{\Gamma}^{(2)}(X, Y) \equiv -[\mathcal{G}^{(2)}]^{-1}(X, Y), \quad (5.43)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (5.41) bei $J = 0$, $\varphi = \bar{\varphi}$ benutzt haben. Das Inverse der Zwei-Punkt-Funktion in Anwesenheit äußerer Quellen ist wiederum der inverse volle Propagator, der sich mit Hilfe der **Dyson–Schwinger–Gleichung** in der Form

$$\mathcal{D}^{-1}(X, Y) = \mathcal{D}_0^{-1}(X, Y) + \Pi(X, Y) \equiv [\mathcal{G}^{(2)}]^{-1}(X, Y) \equiv -\bar{\Gamma}^{(2)}(X, Y) \quad (5.44)$$

schreiben läßt, wobei $\Pi(X, Y)$ die **1PI-Selbstenergie** (im Ortsraum) ist, vgl. Abschnitt 6.5 der Vorlesung “Quantenfeldtheorie” (dort haben wir die 1PI-Selbstenergie mit $i\Sigma$ bezeichnet). Wie wir wissen, besteht die 1PI-Selbstenergie diagrammatisch aber gerade aus der Summe aller 1PI-Vertexdiagramme (d.h. Diagramme ohne äußere Beine) mit zwei “Andockpunkten” für äußere Linien. Da $\bar{\Gamma}^{(2)}(X, Y)$ (bis auf den additiven Term $\mathcal{D}_0^{-1}(X, Y)$) identisch mit der 1PI-Selbstenergie ist, handelt es sich also in der Tat um die (volle) 1PI-Zwei-Punkt-Vertexfunktion der Theorie. Für $n = 2$ haben wir uns also davon überzeugt, dass $\bar{\Gamma}^{(2)}(X, Y)$ die 1PI-Zwei-Punkt-Vertexfunktion ist.

Aufgrund der Relation

$$\frac{\delta\Gamma^{(n)}(X_1, \dots, X_n)}{\delta\varphi(X_{n+1})} = \Gamma^{(n+1)}(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \quad (5.45)$$

wird nun klar, dass auch $\bar{\Gamma}^{(n+1)}$ aus der Summe aller 1PI-Vertexdiagramme mit $n + 1$ “Andockpunkten” für äußere Linien bestehen muss, da eine Ableitung nach $\varphi(X_{n+1})$ den topologischen Charakter eines 1PI-Diagramms nicht ändern kann: sie amputiert lediglich eine “Stecknadel” (und eliminiert eine Raum-Zeit-Integration) und erzeugt dabei eine Abhängigkeit von einem weiteren Raum-Zeit-Punkt X_{n+1} , macht also aus einer n -Punkt-Funktion eine $n + 1$ -Punkt-Funktion. Daher handelt es sich bei $\bar{\Gamma}^{(n)}(X_1, \dots, X_n)$ um die 1PI- n -Punkt-Vertexfunktion, was den Beweis komplettiert.

Welche physikalische Bedeutung hat $\Gamma[\varphi]$? Dazu berechnen wir $\Gamma[\varphi]$ durch Entwicklung des Funktionalintegrals in $W[J]$ in Gl. (5.28) um die Ein-Punkt-Funktion φ . Es empfiehlt sich, das Plancksche Wirkungsquantum \hbar wieder explizit einzuführen, um Terme nach Ordnungen von \hbar sortieren zu können. Sowohl die Wirkung $S[\phi]$ wie auch das erzeugende Funktional $W[J]$ haben die Dimension \hbar , daher

$$\begin{aligned} W[J] &= \hbar \ln \mathcal{Z}[J], \\ \mathcal{Z}[J] &= \Re \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{1}{\hbar} \left\{ S[\phi] + \int_X J\phi \right\}\right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Das Quantenfeld ϕ entwickeln wir um seinen Erwartungswert $\varphi \equiv \langle \phi \rangle_J$,

$$\phi \equiv \varphi + \sqrt{\hbar} \psi, \quad (5.47)$$

wobei $\sqrt{\hbar} \psi$ die **Quantenfluktuation** von ϕ um φ darstellt. Der Faktor $\sqrt{\hbar}$ ist, wie wir noch sehen werden, für die Klassifikation von Termen nach Ordnungen von \hbar nötig. Die

Taylor-Entwicklung der Wirkung lautet

$$S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] = S[\varphi] + \sqrt{\hbar} \int_X \psi(X) \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} + \frac{\hbar}{2} \int_{X,Y} \psi(X) \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)} \psi(Y) + S_I[\varphi, \psi], \quad (5.48)$$

wobei $S_I[\varphi, \psi]$ Funktionalableitungen von $S[\varphi]$ enthält, die von höherer als zweiter Ordnung sind, s. Gl. (5.53) unten. Die zweite Funktionalableitung der klassischen Wirkung ist (bis auf das Vorzeichen) identisch mit dem **inversen Propagator auf Baum-Graphen-Niveau** (engl. **tree-level**). Der Unterschied zum inversen freien Propagator wird am schnellsten anhand eines Beispiels deutlich, z.B. für die ϕ^4 -Theorie,

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \int_X \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = -\frac{1}{2} \int_{Z,V} \varphi(Z) (\square_Z + m^2) \delta^{(4)}(Z - V) \varphi(V) - \lambda \int_Z \varphi^4(Z), \\ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(Y)} &= -\frac{1}{2} \int_{Z,V} \varphi(Z) (\square_Z + m^2) \delta^{(4)}(Z - V) \delta^{(4)}(V - Y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{Z,V} \delta^{(4)}(Z - Y) (\square_Z + m^2) \delta^{(4)}(Z - V) \varphi(V) \\ &\quad - 4\lambda \int_Z \varphi^3(Z) \delta^{(4)}(Z - Y) \\ &= - \int_Z \varphi(Z) (\square_Z + m^2) \delta^{(4)}(Z - Y) - 4\lambda \varphi^3(Y), \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)} &= - (\square_X + m^2) \delta^{(4)}(X - Y) - 12\lambda \varphi^2(X) \delta^{(4)}(X - Y) \\ &= - [\square_X + m^2 + 12\lambda \varphi^2(X)] \delta^{(4)}(X - Y) \\ &\equiv -\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Offensichtlich ist

$$\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) = \mathcal{D}_0^{-1}(X, Y) + 12\lambda \varphi^2(X) \delta^{(4)}(X - Y). \quad (5.51)$$

Dies erinnert an die Dyson-Schwinger-Gleichung (5.44), mit der ‘‘Selbstenergie’’ $12\lambda \varphi^2(X) \delta^{(4)}(X - Y)$. Die formale Lösung ist (Raum-Zeit-Indizes und entsprechende Integrationen sind unterdrückt)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{D}_0 [1 - (-12\lambda\varphi^2)\mathcal{D}_0]^{-1} \\ &= \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0(-12\lambda\varphi^2)\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_0(-12\lambda\varphi^2)\mathcal{D}_0(-12\lambda\varphi^2)\mathcal{D}_0 + \dots \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \bullet\text{---}\bullet = \bullet\text{---}\bullet + 12 \bullet\text{---}\bullet + 144 \bullet\text{---}\bullet + \dots \quad (5.52)$$

Offensichtlich resummiert die Dyson-Schwinger-Gleichung (5.51) den Effekt einer nicht-verschwindenden Ein-Punkt-Funktion $\varphi(X) \neq 0$ in allen Ordnungen. Dies ist ganz analog der Resummation der 1PI-Selbstenergie $\Pi(X, Y)$ in der Dyson-Schwinger-Gleichung

(5.44). Zur besseren Unterscheidung vom freien Propagator haben wir den Baum-Graphen-Propagator mit einer roten Linie gekennzeichnet.

Die Wirkung $S_I[\varphi, \psi]$ in Gl. (5.48) ist

$$S_I[\varphi, \psi] \equiv \frac{\hbar^{3/2}}{6} \int_{X,Y,Z} \frac{\delta^3 S[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)\delta\varphi(Z)} \psi(X) \psi(Y) \psi(Z) + \frac{\hbar^2}{24} \int_{X,Y,Z,V} \frac{\delta^4 S[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)\delta\varphi(Z)\delta\varphi(V)} \psi(X) \psi(Y) \psi(Z) \psi(V) + O(\hbar^{5/2}). \quad (5.53)$$

Da die Wirkung $S_0[\phi]$ der freien Theorie keine Terme enthält, die von höherer als quadratischer Ordnung in den Feldern sind, gilt

$$\frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta\varphi(X_1) \cdots \delta\varphi(X_n)} \equiv \frac{\delta^n S_I[\varphi]}{\delta\varphi(X_1) \cdots \delta\varphi(X_n)}, \quad n \geq 3. \quad (5.54)$$

Die Wirkungen renormierbarer Theorien enthalten in vier Raum-Zeit-Dimensionen keine Wechselwirkungsterme, die fünfter oder höherer Ordnung in den Feldern sind. Daher verschwinden für die (meisten der) für uns relevanten Theorien die Terme $\sim O(\hbar^{5/2})$. Betrachten wir als Beispiel die ϕ^4 -Theorie. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 S_I[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)\delta\varphi(Z)} &= -24\lambda \varphi(X) \delta^{(4)}(X-Y) \delta^{(4)}(X-Z), \\ \frac{\delta^4 S_I[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)\delta\varphi(Z)\delta\varphi(V)} &= -24\lambda \delta^{(4)}(X-Y) \delta^{(4)}(X-Z) \delta^{(4)}(X-V). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Setzen wir dies in Gl. (5.53) ein, so erhalten wir

$$S_I[\varphi, \psi] = -\lambda \int_X [4\hbar^{3/2} \varphi(X) \psi^3(X) + \hbar^2 \psi^4(X)]$$

$+ \quad (5.56)$

Offenbar erzeugt die Entwicklung der Quantenfelder um ihren Erwartungswert einen **neuen Drei-Punkt-Vertex in den Fluktuationfeldern** ψ , der proportional zu $-4\lambda \hbar^{3/2} \varphi$ ist. Der ursprüngliche Vier-Punkt-Vertex $\sim -\lambda$ existiert nach wie vor, nun allerdings sind es die vier Fluktuationfelder ψ , die miteinander koppeln, was einen zusätzlichen Faktor $\hbar^{4/2} = \hbar^2$ bedingt.

Wir können Gleichung (5.48) unter Benutzung von Gl. (5.50) noch etwas umstellen,

$$\begin{aligned} S[\varphi, \psi] &\equiv -\frac{\hbar}{2} \int_{X,Y} \psi(X) \mathcal{D}^{-1}(X,Y; \varphi) \psi(Y) + S_I[\varphi, \psi] \\ &= S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] - S[\varphi] - \sqrt{\hbar} \int_X \psi(X) \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Dies ist die Wirkung einer Theorie, in der der freie Propagator $\mathcal{D}_0(X, Y)$ durch den Baum-Graphen-Propagator $\mathcal{D}(X, Y; \varphi)$ ersetzt wird und die Wechselwirkung durch $S_I[\varphi, \psi]$ gegeben ist.

Mit den Glgen. (5.48), (5.57) lautet die Entwicklung des Arguments der Exponentialfunktion im Funktionalintegral in Gl. (5.46) um φ ,

$$S[\phi] + \int_X J\phi = S[\varphi] + \int_X J\varphi + \sqrt{\hbar} \int_X \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} + J(X) \right\} \psi(X) + S[\varphi, \psi], \quad (5.58)$$

Wir setzen dies nun in Gl. (5.46) ein und benutzen, dass das Integrationsmaß der Funktionalintegral bei der Substitution $\phi \rightarrow \psi$ gemäß Gl. (5.47) (bis auf irrelevante Konstanten) unverändert bleibt,

$$\begin{aligned} W[J] &= \hbar \ln \left[\exp \left(\frac{1}{\hbar} \left\{ S[\varphi] + \int_X J\varphi \right\} \right) \right. \\ &\quad \times \mathfrak{R} \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\hbar^{-1/2} \int_X \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} + J(X) \right\} \psi(X) + \frac{1}{\hbar} S[\varphi, \psi] \right) \left. \right] \\ &= S[\varphi] + \int_X J\varphi \\ &\quad + \hbar \ln \left[\mathfrak{R} \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\hbar^{-1/2} \int_X \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} + J(X) \right\} \psi(X) + \frac{1}{\hbar} S[\varphi, \psi] \right) \right], \quad (5.59) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= W[J] - \int_X J\varphi \\ &= S[\varphi] + \hbar \ln \left[\mathfrak{R} \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\hbar^{-1/2} \int_X \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} + J(X) \right\} \psi(X) + \frac{1}{\hbar} S[\varphi, \psi] \right) \right]. \quad (5.60) \end{aligned}$$

Hier ist auf der rechten Seite $J(X)$ durch Gl. (5.35) gegeben, also als Funktional von φ . Das erzeugende Funktional $\Gamma[\varphi]$ ist also im Limes $\hbar \rightarrow 0$ identisch mit der **klassischen Wirkung** $S[\varphi]$. Ansonsten unterscheidet es sich um **Quantenfluktuationen** $\sim O(\hbar)$ von $S[\varphi]$. Man bezeichnet $\Gamma[\varphi]$ daher auch als **1PI-effektive Wirkung**.

Es scheint, dass der erste Term im Exponenten in Gl. (5.60) der in \hbar führende Term ist. Wir zeigen nun, dass er tatsächlich von der Ordnung $O(\hbar^{1/2})$ ist, mithin der erste Term in $S[\varphi, \psi]$, Gl. (5.57), der (nach Division der Wirkung durch \hbar) von der Ordnung $\sim O(\hbar^0)$ ist, den führenden Term darstellt. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}[\varphi] &\equiv \Gamma[\varphi] - S[\varphi] \\ &= \hbar \ln \left[\mathfrak{R} \int \mathcal{D}\psi \exp \left(\hbar^{-1/2} \int_X \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} + J(X) \right\} \psi(X) + \frac{1}{\hbar} S[\varphi, \psi] \right) \right]. \quad (5.61) \end{aligned}$$

Dann ist mit Gl. (5.35)

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi} + J = \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi} - \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi} \equiv -\frac{\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]}{\delta\varphi} \sim O(\hbar), \quad (5.62)$$

also zusammen mit dem Vorfaktor $\hbar^{-1/2}$ ist der erste Term im Exponenten in Gl. (5.60) in der Tat von der Ordnung $O(\hbar^{1/2})$. Wenn wir Gl. (5.62) in Gl. (5.61) einsetzen, erkennen wir, dass $\tilde{\Gamma}[\varphi]$ eine komplizierte funktionale Integro-Differentialgleichung erfüllt,

$$\tilde{\Gamma}[\varphi] \equiv \hbar \ln \left(\Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\hbar^{-1/2} \int_X \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\varphi]}{\delta \varphi(X)} \psi(X) + \frac{1}{\hbar} S[\varphi, \psi] \right\} \right). \quad (5.63)$$

Glücklicherweise müssen wir diese nicht explizit lösen. Wir werden im Folgenden ein störungstheoretisches Verfahren diskutieren, das eine Lösung Ordnung für Ordnung in \hbar erlaubt.

17.12.2021

Wir definieren nun

$$\tilde{W}[\varphi, \tilde{J}] \equiv \hbar \ln \tilde{\mathcal{Z}}[\varphi, \tilde{J}], \quad (5.64)$$

wobei

$$\tilde{\mathcal{Z}}[\varphi, \tilde{J}] \equiv \Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} S[\varphi, \psi] + \hbar^{-1/2} \int_X \tilde{J}(X) \psi(X) \right\}. \quad (5.65)$$

Offenbar gilt

$$\tilde{W}[\varphi, -\delta \tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta \varphi] \equiv \tilde{\Gamma}[\varphi]. \quad (5.66)$$

Gleichung (5.64) stimmt also mit Gl. (5.63) an der Stelle $\tilde{J} = -\delta \tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta \varphi$ überein. Der Unterschied zwischen $\tilde{W}[\varphi, \tilde{J}]$ und $\tilde{\Gamma}[\varphi]$ ist, dass die Quelle \tilde{J} in ersterem Funktional frei variieren darf, während sie im letzteren einen speziellen Wert annimmt.

Gleichung (5.64) ist das **erzeugende Funktional für die verbundenen n -Punkt-Funktionen einer Theorie, deren klassische Wirkung durch Gl. (5.57) gegeben ist, also in der der freie Propagator durch den Propagator (5.50) auf Baum-Graphen-Niveau ersetzt wird und die Wechselwirkung durch $S_I[\varphi, \psi]$, Gl. (5.56), gegeben ist**. Wie im Fall der in Kap. 4 diskutierten Störungstheorie kann man den Wechselwirkungsanteil der Wirkung aus dem Funktionalintegral herausziehen, indem wir ψ durch eine Funktionalableitung nach \tilde{J} ersetzen,

$$\tilde{W}[\varphi, \tilde{J}] = \hbar \ln \left(\exp \left\{ \frac{1}{\hbar} S_I \left[\varphi, \sqrt{\hbar} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}} \right] \right\} \tilde{\mathcal{Z}}_0[\varphi, \tilde{J}] \right), \quad (5.67)$$

wobei

$$\tilde{\mathcal{Z}}_0[\varphi, \tilde{J}] \equiv \Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{X,Y} \psi(X) \mathcal{D}^{-1}(X,Y; \varphi) \psi(Y) + \hbar^{-1/2} \int_X \tilde{J}(X) \psi(X) \right]. \quad (5.68)$$

Die Entwicklung der Exponentialfunktion im Argument des Logarithmus in Gl. (5.67) erzeugt die Störungsreihe in Ordnungen der Kopplung und die Entwicklung des Logarithmus eliminiert in gewohnter Weise unverbundene Diagramme. Würden wir nun die Quelle $\tilde{J} = 0$ setzen, erhielten wir **alle verbundenen Vakuumbigramme mit internen Linien, die durch den Baum-Graphen-Propagator $\mathcal{D}(X, Y; \varphi)$ gegeben**

sind, und Vertizes, die aus $S_I[\varphi, \psi]$ resultieren. Jedoch ist \tilde{J} nicht bei null, sondern bei $\tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi$ zu nehmen. Wir zeigen nun, dass dieser (kleine) Unterschied die 1PR-Diagramme aus der Summe der verbundenen Vakuumdiagramme eliminiert, so dass

$$\tilde{\Gamma}[\varphi] = \text{Summe aller 1PI-Vakuumdiagramme mit durch } \mathcal{D}(X, Y; \varphi) \text{ gegebenen internen Linien und mit durch } S_I[\varphi, \psi] \text{ definierten Vertizes.} \quad (5.69)$$

Der Beweis ist indirekt und geht wie folgt [9]. Wir zeigen zunächst, dass die aus $\tilde{W}[\varphi, \tilde{J}]$ berechnete Ein-Punkt-Funktion bei $\tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi$ verschwindet,

$$\tilde{\psi}(X) \equiv \sqrt{\hbar} \left. \frac{\delta\tilde{W}[\varphi, \tilde{J}]}{\delta\tilde{J}(X)} \right|_{\tilde{J}=-\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi} = 0. \quad (5.70)$$

Dazu setzen wir im Exponenten von Gl. (5.65) die Identität (5.57) ein und berechnen mit den Gln. (5.64) und (5.66)

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]}{\delta\varphi(X)} &\equiv \left. \frac{\delta\tilde{W}[\varphi, \tilde{J}]}{\delta\varphi(X)} \right|_{\tilde{J}=-\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}[\varphi, -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi]} \int \mathcal{D}\psi \\ &\times \left(\frac{\delta S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi]}{\delta\varphi(X)} - \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} - \sqrt{\hbar} \int_Y \psi(Y) \left\{ \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)} + \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)} \right\} \right) \\ &\times \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] - S[\varphi] - \sqrt{\hbar} \int_Z \psi(Z) \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(Z)} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]}{\delta\varphi(Z)} \right\} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}[\varphi, -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi]} \int \mathcal{D}\psi \left(\hbar^{-1/2} \frac{\delta S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi]}{\delta\psi(X)} - \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} - \sqrt{\hbar} \int_Y \psi(Y) \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)} \right) \\ &\times \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] - S[\varphi] - \sqrt{\hbar} \int_Z \psi(Z) \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Z)} \right) \right], \quad (5.71) \end{aligned}$$

wobei wir Gl. (5.61) benutzt haben. Den ersten Term in der Klammer in der vorletzten Zeile können wir wie folgt umschreiben,

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\psi \hbar^{-1/2} \frac{\delta S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi]}{\delta\psi(X)} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] - S[\varphi] - \sqrt{\hbar} \int_Z \psi(Z) \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Z)} \right) \right] \\ &= \sqrt{\hbar} \int \mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta\psi(X)} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] - S[\varphi] - \sqrt{\hbar} \int_Z \psi(Z) \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Z)} \right) \right] \\ &+ \int \mathcal{D}\psi \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(X)} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] - S[\varphi] - \sqrt{\hbar} \int_Z \psi(Z) \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Z)} \right) \right]. \quad (5.72) \end{aligned}$$

Den ersten Term kann man direkt (funktional) partiell integrieren. Er trägt nichts bei, weil die Exponentialfunktion für $\psi \rightarrow \pm\infty$ verschwindet. Den zweiten Term kombinieren wir mit dem zweiten Term in der vorletzten Zeile von Gl. (5.71) unter Zuhilfenahme von Gl. (5.61). Da der resultierende Vorfaktor $\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi(X)$ der Exponentialfunktion nicht

von ψ abhängt, können wir ihn aus dem Funktionalintegral herausziehen und sehen, dass er den Term auf der linken Seite von Gl. (5.71) aufhebt. Es bleibt das Resultat

$$0 = \int_Y \Gamma^{(2)}(X, Y) \langle \psi(Y) \rangle_{\varphi, \tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi} , \quad (5.73)$$

wobei wir Gl. (5.40) für die Zwei-Punkt-Vertexfunktion benutzt und die Ein-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned} \langle \psi(Y) \rangle_{\varphi, \tilde{J}} &\equiv \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}[\varphi, \tilde{J}]} \int \mathcal{D}\psi \psi(Y) \exp \left[\frac{1}{\hbar} \left(S[\varphi + \sqrt{\hbar}\psi] - S[\varphi] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\hbar} \int_Z \psi(Z) \left\{ \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(Z)} - \tilde{J}(Z) \right\} \right) \right] \\ &\equiv \sqrt{\hbar} \frac{\delta \tilde{W}[\varphi, \tilde{J}]}{\delta \tilde{J}(Y)} \equiv \tilde{\psi}(Y) \end{aligned} \quad (5.74)$$

definiert haben. Hier haben wir im vorletzten Schritt Gl. (5.57) und die Definition (5.64) mit (5.65) benutzt. Die Zwei-Punkt-Vertexfunktion in Gl. (5.73) ist i.a. nicht null, also muss die Ein-Punkt-Funktion bei $\tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi$ verschwinden,

$$\langle \psi(X) \rangle_{\varphi, \tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi} = \sqrt{\hbar} \frac{\delta \tilde{W}[\varphi, \tilde{J}]}{\delta \tilde{J}(X)} \Bigg|_{\tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi} \equiv \tilde{\psi}(X) = 0 , \quad (5.75)$$

was die Behauptung (5.70) beweist.

Wir führen nun eine Legendre-Transformation des Funktionals $\tilde{W}[\varphi, \tilde{J}]$ bzgl. der Quelle \tilde{J} durch, d.h. wir ersetzen diese durch die in Gl. (5.74) definierte Ein-Punkt-Funktion $\tilde{\psi}$,

$$\bar{\Gamma}[\varphi, \tilde{\psi}] = \tilde{W}[\varphi, \tilde{J}] - \int_X \tilde{\psi}(X) \tilde{J}(X) . \quad (5.76)$$

Wenn wir dieses Funktional am Punkt $\tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi$ auswerten, verschwindet aufgrund von Gl. (5.70) die Ein-Punkt-Funktion, $\tilde{\psi} = \tilde{\psi} = 0$, und wir erhalten mit Gl. (5.66)

$$\bar{\Gamma}[\varphi, 0] = \tilde{W}[\varphi, \tilde{J}] \Big|_{\tilde{J} = -\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi} = \tilde{\Gamma}[\varphi] . \quad (5.77)$$

Nun ist die linke Seite aber aufgrund von Gl. (5.34) die **Summe aller 1PI-Vakuumdigramme für die Theorie mit der Wirkung (5.57)** (die Abhängigkeit von φ resultiert aus der φ -Abhängigkeit des Propagators $\mathcal{D}(X, Y; \varphi)$, der den internen Linien dieser Diagramme entspricht, und der der Vertizes in $S_I[\varphi, \phi]$). Dies beweist die Behauptung (5.69).

Die Entwicklung der Exponentialfunktion und des Logarithmus auf der rechten Seite von Gl. (5.67) trägt den Namen **Schleifenentwicklung**, da die dadurch erzeugten Diagramme nach der Zahl der Schleifen klassifiziert werden können. Wir zeigen nun, dass jede Schleife einen Faktor \hbar zum Diagramm beiträgt, so dass die Zahl der Schleifen gleichzeitig die Ordnung in \hbar angibt. Nach Division von S_I durch \hbar trägt gemäß Gl. (5.56)

- (i) jeder Drei-Punkt-Vertex einen Faktor $\hbar^{3/2}/\hbar = \hbar^{1/2}$ und

5 Resummationsverfahren

(ii) jeder Vier-Punkt-Vertex einen Faktor $\hbar^2/\hbar = \hbar$

zu einem gegebenen Diagramm bei. Interne Linien tragen keine zusätzlichen Faktoren \hbar bei.

Betrachten wir nun die möglichen 1PI-Vakuumbigramme mit zwei Schleifen,

$$3 \text{ (Diagramm 1)} + 3 \text{ (Diagramm 2)}, \quad (5.78)$$

wobei der kombinatorische Faktor beim zweiten Diagramm daraus resultiert, dass es 6 Möglichkeiten gibt, die Beine der beiden Vertizes miteinander zu verbinden, aber das Diagramm von zweiter Ordnung in λ ist, also einen zusätzlichen Faktor $1/2$ erhält, also insgesamt $6/2 = 3$. Das erste Diagramm hat gemäß (ii) einen Faktor \hbar und das zweite gemäß (i) ebenfalls einen Faktor $\sqrt{\hbar^2} = \hbar$. Zusammen mit dem Vorfaktor \hbar in Gl. (5.67) sind die beiden Zwei-Schleifen-Diagramme (5.78) also von der Ordnung $O(\hbar^2)$, wie behauptet.

Übungsaufgabe 5.2: Prüfe nach, dass die 1PI-Drei-Schleifen-Diagramme von der Ordnung $O(\hbar^3)$ sind.

Lösung: Die 1PI-Drei-Schleifen-Diagramme der Theorie sind (ohne kombinatorische Faktoren)

$$\begin{array}{ccc}
 (a) & (b) & (c) \\
 \text{(Diagramm 1)} & + \text{(Diagramm 2)} & + \text{(Diagramm 3)} \\
 + & + & + \\
 \text{(Diagramm 4)} & \text{(Diagramm 5)} & \text{(Diagramm 6)} \\
 (d) & (e) & (f)
 \end{array} \quad (5.79)$$

Die Diagramme (a) und (b) haben einen Faktor \hbar^2 von den beiden Vier-Punkt-Vertizes, die Diagramme (c) und (d) einen Faktor $\hbar^{4/2} = \hbar^2$ von den vier Drei-Punkt-Vertizes und die Diagramme (e) und (f) jeweils einen Faktor \hbar vom Vier-Punkt-Vertex, sowie einen Faktor $\hbar^{2/2} = \hbar$ von den beiden Drei-Punkt-Vertizes, also insgesamt wieder einen Faktor \hbar^2 . Zusammen mit dem Vorfaktor \hbar in Gl. (5.67) sind alle Drei-Schleifen-Diagramme (5.79) also von der Ordnung $O(\hbar^3)$, q.e.d..

Zum Schluss werten wir noch den Ein-Schleifen-Beitrag aus. Dieser entspricht dem Term nullter Ordnung in S_I in Gl. (5.67), also (bis auf irrelevante Konstanten)

$$\begin{aligned} \hbar \ln \tilde{\mathcal{Z}}_0[\varphi, 0] &= \hbar \ln \left\{ \Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{X,Y} \psi(X) \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) \psi(Y) \right] \right\} \\ &= \hbar \ln [\det_X \mathcal{D}^{-1}(\varphi)]^{-1/2} \equiv -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi), \end{aligned} \quad (5.80)$$

wobei wir Determinante und Spur in der Raum-Zeit durch den Index “ X ” gekennzeichnet haben. Mit Gl. (5.51) können wir dies schreiben als

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi) &= -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}_0^{-1} - \frac{\hbar}{2} \text{Tr}_X \ln (1 + 12\lambda\varphi^2 \mathcal{D}_0) \\ &= -\frac{\hbar}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}_0^{-1} + \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}_X [(-12\lambda\varphi^2)^n \mathcal{D}_0^n] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{Diagramm} = \text{Diagramm} + \text{Diagramm} + \frac{1}{2} \text{Diagramm} + \frac{1}{3} \text{Diagramm} + \dots \quad (5.81)$$

Es handelt sich also um Ein-Schleifen-Beiträge, in denen freie Propagatoren \mathcal{D}_0 umlaufen, unterbrochen von einer beliebigen Anzahl von “Selbstenergie”-Einschüben $-12\lambda\varphi^2$. Dies ähnelt der Summe der Plasmon-Ring-Diagramme (5.11), nur dass die Selbstenergie durch $-12\lambda\varphi^2$ ersetzt wird.

Falls $\varphi(X)$ eine schwach variierende Funktion der Raum-Zeit-Koordinate X^μ ist,

$$\varphi(X) \equiv \tilde{\varphi} + \phi(X), \quad \tilde{\varphi} = \text{const}, \quad |\partial_\mu \phi(X)| \ll \Lambda |\tilde{\varphi}|,$$

wobei Λ eine für das System typische Energieskala ist, z.B. die Masse m der Teilchen oder die Temperatur T , das chemische Potential μ , etc., können wir $\Gamma[\varphi]$ als **Gradientenentwicklung** schreiben,

$$\Gamma[\tilde{\varphi} + \phi] = \int_X \left[-\mathcal{V}(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2} Z(\tilde{\varphi}) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \right]. \quad (5.82)$$

Die Größe $\mathcal{V}(\tilde{\varphi})$ heißt **effektives Potential** und hat die Dimension Energie⁴ (da $\Gamma[\varphi]$ in natürlichen Einheiten dimensionslos ist). Die physikalische Interpretation folgt aus der Definition (5.28) im Limes $J \rightarrow 0$, d.h. $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$, wobei $\bar{\varphi}$ das Feld ist, welches $\Gamma[\varphi]$ extremal macht,

$$\Gamma[\bar{\varphi}] = W[0] = \ln \mathcal{Z}[0] \equiv \ln \mathcal{Z} = \frac{V}{T} p, \quad (5.83)$$

d.h. die **1PI-effektive Wirkung am Extremum** $\bar{\varphi}$ ist bis auf einen Faktor V/T **identisch mit dem Druck des Systems**. Falls $\bar{\varphi} = \text{const}$, verschwinden die höheren Terme in der Gradientenentwicklung (5.82) und man erhält mit $\bar{\varphi} \equiv \tilde{\varphi}$

$$\Gamma[\bar{\varphi}] = -\frac{V}{T} \mathcal{V}(\bar{\varphi}) = \frac{V}{T} p, \quad (5.84)$$

also

$$p = -\mathcal{V}(\bar{\varphi}). \quad (5.85)$$

Der Wert des konstanten Feldes $\bar{\varphi}$ kann auch aus der Gleichung

$$\frac{d\mathcal{V}(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} = 0 \quad (5.86)$$

bestimmt werden.

12.1.2022

5.3 2PI-effektive Wirkung (Cornwall–Jackiw–Tomboulis–Formalismus)

Die der 2PI-effektiven Wirkung zugrundeliegende Idee ist, zusätzlich zur Quelle $J(X)$ eine **bilokale Quelle** $K(X, Y)$ einzuführen [10]. Letztlich führt dies dazu, dass nicht nur die Ein-Punkt-Funktion $\varphi = \langle \phi \rangle_{J,K}$ in allen Ordnungen resummiert wird, sondern auch die verbundene Zwei-Punkt-Funktion

$$G^{(2)}(X, Y) \equiv G(X, Y) = \langle \phi(X)\phi(Y) \rangle_{J,K} - \langle \phi(X) \rangle_{J,K} \langle \phi(Y) \rangle_{J,K} \equiv G(Y, X). \quad (5.87)$$

Wir beginnen mit der naheliegenden Verallgemeinerung von $\mathcal{Z}[J]$,

$$\mathcal{Z}[J, K] = \Re \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ S[\phi] + \int_X J(X) \phi(X) + \frac{1}{2} \int_{X,Y} \phi(X) K(X, Y) \phi(Y) \right\}, \quad (5.88)$$

wobei die bilokale Quelle $K(X, Y) \equiv K(Y, X)$ symmetrisch in ihren Argumenten ist. Die Verallgemeinerung von $W[J]$ ist dann einfach

$$W[J, K] = \ln \mathcal{Z}[J, K]. \quad (5.89)$$

Wie vorher, s. Gl. (5.27), gilt

$$\frac{\delta W[J, K]}{\delta J(X)} = \langle \phi(X) \rangle_{J,K} \equiv \varphi(X). \quad (5.90)$$

Zusätzlich gilt nun aber, dass

$$\begin{aligned} \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(X, Y)} &= \frac{1}{\mathcal{Z}[J, K]} \Re \int \mathcal{D}\phi \frac{1}{2} \phi(X) \phi(Y) \exp \left\{ S[\phi] + \int_Z J(Z) \phi(Z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{Z,V} \phi(Z) K(Z, V) \phi(V) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \langle \phi(X) \phi(Y) \rangle_{J,K} \equiv \frac{1}{2} [G(X, Y) + \varphi(X) \varphi(Y)], \end{aligned} \quad (5.91)$$

wobei wir im letzten Schritt die Glgen. (5.87) und (5.90) benutzt haben.

Führen wir nun eine Legendre–Transformation bezüglich $J(X)$ **und** $K(X, Y)$ durch, so erhalten wir die sog. **2PI-effektive Wirkung**

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi, G] &= W[J, K] - \int_X J(X) \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(X)} - \int_{X,Y} K(X, Y) \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(X, Y)} \\
 &= W[J, K] - \int_X J(X) \varphi(X) - \frac{1}{2} \int_{X,Y} K(X, Y) [G(X, Y) + \varphi(X) \varphi(Y)] \\
 &\equiv W[J, K] - \int_X J(X) \varphi(X) - \frac{1}{2} \int_{X,Y} K(X, Y) [G(Y, X) + \varphi(X) \varphi(Y)] \\
 &\equiv W[J, K] - \int_X J(X) \varphi(X) - \frac{1}{2} \text{Tr}_X (K G) - \frac{1}{2} \int_{X,Y} \varphi(X) K(X, Y) \varphi(Y) ,
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

wobei wir zur zweiten Zeile die Glgen. (5.90) und (5.91), zur dritten Zeile die Symmetrie von $G(X, Y)$ benutzt und zur vierten Zeile die Integration über X, Y als Spur des Produkts der Matrizen K und G über die Raum-Zeit-Indizes geschrieben haben. Falls weitere interne Indizes (z.B. bei mehrkomponentigen skalaren Feldern) auftreten, ist die Spur auch über diese Indizes zu nehmen.

Unter Berücksichtigung, dass φ und G unabhängige Variable sind, ist offenbar

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta \varphi(X)} &= \int_Y \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(Y)} \frac{\delta J(Y)}{\delta \varphi(X)} + \int_{Y,Z} \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(Y, Z)} \frac{\delta K(Y, Z)}{\delta \varphi(X)} \\
 &\quad - \int_Y \frac{\delta J(Y)}{\delta \varphi(X)} \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(Y)} - \int_Y J(Y) \frac{\delta \varphi(Y)}{\delta \varphi(X)} - \int_{Y,Z} \frac{\delta K(Y, Z)}{\delta \varphi(X)} \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(Y, Z)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{Y,Z} K(Y, Z) \left[\varphi(Y) \frac{\delta \varphi(Z)}{\delta \varphi(X)} + \frac{\delta \varphi(Y)}{\delta \varphi(X)} \varphi(Z) \right] \\
 &= - \int_Y J(Y) \delta^{(4)}(X - Y) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{Y,Z} K(Y, Z) [\varphi(Y) \delta^{(4)}(X - Z) + \delta^{(4)}(X - Y) \varphi(Z)] \\
 &= -J(X) - \int_Y K(X, Y) \varphi(Y) ,
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

wobei wir im letzten Schritt beim ersten Term die Symmetrie von $K(X, Y)$ benutzt und

beim letzten Term $Z \rightarrow Y$ substituiert haben. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} &= \int_Z \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(Z)} \frac{\delta J(Z)}{\delta G(X, Y)} + \int_{Z, U} \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(Z, U)} \frac{\delta K(Z, U)}{\delta G(X, Y)} \\
 &- \int_Z \frac{\delta J(Z)}{\delta G(X, Y)} \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(Z)} - \int_{Z, U} \frac{\delta K(Z, U)}{\delta G(X, Y)} \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(Z, U)} \\
 &- \frac{1}{2} \int_{Z, U} K(Z, U) \frac{\delta G(U, Z)}{\delta G(X, Y)} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{Z, U} K(Z, U) \delta^{(4)}(X - U) \delta^{(4)}(Y - Z) \\
 &\equiv -\frac{1}{2} K(Y, X) \equiv -\frac{1}{2} K(X, Y) .
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

Für das physikalische System müssen wir die Quellen gegen null schicken, $J, K \rightarrow 0$. Mit den Gln. (5.93) und (5.94) folgt daraus, dass die Wirkung bzgl. Variationen von φ **und** G extremal wird,

$$\left. \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta\varphi(X)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}} = \left. \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}} = 0 . \tag{5.95}$$

Wir berechnen nun $\Gamma[\varphi, G]$ mit Hilfe von Gl. (5.92),

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi, G] &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X (K G) + \ln \left(\Re \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ S[\phi] + \int_X J(X) [\phi(X) - \varphi(X)] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{X, Y} [\phi(X) K(X, Y) \phi(Y) - \varphi(X) K(X, Y) \varphi(Y)] \right\} \right) , \tag{5.96}
 \end{aligned}$$

wobei wir die Gln. (5.88) und (5.89) benutzt haben. Wir zerlegen nun das Feld ϕ wieder in Erwartungswert und Quantenfluktuation (vgl. Gl. (5.47), wobei wir nun der Einfachheit halber $\hbar \equiv 1$ setzen) und substituieren die Integrationsvariable $\phi \rightarrow \psi \equiv \phi - \varphi$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi, G] &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X (K G) + \ln \left[\Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left(S[\varphi + \psi] + \int_X J(X) \psi(X) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{X, Y} K(X, Y) \{ [\varphi(X) + \psi(X)] [\varphi(Y) + \psi(Y)] - \varphi(X) \varphi(Y) \} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X (K G) + \ln \left(\Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ S[\varphi + \psi] + \int_X J(X) \psi(X) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{X, Y} \psi(X) K(X, Y) [\psi(Y) + 2\varphi(Y)] \right\} \right) , \tag{5.97}
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Symmetrie von $K(X, Y)$ ausgenutzt haben. Wie in Gl. (5.48) entwickeln wir nun die Wirkung um φ ,

$$S[\varphi + \psi] = S[\varphi] + \int_X \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} \psi(X) - \frac{1}{2} \int_{X, Y} \psi(X) \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) \psi(Y) + S_I[\varphi, \psi] , \tag{5.98}$$

mit dem inversen Baum-Graphen-Propagator (5.50) und der Wechselwirkungswirkung $S_I[\varphi, \psi]$ wie in Gl. (5.53) angegeben. Eingesetzt in Gl. (5.97) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi, G] &= S[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X (K G) \\ &+ \ln \left(\Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_X \psi(X) \left[J(X) + \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(X)} + \int_Y K(X, Y) \varphi(Y) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_{X, Y} \psi(X) [\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) - K(X, Y)] \psi(Y) + S_I[\varphi, \psi] \right\} \right). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Mit Gl. (5.93) können wir die erste eckige Klammer im Exponenten schreiben als

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(X)} - \frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta \varphi(X)} \equiv - \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\varphi, G]}{\delta \varphi(X)}, \quad (5.100)$$

wobei wir in Analogie zu Gl. (5.61)

$$\tilde{\Gamma}[\varphi, G] \equiv \Gamma[\varphi, G] - S[\varphi] \quad (5.101)$$

definiert haben. Ganz analog zu Gl. (5.63) erfüllt also auch $\tilde{\Gamma}[\varphi, G]$ eine Integro-Differentialgleichung,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}[\varphi, G] &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X (K G) + \ln \left(\Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int_X \psi(X) \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\varphi, G]}{\delta \varphi(X)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_{X, Y} \psi(X) [\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) - K(X, Y)] \psi(Y) + S_I[\varphi, \psi] \right\} \right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Wie schon im vorangegangenen Abschnitt müssen wir diese glücklicherweise nicht explizit lösen.

Wir schreiben nun Gl. (5.99) in der Form

$$\Gamma[\varphi, G] = S[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln G^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr}_X [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) G - \mathbb{1}] + \Gamma_2[\varphi, G]. \quad (5.103)$$

Dies ist als **Definitionsgleichung** für $\Gamma_2[\varphi, G]$ aufzufassen, d.h. durch Vergleich mit Gl. (5.99) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma_2[\varphi, G] &\equiv \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln G^{-1} + \frac{1}{2} \text{Tr}_X \{ [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) - K] G - \mathbb{1} \} \\ &+ \ln \left(\Re \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int_X \psi(X) \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\varphi, G]}{\delta \varphi(X)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_{X, Y} \psi(X) [\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) - K(X, Y)] \psi(Y) + S_I[\varphi, \psi] \right\} \right). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Wir werden zeigen, dass $\Gamma_2[\varphi, G]$ aus der **Summe aller 2PI-Vakuumpdiagramme mit durch $S_I[\varphi, \psi]$ definierten Vertizes und mit durch die verbundene Zwei-Punkt-Funktion G gegebenen internen Linien** besteht.

Zunächst aber leiten wir mit Hilfe von Gl. (5.94) eine wichtige Identität her. Mit

$$\frac{\delta \ln G^{-1}}{\delta G} = (G^{-1})^{-1} \frac{\delta G^{-1}}{\delta G} = G \left[- (G^{-1})^2 \right] = -G^{-1}$$

gilt

$$-\frac{1}{2} K(X, Y) = \frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} = \frac{1}{2} G^{-1}(X, Y) - \frac{1}{2} \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) + \frac{\delta \Gamma_2[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)}$$

oder

$$K(X, Y) = -G^{-1}(X, Y) + \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) + \Pi(X, Y), \quad (5.105)$$

wobei wir

$$\Pi(X, Y) \equiv -2 \frac{\delta \Gamma_2[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} \quad (5.106)$$

definiert haben.

Wir bemerken nun, dass wir bei **festem** K eine **1PI-effektive Wirkung** durch die Relation

$$\Gamma_K[\varphi] = W[J, K] - \int_X J(X) \varphi(X) \quad (5.107)$$

definieren können. Offenbar ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \Gamma_K[\varphi]}{\delta K(X, Y)} \right|_{\varphi} &= \int_Z \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(Z)} \left. \frac{\delta J(Z)}{\delta K(X, Y)} \right|_{\varphi} + \left. \frac{\delta W[J, K]}{\delta K(X, Y)} \right|_{\varphi} - \int_Z \left. \frac{\delta J(Z)}{\delta K(X, Y)} \right|_{\varphi} \varphi(Z) \\ &= \frac{1}{2} [G(X, Y) + \varphi(X) \varphi(Y)], \end{aligned} \quad (5.108)$$

wobei wir die Glgen. (5.90) und (5.91) benutzt haben. Eine Legendre-Transformation von $\Gamma_K[\varphi]$ bezüglich K liefert dann

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}[\varphi, G] &\equiv \Gamma_K[\varphi] - \int_{X, Y} K(X, Y) \left. \frac{\delta \Gamma_K[\varphi]}{\delta K(X, Y)} \right|_{\varphi} \\ &= \Gamma_K[\varphi] - \frac{1}{2} \int_{X, Y} K(X, Y) [G(X, Y) + \varphi(X) \varphi(Y)] \\ &= W[J, K] - \int_X J(X) \varphi(X) - \frac{1}{2} \text{Tr}_X(K G) - \frac{1}{2} \int_{X, Y} \varphi(X) K(X, Y) \varphi(Y) \\ &\equiv \Gamma[\varphi, G], \end{aligned} \quad (5.109)$$

wobei wir zur vorletzten Zeile Gl. (5.107) und zur letzten die Definition (5.92) benutzt haben. Dies bedeutet, dass wir lediglich die doppelte Legendre-Transformation von $W[J, K]$ bezüglich J und K **sequentiell** ausgeführt haben.

Wir definieren nun die **klassische Wirkung**

$$S_K[\varphi] \equiv S[\varphi] + \frac{1}{2} \int_{X, Y} \varphi(X) K(X, Y) \varphi(Y). \quad (5.110)$$

Der inverse Propagator auf Baum-Graphen-Niveau ist dann mit Gl. (5.50)

$$\frac{\delta^2 S_K[\varphi]}{\delta \varphi(X) \delta \varphi(Y)} = -\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) + K(X, Y) \equiv -\mathcal{D}_K^{-1}(X, Y; \varphi). \quad (5.111)$$

Für die Theorie mit der Wirkung (5.110) ist dann

- (i) $\mathcal{Z}[J, K] \equiv \mathcal{Z}_K[J]$ das erzeugende Funktional für die n -Punkt-Funktionen,
- (ii) $W[J, K] \equiv W_K[J] = \ln \mathcal{Z}_K[J]$ das erzeugende Funktional für die verbundenen n -Punkt-Funktionen und
- (iii) $\Gamma_K[\varphi]$ entsprechend die 1PI-effektive Wirkung (das erzeugende Funktional für die 1PI-Vertexfunktionen).

Wenden wir nun Gl. (5.61) mit (5.63) aus dem vorangegangenen Abschnitt 5.2 an, dann läßt sich $\Gamma_K[\varphi]$ schreiben als

$$\Gamma_K[\varphi] = S_K[\varphi] + \tilde{\Gamma}_K[\varphi], \quad (5.112)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_K[\varphi] = \ln \left(\mathfrak{R} \int \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{X,Y} \psi(X) [\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) - K(X, Y)] \psi(Y) + S_I[\varphi, \psi] \right. \right. \\ \left. \left. - \int_X \frac{\delta \tilde{\Gamma}_K[\varphi]}{\delta \varphi(X)} \psi(X) \right\} \right), \end{aligned} \quad (5.113)$$

wobei wir Gl. (5.111) benutzt haben. Für die **Schleifenentwicklung** von $\tilde{\Gamma}_K[\varphi]$ können wir die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts direkt übertragen. Wir bezeichnen mit $\tilde{\Gamma}_K^{(n)}[\varphi]$ den Beitrag mit n Schleifen, so dass

$$\tilde{\Gamma}_K[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_K^{(n)}[\varphi]. \quad (5.114)$$

Dann haben wir für die ersten drei Terme (ohne kombinatorische Faktoren)

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_K^{(1)}[\varphi] &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}_K^{-1}(\varphi) = \text{Diagram 1}, \\ \tilde{\Gamma}_K^{(2)}[\varphi] &= \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}, \\ \tilde{\Gamma}_K^{(3)}[\varphi] &= \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\ &+ \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} \end{aligned} \quad (5.115)$$

Hier sind die internen Linien nun gemäß Gl. (5.111) durch die modifizierten Baum-Graphen-Propagatoren $\mathcal{D}_K(X, Y; \varphi)$ gegeben (daher haben wir sie statt rot wie im vorangegangenen Abschnitt grün gezeichnet, auch wenn die Diagramme dieselbe Topologie wie vorher besitzen). Die Vertizes sind wie im vorangegangenen Abschnitt durch Gl. (5.56) definiert. Wie man unschwer erkennt, sind das erste, dritte und letzte Diagramm in $\tilde{\Gamma}_K^{(3)}[\varphi]$ 2PR, alle anderen sind 2PI.

Wir kombinieren nun die Glgen. (5.109), (5.110) und (5.112) und erhalten

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi, G] &= \Gamma_K[\varphi] - \frac{1}{2} \int_{X,Y} K(X, Y) [G(X, Y) + \varphi(X) \varphi(Y)] \\ &= S_K[\varphi] + \tilde{\Gamma}_K[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X (KG) - \frac{1}{2} \int_{X,Y} \varphi(X) K(X, Y) \varphi(Y) \\ &= S[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X (KG) + \tilde{\Gamma}_K[\varphi], \end{aligned} \quad (5.116)$$

Wir ersetzen nun im zweiten Term K durch den Ausdruck (5.105),

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}_X (KG) = -\frac{1}{2} \text{Tr}_X [\mathcal{D}^{-1}(\varphi)G - \mathbb{1}] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X (\Pi G), \quad (5.117)$$

und benutzen Gl. (5.105) auch im Ein-Schleifen-Beitrag zu $\tilde{\Gamma}_K[\varphi]$, s. Gl. (5.114),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}_K^{-1}(\varphi) &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) - K] \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln (G^{-1} - \Pi) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln [(1 - \Pi G) G^{-1}] = -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln G^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln (1 - \Pi G) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln G^{-1} + \frac{1}{2} \text{Tr}_X (\Pi G) + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}_X (\Pi G)^n. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Der zweite Term hebt sich gegen den letzten aus Gl. (5.117) weg und wir erhalten

$$\Gamma[\varphi, G] = S[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln G^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr}_X [\mathcal{D}^{-1}(\varphi)G - \mathbb{1}] + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}_X (\Pi G)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\Gamma}_K^{(n)}[\varphi]. \quad (5.119)$$

Der Vergleich mit Gl. (5.103) liefert folgenden Ausdruck für $\Gamma_2[\varphi, G]$,

$$\Gamma_2[\varphi, G] \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{\Gamma}_K^{(n)}[\varphi] + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}_X (\Pi G)^n. \quad (5.120)$$

Wir zeigen jetzt, dass, wenn man in den Diagrammen von $\tilde{\Gamma}_K^{(n)}[\varphi]$ alle internen Linien $\mathcal{D}_K(\varphi)$ gemäß Gl. (5.105) ersetzt, also durch

$$\mathcal{D}_K(\varphi) = [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) - K]^{-1} = (G^{-1} - \Pi)^{-1} = G(1 - \Pi G)^{-1} = G \sum_{n=0}^{\infty} (\Pi G)^n, \quad (5.121)$$

sich alle 2PR-Diagramme gegenseitig wegheben und $\Gamma_2[\varphi, G]$ in der Tat **nur aus 2PI-Vakuumdiagrammen besteht, mit internen Linien, die durch G (anstelle von**

$\mathcal{D}_K(\varphi)$ gegeben sind. In voller Allgemeinheit sprengt der Beweis den gegenwärtigen Rahmen bei weitem, daher zeigen wir dies nur für die Diagramme **ohne explizite φ -Abhängigkeit**, also für $\Gamma_2[0, G]$, und **bis zur Drei-Schleifen-Ordnung**.

Der zweite Term in Gl. (5.120) ist (bis auf den Vorfaktor) die uns wohlbekannte **Plasmon-Ring-Summe**,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr}_X(\Pi G)^n = \frac{1}{2} \text{Diagram 1} + \frac{1}{3} \text{Diagram 2} + \dots, \quad (5.122)$$

wobei die blauen internen Linien durch den Propagator G gegeben sind.

In den Diagrammen im ersten Term in Gl. (5.120) müssen wir die internen Linien \mathcal{D}_K gemäß Gl. (5.121) ersetzen. Dies reproduziert die ursprünglichen Diagramme, jetzt mit internen Linien, die durch G gegeben sind, plus eine unendliche Anzahl weiterer Diagramme, bei denen die internen Linien durch Π -Einschübe unterbrochen sind, also z.B.

$$\text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} + 2 \text{Diagram 5} + 2 \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \dots \quad (5.123)$$

Nun ist nach Definition $\Pi = -2\delta\Gamma_2/\delta G$. Funktionales Ableiten nach G bedeutet, dass man interne Linien G aus den Diagrammen “herausschneidet”, so dass aus Vakuumdiagrammen 2-Punkt-Vertexfunktionen entstehen. Beim funktionalen Ableiten ist natürlich die Produktregel zu beachten. Der erste Term in Γ_2 , Gl. (5.120), besteht aus Diagrammen, die aus mindestens zwei Schleifen bestehen. Der zweite Term, die Summe der Plasmon-Ring-Diagramme, enthält mindestens zwei Π -Einschübe und Π wiederum besteht aus mindestens einer Schleife (z.B. nach Öffnen eines Zwei-Schleifen-Vakuumdiagramms). Also ist das erste Diagramm in der Plasmon-Ring-Summe bereits ein Drei-Schleifen-Diagramm. Bis zur Drei-Schleifen-Ordnung gilt also (inklusive der kombinatorischen Faktoren)

$$\Gamma_2[0, G] = 3 \text{Diagram 8} + 12 \text{Diagram 9} + 36 \text{Diagram 10} + \frac{1}{4} \text{Diagram 11} + 6 \text{Diagram 12} + \dots \quad (5.124)$$

14.1.2022

5 Resummationsverfahren

wobei “...” Beiträge mit vier und mehr Schleifen symbolisieren. Damit ist

$$\begin{aligned}
 \Pi[0, G] &= -2 \frac{\delta \Gamma_2[0, G]}{\delta G} \\
 &= -12 \text{---} \bullet \text{---} - 96 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} - 144 \text{---} \bullet \text{---} - 144 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\
 &\quad - \text{---} \textcircled{\Pi} \text{---} \textcircled{\Pi} \text{---} - 12 \text{---} \bullet \text{---} \textcircled{\Pi} \text{---} - 24 \text{---} \bullet \text{---} \textcircled{\Pi} \text{---} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.125}$$

wobei “...” für Beiträge mit drei und mehr Schleifen stehen. Um $\Gamma_2[0, G]$ bis zur Drei-Schleifen-Ordnung zu berechnen, benötigen wir $\Pi[0, G]$ bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung. Dies bedeutet, dass wir auf der rechten Seite von Gl. (5.125) alle Π -Einschübe durch das Ein-Schleifen-Resultat (der erste Term auf der rechten Seite) approximieren dürfen,

$$\begin{aligned}
 \Pi[0, G] &= -12 \text{---} \bullet \text{---} - 96 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} - 144 \text{---} \bullet \text{---} - 144 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\
 &\quad - 144 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + 144 \text{---} \bullet \text{---} + 288 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.126}$$

Wie man sieht, heben sich die 1PR-Anteile (das vierte, fünfte und siebte Diagramm) gegenseitig auf. Außerdem heben sich die Diagramme auf, die lediglich eine Iteration des Tadpoles darstellen (das dritte und sechste Diagramm), denn diese sind im Prinzip bereits in G enthalten. Daher besteht $\Pi[0, G]$ ausschließlich aus den folgenden 1PI-Diagrammen,

$$\Pi[0, G] = -12 \text{---} \bullet \text{---} - 96 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \dots
 \tag{5.127}$$

Betrachten wir nun $\Gamma_2[0, G]$, Gl. (5.124), unter Berücksichtigung von Gl. (5.127), so

haben wir

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2[0, G] &= 3 \text{ (two circles)} + 12 \text{ (two circles with internal line)} + 36 \text{ (three circles)} \\
 &+ 36 \text{ (three circles in a chain)} - 72 \text{ (two circles with internal line)} + \dots \\
 &= 3 \text{ (two circles)} + 12 \text{ (two circles with internal line)} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.128}$$

Wie man sieht, heben sich hier alle 2PR-Diagramme gegenseitig auf. Bis zur Drei-Schleifen-Ordnung haben wir uns also davon überzeugt, dass $\Gamma_2[0, G]$ lediglich aus 2PI-Diagrammen besteht. Dies läßt sich auch unter Berücksichtigung der φ -abhängigen Anteile und in jeder beliebigen Schleifen-Ordnung zeigen.

Das physikalische System, also ohne äußere Quellen J, K , entspricht den Extrema der 2PI-effektiven Wirkung, vgl. Gl. (5.95), also

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta\varphi(X)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}} = \left. \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(X)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \left[\left. \frac{\delta\mathcal{D}^{-1}(\varphi)}{\delta\varphi(X)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} \mathcal{G} \right] + \left. \frac{\delta\Gamma_2[\varphi, G]}{\delta\varphi(X)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}}, \\
 0 &= \left. \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^{-1}(X, Y) - \frac{1}{2} \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \bar{\varphi}) + \left. \frac{\delta\Gamma_2[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}}. \tag{5.129}
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann mit Gl. (5.106) auch als

$$\mathcal{G}^{-1}(X, Y) = \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \bar{\varphi}) + \Pi(X, Y; \bar{\varphi}, \mathcal{G}) \tag{5.130}$$

geschrieben werden. Dies ist offensichtlich die **Dyson–Schwinger–Gleichung** für den vollen Propagator \mathcal{G} der Theorie, mit der 1PI-Selbstenergie Π . In der Tat hat Π die Form, wie wir sie in der ϕ^4 -Theorie erwarten: die Schleifenentwicklung (5.127) beginnt mit dem Kaulquappen-Diagramm (bzw. in erster Ordnung in der Anzahl der Schleifen mit einem weiteren Ein-Schleifen-Diagramm $\sim \bar{\varphi}^2$) und enthält dann Beiträge in höherer Ordnung in der Zahl der Schleifen. Es ist aber zu beachten, dass in allen Schleifen der **volle** Propagator \mathcal{G} umläuft, nicht der freie thermische Propagator \mathcal{D}_0 und nicht der Baum-Graphen-Propagator $\mathcal{D}(\bar{\varphi})$. Es handelt sich bei Gl. (5.130) also um eine **Selbstkonsistenzgleichung** (i.a. vom Typ einer Integralgleichung) für \mathcal{G} , die iterativ gelöst werden muss. Wir werden dafür in den folgenden Abschnitten noch Beispiele kennenlernen. Als letztes bemerken wir noch, dass das Verfahren der Resummation von n -Punkt-Funktionen auch für Drei- und Vier-Punkt-Funktionen durchgeführt werden kann, s. Ref. [11].

5.4 Spontane Symmetriebrechung und ihre Restaurierung bei nichtverschwindenden Temperaturen

Wir betrachten wieder die ϕ^4 -Theorie mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \lambda \phi^4 . \quad (5.131)$$

Diese Lagrange-Dichte besitzt eine Z_2 -Symmetrie, d.h. sie ist invariant unter der Transformation $\phi \rightarrow -\phi$.

Für $m^2 > 0$ ist diese Symmetrie auch im Grundzustand manifest, denn das **Potential** (genauer, die **Potentialdichte**)

$$U(\phi) \equiv \frac{m^2}{2} \phi^2 + \lambda \phi^4 \quad (5.132)$$

hat ein globales Minimum bei $\phi = 0$. Für $m^2 < 0$ ist die Z_2 -Symmetrie jedoch **spontan gebrochen**, das Potential hat die in Abb. 5.1 gezeigte Form.

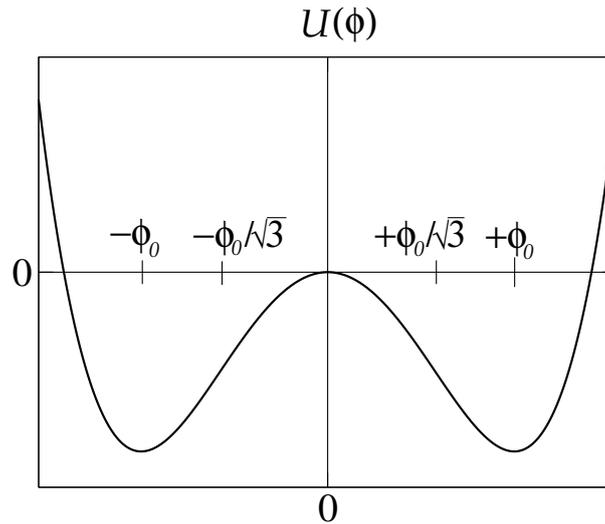


Abbildung 5.1: Das Potential $U(\phi)$ im Fall spontaner Symmetriebrechung.

Die Extrema des Potentials bestimmen sich aus der Bedingung

$$0 = \left. \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_0} = m^2 \phi_0 + 4\lambda \phi_0^3 = \phi_0 (m^2 + 4\lambda \phi_0^2) . \quad (5.133)$$

Die Lösung $\phi_0^{\max} = 0$ entspricht dem lokalen Maximum, während die beiden Minima durch

$$\phi_0^{\min} \equiv \pm\phi_0 , \quad \phi_0 \equiv \sqrt{-\frac{m^2}{4\lambda}} , \quad (5.134)$$

gegeben sind. Man erwartet nun, dass **thermische Fluktuationen** die Symmetrie oberhalb einer **kritischen Temperatur** T_c restaurieren, also dass bei $T = T_c$ gilt

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \langle \phi \rangle_{J=0} = \bar{\varphi}(T_c) = 0 . \quad (5.135)$$

Wir wollen dies mit Hilfe der 1PI-effektiven Wirkung näher untersuchen. Wir rechnen dazu in Ein-Schleifen-Näherung.

Zunächst ist klar, dass $\varphi(X) \equiv \varphi = \text{const.}$, es genügt also, das **1PI-effektive Potential** (anstelle der 1PI-effektiven Wirkung) zu betrachten, s. Gl. (5.82). In Ein-Schleifen-Näherung gilt

$$\tilde{\Gamma}[\varphi] = -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi) , \quad (5.136)$$

vgl. Gl. (5.80), und daher

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\varphi) &= -\frac{T}{V} \Gamma[\varphi] = -\frac{T}{V} \left\{ S[\varphi] + \tilde{\Gamma}[\varphi] \right\} = -\frac{T}{V} \left[-\frac{V}{T} U(\varphi) - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi) \right] \\ &= U(\varphi) + \frac{1}{2} \frac{T}{V} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi) . \end{aligned} \quad (5.137)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) &= (\square_X + m^2 + 12\lambda\varphi^2) \delta^{(4)}(X - Y) \\ &\equiv \frac{T}{V} \sum_K \mathcal{D}^{-1}(K; \varphi) e^{-iK \cdot (X - Y)} , \end{aligned} \quad (5.138)$$

wobei wir die Glgen. (3.61) und (5.50) benutzt und

$$\mathcal{D}^{-1}(K; \varphi) \equiv \mathcal{D}_0^{-1}(K) + 12\lambda\varphi^2 = -K^2 + m^2 + 12\lambda\varphi^2 \quad (5.139)$$

definiert haben. Nun ist $\text{Tr}_X \ln A \equiv \ln \det_X A$ und die Determinante kann sowohl im Orts- wie auch im Impulsraum berechnet werden. Berücksichtigen wir noch, dass das Argument des Logarithmus dimensionslos sein muss (was einen zusätzlichen Faktor $1/T^2$ unter der Determinante erfordert, vgl. Gl. (3.70)), erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{T}{V} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi) &\equiv \frac{1}{2} \frac{T}{V} \ln \det_K \frac{\mathcal{D}^{-1}(\varphi)}{T^2} \equiv \frac{1}{2} \frac{T}{V} \ln \prod_K \frac{\mathcal{D}^{-1}(K; \varphi)}{T^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_K \ln \frac{-K^2 + m^2 + 12\lambda\varphi^2}{T^2} . \end{aligned} \quad (5.140)$$

Dies ist (bis auf das Vorzeichen) nichts anderes als der Logarithmus der Zustandssumme einer **freien** Theorie von **Quasiteilchen** mit der (quadrierten) Masse

$$M^2(\varphi) \equiv m^2 + 12\lambda\varphi^2 . \quad (5.141)$$

Am Minimum (5.134) des Potentials ist diese Masse

$$M^2(\phi_0) = -4\lambda\phi_0^2 + 12\lambda\phi_0^2 = 8\lambda\phi_0^2 > 0 , \quad (5.142)$$

d.h. die Quasiteilchen haben dort eine **reelle** Masse $M(\phi_0) \in \mathbb{R}$.

Wir erkennen aber nun auch, dass die 1PI-effektive Wirkung das Problem hat, dass abseits des Minimums des Potentials für

$$\varphi^2 \leq -\frac{m^2}{12\lambda} \equiv \frac{\phi_0^2}{3} \implies M^2(\varphi) \leq 0 ,$$

d.h. die Quasiteilchen eine **imaginäre** Masse erhalten. Man sieht dies auch sofort in Abb. 5.1, weil dort die **Krümmung** des Potentials $U(\varphi)$ (die genau der quadrierten Masse entspricht) **negativ** wird. Streng genommen läßt sich der Ein-Schleifen-Beitrag (5.140) für diese Werte von φ nicht mehr auswerten. Solange der physikalische Punkt (das Minimum des Potentials) $\varphi \equiv \bar{\varphi} \geq \phi_0/\sqrt{3}$ ist, können wir dieses Problem aber zunächst außer acht lassen.

Wie am Anfang des Abschnitts erwähnt, erwarten wir, dass thermische Fluktuationen die gebrochene Symmetrie restaurieren. Für $T > 0$ wird also das Minimum $\bar{\varphi}$ des 1PI-effektiven Potentials, welches wir aus der Bedingung

$$0 = \left. \frac{d\mathcal{V}}{d\varphi} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} \quad (5.143)$$

bestimmen, kleiner werden,

$$\bar{\varphi}(T) < \phi_0 = \sqrt{-\frac{m^2}{4\lambda}} , \quad T > 0 . \quad (5.144)$$

Oberhalb einer **kritischen Temperatur** T_c wird schließlich

$$\bar{\varphi}(T) = 0 , \quad T \geq T_c . \quad (5.145)$$

Der Verlauf des 1PI-effektiven Potentials als Funktion der Temperatur ist qualitativ in Abb. 5.2 skizziert.

Wir wollen dies nun durch eine explizite Rechnung bestätigen [12]. Den Ein-Schleifen-Beitrag berechnen wir in Analogie zur freien Theorie, s. Gl. (3.83),

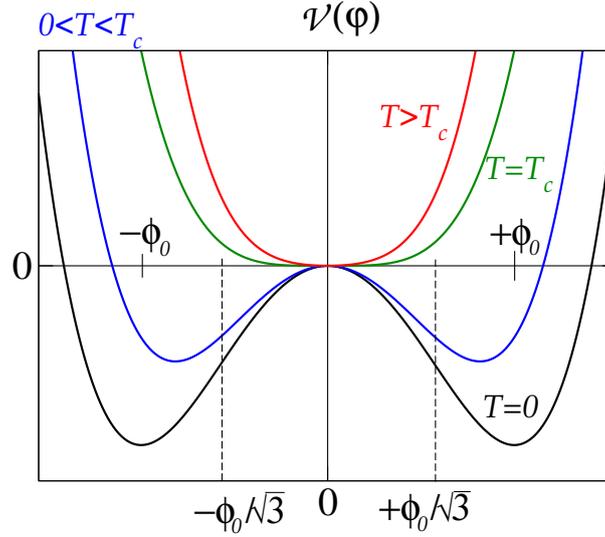
$$\frac{1}{2} \frac{T}{V} \ln \prod_K \frac{\mathcal{D}^{-1}(K; \varphi)}{T^2} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2} + T \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \right] , \quad (5.146)$$

wobei $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2(\varphi)}$. Wir würden nun argumentieren, dass wir den Beitrag der Nullpunktenergie durch Renormierung trivial entfernen können. Dies ist aber aufgrund der expliziten Abhängigkeit von M^2 von φ nicht korrekt. Wir müssen die UV-Divergenzen der Nullpunktenergie sorgfältig isolieren und dann entsprechende Gegen-Terme (“counter terms”) in die Lagrange-Dichte inkorporieren, die diese Divergenzen eliminieren. Dazu schreiben wir zunächst

$$E_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \ln(-k_0^2 + E_{\mathbf{k}}^2 - i\delta) . \quad (5.147)$$

Beweis: Offenbar ist

$$\frac{d}{dE_{\mathbf{k}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \ln(-k_0^2 + E_{\mathbf{k}}^2 - i\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{1}{-k_0^2 + E_{\mathbf{k}}^2 - i\delta} = \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} ,$$


 Abbildung 5.2: Das 1PI-effektive Potential $\mathcal{V}(\varphi)$ für verschiedene Temperaturen.

wobei wir das k_0 -Integral in der oberen Halbebene der komplexen k_0 -Ebene geschlossen haben und den Residuensatz für den Pol bei $k_0 = -\sqrt{E_{\mathbf{k}}^2 - i\delta} \simeq -E_{\mathbf{k}} + i\delta'$ benutzt haben. Integrieren wir über $E_{\mathbf{k}}^2$, so erhalten wir (abgesehen von irrelevanten Konstanten)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi i} \ln(-k_0^2 + E_{\mathbf{k}}^2 - i\delta) = \int_0^{E_{\mathbf{k}}^2} dE'_{\mathbf{k}}{}^2 \frac{1}{2E'_{\mathbf{k}}} = \int_0^{E_{\mathbf{k}}} dE'_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}},$$

was Gl. (5.147) beweist, q.e.d..

Nun können wir die Nullpunktenergie in Gl. (5.146) wie folgt umformen,

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \ln(-K^2 + M^2 - i\delta). \quad (5.148)$$

Zur Berechnung dieses Integrals rotieren wir die k_0 -Integration auf die imaginäre Achse, $k_0 = ik_4$, d.h. ohne dabei die Verzweigungsschnitte des Logarithmus bei $-\infty + i\delta' < k_0 \leq -E_{\mathbf{k}} + i\delta'$ und $E_{\mathbf{k}} - i\delta' \leq k_0 < \infty - i\delta'$ zu überstreichen. Mit $\bar{K}^\mu \equiv (k_4, \mathbf{k})^T$ haben wir dann

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4\bar{K}}{(2\pi)^4} \ln(\bar{K}^2 + M^2) = \frac{1}{2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\bar{K} \bar{K}^3 \ln(\bar{K}^2 + M^2), \quad (5.149)$$

wobei wir benutzt haben, dass die Oberfläche der vierdimensionalen Einheitskugel den Wert $2\pi^2$ hat. Wir schreiben nun $\bar{K}^2 + M^2 = \bar{K}^2 + \mu^2 - \mu^2 + M^2$, mit einer beliebigen

konstanten Energieskala μ und entwickeln den Logarithmus,

$$\begin{aligned}
 \ln(\bar{K}^2 + M^2) &= \ln(\bar{K}^2 + \mu^2 - \mu^2 + M^2) = \ln(\bar{K}^2 + \mu^2) + \ln\left(1 - \frac{\mu^2 - M^2}{\bar{K}^2 + \mu^2}\right) \\
 &= \ln(\bar{K}^2 + \mu^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\mu^2 - M^2}{\bar{K}^2 + \mu^2}\right)^n \\
 &= \ln(\bar{K}^2 + \mu^2) - \frac{\mu^2 - M^2}{\bar{K}^2 + \mu^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2 - M^2}{\bar{K}^2 + \mu^2}\right)^2 - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\mu^2 - M^2}{\bar{K}^2 + \mu^2}\right)^n . \quad (5.150)
 \end{aligned}$$

Durch Power-Counting überzeugt man sich, dass bei der Integration über \bar{K} in Gl. (5.149) lediglich die ersten drei Terme UV-divergent sind, die anderen sind konvergent. Der erste Term $\sim \ln(\bar{K}^2 + \mu^2)$ stellt lediglich eine unendliche Konstante dar und kann trivial renormiert werden (wie die Nullpunktenergie bei der freien Theorie). Der zweite und dritte Term dagegen enthalten Potenzen von φ ,

$$\begin{aligned}
 \mu^2 - M^2 &= \mu^2 - m^2 - 12\lambda\varphi^2 , \\
 (\mu^2 - M^2)^2 &= (\mu^2 - m^2)^2 - 24\lambda(\mu^2 - m^2)\varphi^2 + 144\lambda^2\varphi^4 ,
 \end{aligned}$$

und benötigen daher entsprechende Gegen-Terme in der Lagrange-Dichte, um die zugehörigen Divergenzen zu eliminieren. Wie gehabt tragen die Terme $\sim \varphi^2$ zur Massenrenormierung und der Term $\sim \varphi^4$ zur Renormierung der Kopplungskonstanten bei. Durch ein geeignetes Subtraktionsschema kann man außerdem erreichen, dass die zugehörigen endlichen konstanten Terme verschwinden. Wir müssen im Folgenden also lediglich den letzten Term in Gl. (5.150) berücksichtigen, um den endlichen Beitrag der Nullpunktenergie zum 1PI-effektiven Potential zu bestimmen,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} \Big|_{\text{ren.}} &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} d\bar{K} \bar{K}^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\mu^2 - M^2}{\bar{K}^2 + \mu^2}\right)^n \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} (\mu^2 - M^2)^n \int_0^{\infty} d\bar{K} \bar{K} \frac{\bar{K}^2}{(\bar{K}^2 + \mu^2)^n} \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} (\mu^2 - M^2)^n \mu^{4-2n} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{(x+1)^n} . \quad (5.151)
 \end{aligned}$$

Das Integral ist elementar lösbar,

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{(x+1)^n} = -\frac{1}{n-2} \frac{1}{(x+1)^{n-2}} + \frac{1}{n-1} \frac{1}{(x+1)^{n-1}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} ,$$

so dass mit

$$\frac{1}{n} \frac{1}{n-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \quad \text{und} \quad -\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

gilt

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} \Big|_{\text{ren.}} &= -\frac{\mu^4}{32\pi^2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^n \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n-1}\right) \\
 &= -\frac{\mu^4}{32\pi^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^{n+2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^{n+1} \right] \\
 &= \frac{\mu^4}{64\pi^2} \left[\ln \frac{M^2}{\mu^2} + 1 - \frac{M^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^2 \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right) \left(\ln \frac{M^2}{\mu^2} + 1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right) \right] \\
 &= \frac{\mu^4}{64\pi^2} \left\{ \frac{M^4}{\mu^4} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right) \left[1 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)\right] \right\} \\
 &= \frac{\mu^4}{64\pi^2} \left[\frac{M^4}{\mu^4} \ln \frac{M^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{M^2}{\mu^2}\right) \right]. \tag{5.152}
 \end{aligned}$$

Da eine Konstante lediglich den Nullpunkt der Energie verschiebt, können wir o.B.d.A. den konstanten Term $\mu^4/(6 \cdot 64\pi^2)$ subtrahieren und das Ergebnis in der kompakteren Form

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} \Big|_{\text{ren.}} = \frac{1}{64\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{M^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \left(M^2 - \frac{2}{3}\mu^2\right)^2 \right] \tag{5.153}$$

schreiben.

Das renormierte 1PI-effektive Potential (5.137) nimmt also mit den Glgen. (5.132), (5.146) und (5.153) die Form

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \lambda \varphi^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left[M^4 \ln \frac{M^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \left(M^2 - \frac{2}{3}\mu^2\right)^2 \right] + T \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \tag{5.154}$$

an.

19.1.2022

Wir machen nun folgende wichtige Beobachtung. Für eine **masselose Theorie**, $m^2 = 0$, die auf dem klassischen Niveau **keinerlei** spontane Symmetriebrechung zeigt, lautet das 1PI-effektive Potential aufgrund von Gl. (5.141) bei $T = 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\varphi) &= \lambda \varphi^4 + \frac{9\lambda^2}{4\pi^2} \varphi^4 \ln \frac{12\lambda\varphi^2}{\mu^2} - \frac{1}{96\pi^2} (18\lambda\varphi^2 - \mu^2)^2 \\
 &= \lambda \left(1 - \frac{27\lambda}{8\pi^2}\right) \varphi^4 + \frac{9\lambda^2}{4\pi^2} \varphi^4 \ln \frac{12\lambda\varphi^2}{\mu^2} + \frac{3\lambda\mu^2}{8\pi^2} \varphi^2 - \frac{\mu^4}{96\pi^2}. \tag{5.155}
 \end{aligned}$$

Der letzte Term stellt lediglich eine irrelevante Konstante dar und kann vernachlässigt werden. Der vorletzte Term stellt einen **Massenterm** dar, mit $m_{\text{ind}}^2 \equiv 3\lambda\mu^2/(4\pi^2)$, der durch den Beitrag der Nullpunktenergie, also aufgrund von **Vakuumfluktuationen**, induziert wird. Da diese induzierte Masse aber proportional zur willkürlich gewählten Energieskala μ ist, kann es sich nicht um eine physikalische Masse handeln. Wir lassen diesen Term

daher im Folgenden ebenfalls außer acht (eine Berücksichtigung ändert qualitativ nichts an den folgenden Argumenten, macht allerdings die Berechnungen etwas komplizierter). Dann lautet das 1PI-effektive Potential

$$\mathcal{V}(\varphi) = \lambda\varphi^4 \left(1 - \frac{27\lambda}{8\pi^2} + \frac{9\lambda}{4\pi^2} \ln \frac{12\lambda\varphi^2}{\mu^2} \right). \quad (5.156)$$

Die Extrema dieses Potentials sind durch die Gleichung

$$0 = \left. \frac{d\mathcal{V}}{d\varphi} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} = 4\lambda\bar{\varphi}^3 \left(1 - \frac{9\lambda}{4\pi^2} + \frac{9\lambda}{4\pi^2} \ln \frac{12\lambda\bar{\varphi}^2}{\mu^2} \right) = 4\lambda\bar{\varphi}^3 \left(1 + \frac{9\lambda}{4\pi^2} \ln \frac{12\lambda\bar{\varphi}^2}{e\mu^2} \right) \quad (5.157)$$

gegeben. Eine (dreifach entartete) Lösung ist $\bar{\varphi}_0 = 0$, aber eine weitere ist

$$\bar{\varphi}_*^2 = \frac{\mu^2}{12\lambda} \exp \left(1 - \frac{4\pi^2}{9\lambda} \right). \quad (5.158)$$

Wir berechnen die zweite Ableitung von $\mathcal{V}(\varphi)$ um zu sehen, welche Extrema Maxima und Minima entsprechen,

$$\frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} = 12\lambda\varphi^2 \left(1 + \frac{3\lambda}{2\pi^2} + \frac{9\lambda}{4\pi^2} \ln \frac{12\lambda\varphi^2}{e\mu^2} \right). \quad (5.159)$$

Offensichtlich verschwindet auch die zweite Ableitung am Extremum $\bar{\varphi}_0 = 0$, während am Extremum (5.158) gilt

$$\frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2}(\bar{\varphi}_*) = \frac{18\lambda^2}{\pi^2} \bar{\varphi}_*^2 > 0. \quad (5.160)$$

Es handelt sich beim Extremum (5.158) also um ein **Minimum** des 1PI-effektiven Potentials bei einem **nichtverschwindenden** Wert von φ . Das Potential hat also qualitativ dieselbe Form wie in Abb. 5.1 (auch wenn die Krümmung bei $\varphi = 0$ nicht negativ ist, sondern verschwindet). **Vakuumfluktuationen induzieren also spontane Symmetriebrechung.** Dies bezeichnet man i.d.R. als **Coleman–Weinberg–Mechanismus** [13]. Man spricht manchmal auch von **spontaner Symmetriebrechung durch Strahlungskorrekturen.**

Wir kehren nun zur Betrachtung der **Restoration** spontan gebrochener Symmetrie aufgrund von **thermischen Fluktuationen** zurück. Dazu betrachten wir den temperaturabhängigen Term des 1PI-effektiven Potentials (den letzten Term in Gl. (5.154)),

$$T \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}) \equiv \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 - e^{-\sqrt{x^2+\alpha^2}}), \quad (5.161)$$

wobei wir die Abkürzungen $x \equiv |\mathbf{k}|/T$, $\alpha \equiv M/T$ benutzt haben. Eine analytische Berechnung ist im Limes großer Temperaturen, $T \gg M$, also $\alpha \ll 1$ möglich. Eine Taylor-Entwicklung des Logarithmus in der Variable α^2 um den Punkt $\alpha^2 = 0$ liefert

$$\ln(1 - e^{-\sqrt{x^2+\alpha^2}}) = \ln(1 - e^{-x}) + \frac{1}{e^x - 1} \frac{\alpha^2}{2x} + O(\alpha^4). \quad (5.162)$$

Eingesetzt in Gl. (5.161) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \left[\ln(1 - e^{-x}) + \frac{\alpha^2}{2x} \frac{1}{e^x - 1} \right] + O(M^4) &= \frac{T^4}{2\pi^2} \left(-\frac{\pi^4}{45} + \frac{M^2}{2T^2} \frac{\pi^2}{6} \right) + O(M^4) \\ &= -\frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{M^2 T^2}{24} + O(M^4), \end{aligned} \quad (5.163)$$

wobei wir einige wohlbekannte Integrale benutzt haben. Im Hochtemperaturlimes können wir den endlichen Beitrag der Vakuumfluktuationen vernachlässigen und erhalten für das 1PI-effektive Potential (5.154)

$$\mathcal{V}(\varphi) \simeq \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \lambda \varphi^4 - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24} + \frac{\lambda T^2}{2} \varphi^2, \quad (5.164)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (5.141) benutzt haben. Offensichtlich **induzieren die themischen Fluktuationen einen Beitrag $\sim \lambda T^2$ zum Massenterm**. Die **effektive (quadrierte) Masse** bei einer Temperatur T ist also

$$m_{\text{eff}}^2(T) \equiv m^2 + \lambda T^2 = \lambda (-4\phi_0^2 + T^2). \quad (5.165)$$

Für $T < 2\phi_0$ überwiegt der erste Term, so dass $m_{\text{eff}}^2(T) < 0$, und die Symmetrie ist nach wie vor spontan gebrochen. Bei einer Temperatur $T_c \equiv 2\phi_0$ verschwindet jedoch die effektive Masse, $m_{\text{eff}}^2(T_c) = 0$. Bei Temperaturen oberhalb von T_c ist $m_{\text{eff}}^2(T) > 0$ und die Symmetrie ist restauriert.

Der Erwartungswert des Feldes bestimmt sich aus der Bedingung

$$0 = \left. \frac{d\mathcal{V}}{d\varphi} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} = m_{\text{eff}}^2(T) \bar{\varphi} + 4\lambda \bar{\varphi}^3 = \bar{\varphi} [m_{\text{eff}}^2(T) + 4\lambda \bar{\varphi}^2]. \quad (5.166)$$

Das **Minimum** des Potentials ist für $T \leq T_c$ bei

$$\bar{\varphi}^2(T) = -\frac{m_{\text{eff}}^2(T)}{4\lambda} = -\frac{m^2}{4\lambda} - \frac{T^2}{4} = \phi_0^2 - \frac{T^2}{4}. \quad (5.167)$$

Bei ansteigender Temperatur wird $\bar{\varphi}(T)$ kleiner und verschwindet bei $T = T_c$. Es handelt sich also um einen **Phasenübergang zweiter Ordnung**.

5.5 Symmetrierestauration in Hartree– und Hartree–Fock–Näherung

Wir wollen nun die Restaurierung spontan gebrochener Symmetrien im Rahmen der 2PI-effektiven Wirkung, Gl. (5.103), besprechen. Natürlich kann man nicht alle 2PI-Vakuumdiagramme in $\Gamma_2[\varphi, G]$ berücksichtigen, man muss sich in geeigneter Weise auf eine Untermenge beschränken. Man spricht dann von einer **Trunkierung**. Jede Trunkierung definiert eine **selbstkonsistente Vielteilchennäherung**. “Selbstkonsistent” bedeutet in

diesem Zusammenhang, dass die fundamentalen thermodynamischen Relationen erfüllt bleiben.

Wir nehmen als Beispiel zunächst wieder die ϕ^4 -Theorie und beschränken $\Gamma_2[\varphi, G]$ auf die Untermenge der **Zwei-Schleifen-Diagramme**. Inklusive kombinatorischer Faktoren sind dies

$$\Gamma_2[\varphi, G] = 3 \text{ (Diagramm 1)} + 3 \text{ (Diagramm 2)} . \quad (5.168)$$

Gemäß Gl. (5.106) folgt daraus die 1PI-Selbstenergie zu

$$\Pi(X, Y) = -2 \frac{\delta \Gamma_2[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} = -12 \text{ (Diagramm 1)} - 18 \text{ (Diagramm 2)} . \quad (5.169)$$

Das zweite Diagramm hängt von den zwei Raum-Zeit-Koordinaten X und Y ab. Im Impulsraum führt dies zu einer nicht-trivialen **Impulsabhängigkeit** der Selbstenergie. Da dies die nachfolgende Diskussion unnötig verkompliziert, lassen wir dieses Diagramm im Folgenden außer acht. Wir betrachten also lediglich das Kaulquappen-Diagramm in Gl. (5.169). Dieses ist **lokal**, d.h. $\sim \delta^{(4)}(X - Y)$, und liefert daher im Impulsraum einfach einen **konstanten Beitrag**, vgl. Gl. (4.40). Anders ausgedrückt trunkieren wir $\Gamma_2[\varphi, G]$ nach dem ersten Diagramm in Gl. (5.168). Dies entspricht der sog. **Doppelblasen-Näherung**.

Mit dieser Näherung ist nun der Satz von Gln. (5.95) zu lösen. Die erste Gleichung lautet mit Gl. (5.103)

$$0 = \frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}} = \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}} - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \left[\frac{\delta \mathcal{D}^{-1}(\varphi)}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}} \mathcal{G} \right] + \frac{\delta \Gamma_2[\varphi, G]}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}} . \quad (5.170)$$

Da $\Gamma_2[\varphi, G]$ in Doppelblasen-Näherung nicht von φ abhängt, verschwindet der letzte Term. Ferner ist mit Gl. (5.49)

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(Z)} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}} = - \int_{X, Y} \delta^{(4)}(X - Z) (\square_X + m^2) \delta^{(4)}(X - Y) \bar{\varphi} - 4\lambda \bar{\varphi}^3 = -m^2 \bar{\varphi} - 4\lambda \bar{\varphi}^3 . \quad (5.171)$$

Hier haben wir angenommen, dass $\bar{\varphi} = \text{const}$, also nicht vom Raum-Zeit-Punkt Z abhängt. Außerdem ist mit Gl. (5.50)

$$\frac{\delta \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi)}{\delta \varphi(Z)} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}} = 24\lambda \bar{\varphi} \delta^{(4)}(X - Z) \delta^{(4)}(X - Y) , \quad (5.172)$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{Tr}_X \left[\frac{\delta \mathcal{D}^{-1}(\varphi)}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}} \mathcal{G} \right] &= 24\lambda \bar{\varphi} \int_{X, Y} \delta^{(4)}(X - Z) \delta^{(4)}(X - Y) \mathcal{G}(Y, X) = 24\lambda \bar{\varphi} \mathcal{G}(Z, Z) \\ &= 24\lambda \bar{\varphi} \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}(Q) . \end{aligned} \quad (5.173)$$

Hier haben wir die Fourier-Transformation der verbundenen Zwei-Punkt-Funktion benutzt,

$$\mathcal{G}(X, Y) \equiv \langle \phi(X)\phi(Y) \rangle - \varphi(X)\varphi(Y) = \frac{T}{V} \sum_Q e^{-iQ \cdot (X-Y)} \mathcal{G}(Q). \quad (5.174)$$

Die Wahl des Normierungsfaktors T/V erfolgt in Analogie zum freien Fall, so dass $\mathcal{G}(Q)$ dieselbe Dimension wie $\mathcal{D}_0(Q)$ hat. Damit folgt für Gl. (5.170)

$$0 = \bar{\varphi} \left[m^2 + 4\lambda\bar{\varphi}^2 + 12\lambda \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}(Q) \right]. \quad (5.175)$$

Diese Gleichung bestimmt die Extrema der effektiven Wirkung bzw. des effektiven Potentials (da die Ein-Punkt-Funktion $\bar{\varphi}$ als raum-zeitlich konstant angenommen wurde) bezüglich Variation nach φ . Offensichtlich tritt auch in dieser Gleichung das Kaulquappen-Diagramm (4.40) auf (allerdings läuft die verbundene Zwei-Punkt-Funktion \mathcal{G} anstelle des freien Propagators \mathcal{D}_0 in der Schleife um).

Die zweite Gl. (5.95) lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta G(X, Y)} \Big|_{\varphi=\bar{\varphi}, G=\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^{-1}(X, Y) - \frac{1}{2} \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \bar{\varphi}) - \frac{1}{2} \Pi(X, Y) \\ \iff \mathcal{G}^{-1}(X, Y) &= \mathcal{D}^{-1}(X, Y; \bar{\varphi}) + \Pi(X, Y). \end{aligned} \quad (5.176)$$

Unter Beachtung der Tatsache, dass der Vertex gemäß Gl. (4.2) einen Faktor $-\lambda$ beiträgt, lautet die Selbstenergie (5.169) in Kaulquappen-Näherung

$$\Pi(X, Y) = 12\lambda \mathcal{G}(X, X) \delta^{(4)}(X - Y) = 12\lambda \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}(Q) \delta^{(4)}(X - Y), \quad (5.177)$$

so dass mit Gl. (5.50)

$$\mathcal{G}^{-1}(X, Y) = \left[\square_X + m^2 + 12\lambda \bar{\varphi}^2 + 12\lambda \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}(Q) \right] \delta^{(4)}(X - Y), \quad (5.178)$$

bzw. im Impulsraum

$$\mathcal{G}^{-1}(K) = -K^2 + m^2 + 12\lambda \left[\bar{\varphi}^2 + \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}(Q) \right]. \quad (5.179)$$

Da die Selbstenergie im Impulsraum konstant ist, ändert sich nichts an der Impulsabhängigkeit von $\mathcal{G}^{-1}(K)$ gegenüber der von $\mathcal{D}^{-1}(K; \bar{\varphi})$. Die impulsunabhängigen Terme in Gl. (5.179) können daher als **effektive Masse**

$$M^2 \equiv m^2 + 12\lambda \left[\bar{\varphi}^2 + \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}(Q) \right] \quad (5.180)$$

zusammengefasst werden. Wir erhalten damit

$$\mathcal{G}^{-1}(K) = -K^2 + M^2 \iff \mathcal{G}(K) = \frac{1}{M^2 - K^2} = \frac{1}{E_{\mathbf{k}}^{*2} - k_0^2} = \frac{1}{E_{\mathbf{k}}^{*2} + \omega_n^2}, \quad (5.181)$$

wobei nun $E_{\mathbf{k}}^* \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}$. Formal hat die verbundene Zwei-Punkt-Funktion dieselbe Gestalt wie der freie Propagator, vgl. Gl. (3.64), nun allerdings mit der effektiven Masse (5.180) anstelle der freien Masse m .

Der Vorteil der Doppelblasen-Näherung, die zu einer konstanten (d.h. nicht-impulsabhängigen) Selbstenergie führt, ist nun offensichtlich: weil die verbundene Zwei-Punkt-Funktion in dieser Näherung die einfache Form (5.181) hat, muss man anstelle einer komplizierten Integralgleichung für die Funktion $\mathcal{G}(K)$ lediglich die **Fixpunkt-Gleichung** (5.180) für die effektive Masse M lösen. Man nennt diese Gleichung des öfteren auch **Gap-Gleichung**. Die effektive Masse hängt über die Ein-Punkt-Funktion $\bar{\varphi}$ (als Lösung von Gl. (5.175)) und über den Kaulquappen-Term in Gl. (5.180) von der Temperatur T ab.

Für den Kaulquappen-Term können wir mit der Ersetzung $E_{\mathbf{q}} \rightarrow E_{\mathbf{q}}^*$ sofort das Resultat (4.41) übernehmen,

$$\frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}(Q) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{q}}^*} \left[\frac{1}{2} + n_B(E_{\mathbf{q}}^*) \right]. \quad (5.182)$$

Der Vakuumbeitrag darf nicht trivial renormiert werden, weil M von der Temperatur abhängt und somit ein temperaturabhängiger Gegen-Term erforderlich wäre, was dem Konzept der Renormierung im UV (wo die Temperatur keine Rolle spielen sollte) widerspricht. Ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt muss man die divergenten Beiträge daher zunächst sorgfältig isolieren. Dazu schreiben wir

$$\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{E_{\mathbf{q}}^{*2} - q_0^2 - i\delta}, \quad (5.183)$$

was man mit dem Residuensatz sofort beweist. Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}^*} &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{1}{E_{\mathbf{q}}^{*2} - q_0^2 - i\delta} = -i \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{-q_0^2 + E_{\mathbf{q}}^{*2} - i\delta} \\ &\equiv \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{Q}^2 + M^2}, \end{aligned} \quad (5.184)$$

wobei wir im letzten Schritt den Euklidischen Impuls $\bar{Q}^\mu = (q_4, \mathbf{q})$ mit $q_0 = iq_4$ eingeführt haben. Wie im vorangegangenen Abschnitt führen wir eine Impulsskala μ über $\bar{Q}^2 + M^2 =$

$\bar{Q}^2 + \mu^2 - \mu^2 + M^2$ ein, so dass

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{Q}^2 + M^2} &= \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \mu^2} \frac{\bar{Q}^2 + \mu^2}{\bar{Q}^2 + \mu^2 - \mu^2 + M^2} \\
 &= \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \mu^2} \frac{1}{1 - \frac{\mu^2 - M^2}{\bar{Q}^2 + \mu^2}} \\
 &= \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu^2 - M^2}{\bar{Q}^2 + \mu^2} \right)^n \\
 &= \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\bar{Q}^2 + \mu^2} + \frac{\mu^2 - M^2}{(\bar{Q}^2 + \mu^2)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu^2 - M^2)^n}{(\bar{Q}^2 + \mu^2)^{n+1}} \right]. \quad (5.185)
 \end{aligned}$$

Lediglich die ersten beiden Terme divergieren im UV und müssen durch Gegen-Terme (die von φ^2 abhängen) eliminiert werden. Die restlichen Terme der Reihe sind alle konvergent und berechnen sich mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\bar{Q}^2 + \mu^2)^{n+1}} &= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} d\bar{Q} \bar{Q}^3 \frac{1}{(\bar{Q}^2 + \mu^2)^{n+1}} = \frac{\mu^{4-2(n+1)}}{16\pi^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{(x+1)^{n+1}} \\
 &= \frac{\mu^{2(1-n)}}{16\pi^2} \left[-\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x+1)^{n-1}} + \frac{1}{n} \frac{1}{(x+1)^n} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{\mu^{2(1-n)}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad (5.186)
 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{\infty} \int \frac{d^4\bar{Q}}{(2\pi)^4} \frac{(\mu^2 - M^2)^n}{(\bar{Q}^2 + \mu^2)^{n+1}} &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu^2 - M^2)^n}{\mu^{2(n-1)}} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{\mu^2}{16\pi^2} \left[\left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right)^n + 1 - \frac{M^2}{\mu^2} \right] \\
 &= \frac{\mu^2}{16\pi^2} \left[-\left(1 - \frac{M^2}{\mu^2}\right) \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \ln \frac{M^2}{\mu^2} + 1 - \frac{M^2}{\mu^2} \right] \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} \left(M^2 \ln \frac{M^2}{\mu^2} - M^2 + \mu^2 \right). \quad (5.187)
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Fixpunkt-Gleichung (5.180)

$$M^2 = m^2 + 12\lambda \left[\bar{\varphi}^2 + \mathcal{T}_T^* + \frac{1}{16\pi^2} \left(M^2 \ln \frac{M^2}{\mu^2} - M^2 + \mu^2 \right) \right], \quad (5.188)$$

wobei der thermische Beitrag des Kaulquappen-Terms,

$$\mathcal{T}_T^* = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{n_B(E_{\mathbf{q}}^*)}{E_{\mathbf{q}}^*}, \quad (5.189)$$

numerisch ausgewertet werden muss.

Bei $T = 0$ verschwindet \mathcal{T}_T^* und die Glgen. (5.175) und (5.188) lauten mit $\bar{\varphi}_0 \equiv \bar{\varphi}(T = 0)$, $M_0 \equiv M(T = 0)$

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\varphi}_0 \left[m^2 + 4\lambda\bar{\varphi}_0^2 + \frac{12\lambda}{16\pi^2} \left(M_0^2 \ln \frac{M_0^2}{\mu^2} - M_0^2 + \mu^2 \right) \right], \\ M_0^2 &= m^2 + 12\lambda \left[\bar{\varphi}_0^2 + \frac{1}{16\pi^2} \left(M_0^2 \ln \frac{M_0^2}{\mu^2} - M_0^2 + \mu^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.190)$$

Es empfiehlt sich, die Renormierungsskala $\mu \equiv M_0$ zu setzen, was das zu lösende Gleichungssystem erheblich vereinfacht. Die erste Gleichung wird dann identisch mit Gl. (5.133), d.h. $\bar{\varphi}_0 \equiv \phi_0$, mit anderen Worten, das Minimum des effektiven Potentials $\mathcal{V}(\varphi)$ ist identisch mit dem Minimum des klassischen Potentials $U(\phi)$. Die zweite Gleichung (5.190) lautet dann

$$M_0^2 = m^2 + 12\lambda\phi_0^2 = 8\lambda\phi_0^2, \quad (5.191)$$

wobei wir Gl. (5.134) benutzt haben.

In der Phase gebrochener Symmetrie ist die Lösung von Gl. (5.175) diejenige, die die eckigen Klammern zum Verschwinden bringt, also mit $m^2 = -4\lambda\phi_0^2$

$$\phi_0^2 - \bar{\varphi}^2 = 3\mathcal{T}_T^* + \frac{3}{16\pi^2} \left(M^2 \ln \frac{M^2}{M_0^2} - M^2 + M_0^2 \right). \quad (5.192)$$

Damit läßt sich Gl. (5.188) erheblich vereinfachen,

$$M^2 = 8\lambda\bar{\varphi}^2. \quad (5.193)$$

Eingesetzt in Gl. (5.192) ergibt sich eine Fixpunkt-Gleichung für $\bar{\varphi}$. Die Lösung $\bar{\varphi}$ und der entsprechende Wert von M müssen numerisch bestimmt werden und sind in Abb. 5.3 dargestellt. In der Phase restaurierter Symmetrie ist die Lösung von Gl. (5.175) stets $\bar{\varphi} = 0$. Man muss dann die Fixpunkt-Gleichung (5.188) (mit $\bar{\varphi} = 0$) für M numerisch lösen. Auch diese Lösung ist in Abb. 5.3 dargestellt.

Man erkennt, dass die Lösung in einem Bereich von Temperaturen $T_1 \leq T \leq T_2$ mehrdeutig ist. Dies ist ein eindeutiges Merkmal eines **Phasenübergangs erster Ordnung**. Dies erklärt man am besten am Verlauf des effektiven Potentials, der schematisch in Abb. 5.4 dargestellt ist.

- (i) $0 < T < T_1$: Für kleine Temperaturen gibt es ein globales Minimum $\bar{\varphi} \neq 0$. In Abb. 5.3 erkennt man, dass bei gegebener Temperatur nur eine Lösung für $\bar{\varphi}$ existiert.
- (ii) $T_1 < T < T_c$: Für diesen Bereich von Temperaturen entwickelt sich ein lokales Minimum bei $\varphi = 0$ und ein lokales Maximum zwischen 0 und dem globalen Minimum $\bar{\varphi}$. In Abb. 5.3 entsprechen diese den **unteren beiden** Ästen von $\bar{\varphi}$ bei einer gegebenen Temperatur. Das physikalische globale Minimum entspricht nach wie vor dem **obersten** Ast.
- (iii) $T = T_c$. Die beiden Minima des effektiven Potentials **entarten** bei der Phasenübergangstemperatur T_c . Nach wie vor gibt es zwei Minima und ein Maximum, was sich in den drei Lösungen für $\bar{\varphi}$ bei $T = T_c$ in Abb. 5.3 widerspiegelt. Die physikalische Lösung "springt" bei dieser Temperatur vom obersten Ast $\bar{\varphi} \neq 0$ auf den untersten Ast $\bar{\varphi} = 0$.

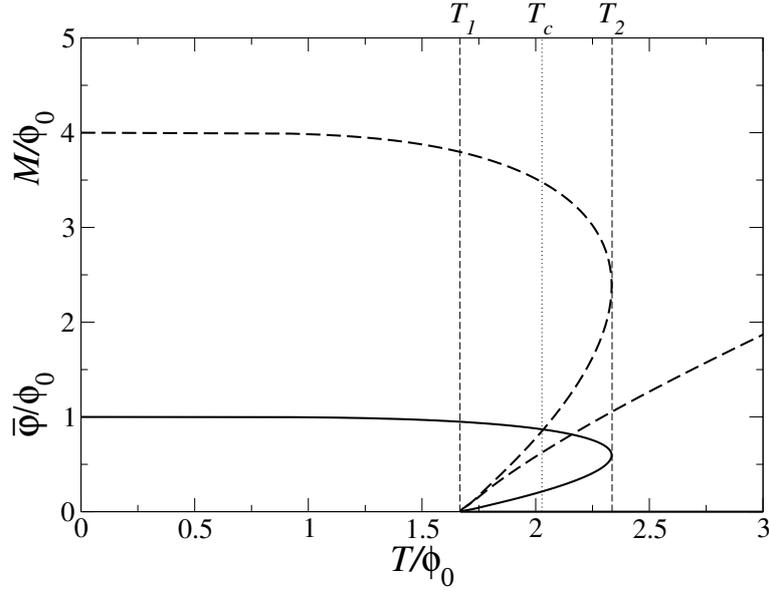


Abbildung 5.3: Die Lösung $\bar{\varphi}$ der Gleichung (5.175) (durchgezogen) und die entsprechende effektive Masse M (gestrichelt) als Funktionen der Temperatur für $\lambda = 2$. Alle Größen in Einheiten von ϕ_0 .

- (iv) $T_c < T < T_2$. Für diesen Bereich von Temperaturen gibt es ein lokales Minimum bei $\varphi \neq 0$ und ein lokales Maximum zwischen dem globalen Minimum bei $\bar{\varphi} = 0$ und dem erstgenannten Minimum. In Abb. 5.3 entsprechen die oberen beiden Äste von $\bar{\varphi}$ dem lokalen Minimum und dem lokalen Maximum. Das physikalische globale Minimum $\bar{\varphi} = 0$ entspricht dem **untersten** Ast.
- (v) $T = T_2$. Das lokale Minimum und das lokale Maximum aus dem vorangegangenen Fall entarten. Das physikalische Minimum ist nach wie vor bei $\bar{\varphi} = 0$.
- (vi) $T > T_2$. Für große Temperaturen gibt es lediglich ein globales Minimum $\bar{\varphi} = 0$.

Die Temperatur T_1 kann man analytisch berechnen. Offensichtlich ist hier $\bar{\varphi} = 0$ und $M = 0$. Also folgt aus Gl. (5.188) und mit dem masselosen thermischen Kaulquappen-Beitrag $\mathcal{T}_{T_1}^*(M = 0) = T_1^2/12$ (s. Gl. (4.43)), sowie Gl. (5.134)

$$0 = -4\lambda\phi_0^2 + 12\lambda \left(\frac{T_1^2}{12} + \frac{M_0^2}{16\pi^2} \right) \iff \frac{T_1^2}{\phi_0^2} = 4 - \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{M_0}{\phi_0} \right)^2. \quad (5.194)$$

Für unser Beispiel mit $M_0 = 4\phi_0$ folgt daraus $T_1 = 2\sqrt{1 - 3/\pi^2} \phi_0 \simeq 1.6686 \phi_0$.

Leider ist das Ergebnis dieser Untersuchung zur Symmetrierestauration **qualitativ inkorrekt**: ein Modell mit Z_2 -Symmetrie befindet sich in derselben **Universalitätsklasse** wie das **Ising-Modell** und sollte daher einen **Phasenübergang zweiter Ordnung** aufweisen. Dass dem hier nicht so ist, ist ein **Trunkierungsartefakt** der **Doppelblasen-Näherung**.

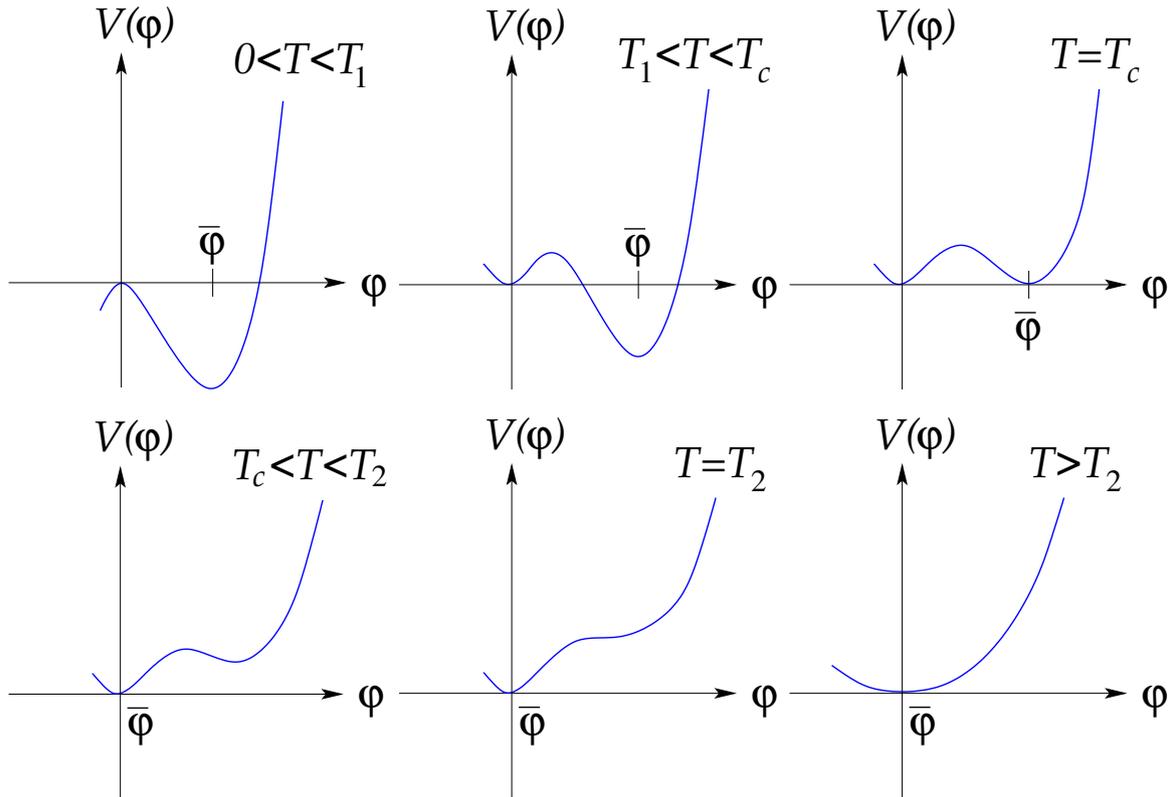


Abbildung 5.4: Das effektive Potential $\mathcal{V}(\varphi)$ für verschiedene Temperaturen (schematisch).

21.1.2022

Wir betrachten nun eine Erweiterung der Z_2 -symmetrischen ϕ^4 -Theorie, das $O(N)$ -Modell,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{m^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - \frac{\lambda}{N} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2, \quad (5.195)$$

wobei $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)^T$ ein N -komponentiger Vektor skalarer Felder ϕ_i ist. Offensichtlich ist die Lagrange-Dichte **invariant** unter $O(N)$ -Transformationen der Felder,

$$\vec{\phi} \longrightarrow \vec{\phi}' = O \vec{\phi}, \quad (5.196)$$

wobei $O \in O(N)$ eine **orthogonale** ($N \times N$)-Matrix ist, $O^T = O^{-1}$. Spontane Symmetriebrechung erhalten wir für $m^2 < 0$. Dabei wird die kontinuierliche $O(N)$ -Symmetrie zu $O(N-1)$ gebrochen, mit $N(N-1)/2 - (N-1)(N-2)/2 = N-1$ **Goldstone-Bosonen** (vgl. Diskussion in Kap. 7.2 der Vorlesung "Quantenfeldtheorie").

Das $O(N)$ -Modell hat für $N = 4$ einen direkten Bezug zur QCD, der fundamentalen Theorie der Starken Wechselwirkung. Die Lagrange-Dichte der QCD hat für zwei masselose Quark-Flavors eine **chirale** $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie. Diese Symmetrie ist im Vakuum zur Gruppe $SU(2)_{V=R+L}$ gebrochen. Gemäß dem Goldstone-Theorem folgt daraus die Existenz von $2^2 - 1 = 3$ Goldstone-Bosonen. Die Gruppe $O(4)$ ist nun isomorph zur Gruppe $SU(2) \times SU(2)$ und die Gruppe $O(3)$ isomorph zu $SU(2)$, d.h. wir

erwarten, dass das Schema der chiralen Symmetriebrechung in der QCD identisch mit dem hier für das $O(4)$ -Modell diskutierten ist. Daher kann man das $O(N)$ -Modell als **effektives Modell** für die QCD und insbesondere für den Phasenübergang der chiralen Symmetriebrechung und -restauration betrachten. Die Goldstone-Bosonen der QCD sind die drei **Pionen** π^\pm, π^0 . Diese sind zwar nicht exakt masselos (da die Quarks eine kleine nichtverschwindende Masse besitzen), aber dennoch um etwa eine Größenordnung leichter als die anderen hadronischen Zustände.

Wir nehmen nun an, dass ϕ_1 einen nichtverschwindenden Erwartungswert ϕ_0 annimmt, während ϕ_2, \dots, ϕ_N die Goldstone-Bosonen darstellen. Daher definieren wir

$$\phi_1 \equiv \phi_0 + \sigma, \quad \phi_{i+1} \equiv \pi_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\phi} = (\phi_0 + \sigma, \vec{\pi})^T. \quad (5.197)$$

Eingesetzt in die Lagrange-Dichte (5.195) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{m^2}{2} (\phi_0^2 + 2\phi_0 \sigma + \sigma^2 + \vec{\pi}^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{N} (\phi_0^2 + 2\phi_0 \sigma + \sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} \left(m^2 + 12 \frac{\lambda}{N} \phi_0^2 \right) \sigma^2 - \frac{1}{2} \left(m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \phi_0^2 \right) \vec{\pi}^2 \\ &\quad - 4 \frac{\lambda}{N} \phi_0 \sigma (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{N} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - \phi_0 \sigma \left(m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \phi_0^2 \right) - U(\phi_0), \end{aligned} \quad (5.198)$$

mit dem klassischen Potential

$$U(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{N} \phi^4. \quad (5.199)$$

Das Minimum des klassischen Potentials ist bei

$$0 = m^2 \phi_0 + 4 \frac{\lambda}{N} \phi_0^3 = \phi_0 \left(m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \phi_0^2 \right), \quad (5.200)$$

d.h. in der Phase gebrochener Symmetrie bei $\phi_0 = \pm \sqrt{-Nm^2/4\lambda} \neq 0$. Der Wert $U(\phi_0) = -Nm^2/16\lambda$ stellt lediglich eine irrelevante Konstante in Gl. (5.198) dar, die den Nullpunkt der Energie verschiebt, und kann daher weggelassen werden. Desweiteren verschwindet der vorletzte Term in Gl. (5.198) am Minimum ϕ_0 des Potentials. Die Massenterme des σ -Feldes und der $\vec{\pi}$ -Felder lauten

$$\begin{aligned} m_\sigma^2(\phi_0) &\equiv m^2 + 12 \frac{\lambda}{N} \phi_0^2 = -2m^2 = 8 \frac{\lambda}{N} \phi_0^2, \\ m_\pi^2(\phi_0) &\equiv m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \phi_0^2 \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.201)$$

Wie erwartet, sind die Goldstone-Bosonen **masselose** Anregungen in der Phase gebrochener Symmetrie.

Die 2PI-effektive Wirkung (5.103) lautet für das $O(N)$ -Modell

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi, G_\sigma, G_\pi] &= S[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln G_\sigma^{-1} - \frac{N-1}{2} \text{Tr}_X \ln G_\pi^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr}_X [\mathcal{D}_\sigma^{-1}(\varphi) G_\sigma + (N-1) \mathcal{D}_\pi^{-1}(\varphi) G_\pi - N \mathbb{1}] + \Gamma_2[\varphi, G_\sigma, G_\pi]. \end{aligned} \quad (5.202)$$

In Doppelblasen-Näherung ist $\Gamma_2[\varphi, G_\sigma, G_\pi]$ von φ unabhängig,

$$\Gamma_2[G_\sigma, G_\pi] = 3 \text{ (Diagramm 1)} + 2(N-1) \text{ (Diagramm 2)} + (N+1)(N-1) \text{ (Diagramm 3)} . \quad (5.203)$$

Hier haben wir Propagatoren G_σ mit durchgezogenen und Propagatoren G_π mit gestrichelten Linien gekennzeichnet. Die kombinatorischen Faktoren erklären sich wie folgt. Beim ersten Diagramm gibt es (wie bei der ϕ^4 -Theorie) drei Möglichkeiten, die σ -Linien zu zwei Schleifen zu verknüpfen. Beim zweiten Diagramm ergibt sich der Faktor $N - 1$, weil in der π -Schleife $N - 1$ π -Felder umlaufen können. Der Faktor 2 folgt, weil der entsprechende $\sigma^2\vec{\pi}^2$ -Vertex in der Lagrange-Dichte (5.198) nach Ausquadrieren des entsprechenden Terms $\sim -2\lambda/N$ ist, also einen zusätzlichen Faktor 2 gegenüber den gewöhnlichen σ^4 - und $(\vec{\pi}^2)^2$ -Vertizes hat. Wenn wir alle Vertizes in den Diagrammen, ohne die Felder zu unterscheiden, als $-\lambda/N$ definieren, muss dieser Faktor 2 mit berücksichtigt werden.

Der kombinatorische Faktor vor dem letzten Diagramm ergibt sich wie folgt. Wenn wir die Indizes an den π -Feldern an diesem Vertex explizit ausschreiben, haben wir $(\vec{\pi}^2)^2 = \sum_{i,j} \pi_i^2 \pi_j^2$. Wir können nun (a) einerseits π_i mit π_i und π_j mit π_j zu einer Schleife kombinieren. In jeder Schleife laufen $N - 1$ π -Felder um, was einen Faktor $(N - 1)^2$ ergibt. Wir können aber (b) andererseits auch ein π_i -Feld mit einem der beiden π_j -Felder kombinieren, was einen Faktor $2\delta_{ij}$ ergibt (bei der verbleibenden Kombination $\pi_i\pi_j$ gibt es dann keine Wahlmöglichkeit mehr). Dies ergibt einen Faktor $2 \sum_{ij} \delta_{ij} = 2 \sum_i 1 = 2(N - 1)$. Eine graphische Darstellung dieser beiden Möglichkeiten ist in Abb. 5.5 gezeigt.

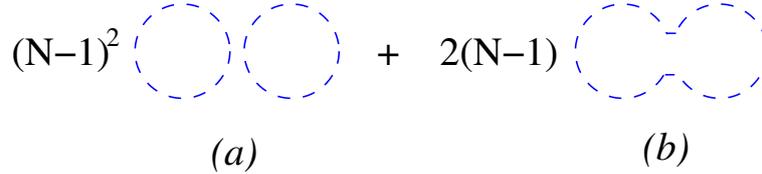


Abbildung 5.5: Die beiden Möglichkeiten, π -Felder am $(\vec{\pi}^2)^2$ -Vertex zu verknüpfen.

Im ersten Diagramm gibt es zwei unabhängige Summen über die Indizes der π -Felder, im zweiten nur eine, da der umlaufende Index in beiden Schleifen derselbe sein muss. Insgesamt ergibt dies einen Faktor $(N - 1)^2 + 2(N - 1) = (N + 1)(N - 1)$, wie in Gl. (5.203) angegeben.

Die inversen Baum-Graphen-Propagatoren lassen sich aus der Lagrange-Dichte (5.198) ablesen,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\sigma^{-1}(X, Y; \varphi) &= [\square_X + m_\sigma^2(\varphi)] \delta^{(4)}(X - Y) , \\ \mathcal{D}_\pi^{-1}(X, Y; \varphi) &= [\square_X + m_\pi^2(\varphi)] \delta^{(4)}(X - Y) , \end{aligned} \quad (5.204)$$

mit den Massentermen aus Gl. (5.201), wobei wir $\phi_0 \rightarrow \varphi$ ersetzt haben. Wie üblich wird φ als raum-zeitlich konstant angenommen. Wir bemerken an dieser Stelle, dass die 1PI-effektive Wirkung $\Gamma[\varphi]$ – zumindest in Gestalt der Schleifenentwicklung – im Prinzip ungeeignet ist, die Restaurierung der Symmetrie zu beschreiben. Hier laufen in den Schleifen

stets Baum-Graphen-Propagatoren um. Bei endlichen Temperaturen erwarten wir, dass der Erwartungswert $\bar{\varphi}(T) < \phi_0$ wird und bei T_c komplett verschwindet. Dann wird aber $m_\pi^2(\bar{\varphi}) = m^2 + 4\lambda\bar{\varphi}^2/N = 4\lambda(\bar{\varphi}^2 - \phi_0^2)/N < 0$, also haben wir am physikalischen Minimum des effektiven Potentials tachyonische π -Felder, was offensichtlich unphysikalisch ist. Dies gilt bereits für **jede**, auch beliebig kleine Temperatur $T > 0$, bei der $\bar{\varphi}(T) < \phi_0$.

Wir müssen nun die Extrema der effektiven Wirkung bestimmen. Mit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \mathcal{D}_\sigma^{-1}(X, Y; \varphi)}{\delta \varphi(Z)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} &= 24 \frac{\lambda}{N} \bar{\varphi} \delta^{(4)}(X-Z) \delta^{(4)}(X-Y), \\ \left. \frac{\delta \mathcal{D}_\pi^{-1}(X, Y; \varphi)}{\delta \varphi(Z)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} &= 8 \frac{\lambda}{N} \bar{\varphi} \delta^{(4)}(X-Z) \delta^{(4)}(X-Y) \end{aligned} \quad (5.205)$$

lautet die zu Gl. (5.175) analoge Gleichung

$$0 = \bar{\varphi} \left(m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \left\{ \bar{\varphi}^2 + \frac{T}{V} \sum_Q [3 \mathcal{G}_\sigma(Q) + (N-1) \mathcal{G}_\pi(Q)] \right\} \right). \quad (5.206)$$

Die Selbstenergien für das σ -Feld und die π -Felder lauten

$$\begin{aligned} \Pi_\sigma(X, Y) &= -2 \frac{\delta \Gamma_2[G_\sigma, G_\pi]}{\delta G_\sigma(X, Y)} = 4 \frac{\lambda}{N} [3 G_\sigma(X, X) + (N-1) G_\pi(X, X)] \delta^{(4)}(X-Y), \\ \Pi_\pi(X, Y) &= -\frac{2}{N-1} \frac{\delta \Gamma_2[G_\sigma, G_\pi]}{\delta G_\pi(X, Y)} = 4 \frac{\lambda}{N} [G_\sigma(X, X) + (N+1) G_\pi(X, X)] \delta^{(4)}(X-Y). \end{aligned} \quad (5.207)$$

Hier haben wir in der letzten Gleichung durch die Entartung $N-1$ der π -Felder geteilt, da wir an der Selbstenergie eines **einzelnen** π -Feldes interessiert sind. In Analogie zu Gl. (5.181) lauten die Dyson-Schwinger-Gleichungen für die Propagatoren im Impulsraum dann

$$\mathcal{G}_{\sigma,\pi}^{-1}(K) = -K^2 + M_{\sigma,\pi}^2, \quad (5.208)$$

mit den effektiven Massen

$$\begin{aligned} M_\sigma^2 &= m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \left\{ 3 \bar{\varphi}^2 + \frac{T}{V} \sum_Q [3 \mathcal{G}_\sigma(Q) + (N-1) \mathcal{G}_\pi(Q)] \right\}, \\ M_\pi^2 &= m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \left\{ \bar{\varphi}^2 + \frac{T}{V} \sum_Q [\mathcal{G}_\sigma(Q) + (N+1) \mathcal{G}_\pi(Q)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.209)$$

Wie beim Z_2 -Modell müssen die Fixpunkt-Gleichungen (5.206), (5.209) nun numerisch ausgewertet werden, s. Ref. [14]. Das Resultat ist in Abb. 5.6 gezeigt (allerdings unter Vernachlässigung der endlichen Beiträge (5.187) der Vakuumfluktationen; ihre Berücksichtigung verändert das Resultat nur quantitativ, aber nicht qualitativ). Oberhalb des Phasenübergangs entarten die effektiven Massen, $M_\sigma = M_\pi$ (nur M_σ ist in der Abbildung gezeigt).

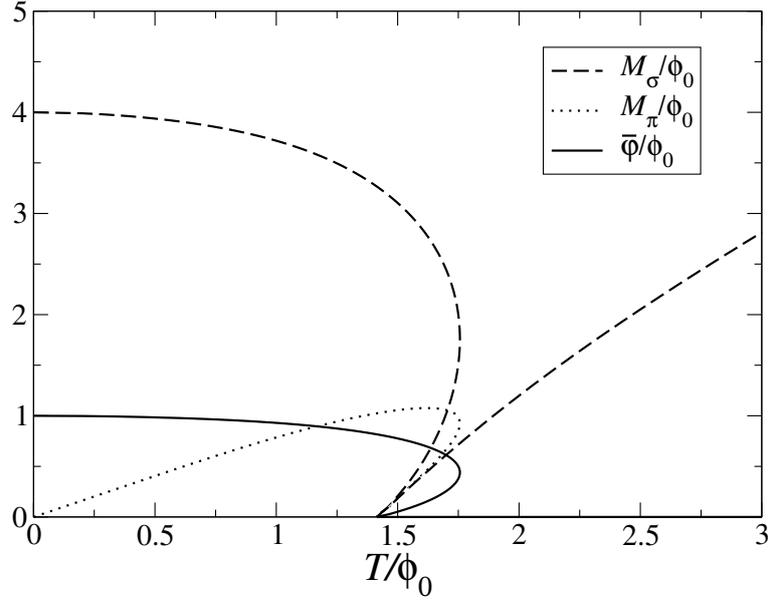


Abbildung 5.6: Effektive Massen M_σ , M_π und Erwartungswert $\bar{\varphi}$ (in Einheiten von ϕ_0) als Funktionen der Temperatur (in Einheiten von ϕ_0) in Doppelblasen-Näherung.

Wie im Z_2 -Modell läßt sich die zu T_1 analoge Temperatur (s. Abb. 5.3) analytisch berechnen. Hier verschwinden die Massen und $\bar{\varphi}$, so dass mit $m^2 = -4\lambda\phi_0^2/N$ aus Gl. (5.209) (wieder unter Vernachlässigung endlicher Beiträge der Vakuumfluktuationen) folgt

$$0 = -4\frac{\lambda}{N}\phi_0^2 + 4\frac{\lambda}{N}(N+2)\frac{T_1^2}{12} \iff \frac{T_1}{\phi_0} = \sqrt{\frac{12}{N+2}} = \sqrt{2} \quad \text{für } N = 4, \quad (5.210)$$

was sofort aus Abb. 5.6 ersichtlich ist.

Leider ist die Doppelblasen-Näherung wieder nicht in der Lage, die Ordnung des Phasenübergangs korrekt wiederzugeben: bei der Brechung der $O(4)$ -Symmetrie sollte ein Phasenübergang zweiter Ordnung auftreten (das Modell ist in der Universalitätsklasse des $O(4)$ -Heisenberg-Modells). Wir sehen aber wie beim Z_2 -Modell einen Phasenübergang erster Ordnung (erkennbar an den Mehrdeutigkeiten von $\bar{\varphi}$ und der Massen als Funktion für einen gewissen Temperaturbereich). Ein weiteres Problem ist, dass die Goldstone-Felder zwar bei $T = 0$ masselos sind, dies aber bei anderen Temperaturen unterhalb des Phasenübergangs nicht bleiben, obwohl die Symmetrie gebrochen ist. Beide Probleme sind Artefakte der Doppelblasen-Näherung.

Es gibt aber eine Näherung, die auf der Doppelblasen-Näherung beruht und die sowohl die Ordnung des Phasenübergangs korrekt wiedergibt wie auch das Goldstone-Theorem nicht verletzt (im Sinne, dass die Goldstone-Bosonen in der gesamten Phase gebrochener Symmetrie masselos bleiben). Dies ist die sog. **Näherung für großes N** (engl. “**large- N approximation**”). Dazu berücksichtigen wir in den Glgen. (5.206), (5.209) nur die

Terme in führender Ordnung in N ,

$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{\varphi} \left\{ m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \left[\bar{\varphi}^2 + N \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}_\pi(Q) \right] \right\}, \\
 M_\sigma^2 &= m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \left[3 \bar{\varphi}^2 + N \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}_\pi(Q) \right], \\
 M_\pi^2 &= m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \left[\bar{\varphi}^2 + N \frac{T}{V} \sum_Q \mathcal{G}_\pi(Q) \right].
 \end{aligned} \tag{5.211}$$

Offenbar werden in dieser Näherung Quanten- und thermische Fluktuationen des σ -Feldes vernachlässigt und nur die der π -Felder (in der Näherung $N-1 \simeq N$) berücksichtigt. Man könnte sich nun fragen, warum nicht auch der Term $\bar{\varphi}^2$ gegenüber den N Kaulquappen-Beiträgen vernachlässigt wird. Man muss sich aber in Erinnerung rufen, dass $\bar{\varphi}^2 = \langle \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \langle \phi_i^2 \rangle \simeq N \langle \phi_i^2 \rangle$, also ebenfalls von der Ordnung N ist.

Man erkennt am Gleichungssystem (5.211) nun sofort, dass die erste Gleichung auch als

$$0 = \bar{\varphi} M_\pi^2 \tag{5.212}$$

geschrieben werden kann. In der Phase gebrochener Symmetrie, also für $\bar{\varphi} \neq 0$, bedingt dies sofort $M_\pi^2 = 0$, d.h. die Goldstone-Bosonen bleiben masselos. In der Phase restaurierter Symmetrie dagegen, wo $\bar{\varphi} = 0$, können sie eine nichtverschwindende Masse besitzen (in der Tat entarten sie dort mit dem massebehafteten σ -Feld). In der Phase gebrochener Symmetrie, wo $M_\pi^2 = 0$, kann man die zweite Gleichung (5.211) auch schreiben als

$$M_\sigma^2 = 8 \frac{\lambda}{N} \bar{\varphi}^2, \quad \bar{\varphi} \neq 0, \tag{5.213}$$

d.h. die Masse des σ -Feldes folgt dem Verlauf des Erwartungswerts $\bar{\varphi}$, ganz ähnlich wie im Z_2 -Modell, vgl. Gl. (5.193). Wir brauchen also letztlich nur die erste Gleichung (5.211) lösen. Wiederum unter Vernachlässigung endlicher Beiträge der Vakuumfluktuationen läßt sich dies analytisch bewerkstelligen. Für $\bar{\varphi} \neq 0$ muss gelten

$$0 = m^2 + 4 \frac{\lambda}{N} \left(\bar{\varphi}^2 + N \frac{T^2}{12} \right) \iff \bar{\varphi}(T) = \phi_0 \sqrt{1 - \frac{N T^2}{12 \phi_0^2}}. \tag{5.214}$$

Dies ist in Abb. 5.8 für $N = 4$ gezeigt. Offensichtlich findet der Phasenübergang bei der Temperatur $T_c = \sqrt{12/N} \phi_0 = \sqrt{3} \phi_0$ (für $N = 4$) statt. In der Phase restaurierter Symmetrie ($\bar{\varphi} = 0$) entarten die Massen des σ -Feldes und der π -Felder, was man daran sieht, dass die letzten beiden Fixpunkt-Gleichungen (5.211) identisch werden, d.h. man muss nur eine dieser Gleichungen numerisch lösen. Auch diese Lösung ist in Abb. 5.8 gezeigt. Man beachte, dass mit der Massenentartung auch das σ -Feld am Phasenübergangspunkt masselos werden muss.

Die “large- N approximation” bedeutet für Γ_2 in Doppelblasen-Näherung, dass wir $N-1$ durch N ersetzen und den σ -Freiheitsgrad vernachlässigen. Dies bedeutet für die in Abb.

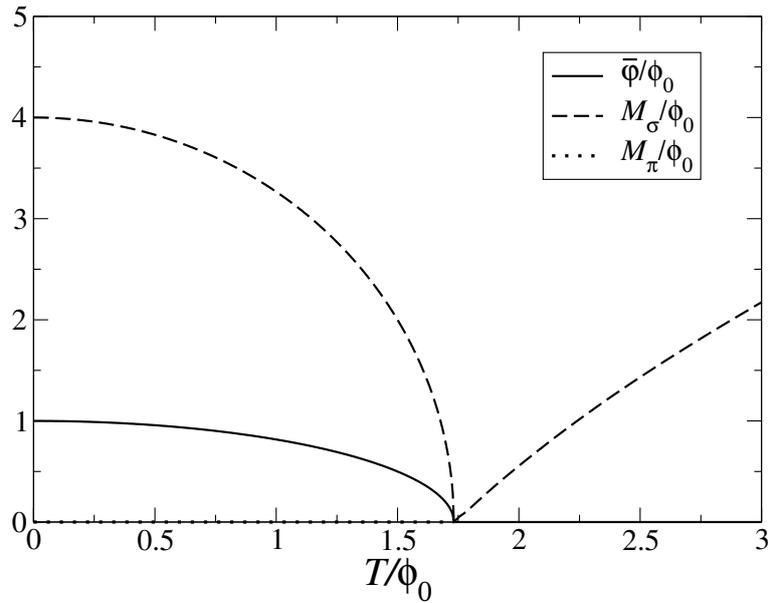


Abbildung 5.7: Effektive Massen M_σ , M_π und Erwartungswert $\bar{\varphi}$ (in Einheiten von ϕ_0) als Funktionen der Temperatur (in Einheiten von ϕ_0) in der “large- N approximation”.

5.5 gezeigten Diagramme, dass der Faktor vor Diagramm (a) N^2 lautet, während der Faktor vor Diagramm (b) $2N$ wird. Das Diagramm (a) bezeichnet man in der Vielteilchentheorie traditionell als **Hartree-Term**, während das Diagramm (b) **Austausch-** oder **Fock-Term** genannt wird. Dementsprechend ist die volle Doppelblasen-Näherung auch als **Hartree-Fock-Näherung** und die “large- N approximation” (wo der Fock-Term $\sim 2N$ gegenüber dem Hartree-Term $\sim N^2$ vernachlässigt wird) als **Hartree-Näherung** bekannt.

5.6 Fermionen: das Nambu–Jona-Lasinio–Modell

Für die folgende Diskussion müssen wir zunächst die 2PI-effektive Wirkung für fermionische Freiheitsgrade aufstellen. Hierzu erinnern wir uns, dass

- (i) ein fermionisches Feld aufgrund der Regeln für Graßmann-Zahlen keinen (klassischen) Erwartungswert besitzen kann, $\langle \psi \rangle = \langle \bar{\psi} \rangle \equiv 0$.
- (ii) der Logarithmus der Zustandssumme für Fermionen einen Vorfaktor $+1$ anstelle des Faktors $-1/2$ für Bosonen hat. Dies ist naheliegenderweise auf alle Terme der Gestalt $\text{Tr}_X \ln A$, mit einer Matrix $A(X, Y)$, zu verallgemeinern.

Aufgrund von (i) ist die klassische Wirkung in der 2PI-effektiven Wirkung (5.103) gleich null, denn sie ist lediglich ein Funktional der (verschwindenden) Erwartungswerte der Felder. Aufgrund von (ii) lauten die anderen Terme in der 2PI-effektiven Wirkung dann

$$\Gamma[\mathcal{S}] = \text{Tr}_X \ln \mathcal{S}^{-1} + \text{Tr}_X (\mathcal{S}_0^{-1} \mathcal{S} - \mathbb{1}) + \Gamma_2[\mathcal{S}]. \quad (5.215)$$

Hier ist $\mathcal{S}(X, Y)$ die verbundene Zwei-Punkt-Funktion der Fermionen und $\mathcal{S}_0^{-1}(X, Y)$ der inverse Propagator auf Baum-Graphen-Niveau, der aber aufgrund des Verschwindens der fermionischen Ein-Punkt-Funktion identisch mit dem freien inversen Fermionen-Propagator ist (daher haben wir gleich die entsprechende Notation für letzteren benutzt).

Als konkretes Anwendungsbeispiel betrachten wir das sog. **Nambu–Jona-Lasinio (NJL)–Modell**,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi + G (\bar{\psi}\psi)^2 . \quad (5.216)$$

Es enthält eine **Vier-Teilchen-Punktwechselwirkung** mit der (in vier Raum-Zeit-Dimensionen dimensionsbehafteten) Kopplungsstärke G , $\dim G = \text{MeV}^{-2}$,

$$G(\bar{\psi}\psi)^2 = G \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta \psi_\beta = \begin{array}{c} \bar{\Psi}_\alpha \quad \bar{\Psi}_\beta \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nearrow \quad \swarrow \\ \Psi_\alpha \quad \Psi_\beta \end{array} \quad (5.217)$$

Der inverse Propagator auf Baum-Graphen-Niveau lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^{-1}(X, Y) &= \frac{\delta^2 S[\bar{\psi}, \psi]}{\delta \bar{\psi}(X) \delta \psi(Y)} = - \frac{\delta^2 S[\bar{\psi}, \psi]}{\delta \psi(Y) \delta \bar{\psi}(X)} \\ &= - \frac{\delta}{\delta \psi(Y)} \int_Z (i\cancel{\partial}_X - m) \delta^{(4)}(X - Z) \psi(Z) \\ &= - (i\cancel{\partial}_X - m) \delta^{(4)}(X - Y) , \end{aligned} \quad (5.218)$$

wobei $S[\bar{\psi}, \psi] \equiv \int_X \mathcal{L}$ die Wirkung des NJL–Modells ist. Der Wechselwirkungsterm in der Wirkung trägt nicht zum Baum-Graphen-Propagator bei, weil nur zwei der vier Fermionen-Felder durch die Ableitung eliminiert werden, er also proportional zu $\langle \bar{\psi} \rangle \langle \psi \rangle$ wäre, was verschwindet, da die Fermionen-Felder keine klassischen Erwartungswerte besitzen.

Die Dyson–Schwinger–Gleichung für den Fermionen-Propagator $\bar{\mathcal{S}}$ ist identisch mit den Extrema der 2PI-effektiven Wirkung bezüglich Variation nach $\mathcal{S}(X, Y)$,

$$0 = \left. \frac{\delta \Gamma[\mathcal{S}]}{\delta \mathcal{S}(X, Y)} \right|_{\mathcal{S}=\bar{\mathcal{S}}} = -\bar{\mathcal{S}}^{-1}(X, Y) + \mathcal{S}_0^{-1}(X, Y) + \left. \frac{\delta \Gamma_2[\mathcal{S}]}{\delta \mathcal{S}(X, Y)} \right|_{\mathcal{S}=\bar{\mathcal{S}}} . \quad (5.219)$$

Mit der fermionischen Selbstenergie

$$\Sigma(X, Y) \equiv \left. \frac{\delta \Gamma_2[\mathcal{S}]}{\delta \mathcal{S}(X, Y)} \right|_{\mathcal{S}=\bar{\mathcal{S}}} \quad (5.220)$$

lautet die Dyson–Schwinger–Gleichung (5.219) dann

$$\bar{\mathcal{S}}^{-1}(X, Y) = \mathcal{S}_0^{-1}(X, Y) + \Sigma(X, Y) . \quad (5.221)$$

Wir machen wieder die Doppelblasen-Näherung für $\Gamma_2[\mathcal{S}]$,

$$\begin{aligned} \Gamma_2[\mathcal{S}] &= G \int_X \{ [\text{tr}_D \mathcal{S}(X, X)]^2 - \text{tr}_D [\mathcal{S}(X, X) \mathcal{S}(X, X)] \} \\ &= \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} , \end{aligned} \quad (5.222)$$

wobei die Spuren über die Dirac-Indizes zu nehmen ist. Der erste Term folgt aus der Verknüpfung von $\bar{\psi}_\alpha$ mit ψ_α und $\bar{\psi}_\beta$ mit ψ_β und entspricht dem **Hartree-Term**. Der zweite dagegen verknüpft $\bar{\psi}_\alpha$ mit ψ_β und $\bar{\psi}_\beta$ mit ψ_α und entspricht dem **Fock-Term**. Das relative Vorzeichen ergibt sich daraus, dass der erste Term zwei unabhängige Fermionenschleifen (erkennbar an den zwei Spuren) enthält, der zweite dagegen nur eine (erkennbar an der einzelnen Spur). Die zwei Möglichkeiten, Dirac-Indizes am Vertex zu verknüpfen, entsprechen der Verknüpfung von π -Feld-Indizes im bosonischen Fall, vgl. Abb. 5.5.

Wir vernachlässigen im Folgenden wieder den Fock-Term, arbeiten also in **Hartree-Näherung**. Dann ist

$$\begin{aligned}\Sigma_{\alpha\beta}(X, Y) &= \left. \frac{\delta\Gamma_2[\mathcal{S}]}{\delta\mathcal{S}_{\beta\alpha}(Y, X)} \right|_{\mathcal{S}=\bar{\mathcal{S}}} = 2G \int_Z \frac{\delta\mathcal{S}_{\gamma\gamma}(Z, Z)}{\delta\mathcal{S}_{\beta\alpha}(Y, X)} \text{tr}_D \bar{\mathcal{S}}(Z, Z) \\ &= 2G \text{tr}_D \bar{\mathcal{S}}(X, X) \delta_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(X - Y) .\end{aligned}\quad (5.223)$$

Dieser Kaulquappen-Beitrag ist, wie im bosonischen Fall, im Impulsraum konstant. Da die Dirac-Struktur $\sim \mathbb{1}_4$ ist, liefert dies einen Beitrag zur Fermionen-Masse,

$$\bar{\mathcal{S}}^{-1}(K) = \mathcal{S}_0^{-1}(K) + 2G \text{tr}_D \bar{\mathcal{S}}(X, X) \equiv -\not{K} + M , \quad (5.224)$$

wobei wir die **effektive Masse**

$$M \equiv m + 2G \text{tr}_D \bar{\mathcal{S}}(X, X) \equiv m + 2G \frac{T}{V} \sum_Q \text{tr}_D \bar{\mathcal{S}}(Q) \quad (5.225)$$

definiert haben. Man beachte, dass gemäß Definition der Zwei-Punkt-Funktion

$$\text{tr}_D \bar{\mathcal{S}}(X, X) \equiv \sum_{\alpha=1}^4 \bar{\mathcal{S}}_{\alpha\alpha}(X, X) = \sum_{\alpha=1}^4 \langle \bar{\psi}_\alpha(X) \psi_\alpha(X) \rangle \equiv \langle \bar{\psi}(X) \psi(X) \rangle . \quad (5.226)$$

Insofern kann man den Kaulquappen-Beitrag als (räumlich homogenes) **Fermion-Antifermion-Kondensat** (mit skalaren Quantenzahlen) interpretieren. Dieses Kondensat beeinflusst die Masse der Fermion und damit ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit (schwere Teilchen bewegen sich bei gleichem Impuls langsamer als leichte). Man spricht bei Teilchen, bei denen der Imaginärteil der Selbstenergie verschwindend klein (oder sogar null, wie hier beim Kaulquappen-Beitrag) gegenüber dem Realteil ist, von sog. **Quasiteilchen**.

26.1.2022

Unter Benutzung von Gl. (5.224) und der Relation

$$\frac{1}{M - Q} = \frac{M + Q}{(M + Q)(M - Q)} = \frac{M + Q}{M^2 - Q^2}$$

berechnen wir nun den Kaulquappen-Beitrag,

$$\frac{T}{V} \sum_Q \text{tr}_D \bar{\mathcal{S}}(Q) = T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{tr}_D \frac{M + Q}{M^2 - Q^2} = 4MT \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{M^2 - Q^2} , \quad (5.227)$$

wobei wir $\text{tr}_D \mathbb{1}_4 = 4$, $\text{tr}_D \gamma^\mu = 0$ benutzt haben. Die fermionische Matsubara–Summe haben wir bereits in Gl. (3.188) berechnet,

$$T \sum_n \frac{1}{M^2 - Q^2} = T \sum_n \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^* - q_0^2} = \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{q}}^*} \tanh \frac{\varepsilon_{\mathbf{q}}^*}{2T} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^*} \left[\frac{1}{2} - n_F(\varepsilon_{\mathbf{q}}^*) \right], \quad (5.228)$$

wobei $\varepsilon_{\mathbf{q}}^* \equiv \sqrt{\mathbf{q}^2 + M^2}$. Hier stellt der erste Term in eckigen Klammern wieder den Beitrag der Vakuumfluktuationen und der zweite den Beitrag der thermischen Fluktuationen dar. Eingesetzt in Gl. (5.225) erhalten wir wieder eine **Gap–** bzw. **Fixpunkt–Gleichung** für die effektive Masse der fermionischen Quasiteilchen,

$$M = m + 8G M \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^*} \left[\frac{1}{2} - n_F(\varepsilon_{\mathbf{q}}^*) \right]. \quad (5.229)$$

Das NJL–Modell ist in vier Raum–Zeit–Dimensionen nicht renormierbar (da die Koppelkonstante die Dimension MeV^{-2} hat). Daher braucht man kein elaboriertes Schema, um den endlichen Beitrag der Vakuumfluktuationen zu berechnen. Üblicherweise führt man einfach einen **Abschneideimpuls** (engl. “**cut-off**”) Λ ein, um das Impulsintegral zu regularisieren,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{q}}^*} &\longrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dq q^2}{\varepsilon_{\mathbf{q}}^*} = \frac{M^2}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda/M} \frac{dx x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{M^2}{8\pi^2} \left[x\sqrt{x^2 + 1} - \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right]_0^{\Lambda/M} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\Lambda\sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right). \end{aligned} \quad (5.230)$$

Der Abschneideimpuls ist, wie m und G , ein **Parameter** des Modells, der an die physikalischen Eigenschaften des betrachteten Systems angepasst werden muss. Interessanterweise liefern die Vakuumfluktuationen (für $G > 0$) einen **positiven** Beitrag zur effektiven Masse M , während der der thermischen Fluktuationen **negativ** ist.

Wir erweitern nun das NJL–Modell zu einem **effektiven Modell** für die QCD, indem wir es **chiral symmetrisch** machen, d.h. **invariant unter chiralen Transformationen links- und rechtshändiger Fermionen-Flavors**. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur einen einzigen Flavor, d.h. die chirale Symmetrie ist $U(1)_R \times U(1)_L$.

Zunächst bricht der Massenterm $\sim m$ die chirale Symmetrie explizit. Um dies zu sehen, führen wir die **chiralen Projektionsoperatoren** $\mathcal{P}_{R,L} \equiv (\mathbb{1}_4 \pm \gamma_5)/2$ ein. Es gilt $\psi_{R,L} \equiv \mathcal{P}_{R,L}\psi_{R,L}$ (die Projektoren sind idempotent), aber wegen $\{\gamma_5, \gamma_0\} = 0$ ist $\bar{\psi}_{R,L} = \bar{\psi}_{R,L}\mathcal{P}_{R,L}$, und daher

$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}_L\mathcal{P}_R + \bar{\psi}_R\mathcal{P}_L)(\psi_R + \psi_L) = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L. \quad (5.231)$$

Also müssen wir $m = 0$ setzen, um den freien Anteil der Lagrange–Dichte (5.216) chiral symmetrisch zu machen.

Desweiteren bricht auch der Wechselwirkungsterm die chirale Symmetrie, denn dieser ist einfach nur das Quadrat von Gl. (5.231). Um ihn chiral symmetrisch zu machen, subtrahieren wir einen weiteren Term, und zwar das Quadrat von

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi = (\bar{\psi}_L\mathcal{P}_R + \bar{\psi}_R\mathcal{P}_L)\gamma_5(\psi_R + \psi_L) = \bar{\psi}_L\psi_R - \bar{\psi}_R\psi_L, \quad (5.232)$$

5 Resummationsverfahren

wobei wir $\mathcal{P}_{R,L}\gamma_5 = \pm\mathcal{P}_{R,L}$ benutzt haben. Die gesamte Wechselwirkung lautet dann

$$(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 = 4\bar{\psi}_L\psi_R\bar{\psi}_R\psi_L, \quad (5.233)$$

was offenbar symmetrisch unter separaten Transformationen der rechts- und linkshändigen Fermionen-Felder ist (weil sich die Phasen $U_{R,L}$ bei der Transformation von $\psi_{R,L}$ gegen die Phasen $U_{R,L}^\dagger \equiv U_{R,L}^{-1}$ bei der Transformation von $\bar{\psi}_{R,L}$ wegheben). Das chiral-invariante NJL-Modell lautet also

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi + G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \right] = \bar{\psi}_L i\cancel{\partial}\psi_L + \bar{\psi}_R i\cancel{\partial}\psi_R + 4G \bar{\psi}_L\psi_R\bar{\psi}_R\psi_L. \quad (5.234)$$

In dieser chiral-symmetrischen Theorie erzeugen Vakuumfluktuationen aufgrund von Gl. (5.229) eine nichtverschwindende Masse. Mit Gl. (5.230) gilt nämlich im Vakuum ($T = \mu = 0$) und mit der Definition $x \equiv M/\Lambda$

$$\frac{\pi^2}{G\Lambda^2} = \sqrt{1+x^2} - x^2 \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \equiv f(x). \quad (5.235)$$

Die Funktion $f(x)$ ist in Abb. 5.8 dargestellt.

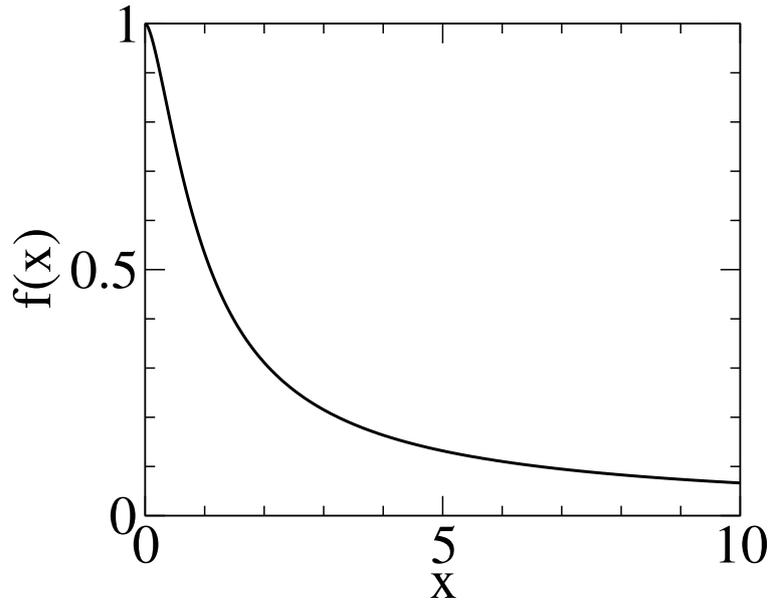


Abbildung 5.8: Rechte Seite der Gl. (5.235) als Funktion von $x = M/\Lambda$.

Die Funktion $f(x)$ nimmt den Wert $f(0) = 1$ an, ist streng monoton fallend für anwachsendes x und geht gegen 0 für $x \rightarrow \infty$, was bedeutet, dass es für $G\Lambda^2 \geq \pi^2$ stets eine nichttriviale Lösung $M \neq 0$ gibt. Beispielsweise ist für $f(x^*) = \pi^2/14.64 \simeq 0.6741$ der zugehörige Wert $x^* \simeq 0.66$, also $M(T=0) \simeq 0.66\Lambda$. Für $\Lambda = 587.9$ MeV ist dies $M(T=0) \simeq 388$ MeV, vgl. Abb. 5.9. Diese dynamisch erzeugte Masse bricht die chirale Symmetrie, man spricht auch von **dynamischer Symmetriebrechung**. Weil dies sehr ähnlich zum Mechanismus der Brechung der chiralen Symmetrie in der QCD ist, wird das

chirale NJL-Modell (nach entsprechender Erweiterung auf mehrere fermionische Flavors, die zu den Quark-Flavors der QCD korrespondieren) gerne als effektives Modell für die Starke Wechselwirkung herangezogen. Es besitzt aber, im Gegensatz zur QCD, **keine asymptotische Freiheit** und **kein Confinement** der Fermionen.

Aufgrund des umgekehrten Vorzeichens der thermischen Fluktuationen in Gl. (5.229) wirken diese der Symmetriebrechung entgegen, d.h. sie tragen wie erwartet zur **Restaurierung** der Symmetrie bei. Dies ist in Abb. 5.9 gezeigt.

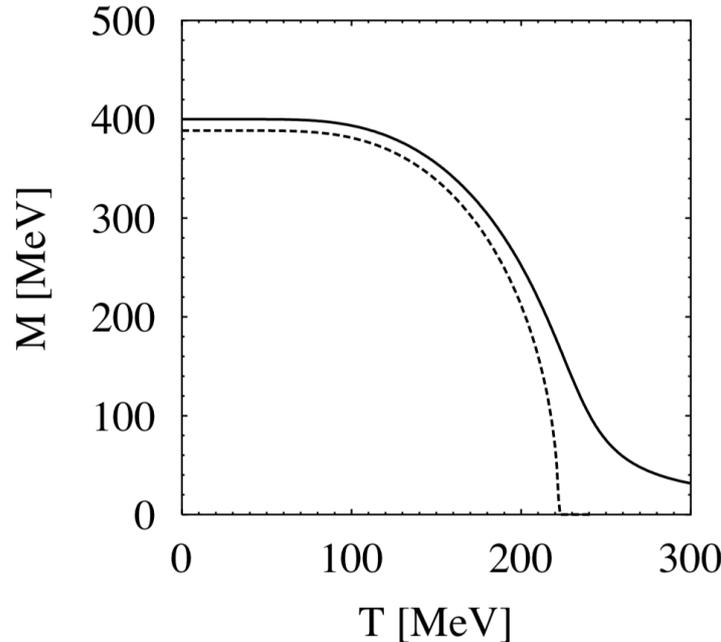


Abbildung 5.9: Effektive Fermionen-Masse im NJL-Modell als Funktion der Temperatur. Die durchgezogene Linie ist für den Fall expliziter Symmetriebrechung ($m = 5.6$ MeV), die gestrichelte für den chiralen Limes ($m = 0$), $\Lambda = 587.9$ MeV, $G\Lambda^2 = 2.44N_fN_c = 14.64$ für $N_f = 2$, $N_c = 3$. Abbildung aus Ref. [15].

5.7 Suprafluidität und Supraleitung

Aus der Festkörperphysik ist bekannt, dass die Ursache von Suprafluidität bzw. Supraleitung eine **attraktive Wechselwirkung von Fermionen an der Fermi-Kante** ist. Dabei kommt es zur Bildung von sog. **Cooper-Paaren** aus zwei Fermionen. Ein Cooper-Paar trägt (als antisymmetrischer Zustand von zwei Fermionen) **bosonische** Quantenzahlen und kann daher im **Grundzustand** des Systems **kondensieren** (vgl. Abschnitt 3.6). Der neue Grundzustand besteht dann aus einem **Cooper-Paar-Kondensat**. Dies ist ähnlich wie das Fermion-Antifermion-Kondensat, das wir im letzten Abschnitt als Ursache der dynamischen Brechung der chiralen Symmetrie identifiziert haben, nun allerdings kondensieren zwei Fermionen, nicht ein Fermion und ein Antifermion.

Der Unterschied zwischen Suprafluidität und Supraleitung ist der folgende. Wenn die Cooper–Paare **Singulett**s, d.h. **ungeladen** bezüglich einer Eichgruppe sind, so spricht man von **Suprafluidität**. Sind die Cooper–Paare dagegen in einer nicht-trivialen Darstellung einer Eichgruppe, d.h. **geladen bezüglich dieser Eichgruppe** (z.B. die elektrische Ladung der $U(1)_{em}$ –Eichgruppe der QED oder die Farb-Ladung der $SU(3)_c$ –Eichgruppe der QCD), so bricht auch der Grundzustand (als Kondensat von Cooper–Paaren) die Eichsymmetrie der Theorie.

Dies ist ähnlich wie die Brechung der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ –Eichsymmetrie des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung durch das Higgs–Kondensat (vgl. Kapitel 7 der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”). Allerdings wissen wir derzeit noch nicht, ob das Higgs–Kondensat mikroskopisch auf die Paar-Bildung von Fermionen und Antifermionen oder von Fermionen und Fermionen zurückzuführen ist, oder schlicht dem Erwartungswert eines elementaren skalaren Higgs–Teilchens entspricht.

Im Fall der QED ist es aber klar, dass das Cooper–Paar-Kondensat aus **Elektron-Elektron-Paaren** besteht. Wir wissen aus der Vorlesung “Quantenfeldtheorie”, dass die Brechung der Eichsymmetrie eine **Masse** für die **Eichbosonen** generiert, im Fall der QED dann für das Photon. Diese verhindert, dass das elektromagnetische Feld in Materie, die sich in diesem neuen Zustand befindet, eindringen kann, oder anders ausgedrückt, elektromagnetische Felder werden **aus der Materie verdrängt**. Dies ist der berühmte **Meißner–Ochsenfeld–Effekt**, das charakteristische Kennzeichen für **Supraleitung**. Auch in der QCD gibt es ein solches Phänomen, das von attraktiven Wechselwirkungen von Quarks an der Fermi–Kante verursacht wird, welche zur Bildung von (farbgeladenen) Quark–Cooper–Paaren führen, und in Analogie zur gewöhnlichen Supraleitung **Farb-Supraleitung** getauft wurde. Hier werden dann die Gluonen massiv.

Es stellt sich nun die Frage, wie man Suprafluidität oder Supraleitung mathematisch fassen kann. Offenbar muss man einen Weg finden, einen nichtverschwindenden Erwartungswert

$$\langle \psi(X)\psi(X) \rangle \neq 0 \tag{5.236}$$

zu generieren und mathematisch zu beschreiben (im Unterschied zu $\langle \bar{\psi}(X)\psi(X) \rangle \neq 0$ aus dem letzten Abschnitt). Wir bemerken zunächst, dass ein Fermion-Fermion-Kondensat im Grundzustand des Systems ein unbegrenztes Reservoir an Fermionen darstellt. Bei der Propagation kann ein Fermion daher in das Kondensat “abtauchen” und ohne Schwierigkeiten ein Paar mit einem weiteren Fermion in der Fermi–See bilden. Dabei wird dann ein “Loch” erzeugt, das anstelle des ursprünglichen Fermions weiterpropagiert. Umgekehrt kann auch ein Loch mit einem weiteren Loch in der Fermi–See ein Loch-Loch-Paar bilden und ein Fermion erzeugen, das weiterpropagiert.

Dies bedeutet, dass man die gewöhnliche Propagation von Fermionen, ausgedrückt durch den Propagator

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(X)\psi_\beta(Y) \rangle = \begin{array}{c} Y \xrightarrow{\hspace{1cm}} X \\ \beta \hspace{1.5cm} \alpha \end{array} \quad , \tag{5.237}$$

um die sog. **anomale Propagation** erweitern muss, mit dem Propagator

$$\langle \psi_\alpha(X)\psi_\beta(Y) \rangle \sim \begin{array}{c} Y \xrightarrow{\hspace{1cm}} \bullet \xleftarrow{\hspace{1cm}} X \\ \beta \hspace{1.5cm} \alpha \end{array} \quad , \tag{5.238}$$

Ferner haben wir zum nächsten Gleichheitszeichen den ersten Term in runden Klammern partiell integriert (und Oberflächenterme vernachlässigt). Schließlich durften wir zum letzten Gleichheitszeichen das Transpositionssymbol weglassen, da es sich bei dem Ausdruck in eckigen Klammern um eine reine Zahl handelt.

Gleichung (5.245) bedeutet, dass die Wirkung für Fermionen mit chemischem Potential $+\mu$ identisch mit der Wirkung für ladungskonjugierte Fermionen mit chemischem Potential $-\mu$ ist. Dies ist das erwartete Resultat, denn ladungskonjugierte Fermionen tragen die entgegengesetzte Ladung wie Fermionen, und dementsprechend muss auch das Vorzeichen des chemischen Potentials (welches die Netto-Ladung im System kontrolliert) umgekehrt werden.

Die freie Dirac-Wirkung (5.245) läßt sich also in der **symmetrisierten Form**

$$S_0[\bar{\psi}, \psi] \equiv \int_X \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \int_{X,Y} [\bar{\psi}(X) \mathcal{S}_{0,+}^{-1}(X,Y) \psi(Y) + \bar{\psi}_C(X) \mathcal{S}_{0,-}^{-1}(X,Y) \psi_C(Y)] , \quad (5.246)$$

mit den freien Propagatoren

$$\mathcal{S}_{0,\pm}^{-1}(X,Y) \equiv -(i\partial_X \pm \mu\gamma_0 - m) \delta^{(4)}(X-Y) \quad (5.247)$$

für Fermionen bzw. ladungskonjugierte Fermionen schreiben. Wir führen nun sog. **Nambu–Gor’kov–Spinoren** ein,

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_C \end{pmatrix} , \quad \bar{\Psi} \equiv (\bar{\psi}, \bar{\psi}_C) . \quad (5.248)$$

Damit läßt sich die Wirkung (5.246) kompakt in der Form

$$S_0[\bar{\Psi}, \Psi] = -\frac{1}{2} \int_{X,Y} \bar{\Psi}(X) \mathfrak{S}_0^{-1}(X,Y) \Psi(Y) \quad (5.249)$$

schreiben, mit

$$\mathfrak{S}_0^{-1}(X,Y) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{0,+}^{-1}(X,Y) & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{0,-}^{-1}(X,Y) \end{pmatrix} . \quad (5.250)$$

Den Wechselwirkungsanteil des NJL-Modells können wir ebenfalls mit Hilfe von Nambu–Gor’kov–Spinoren umschreiben. Dazu führen wir zunächst eine **Fierz–Transformation** des Vier-Fermionen-Terms durch.

Eine Fierz–Transformation ist i.a. wie folgt definiert. Gegeben sei ein Vier-Fermionen-Term der Form

$$\mathcal{L}_I \equiv G_I (\bar{\psi}\Gamma^{(I)}\psi)^2 = G_I \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta \bar{\psi}_\gamma \psi_\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{(I)} \Gamma_{\gamma\delta}^{(I)} , \quad (5.251)$$

wobei $\Gamma^{(I)}$ eine beliebige (4×4) -Matrix im Raum der Dirac-Matrizen ist und im letzten Schritt implizit über alle Spinor-Indizes summiert wird. Durch Anti-Vertauschen der Fermionen-Felder kann man dies in die folgenden äquivalenten Formen bringen,

$$\mathcal{L}_I = G_I \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta \bar{\psi}_\gamma \psi_\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{(I)} \Gamma_{\gamma\delta}^{(I)} = -G_I \bar{\psi}_\alpha \psi_\delta \bar{\psi}_\gamma \psi_\beta \Gamma_{\alpha\beta}^{(I)} \Gamma_{\gamma\delta}^{(I)} = G_I \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\gamma \psi_\delta \psi_\beta \Gamma_{\alpha\beta}^{(I)} \Gamma_{\gamma\delta}^{(I)} . \quad (5.252)$$

Das Produkt $\Gamma_{\alpha\beta}^{(I)}\Gamma_{\gamma\delta}^{(I)}$ wiederum kann in einer vollständigen Basis von Dirac-Matrizen entwickelt werden. Wir suchen dabei neue Basis-Matrizen, so dass

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(I)}\Gamma_{\gamma\delta}^{(I)} = \sum_M c_M^I \Gamma_{\alpha\delta}^{(M)}\Gamma_{\gamma\beta}^{(M)} = \sum_D d_D^I (\Gamma^{(D)}C)_{\alpha\gamma} (C\Gamma^{(D)})_{\delta\beta} . \quad (5.253)$$

28.1.2022

Dann gilt nämlich mit $G_M \equiv G_I c_M^I$, $H_D \equiv G_I d_D^I$ und den Glgen. (5.240), (5.243)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= - \sum_M G_M (\bar{\psi}\Gamma^{(M)}\psi)^2 \\ &= \sum_D H_D (\bar{\psi}\Gamma^{(D)}C\bar{\psi}^T) (\psi^T C\Gamma^{(D)}\psi) = \sum_D H_D (\bar{\psi}\Gamma^{(D)}\psi_C) (\bar{\psi}_C\Gamma^{(D)}\psi) . \end{aligned} \quad (5.254)$$

Die Koeffizienten c_M^I und d_D^I findet man für verschiedene $\Gamma_{\alpha\beta}^{(I)}\Gamma_{\gamma\delta}^{(I)}$ in den Glgen. (A.9) und (A.11) von Ref. [15] aufgeführt. Für das (einfache) NJL-Modell ist $\Gamma_{\alpha\beta}^{(I)}\Gamma_{\gamma\delta}^{(I)} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$. Aus Gl. (A.11) von Ref. [15] lesen wir dann ab, dass

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} = \frac{1}{4} (i\gamma_5 C)_{\alpha\gamma} (C i\gamma_5)_{\delta\beta} + \dots , \quad (5.255)$$

wobei die ... für weitere Terme mit anderen Dirac-Strukturen stehen. Wir beschränken uns im Folgenden auf den hier explizit aufgeführten ersten Term, weil er zur Kondensation von skalaren Fermion-Fermion-Paaren mit gerader Parität, also im $J^P = 0^+$ -Kanal, führt. Es hat sich in vielen Anwendungen herausgestellt, dass dies der bevorzugte Kanal für die Bildung von Cooper-Paaren ist. Gesamtspin $J = 0$ und gerade Parität bedeuten nämlich, dass die beiden Fermionen mit jeweils entgegengesetzten Spin koppeln, $S = 0$, und keinen relativen Bahndrehimpuls haben, $L = 0$, der i.a. Paarbildung energetisch benachteiligen würde. Der für uns im Folgenden relevante Wechselwirkungsterm lautet also

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= \frac{G_I}{4} (\bar{\psi}i\gamma_5\psi_C) (\bar{\psi}_C i\gamma_5\psi) = \frac{G_I}{4} \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \Psi \\ &\equiv \frac{G_I}{4} \bar{\Psi} \hat{\Gamma}_- \Psi \bar{\Psi} \hat{\Gamma}_+ \Psi , \end{aligned} \quad (5.256)$$

mit

$$\hat{\Gamma}_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{\Gamma}_+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \equiv \gamma_0 \hat{\Gamma}_-^\dagger \gamma_0 . \quad (5.257)$$

Der Wechselwirkungsterm (5.256) stellt eine **Strom-Strom-Kopplung** dar.

Nun müssen wir die 2PI-effektive Wirkung für Fermionen in der Nambu-Gor'kov-Darstellung formulieren. Aufgrund der Verdopplung der Freiheitsgrade in der Nambu-Gor'kov-Basis bekommen alle Terme $\sim \text{Tr}_X \ln A$ gegenüber Gl. (5.215) einen zusätzlichen Faktor $1/2$,

$$\Gamma[\mathfrak{E}] = \frac{1}{2} \mathfrak{r}_X \ln \mathfrak{E}^{-1} + \frac{1}{2} \mathfrak{r}_X (\mathfrak{E}_0^{-1} \mathfrak{E} - \mathbf{1}) + \Gamma_2[\mathfrak{E}] . \quad (5.258)$$

Hier ist die Spur über die Raum-Zeit (sowie andere interne Indizes) und zusätzlich noch über den Raum der (2×2) -dimensionalen Nambu-Gor'kov-Matrizen zu nehmen (daher

der Wechsel zum Symbol \mathfrak{G}). Die Dyson–Schwinger–Gleichung für den vollen Nambu–Gor’kov–Propagator $\bar{\mathfrak{G}}$ folgt wieder aus den Extrema von $\Gamma[\mathfrak{G}]$ bezüglich der Variation nach \mathfrak{G} ,

$$0 = \left. \frac{\delta\Gamma[\mathfrak{G}]}{\delta\mathfrak{G}} \right|_{\mathfrak{G}=\bar{\mathfrak{G}}} \iff \bar{\mathfrak{G}}^{-1} = \mathfrak{G}_0^{-1} + \Sigma, \quad (5.259)$$

mit

$$\Sigma \equiv 2 \left. \frac{\delta\Gamma_2[\mathfrak{G}]}{\delta\mathfrak{G}} \right|_{\mathfrak{G}=\bar{\mathfrak{G}}}. \quad (5.260)$$

Der zusätzliche Faktor 2 gegenüber der gewöhnlichen fermionischen Selbstenergie (5.220) folgt aus den zusätzlichen Faktoren 1/2 in Gl. (5.258). In der Nambu–Gor’kov–Basis kann \mathfrak{G}^{-1} wie folgt geschrieben werden,

$$\mathfrak{G}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{S}_+^{-1} & \Delta^- \\ \Delta^+ & \mathcal{S}_-^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.261)$$

Formales Invertieren ergibt

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} (\mathcal{S}_+^{-1} - \Delta^- \mathcal{S}_- \Delta^+)^{-1} & -\mathcal{S}_+ \Delta^- (\mathcal{S}_-^{-1} - \Delta^+ \mathcal{S}_+ \Delta^-)^{-1} \\ -\mathcal{S}_- \Delta^+ (\mathcal{S}_+^{-1} - \Delta^- \mathcal{S}_- \Delta^+)^{-1} & (\mathcal{S}_-^{-1} - \Delta^+ \mathcal{S}_+ \Delta^-)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.262)$$

mit $\mathcal{S}_\pm \equiv (\mathcal{S}_\pm^{-1})^{-1}$. Die “normalen” Propagatoren sind die Diagonalelemente von \mathfrak{G} , während die **anormalen Propagatoren** durch die Nicht-Diagonalelemente gegeben sind.

Übungsaufgabe 5.4: Beweise Gl. (5.262).

Beweis: Wir zeigen, dass $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{G} = \mathbb{1}$. Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnung

$$\mathcal{T}_\pm \equiv (\mathcal{S}_\pm^{-1} - \Delta^\mp \mathcal{S}_\mp \Delta^\pm)^{-1} \quad (5.263)$$

ein. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{G} &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_+^{-1} & \Delta^- \\ \Delta^+ & \mathcal{S}_-^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_+ & -\mathcal{S}_+ \Delta^- \mathcal{T}_- \\ -\mathcal{S}_- \Delta^+ \mathcal{T}_+ & \mathcal{T}_- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_+^{-1} \mathcal{T}_+ - \Delta^- \mathcal{S}_- \Delta^+ \mathcal{T}_+ & -\mathcal{S}_+^{-1} \mathcal{S}_+ \Delta^- \mathcal{T}_- + \Delta^- \mathcal{T}_- \\ \Delta^+ \mathcal{T}_+ - \mathcal{S}_-^{-1} \mathcal{S}_- \Delta^+ \mathcal{T}_+ & -\Delta^+ \mathcal{S}_+ \Delta^- \mathcal{T}_- + \mathcal{S}_-^{-1} \mathcal{T}_- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{S}_+^{-1} - \Delta^- \mathcal{S}_- \Delta^+) \mathcal{T}_+ & 0 \\ 0 & (\mathcal{S}_-^{-1} - \Delta^+ \mathcal{S}_+ \Delta^-) \mathcal{T}_- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \mathbb{1}, \end{aligned} \quad (5.264)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (5.263) benutzt haben, q.e.d..

In Doppelblasen-Näherung lautet $\Gamma_2[\mathfrak{E}]$

$$\Gamma_2[\mathfrak{E}] = \frac{G_I}{4} \int_X \left\{ \text{tr}_D \left[\mathfrak{E}(X, X) \hat{\Gamma}_- \right] \text{tr}_D \left[\mathfrak{E}(X, X) \hat{\Gamma}_+ \right] - \text{tr}_D \left[\mathfrak{E}(X, X) \hat{\Gamma}_- \mathfrak{E}(X, X) \hat{\Gamma}_+ \right] \right\} , \quad (5.265)$$

wobei alle Spuren über Dirac- **und** Nambu-Gor'kov-Indizes zu nehmen sind (daher das Symbol tr). Der erste Term entspricht wieder dem Hartree-Term, der zweite dem Fock-Term, vgl. Gl. (5.222).

Im Folgenden werden wir wieder den Fock-Term vernachlässigen, also in Hartree-Näherung arbeiten. Dann lautet die Selbstenergie (5.260)

$$\begin{aligned} \Sigma(X, Y) &= \frac{G_I}{2} \left\{ \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(X, X) \hat{\Gamma}_- \right] \hat{\Gamma}_+ + \hat{\Gamma}_- \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(X, X) \hat{\Gamma}_+ \right] \right\} \delta^{(4)}(X - Y) \\ &= \frac{G_I}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_5 \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(X, X) \hat{\Gamma}_+ \right] \\ i\gamma_5 \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(X, X) \hat{\Gamma}_- \right] & 0 \end{pmatrix} \delta^{(4)}(X - Y) . \end{aligned} \quad (5.266)$$

Die Dyson-Schwinger-Gleichung (5.259) lautet in Komponenten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{S}}_+^{-1}(X, Y) & \bar{\Delta}^-(X, Y) \\ \bar{\Delta}^+(X, Y) & \bar{\mathcal{S}}_-^{-1}(X, Y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{0,+}^{-1}(X, Y) & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{0,-}^{-1}(X, Y) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{G_I}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_5 \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(X, X) \hat{\Gamma}_+ \right] \\ i\gamma_5 \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(X, X) \hat{\Gamma}_- \right] & 0 \end{pmatrix} \delta^{(4)}(X - Y) . \end{aligned} \quad (5.267)$$

Durch Vergleich der Komponenten auf der linken und rechten Seite schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}_{\pm}^{-1}(X, Y) &= \mathcal{S}_{0,\pm}^{-1}(X, Y) , \\ \bar{\Delta}^{\pm}(X, Y) &= \frac{G_I}{2} i\gamma_5 \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(X, X) \hat{\Gamma}_{\mp} \right] \delta^{(4)}(X - Y) . \end{aligned} \quad (5.268)$$

Die Tatsache, dass die Diagonalkomponenten $\bar{\mathcal{S}}_{\pm}^{-1}$ von $\bar{\mathfrak{E}}^{-1}$ identisch mit den Diagonalkomponenten des freien inversen Propagators sind, ist ein Artefakt der Hartree-Näherung und der Beschränkung auf die Vier-Fermion-Wechselwirkung (5.256), was dazu führt, dass die Selbstenergie (5.266) keine Hauptdiagonalelemente (in der Nambu-Gor'kov-Basis) hat. Für andere Wechselwirkungskanäle wird sich dies i.a. ändern.

Die zweite Gleichung (5.268) ist die sog. **Gap-Gleichung** für den suprafluiden bzw. supraleitenden **Gap-Parameter**. Aufgrund der Delta-Funktion auf der rechten Seite ist $\bar{\Delta}^{\pm}$ im Impulsraum konstant. Es empfiehlt sich daher, für die weitere Rechnung in den Impulsraum zu transformieren,

$$\bar{\Delta}^{\pm} = \frac{G_I}{2} i\gamma_5 \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D \left[\bar{\mathfrak{E}}(K) \hat{\Gamma}_{\mp} \right] . \quad (5.269)$$

Um die Gap-Gleichung zu lösen, berechnen wir zunächst die Matrizen in den einzelnen Spuren (der Einfachheit halber unterdrücken wir das Impulsargument bei den Propaga-

toren),

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{E}}\hat{\Gamma}_- &= \begin{pmatrix} 0 & (\bar{\mathcal{S}}_+^{-1} - \bar{\Delta}^- \bar{\mathcal{S}}_- \bar{\Delta}^+)^{-1} i\gamma_5 \\ 0 & -\bar{\mathcal{S}}_- \bar{\Delta}^+ (\bar{\mathcal{S}}_+^{-1} - \bar{\Delta}^- \bar{\mathcal{S}}_- \bar{\Delta}^+)^{-1} i\gamma_5 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathfrak{E}}\hat{\Gamma}_+ &= \begin{pmatrix} -\bar{\mathcal{S}}_+ \bar{\Delta}^- (\bar{\mathcal{S}}_-^{-1} - \bar{\Delta}^+ \bar{\mathcal{S}}_+ \bar{\Delta}^-)^{-1} i\gamma_5 & 0 \\ (\bar{\mathcal{S}}_-^{-1} - \bar{\Delta}^+ \bar{\mathcal{S}}_+ \bar{\Delta}^-)^{-1} i\gamma_5 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (5.270)$$

und damit

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}^\pm &= -\frac{G_I}{2} i\gamma_5 \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D \left\{ \bar{\mathcal{S}}_\mp(K) \bar{\Delta}^\pm [\bar{\mathcal{S}}_\pm^{-1}(K) - \bar{\Delta}^\mp \bar{\mathcal{S}}_\mp(K) \bar{\Delta}^\pm]^{-1} i\gamma_5 \right\} \\ &= \frac{G_I}{2} \gamma_5 \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D \left\{ \mathcal{S}_{0,\mp}(K) \bar{\Delta}^\pm [\mathcal{S}_{0,\pm}^{-1}(K) - \bar{\Delta}^\mp \mathcal{S}_{0,\mp}(K) \bar{\Delta}^\pm]^{-1} \gamma_5 \right\},\end{aligned}\quad (5.271)$$

wobei wir im letzten Schritt die Lösung $\bar{\mathcal{S}}_\pm = \mathcal{S}_{0,\pm}$ der ersten Gleichung (5.268) benutzt haben.

Da die rechte Seite der Gap-Gleichung (5.271) proportional zu γ_5 ist, machen wir den Ansatz

$$\bar{\Delta}^+ \equiv \phi \gamma_5. \quad (5.272)$$

Generell sind auch andere Dirac-Strukturen denkbar, s. Diskussion in Ref. [16], aber wir beschränken uns hier wieder auf den einfachsten Fall. Zur Bestimmung von $\bar{\Delta}^-$ betrachten wir die bilineare Form, die sich in der Wirkung (5.249) ergibt, wenn wir $\bar{\mathfrak{E}}_0^{-1}$ durch den vollen inversen Propagator $\bar{\mathfrak{E}}^{-1}$ ersetzen,

$$\bar{\Psi} \bar{\mathfrak{E}}^{-1} \Psi = \bar{\psi} \bar{\mathcal{S}}_+^{-1} \psi + \bar{\psi}_C \bar{\mathcal{S}}_-^{-1} \psi_C + \bar{\psi} \bar{\Delta}^- \psi_C + \bar{\psi}_C \bar{\Delta}^+ \psi. \quad (5.273)$$

Dies muss eine hermitesche Form sein, weil ansonsten die Wirkung der Theorie einen nichtverschwindenden Imaginärteil hätte, was die Unitarität der Theorie verletzen würde. Mit $\bar{\mathcal{S}}_\pm^{-1} = \mathcal{S}_{0,\pm}^{-1}$, vgl. die erste Gleichung (5.268), sind die ersten beiden Terme hermitesch (denn sie sind jeweils identisch mit dem in der freien Wirkung auftretenden Term, die ja keinen Imaginärteil hat). Also muss

$$\bar{\psi} \bar{\Delta}^- \psi_C = (\bar{\psi}_C \bar{\Delta}^+ \psi)^\dagger \quad (5.274)$$

gelten. Wir berechnen die rechte Seite explizit mit Gl. (5.243),

$$(\bar{\psi}_C \bar{\Delta}^+ \psi)^\dagger = \psi^\dagger (\bar{\Delta}^+)^\dagger \bar{\psi}_C^\dagger = \bar{\psi} \gamma_0 (\bar{\Delta}^+)^\dagger \gamma_0^\dagger (\psi_C^\dagger)^\dagger = \bar{\psi} \gamma_0 (\bar{\Delta}^+)^\dagger \gamma_0 \psi_C,$$

wobei wir $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ (in der Dirac-Darstellung) ausgenutzt haben. Der Vergleich mit Gl. (5.274) ergibt

$$\bar{\Delta}^- = \gamma_0 (\bar{\Delta}^+)^\dagger \gamma_0. \quad (5.275)$$

Für den Ansatz (5.272) folgt dann

$$\bar{\Delta}^- = \gamma_0 \phi^* \gamma_5^\dagger \gamma_0 = \phi^* \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = -\phi^* \gamma_5, \quad (5.276)$$

wobei wir $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ (in der Dirac-Darstellung) benutzt haben. Wir setzen nun die Glgen. (5.272) und (5.276) in die Gap-Gleichung (5.271) für die obere Wahl der Vorzeichen ein (die untere Wahl ergibt dasselbe Resultat). Da beide Seiten $\sim \gamma_5$ sind, können wir durch Koeffizientengleich folgern, dass

$$\phi = \frac{G_I}{2} \phi \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D \left\{ \gamma_5 \mathcal{S}_{0,-}(K) \gamma_5 [\mathcal{S}_{0,+}^{-1}(K) + |\phi|^2 \gamma_5 \mathcal{S}_{0,-}(K) \gamma_5]^{-1} \right\}, \quad (5.277)$$

wobei wir die zyklische Vertauschbarkeit von Faktoren unter der Spur ausgenutzt haben. In der Dirac-Darstellung ist $\gamma_5^{-1} = \gamma_5$ und daher folgt nach Division durch ϕ

$$1 = \frac{G_I}{2} \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D \left\{ [\mathcal{S}_{0,+}^{-1}(K) \gamma_5 \mathcal{S}_{0,-}^{-1}(K) \gamma_5 + |\phi|^2]^{-1} \right\}. \quad (5.278)$$

Die Cooper-Paar-Bildung ist ein Phänomen nahe der Fermi-Kante. Dort spielt die Masse der Teilchen eine untergeordnete Rolle (zumindest, solange der Fermi-Impuls $k_F \gg m$ ist). Daher rechnen wir im Folgenden im ultrarelativistischen Limes $m = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{0,+}^{-1}(K) \gamma_5 \mathcal{S}_{0,-}^{-1}(K) \gamma_5 + |\phi|^2 &= (\not{K} + \mu \gamma_0) \gamma_5 (\not{K} - \mu \gamma_0) \gamma_5 + |\phi|^2 \\ &= -(\not{K} + \mu \gamma_0)(\not{K} - \mu \gamma_0) + |\phi|^2 \\ &= -K^2 + \mu^2 + |\phi|^2 + 2\mu \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.279)$$

Mit den Projektionsoperatoren (4.84), welche im ultrarelativistischen Limes die Form

$$\Lambda_{\mathbf{k}}^\pm = \frac{1}{2k} (k \pm \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) \quad (5.280)$$

annehmen, kann man Gl. (5.279) schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{0,+}^{-1}(K) \gamma_5 \mathcal{S}_{0,-}^{-1}(K) \gamma_5 + |\phi|^2 &= (-k_0^2 + k^2 + \mu^2 + |\phi|^2) (\Lambda_{\mathbf{k}}^+ + \Lambda_{\mathbf{k}}^-) + 2\mu k (\Lambda_{\mathbf{k}}^+ - \Lambda_{\mathbf{k}}^-) \\ &= \Lambda_{\mathbf{k}}^+ [-k_0^2 + (k + \mu)^2 + |\phi|^2] + \Lambda_{\mathbf{k}}^- [-k_0^2 + (k - \mu)^2 + |\phi|^2]. \end{aligned} \quad (5.281)$$

Als Linearkombination von Projektionsoperatoren ist die Inversion des Arguments der Spur in Gl. (5.278) nicht mehr schwierig, vgl. Diskussion in Abschnitt 5.6 der Vorlesung ‘‘Quantenfeldtheorie’’,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{G_I}{2} \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D \left[\frac{\Lambda_{\mathbf{k}}^+}{-k_0^2 + (k + \mu)^2 + |\phi|^2} + \frac{\Lambda_{\mathbf{k}}^-}{-k_0^2 + (k - \mu)^2 + |\phi|^2} \right] \\ &= G_I \frac{T}{V} \sum_K \left[\frac{1}{-k_0^2 + (k + \mu)^2 + |\phi|^2} + \frac{1}{-k_0^2 + (k - \mu)^2 + |\phi|^2} \right], \end{aligned} \quad (5.282)$$

wobei wir $\text{tr}_D \Lambda_{\mathbf{k}}^\pm = 2$ benutzt haben. Die Pole der rechten Seite liegen bei

$$k_0 = (\pm') \varepsilon_{\mathbf{k}}^\pm, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^\pm \equiv \sqrt{(k \mp \mu)^2 + |\phi|^2}, \quad (5.283)$$

wobei das erste Vorzeichen unabhängig von dem im Superskript von $\varepsilon_{\mathbf{k}}^\pm$ ist (was wir durch den Strich an diesem Vorzeichen kenntlich gemacht haben). Die Tatsache, dass wir das

Vorzeichen im Superskript von $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm}$ umgekehrt zu dem unter der Wurzel gewählt haben, liegt daran, dass wir mit **positivem** Vorzeichen im Superskript die Energie von **Teilchen** assoziieren, deren Fermi-Kante bei $k = \mu$ liegt und wo demzufolge $\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ = |\phi|$, während das **negative** Vorzeichen im Superskript die Energie der **Antiteilchen** charakterisiert, deren Fermi-Kante bei $k = -\mu$ liegt. Da aber $k = |\mathbf{k}| \geq 0$ und wir das chemische Potential μ stets positiv wählen (ansonsten müsste man nur die Bedeutung von Teilchen und Antiteilchen vertauschen), haben Antiteilchen keine physikalische Fermi-Kante.

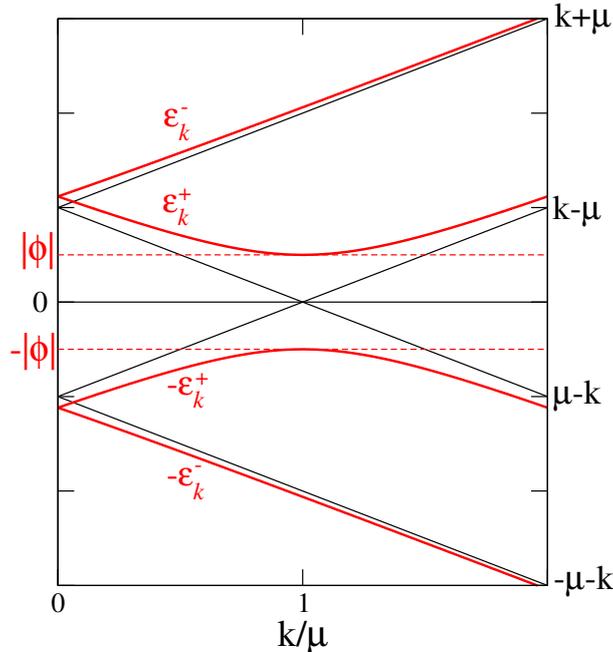


Abbildung 5.10: Dispersionsrelationen für freie Teilchen und Antiteilchen (schwarz) sowie Quasiteilchen und Quasiantiteilchen (rot).

Die Energien $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm}$ in Gl. (5.283) definieren die **Dispersionsrelationen** von **Quasiteilchen** ($\varepsilon_{\mathbf{k}}^+$) bzw. **Quasiantiteilchen** ($\varepsilon_{\mathbf{k}}^-$). Diese sind in Abb. 5.10 im Vergleich zu den Dispersionsrelationen nicht-wechselwirkender Teilchen und Antiteilchen gezeigt.

Für nicht-wechselwirkende Teilchen sind alle Teilchen-Zustände **unterhalb** der Fermi-Kante ($k = \mu$) besetzt und alle Loch-Zustände **unbesetzt**. Umgekehrt sind alle Teilchen-Zustände **oberhalb** der Fermi-Kante **unbesetzt** und alle Loch-Zustände **besetzt**. Weil sich die Dispersionsrelation $\varepsilon_{0\mathbf{k}} \equiv k - \mu$ von nicht-wechselwirkenden Teilchen und die Dispersionsrelation $-\varepsilon_{0\mathbf{k}} = \mu - k$ von nicht-wechselwirkenden Löchern an der Fermi-Kante kreuzen, kostet es **keine Energie**, ein Teilchen-Loch-Paar an der Fermi-Kante anzuregen.

Im suprafluiden bzw. supraleitenden Zustand ist dies anders. Hier besteht eine **Energielücke**, der sog. **Gap-Parameter** oder kurz **Gap**, der Größe $2|\phi|$ zwischen den Dispersionsrelationen $\pm\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm}$ von Quasiteilchen und Quasilöchern. Es kostet daher mindestens diese Energie, ein Quasiteilchen-Quasiloch-Paar an der Fermi-Kante anzuregen. Dies bedeutet aber auch, dass der suprafluide bzw. supraleitende Zustand **energetisch bevorzugt** ist. **Jede attraktive Wechselwirkung** zwischen Teilchen an der Fermi-Kante, so klein sie

auch sein mag, sorgt also dafür, dass das System in den suprafluiden bzw. supraleitenden Zustand übergeht.

Wir berechnen nun den Gap als Lösung von Gl. (5.282). Ausführen der Matsubara-Summe liefert mit Gl. (3.188)

$$1 = G_I \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}^+} \tanh \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+}{2T} + \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}^-} \tanh \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^-}{2T} \right). \quad (5.284)$$

Im Fall, dass $|\phi| \ll \mu$, kann der Antiteilchenbeitrag vernachlässigt werden, denn er ist $\sim 1/\varepsilon_{\mathbf{k}}^- \sim 1/\mu$, während der Teilchenbeitrag $\sim 1/\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ \sim 1/|\phi| \gg 1/\mu$ ist. Wir haben also in guter Näherung

$$1 \simeq G_I \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}^+} \tanh \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+}{2T}. \quad (5.285)$$

Für $T \rightarrow 0$ geht $\tanh[\varepsilon_{\mathbf{k}}^+/(2T)] \rightarrow 1$ (solange $\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ > 0$, was für $|\phi| \neq 0$ immer der Fall ist). Wir wählen o.B.d.A. $0 \leq \phi \in \mathbb{R}$ und bezeichnen $\phi(T=0) \equiv \phi_0$. Nach Einführung von Kugelkoordinaten und Substitution der Integrationsvariablen $x \equiv k - \mu$ folgt

$$1 \simeq \frac{G_I}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^+} = \frac{G_I}{4\pi^2} \int_{-\mu}^\infty dx \frac{(x+\mu)^2}{\sqrt{x^2 + \phi_0^2}}. \quad (5.286)$$

Das Integral divergiert im UV und muss regularisiert werden. Wir führen dazu einen Abschneide-Parameter Λ ein, den wir zweckmäßigerweise als $\Lambda = \mu$ wählen,

$$1 \simeq \frac{G_I}{4\pi^2} \int_{-\mu}^\mu dx \frac{(x+\mu)^2}{\sqrt{x^2 + \phi_0^2}} = \frac{G_I}{2\pi^2} \int_0^\mu dx \frac{\mu^2 + x^2}{\sqrt{x^2 + \phi_0^2}}, \quad (5.287)$$

wobei wir im letzten Schritt das Integral in zwei Teile über die Intervalle $[-\mu, 0]$ und $[0, \mu]$ zerlegt haben und im ersten die Substitution $x \rightarrow -x$ durchgeführt haben. Das verbleibende Integral ist analytisch lösbar,

$$1 \simeq \frac{G_I \mu^2}{2\pi^2} \left[\left(1 - \frac{\phi_0^2}{2\mu^2}\right) \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + \phi_0^2}}{\phi_0} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\phi_0^2}{\mu^2}} \right] \simeq \frac{G_I \mu^2}{2\pi^2} \left[\ln \frac{2\mu}{\phi_0} + O(1) \right], \quad (5.288)$$

wobei wir im letzten Schritt nur den führenden Term im Limes $\phi_0 \ll \mu$ mitgenommen haben. Man beachte, dass dieser Term vom Term μ^2 im Zähler in Gl. (5.287) stammt, während der Term x^2 dort nur zu Termen höherer Ordnung beiträgt. Man hätte im Integral in Gl. (5.287) auch bereits an dieser Stelle $\mu^2 + x^2 \simeq \mu^2$ nähern können. Die Lösung von Gl. (5.288) ist

$$\phi_0 \simeq 2\mu \exp\left(-\frac{2\pi^2}{G_I \mu^2}\right). \quad (5.289)$$

Der Gap ist also **exponentiell** kleiner als μ für hinreichend kleine Kopplungskonstanten G_I . Das bedeutet, dass es gerechtfertigt war, den Limes $\phi_0 \ll \mu$ zu betrachten. Man sieht an diesem Resultat auch sehr schön, dass die Erzeugung eines Gaps an der Fermi-Kante ein **nicht-störungstheoretisches** Phänomen ist, denn ϕ_0 kann nicht in eine Potenzreihe in (ganzzahligen positiven) Potenzen von G_I entwickelt werden. Die zur Anwendung

gekommenen Resummationstechniken sind also essentiell, um das Resultat (5.289) herzuleiten.

2.2.2022

Es ist offensichtlich, dass die (für kleine Kopplungskonstanten fragile) Bindung der Cooper-Paare durch thermische Fluktuationen zerstört werden kann. Man erwartet also, dass der Gap oberhalb einer **kritischen Temperatur** T_c verschwindet. Diese läßt sich wiederum analytisch berechnen. Dazu subtrahieren wir die Gap-Gleichung (5.286) bei $T = 0$ von der Gap-Gleichung (5.285) bei der Temperatur T_c , bei der der Gap verschwindet, $\phi(T = T_c) \equiv 0$, und somit $\varepsilon_{\mathbf{k}}^+ = |k - \mu|$,

$$0 \simeq \frac{G_I \mu^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \left(\frac{1}{|k - \mu|} \tanh \frac{|k - \mu|}{2T_c} - \frac{1}{\sqrt{(k - \mu)^2 + \phi_0^2}} \right), \quad (5.290)$$

wobei wir in führender Ordnung im Integrationsmaß $k \simeq \mu$ genähert haben (vgl. Diskussion nach Gl. (5.288)). Wir substituieren wieder $x = k - \mu$ und erhalten

$$0 \simeq \int_{-\mu}^\infty dx \left(\frac{1}{|x|} \tanh \frac{|x|}{2T_c} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \phi_0^2}} \right). \quad (5.291)$$

Wir können nun die untere Integralgrenze gegen $-\infty$ schicken, da wir erwarten, dass $T_c \sim \phi_0 \ll \mu$ und somit $\tanh[\mu/(2T_c)] \simeq 1$, so dass der Beitrag zum Integral vom Bereich $[-\infty, -\mu]$ von der Ordnung $O(\phi_0^2/\mu^2)$ und somit in guter Näherung vernachlässigbar ist. Da der Integrand eine gerade Funktion von x ist, genügt es, das Integral auf positive x zu beschränken,

$$\begin{aligned} 0 &\simeq \int_0^\infty dx \left(\frac{1}{x} \tanh \frac{x}{2T_c} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \phi_0^2}} \right) = \int_0^\infty dy \left(\frac{1}{y} \tanh \frac{y\phi_0}{2T_c} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \right) \\ &= \ln y \tanh \frac{y\phi_0}{2T_c} \Big|_0^\infty - \frac{\phi_0}{2T_c} \int_0^\infty dy \ln y \frac{1}{\cosh^2 \frac{y\phi_0}{2T_c}} - \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \Big|_0^\infty \\ &= -\ln \left(1 + \sqrt{1 + y^{-2}} \right) \Big|_{y \rightarrow \infty} - \frac{\phi_0}{2T_c} \int_0^\infty dy \left(\ln \frac{y\phi_0}{2T_c} - \ln \frac{\phi_0}{2T_c} \right) \frac{1}{\cosh^2 \frac{y\phi_0}{2T_c}} \\ &= -\ln 2 - \int_0^\infty dz \frac{\ln z}{\cosh^2 z} + \ln \frac{\phi_0}{2T_c} \int_0^\infty dz \frac{1}{\cosh^2 z}. \end{aligned} \quad (5.292)$$

Hier haben wir zur vorletzten Zeile ausgenutzt, dass der erste und letzte Term zum einen an der unteren Grenze $y = 0$ verschwinden und zum anderen wegen $\tanh[y\phi_0/(2T_c)] \rightarrow 1$ an der oberen Grenze $y \rightarrow \infty$ zusammengefasst werden können. Desweiteren haben wir zur letzten Zeile im Integral die Substitution $z \equiv y\phi_0/(2T_c)$ vorgenommen. Das erste Integral hat den Wert $\ln[\pi/(4e^\gamma)]$, vgl. Gl. (4.371.3) in Ref. [7], mit der Euler-Mascheroni-Konstanten $\gamma \simeq 0.57721$. Das zweite Integral dagegen ist $= \frac{1}{2}B(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)/\Gamma(\frac{3}{2}) \equiv 1$, vgl. Glgen. (3.512.2) und (8.384.1) in Ref. [7]. Wir erhalten also

$$0 = -\ln 2 + \ln \frac{4e^\gamma}{\pi} + \ln \frac{\phi_0}{2T_c} = \ln \frac{e^\gamma \phi_0}{\pi T_c} \iff T_c = \frac{e^\gamma}{\pi} \phi_0 \simeq 0.56693 \phi_0. \quad (5.293)$$

Wie erwartet, ist die kritische Temperatur von der Größenordnung des Gap-Parameters bei $T = 0$. Durch eine numerische Lösung von Gl. (5.285) kann man auch den Temperaturverlauf $\phi(T)$ des Gaps bestimmen. Dieser ist in Abb. 5.11 gezeigt. Wie man erkennt, ist der Phasenübergang zwischen normal- und suprafluid bzw. supraleitender Phase von zweiter Ordnung.

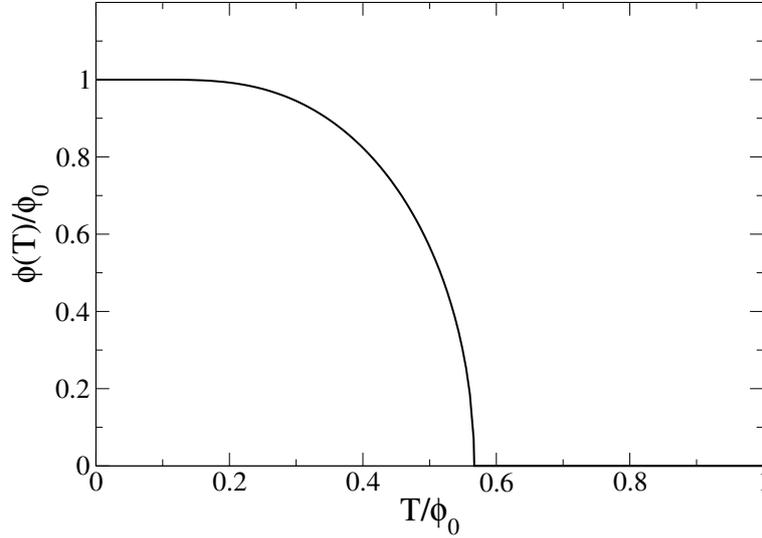


Abbildung 5.11: Gap-Parameter als Funktion der Temperatur.

5.8 Eichtheorien: Hard-Thermal-Loop (HTL) – Näherung

Die 2PI-effektive Wirkung lautet für nicht-Abelsche Eichtheorien

$$\begin{aligned} \Gamma[\mathcal{A}, \Delta, \mathcal{S}] &= S[\mathcal{A}] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln \Delta^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr}_X [\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{A})\Delta - \mathbb{1}] \\ &\quad + \text{Tr}_X \ln \mathcal{S}^{-1} + \text{Tr}_X [\mathcal{S}_{\text{tl}}^{-1}(\mathcal{A})\mathcal{S} - \mathbb{1}] + \Gamma_2[\mathcal{A}, \Delta, \mathcal{S}]. \end{aligned} \quad (5.294)$$

Hier haben wir die Ein-Punkt-Funktion des Eichfeldes mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_a^\mu(X) \equiv \langle A_a^\mu(X) \rangle$ und den Eichfeld-Propagator mit $\Delta \equiv \Delta_{\mu\nu}^{ab}(X, Y)$ bezeichnet. Obwohl wir in rein fermionischen Theorien keine Ein-Punkt-Funktion haben und daher der inverse fermionische Baum-Graphen-Propagator $\mathcal{S}_{\text{tl}}^{-1}$ gleich dem inversen freien Propagator ist, $\mathcal{S}_{\text{tl}}^{-1} \equiv \mathcal{S}_0^{-1}$, kann $\mathcal{S}_{\text{tl}}^{-1}$ in Theorien, bei denen Fermionen mit Bosonen koppeln, natürlich von der Ein-Punkt-Funktion \mathcal{A} des Eichfeldes abhängen, $\mathcal{S}_{\text{tl}}^{-1} = \mathcal{S}_{\text{tl}}^{-1}(\mathcal{A})$.

Üblicherweise verschwindet die Ein-Punkt-Funktion des Eichfeldes, es sei denn, der Grundzustand des Systems bricht die Eichsymmetrie, wie z.B. in Farb-Supraleitern, vgl. Ref. [17]. Wir schließen diesen Fall im Folgenden aus, setzen daher $\mathcal{A} \equiv 0$. Dann ist auch die klassische Wirkung $S[\mathcal{A}] \equiv 0$ und die inversen Baum-Graphen-Propagatoren des Eichfeldes und der Fermionen sind identisch mit den inversen freien Propagatoren, $\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{A}) \equiv \Delta_0^{-1}$ und $\mathcal{S}_{\text{tl}}^{-1}(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{S}_0^{-1}$.

In Zwei-Schleifen-Näherung besteht $\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}]$ aus den in Gl. (4.145) gezeigten Diagrammen, allerdings mit vollen Propagatoren als interne Linien,

$$\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}] = -\frac{1}{2} \text{(a)} - \frac{1}{2} \text{(b)} + \frac{1}{12} \text{(c)} + \frac{1}{8} \text{(d)} \quad (5.295)$$

In Abelschen Eichtheorien, wie QED, trägt lediglich das Diagramm (a) bei, bei nicht-Abelschen, wie QCD, dagegen auch die Diagramme (b) – (d).

Die Dyson–Schwinger–Gleichungen für die vollen Propagatoren lauten

$$\bar{\mathcal{S}}^{-1} = \mathcal{S}_0^{-1} + \Sigma, \quad (5.296)$$

$$\bar{\Delta}^{-1} = \Delta_0^{-1} + \Pi, \quad (5.297)$$

mit

$$\Sigma = \left. \frac{\delta\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}]}{\delta\mathcal{S}} \right|_{\Delta=\bar{\Delta}, \mathcal{S}=\bar{\mathcal{S}}} = - \text{diagram (a)} \quad (5.298)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= -2 \left. \frac{\delta\Gamma_2[\Delta, \mathcal{S}]}{\delta\Delta} \right|_{\Delta=\bar{\Delta}, \mathcal{S}=\bar{\mathcal{S}}} \\ &= \text{diagram (b)} + \text{diagram (c)} - \frac{1}{2} \text{diagram (c)} - \frac{1}{2} \text{diagram (d)}, \end{aligned} \quad (5.299)$$

Eine selbstkonsistente Lösung dieses gekoppelten Gleichungssystems wurde bislang nicht angegangen. Es sind dabei viele Probleme zu lösen, z.B. die Erhaltung der Eichinvarianz, der Ward–Takahashi– bzw. Slavnov–Taylor–Identitäten etc..

Eine approximative Lösung hat jedoch enorme Bedeutung (und Berühmtheit) erlangt, die sog. **“Hard-Thermal-Loop” (HTL)**–, bzw. in Systemen mit nicht-verschwindendem chemischen Potential die sog. **“Hard-Dense-Loop” (HDL)–Näherung**. Diese Näherung hat deswegen so große Bedeutung, weil es in ihrem Rahmen zum ersten Mal gelungen ist, das korrekte Resultat für die **Gluon-Dämpfungsrate** in führender Ordnung zu berechnen [18]. Diese Rechnung erfordert aber neben der Bestimmung der Propagatoren auch die der Drei- und Vier-Punkt-Vertizes in HTL/HDL-Näherung. Hier werden wir nur den Eichfeld-Propagator (5.297) in HTL-Näherung berechnen, um das Prinzip dieser Näherung zu erläutern und verweisen für weitergehende Studien auf die Literatur [18].

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall $\mu = 0$, also auf die HTL-Näherung, und betrachten nur die Selbstenergie des Eichfelds, Gl. (5.299), für den Fall der QED, wo nur das erste Diagramm beiträgt. Die Kopplungskonstante der QED ist die elektrische Elementarladung e . Um die HTL-Näherung zu motivieren, nehmen wir an, dass $e \ll 1$.

Zunächst ist aus Dimensionsgründen klar, dass

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = e^2 Q^2 F_{\mu\nu}(Q) , \quad (5.300)$$

wobei $F_{\mu\nu}$ ein **dimensionsloser** Rang-2-Lorentz-Tensor ist, der vom 4-Impuls Q^μ abhängt. Dies gilt strikt im Vakuum, da der 4-Impuls Q^μ die einzige dimensionsbehaftete Größe ist. In einem thermodynamischen System bei $T \neq 0$ ist dies aber nicht mehr der Fall, da die Temperatur T eine **weitere dimensionsbehaftete Größe** darstellt. Wir müssen daher Gl. (5.300) modifizieren,

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = e^2 T^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} \left(\frac{Q}{T} \right) , \quad (5.301)$$

wobei $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ ein **dimensionsloser** Rang-2-Lorentz-Tensor ist, der vom **dimensionslosen** 4-Vektor Q^μ/T abhängt.

Der wesentliche Schritt besteht nun darin zu erkennen, dass für 4-Impulse $Q^\mu \sim O(T)$, sog. **harte Impulse**, die Selbstenergie $\Pi \sim O(e^2 T^2)$ in der Dyson-Schwinger-Gleichung (5.297) um einen Faktor $e^2 \ll 1$ gegenüber dem freien inversen Propagator unterdrückt ist,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{\mu\nu}^{-1}(Q) &= \Delta_{0,\mu\nu}^{-1}(Q) + \Pi_{\mu\nu}(Q) \\ &= Q^2 (P_{\mu\nu} + \lambda E_{\mu\nu}) + e^2 T^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} \left(\frac{Q}{T} \right) \\ &\sim O(T^2) + O(e^2 T^2) , \end{aligned} \quad (5.302)$$

mit dem Eichparameter λ und den Projektoren

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} , \quad E_{\mu\nu} = \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} . \quad (5.303)$$

Man kann also für **harte Impulse** $Q^\mu \sim O(T)$ die **Selbstenergie vernachlässigen** und die Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichung (5.302) direkt angeben,

$$\bar{\Delta}^{\mu\nu}(Q) = \Delta_0^{\mu\nu}(Q) , \quad Q^\mu \sim O(T) . \quad (5.304)$$

Falls jedoch die 4-Impulse $Q^\mu \sim O(eT)$, also sog. **weiche Impulse** sind, dann sind beide Terme in Gl. (5.302) von **derselben** Größenordnung,

$$\bar{\Delta}_{\mu\nu}^{-1}(Q) = Q^2 (P_{\mu\nu} + \lambda E_{\mu\nu}) + e^2 T^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} \left(\frac{Q}{T} \right) \sim O(e^2 T^2) + O(e^2 T^2) , \quad (5.305)$$

vorausgesetzt, dass $\mathcal{F}_{\mu\nu}(Q/T) \sim O(1)$ ist, was aber in der Regel der Fall ist (und was wir im Folgenden explizit bestätigen werden). Nun kann man die Selbstenergie **nicht** mehr gegenüber $\Delta_{0,\mu\nu}^{-1}(Q)$ vernachlässigen. Es bedeutet aber auch, dass man die Selbstenergie $\Pi_{\mu\nu}(Q)$ lediglich für **weiche externe Impulse** $Q^\mu \sim O(eT)$ ausrechnen muss. Dies vereinfacht die Berechnung erheblich.

In einer Formel ausgedrückt lautet die Eichboson-Selbstenergie, d.h. das erste Diagramm in Gl. (5.299),

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = e^2 \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D [\gamma_\mu \bar{\mathcal{S}}(K) \gamma_\nu \bar{\mathcal{S}}(K - Q)] . \quad (5.306)$$

Der Vakuum-Anteil der Selbstenergie ist für das Folgende uninteressant, wir konzentrieren uns daher auf den **thermischen Anteil**. Wir nehmen an, dass die Temperatur viel größer als die Fermionenmasse ist, $T \gg m$, d.h. dass wir im ultrarelativistischen Limes $m = 0$ rechnen können. Die typischen Fermionenimpulse K , die in der Schleife umlaufen, sind “hart”, d.h. von der Größenordnung $O(T)$. Zwar läuft die Summe über alle Impulse, aber der Phasenraum $d^3\mathbf{k} \sim dk k^2$, multipliziert mit einer Fermi–Dirac–Verteilung $n_F(k) = (e^{k/T} + 1)^{-1} \sim e^{-k/T}$ (für masselose Teilchen und Impulse $k \gtrsim T$), hat ein Maximum bei Impulsen $k \sim T$. Diese liefern den Hauptbeitrag zur Summe über K in Gl. (5.306). Diese Tatsache ist die Ursache für die Bezeichnung “hard thermal loop” (harte thermische Schleife) für die hier diskutierte HTL-Näherung.

Wenn aber die typischen Impulse in der Schleife hart sind, können wir die vollen Propagatoren $\bar{\mathcal{S}}$ in Gl. (5.306) durch die **freien** Propagatoren \mathcal{S}_0 ersetzen. Denn für die Dyson–Schwinger–Gleichung (5.296) für das Fermion gilt dasselbe Argument wie für die des Eichbosons in Gl. (5.302): die Fermion-Selbstenergie Σ ist von der Ordnung $O(e^2 T)$ und daher gilt für **harte** Impulse $K \sim O(T)$

$$\bar{\mathcal{S}}^{-1}(K) = \mathcal{S}_0^{-1}(K) + \Sigma(K) = -\not{K} + e^2 T G \left(\frac{K}{T} \right) \sim O(T) + O(e^2 T) , \quad (5.307)$$

d.h. die Selbstenergie ist um einen Faktor e^2 kleiner als der freie inverse Fermion-Propagator. Für harte Impulse ist die Lösung dieser Gleichung also

$$\bar{\mathcal{S}}(K) = \mathcal{S}_0(K) = -\frac{\not{K}}{K^2} . \quad (5.308)$$

In der HTL-Näherung lautet die Eichboson-Selbstenergie nun

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) \simeq e^2 \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D [\gamma_\mu \mathcal{S}_0(K) \gamma_\nu \mathcal{S}_0(K - Q)] . \quad (5.309)$$

Diese Gleichung ist nicht länger eine Selbstkonsistenz-Gleichung, denn die rechte Seite hängt nicht implizit von der Eichboson-Selbstenergie ab. Mit dem “harten” Fermion-Propagator (5.308) berechnen wir die Eichboson-Selbstenergie zu

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) \simeq e^2 \frac{T}{V} \sum_K \text{tr}_D [\gamma_\mu \not{K} \gamma_\nu (\not{K} - \not{Q})] \frac{1}{K^2} \frac{1}{(K - Q)^2} . \quad (5.310)$$

In der Spur dürfen wir in HTL-Näherung den weichen Impuls Q^μ gegenüber dem harten Impuls K^μ vernachlässigen,

$$\begin{aligned} \text{tr}_D [\gamma_\mu \not{K} \gamma_\nu (\not{K} - \not{Q})] &\simeq \text{tr}_D [\gamma_\mu \not{K} \gamma_\nu \not{K}] = K^\alpha K^\beta \text{tr}_D (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) \\ &= 4K^\alpha K^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) = 8K_\mu K_\nu - 4K^2 g_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (5.311)$$

Eingesetzt in Gl. (5.310) ergibt sich

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) \simeq 8e^2 \frac{T}{V} \sum_K \frac{K_\mu K_\nu}{K^2(K-Q)^2} - 4e^2 g_{\mu\nu} \frac{T}{V} \sum_K \frac{1}{(K-Q)^2}. \quad (5.312)$$

Die zweite Summe ist nach Substitution des Summationsindex $K \rightarrow K' = K - Q$ (und anschließender Umbenennung $K' \rightarrow K$)

$$\begin{aligned} \frac{T}{V} \sum_K \frac{1}{(K-Q)^2} &= \frac{T}{V} \sum_{K'} \frac{1}{K'^2} = \frac{T}{V} \sum_K \frac{1}{K^2} = - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} T \sum_n \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2} \\ &= - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{2k} \tanh \frac{k}{2T} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k \left[n_F(k) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (5.313)$$

Der divergente Vakuum-Anteil $\sim -1/2$ muß durch Renormierung beseitigt werden. Der verbleibende thermische Anteil ist dann

$$\frac{T}{V} \sum_K \frac{1}{(K-Q)^2} = \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x + 1} = \frac{T^2}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{12} = \frac{T^2}{24}, \quad (5.314)$$

wobei wir Gl. (3.411.3) aus Ref. [7] benutzt haben.

Die erste Summe in Gl. (5.312) berechnet man am besten separat für alle Kombinationen von Lorentz-Indizes. Wir betrachten zunächst nur die entsprechenden Matsubara-Summen,

$$\begin{aligned} \mu = \nu = 0: \quad T \sum_n \frac{k_0^2}{K^2(K-Q)^2} &= T \sum_n \frac{K^2 + k^2}{K^2(K-Q)^2} \\ &= T \sum_n \frac{1}{(K-Q)^2} + k^2 T \sum_n \frac{1}{K^2(K-Q)^2}, \\ \mu = 0, \nu = i: \quad T \sum_n \frac{k_0 k_i}{K^2(K-Q)^2} &= k_i T \sum_n \frac{-i\omega_n}{K^2(K-Q)^2}, \\ \mu = i, \nu = j: \quad T \sum_n \frac{k_i k_j}{K^2(K-Q)^2} &= k_i k_j T \sum_n \frac{1}{K^2(K-Q)^2}. \end{aligned} \quad (5.315)$$

Man erkennt, dass man nun lediglich noch zwei verschiedene Matsubara-Summen berechnen muss,

$$\mathcal{I}_1 = T \sum_n \frac{1}{K^2(K-Q)^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_2 = T \sum_n \frac{-i\omega_n}{K^2(K-Q)^2}. \quad (5.316)$$

Wir schreiben zunächst

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^2} &= \frac{1}{k_0 - k} \frac{1}{k_0 + k} = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k_0 - k} - \frac{1}{k_0 + k} \right) = \frac{1}{2k} \sum_{\eta=\pm} \frac{\eta}{k_0 - \eta k} = - \sum_{\eta=\pm} \frac{\eta}{2k} \mathcal{S}_0^\eta(K) \\ &= - \sum_{\eta=\pm} \frac{\eta}{2k} \int_0^{1/T} d\tau e^{-i\omega_n \tau} \bar{\mathcal{S}}_0^\eta(\tau, \mathbf{k}) = - \sum_{\eta=\pm} \frac{\eta}{2k} \int_0^{1/T} d\tau e^{-(i\omega_n + \eta k)\tau} [1 - n_F(\eta k)], \end{aligned} \quad (5.317)$$

5 Resummationsverfahren

wobei wir die Glgen. (4.88), (4.91) und (4.99) für $m = \mu = 0$ benutzt haben. Damit haben wir für die erste Matsubara-Summe mit $q_0 = -i\omega_m$

$$\mathcal{I}_1 = T \sum_n \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 e^{-(i\omega_n + \eta_1 k)\tau_1} e^{-(i\omega_n - i\omega_m + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)\tau_2} \times [1 - n_F(\eta_1 k)] [1 - n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)] . \quad (5.318)$$

Die Matsubara-Summe kann nun sofort ausgeführt werden,

$$T \sum_n e^{-i\omega_n(\tau_1 + \tau_2)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \delta\left(\tau_1 + \tau_2 - \frac{s}{T}\right) = -\delta\left(\tau_2 - \frac{1}{T} + \tau_1\right) , \quad (5.319)$$

wobei wir Gl. (4.111) benutzt haben. Lediglich der Term $s = 1$ aus der Summe sorgt für einen nicht-verschwindenden Träger der Delta-Funktion im (τ_1, τ_2) -Integrationsbereich, vgl. die rechte Seite der Abb. 4.3. Damit können wir die τ_2 -Integration sofort ausführen und erhalten (unter Umbenennung der verbleibenden Integrationsvariablen $\tau_1 \rightarrow \tau$)

$$\mathcal{I}_1 = - \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_m(1/T - \tau)} e^{-(\eta_1 k - \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)\tau} [1 - n_F(\eta_1 k)] n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|) , \quad (5.320)$$

wobei wir Gl. (4.96) benutzt haben. Weil $\omega_m = iq_0$ eine bosonische Matsubara-Frequenz ist (die Null-Komponente des Eichboson-Impulses Q^μ), gilt $e^{i\omega_m/T} = 1$ und nach Ausführen des τ -Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= - \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \frac{e^{(q_0 - \eta_1 k + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)/T} - 1}{q_0 - \eta_1 k + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} [1 - n_F(\eta_1 k)] n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \\ &= \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \frac{1}{q_0 - \eta_1 k + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \\ &\quad \times \left\{ [1 - n_F(\eta_1 k)] n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(\eta_1 k) [1 - n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)] \right\} \\ &= \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \frac{1}{q_0 - \eta_1 k + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \left[n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(\eta_1 k) \right] , \quad (5.321) \end{aligned}$$

wobei wir zum vorletzten Gleichheitszeichen wieder $e^{q_0/T} = e^{-i\omega_m/T} = 1$ und Gl. (4.96) benutzt haben. Wir schreiben nun alle Terme in der Summe über η_1, η_2 explizit aus und benutzen wieder Gl. (4.96),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{1}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \left[\frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 - k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} + \frac{n_F(-|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(-k)}{q_0 + k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(-k)}{q_0 + k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} - \frac{n_F(-|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 - k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right] \\ &= \frac{1}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \left[\frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 - k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} - \frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 + k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + n_F(k) - 1}{q_0 + k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} + \frac{n_F(-|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + n_F(k) - 1}{q_0 - k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right] . \quad (5.322) \end{aligned}$$

Hier müssen die Vakuum-Terme wieder durch Renormierung beseitigt werden; sie werden im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Da $q \sim O(eT)$, während $k \sim O(T)$, können wir alle Terme für kleine q entwickeln, also

$$\begin{aligned} |\mathbf{k} - \mathbf{q}| &= \sqrt{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2} = k \sqrt{1 - 2\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{k} + \frac{q^2}{k^2}} = k \left[1 - \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{k} + O\left(\frac{q^2}{k^2}\right) \right] \\ &= k - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q} + O\left(\frac{q^2}{k}\right), \end{aligned} \quad (5.323)$$

und daher

$$n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \simeq n_F(k) - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q} \frac{dn_F(k)}{dk}. \quad (5.324)$$

Nun sehen wir, dass bis zur führenden Ordnung in q

$$\frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 \mp (k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)} \simeq -\frac{dn_F(k)}{dk} \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 \mp \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}, \quad (5.325)$$

während

$$\frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + n_F(k)}{q_0 \pm (k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)} \simeq \pm \frac{n_F(k)}{k}. \quad (5.326)$$

Damit folgt

$$\mathcal{I}_1 \simeq \frac{1}{4k^2} \left[\frac{dn_F(k)}{dk} \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} - \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} \right) - \frac{2n_F(k)}{k} \right]. \quad (5.327)$$

Ganz analog berechnet man

$$\mathcal{I}_2 \simeq -\frac{1}{4k} \frac{dn_F(k)}{dk} \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} + \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} \right), \quad (5.328)$$

wie wir in der nachfolgenden Übungsaufgabe zeigen werden.

4.2.2022

Übungsaufgabe 5.5: Beweise Gl. (5.328).

Beweis: Der Trick zur Berechnung der zweiten Matsubara-Summe \mathcal{I}_2 besteht darin, die Matsubara-Frequenz im Zähler in der gemischten Darstellung in eine Ableitung nach τ_1 umzuwandeln,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= T \sum_n \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} e^{-i\omega_n \tau_1} \right) e^{-\eta_1 k \tau_1} e^{-(i\omega_n - i\omega_m + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \tau_2} \\ &\quad \times [1 - n_F(\eta_1 k)] [1 - n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)]. \end{aligned} \quad (5.329)$$

Nun integriert man das τ_1 -Integral partiell,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/T} d\tau_1 \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} e^{-i\omega_n \tau_1} \right) e^{-\eta_1 k \tau_1} &= e^{-(i\omega_n + \eta_1 k) \tau_1} \Big|_0^{1/T} - \int_0^{1/T} d\tau_1 (-\eta_1 k) e^{-(i\omega_n + \eta_1 k) \tau_1} \\ &= e^{-(i\omega_n + \eta_1 k)/T} - 1 + \eta_1 k \int_0^{1/T} d\tau_1 e^{-(i\omega_n + \eta_1 k) \tau_1} . \end{aligned} \quad (5.330)$$

Weil $e^{-i\omega_n/T} = -1$, hängen die ersten beiden Terme nicht mehr von ω_n ab. Wenn wir für diese dann die Matsubara-Summe über n ausführen, haben wir

$$T \sum_n e^{-i\omega_n \tau_2} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \delta\left(\tau_2 - \frac{s}{T}\right) = \delta(\tau_2) - \delta\left(\tau_2 - \frac{1}{T}\right) , \quad (5.331)$$

wobei wir nur die Werte von τ_2 berücksichtigt haben, die (gerade noch) im Intervall $[0, 1/T]$ liegen. Für beiden ersten Terme in Gl. (5.330) berechnen wir den gesamten Beitrag zu \mathcal{I}_2 ,

$$\begin{aligned} \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} (-e^{-\eta_1 k/T} - 1) [1 - n_F(\eta_1 k)] [1 - n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)] [1 - e^{(i\omega_m - \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)/T}] \\ = - \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1 \eta_2}{4k|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} [1 - 2n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)] , \end{aligned} \quad (5.332)$$

wobei wir mehrfach Gl. (4.96) benutzt haben. Dieser Ausdruck verschwindet aber wegen $\sum_{\eta_1 = \pm} \eta_1 \equiv 0$. Die ersten beiden Terme in Gl. (5.330) ergeben also null und können im weiteren vernachlässigt werden. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= T \sum_n \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1^2 \eta_2}{4|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 e^{-(i\omega_n + \eta_1 k) \tau_1} e^{-(i\omega_n - i\omega_m + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \tau_2} \\ &\quad \times [1 - n_F(\eta_1 k)] [1 - n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|)] . \end{aligned} \quad (5.333)$$

Dies ist bis auf einen Faktor $\eta_1 k$ identisch mit Gl. (5.318). Wir können also die Rechnung bis Gl. (5.321) direkt übernehmen,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \sum_{\eta_1, \eta_2 = \pm} \frac{\eta_1^2 \eta_2}{4|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \frac{1}{q_0 - \eta_1 k + \eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \left[n_F(\eta_2 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(\eta_1 k) \right] \\ &= \frac{1}{4|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \left[\frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 - k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} - \frac{n_F(-|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(-k)}{q_0 + k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(-k)}{q_0 + k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} - \frac{n_F(-|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 - k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right] \\ &= \frac{1}{4|\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \left[\frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 - k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} + \frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) - n_F(k)}{q_0 + k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_F(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + n_F(k) - 1}{q_0 + k + |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} + \frac{n_F(-|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) + n_F(k) - 1}{q_0 - k - |\mathbf{k} - \mathbf{q}|} \right] . \end{aligned} \quad (5.334)$$

Wir entwickeln nun wieder für kleine q und behalten nur die führenden Terme bei. Die letzten beiden Terme heben sich dann gegenseitig auf. Für die ersten beiden erhalten wir mit Gl. (5.325) sofort das Resultat (5.328), q.e.d..

Nun benutzen wir die Glgen. (5.327) und (5.328) in Gl. (5.315) und berechnen die Selbstenergie (5.312) komponentenweise. Für die (00)–Komponente erhalten wir

$$\Pi_{00}(Q) = \frac{e^2 T^2}{6} + 2e^2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{dn_F(k)}{dk} \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} - \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} \right) - \frac{2n_F(k)}{k} \right]. \quad (5.335)$$

Man erkennt, dass die Integration über die Radialvariable k von der über den Raumwinkel entkoppelt. Für die Integration über letzteren wählen wir den Polarwinkel so, dass $\cos \vartheta \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \equiv x$,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} - \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} \right) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{x}{x + q_0/q} + \frac{x}{x - q_0/q} \right) \\ &= 2 - \frac{q_0}{2q} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{1}{x + q_0/q} - \frac{1}{x - q_0/q} \right) \\ &= 2 - \frac{q_0}{q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q}. \end{aligned} \quad (5.336)$$

Für das Integral über die Radialvariable benutzen wir

$$\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{dn_F(k)}{dk} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{dn_F(k)}{dk} = -\frac{2}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k n_F(k) = -\frac{T^2}{12}, \quad (5.337)$$

wobei wir Gl. (3.411.3) aus Ref. [7] benutzt haben. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \Pi_{00}(Q) &= \frac{e^2 T^2}{6} + 2e^2 \left[-\frac{T^2}{12} \left(2 - \frac{q_0}{q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} \right) - \frac{T^2}{12} \right] \\ &= -\frac{e^2 T^2}{3} \left(1 - \frac{q_0}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} \right) \\ &= -\frac{e^2 T^2}{3} \left(1 - \frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{\cos \vartheta + q_0/q} \right). \end{aligned} \quad (5.338)$$

Hier haben wir für spätere Zwecke das Integral über den Raumwinkel restauriert.

Für die (0i)–Komponente ergibt sich

$$\Pi_{0i}(Q) = -2e^2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_i}{k} \frac{dn_F(k)}{dk} \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} + \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} \right). \quad (5.339)$$

Aus Symmetriegründen verschwindet das Integral über die Komponenten von \mathbf{k} , die nicht in \mathbf{q} –Richtung zeigen, d.h. die einzige nicht-verschwindende Komponente ist $k_i =$

$\hat{q}_i k \cos \vartheta = \hat{q}_i k \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$. Die Radial- und Winkelintegrationen separieren wieder, so dass

$$\begin{aligned} \Pi_{0i}(Q) &= -2e^2 \hat{q}_i \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{dn_F(k)}{dk} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} + \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} \right) \\ &= -2e^2 \hat{q}_i \frac{T^2}{12} \frac{q_0}{2q} \int_{-1}^1 dx x \left(\frac{1}{x + q_0/q} + \frac{1}{x - q_0/q} \right) \\ &= -\hat{q}_i \frac{e^2 T^2}{3} \frac{q_0}{q} \left(1 - \frac{q_0}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} \right), \end{aligned} \quad (5.340)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (5.336) benutzt haben. Für spätere Zwecke restaurieren wir das Integral über den Raumwinkel,

$$\Pi_{0i}(Q) = -\frac{e^2 T^2}{3} \frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{k}_i}{\cos \vartheta + q_0/q}. \quad (5.341)$$

Zum Schluss berechnen wir noch die (ij) -Komponenten der Selbstenergie,

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}(Q) &= 2e^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{k}_i \hat{k}_j \left[\frac{dn_F(k)}{dk} \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} - \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}}{q_0 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} \right) - \frac{2n_F(k)}{k} \right] + \frac{e^2 T^2}{6} \delta_{ij} \\ &= -2e^2 \frac{q_0}{q} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{k}_i \hat{k}_j \frac{dn_F(k)}{dk} \left(\frac{1}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q} - \frac{1}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} - q_0/q} \right) \\ &\quad + 2e^2 \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[2 \frac{dn_F(k)}{dk} - \frac{2n_F(k)}{k} \right] \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j + \frac{e^2 T^2}{6} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (5.342)$$

Die letzten beiden Terme heben sich gegenseitig weg, denn zum einen haben wir

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (5.343)$$

wie man in Kugelkoordinaten sofort nachprüft, zum anderen ist mit Gl. (5.337)

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[2 \frac{dn_F(k)}{dk} - \frac{2n_F(k)}{k} \right] = -\frac{T^2}{6} - \frac{T^2}{12} = -\frac{T^2}{4}. \quad (5.344)$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}(Q) &= \frac{e^2 T^2}{6} \frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j \left(\frac{1}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q} - \frac{1}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} - q_0/q} \right) \\ &= \frac{e^2 T^2}{3} \frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{k}_i \hat{k}_j}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q}, \end{aligned} \quad (5.345)$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie des Integrals unter $\hat{\mathbf{k}} \rightarrow -\hat{\mathbf{k}}$ ausgenutzt haben.

Die Glgen. (5.338), (5.341) und (5.345) lassen sich wieder in kompakter Form zusammenfassen,

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = m_{\gamma,el}^2 \left(\frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{K}_\mu \hat{K}_\nu}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q} - g_{\mu 0} g_{\nu 0} \right), \quad (5.346)$$

mit $\hat{K}^\mu \equiv (1, -\hat{\mathbf{k}})^T$ und unter Benutzung von Gl. (5.19) für die elektrische Abschirmmasse.

Nun betrachten wir die **analytische Fortsetzung** der Selbstenergie (5.346) zu **reellen Energien**, $q_0 = -i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta$, $\omega \in \mathbb{R}$. Solange $|\omega| > q$, also für **zeitartige** 4-Impulse $Q^\mu = (\omega, \mathbf{q})^T$, ist $\Pi_{\mu\nu}(Q)$ **reell** und besitzt keinen Imaginärteil,

$$\text{Im } \Pi_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) = 0, \quad \omega > q. \quad (5.347)$$

Jedoch gibt es für $|\omega| < q$, also für **raumartige** 4-Impulse, einen **Pol** im Nenner des Raumwinkelintegrals und mit der Dirac-Identität (4.55) erhalten wir

$$\text{Im } \Pi_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) = -\pi m_{\gamma,el}^2 \theta(q^2 - \omega^2) \frac{\omega}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{K}_\mu \hat{K}_\nu \delta\left(\frac{\omega}{q} + \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}\right). \quad (5.348)$$

Eine weitere Möglichkeit, den nicht-verschwindenden Imaginärteil zu bestimmen, ist, beispielsweise in den Gln. (5.338) und (5.340) den Verzweigungsschnitt des Logarithmus zu berücksichtigen, $\ln(\omega - q) = \ln|\omega - q| + i\pi\theta(q - \omega)$. Man spricht von der **Landau-Dämpfung** raumartiger Photonen.

Für $\mu = \nu = 0$ erhalten wir z.B.

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi_{00}(\omega, \mathbf{q}) &= -\pi m_{\gamma,el}^2 \theta(q^2 - \omega^2) \frac{\omega}{2q} \int_{-1}^1 dx \delta\left(\frac{\omega}{q} + x\right) \\ &= -\pi m_{\gamma,el}^2 \theta(q^2 - \omega^2) \frac{\omega}{2q} \int_{-\infty}^{\infty} dx \theta(1+x)\theta(1-x) \delta\left(\frac{\omega}{q} + x\right) \\ &= -\pi m_{\gamma,el}^2 \frac{\omega}{2q} \theta(q - \omega)\theta(q + \omega). \end{aligned} \quad (5.349)$$

Die (00)-Komponente ist für $\omega > 0$ in Abb. 5.12 dargestellt.

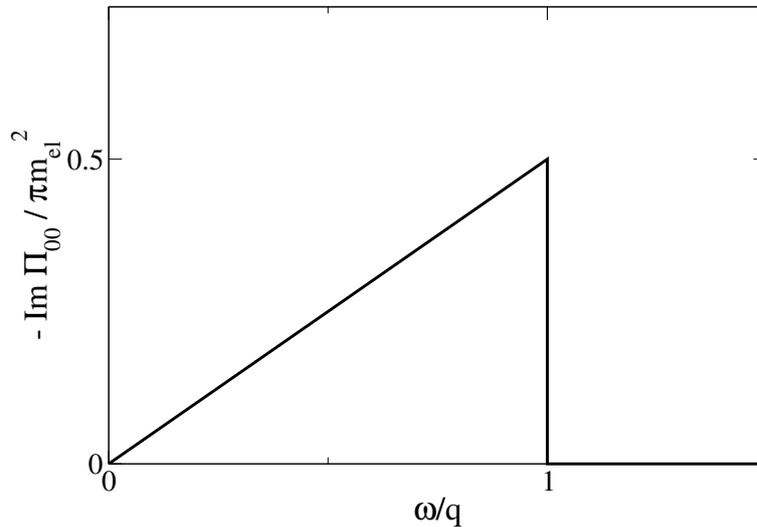


Abbildung 5.12: Imaginärteil von Π_{00} als Funktion von ω/q .

Wir bestimmen nun noch die **Dispersionsrelationen** der Eichbosonen in einem heißen Medium. Dazu betrachten wir den vollen inversen Propagator (5.297) in der HTL-Näherung. Es empfiehlt sich, diesen in eine Basis von Projektoren zu zerlegen. Anders als

im Vakuum benötigen wir aber nun mehr als die dort auftretenden Projektoren (5.303), da das Medium ein bestimmtes Inertialsystem (nämlich sein Ruhesystem) auszeichnet und damit die Lorentz-Symmetrie verletzt. Mit dem 4-Vektor $f^\nu \equiv (0, \mathbf{q})^T$ definieren wir den 4-Vektor

$$N^\mu \equiv P^{\mu\nu} f_\nu = (g^{\mu\nu} - E^{\mu\nu}) f_\nu = f^\mu - Q^\mu \frac{Q \cdot f}{Q^2} = f^\mu + Q^\mu \frac{q^2}{Q^2} = \left(\frac{q_0 q^2}{Q^2}, \frac{q_0^2 \mathbf{q}}{Q^2} \right)^T. \quad (5.350)$$

Offenbar gilt

$$N \cdot Q = \frac{q_0^2 q^2}{Q^2} - \frac{q_0^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{Q^2} = 0. \quad (5.351)$$

Nun definieren wir die Projektoren

$$B^{\mu\nu} \equiv \frac{N^\mu N^\nu}{N^2}, \quad (5.352)$$

$$A^{\mu\nu} \equiv P^{\mu\nu} - B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - B^{\mu\nu} - E^{\mu\nu}, \quad (5.353)$$

sowie den Tensor

$$C^{\mu\nu} = N^\mu Q^\nu + N^\nu Q^\mu. \quad (5.354)$$

Die Projekteigenschaften von $A^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$ und $E^{\mu\nu}$, sowie die Relation $C^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = C^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = C^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0$ werden in Übungsaufgabe 5.6 gezeigt. Während $E^{\mu\nu}$ auf den ein-dimensionalen Unterraum 4-parallel zu Q^μ projiziert, projiziert $P^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + B^{\mu\nu}$ auf den drei-dimensionalen Unterraum 4-transversal zu Q^μ . Man kann nun durch explizite Rechnung zeigen, s. Übungsaufgabe 5.7, dass

$$A^{00} = 0, \quad A^{0i} = 0, \quad A^{ij} = -\delta^{ij} + \hat{q}^i \hat{q}^j, \quad (5.355)$$

d.h. $A^{\mu\nu}$ projiziert auf den zwei-dimensionalen **räumlich transversalen** Unterraum orthogonal zu Q^μ . Dementsprechend projiziert $B^{\mu\nu}$ auf den ein-dimensionalen **räumlich longitudinalen** Unterraum orthogonal zu Q^μ .

Übungsaufgabe 5.6: Zeige, dass die in den Glgen. (5.352), (5.353) definierten Tensoren $B^{\mu\nu}$, $A^{\mu\nu}$ zusammen mit $E^{\mu\nu} = Q^\mu Q^\nu / Q^2$

- (a) den Raum der Rang-2-Lorentz-Tensoren vollständig aufspannen,
- (b) idempotent sind,
- (c) sowie orthogonal zueinander sind.

Zeige außerdem, dass

$$(d) C^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = C^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = C^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0.$$

Beweis:

- (a) Dies folgt aus Gl. (5.353),

$$g^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + B^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}. \quad (5.356)$$

(b) Es gilt

$$B^{\mu\lambda}B_{\lambda}{}^{\nu} = \frac{N^{\mu}N^{\nu}}{(N^2)^2}N \cdot N = B^{\mu\nu} \quad (5.357)$$

und entsprechend

$$E^{\mu\lambda}E_{\lambda}{}^{\nu} = \frac{Q^{\mu}Q^{\nu}}{(Q^2)^2}Q \cdot Q = E^{\mu\nu} . \quad (5.358)$$

Damit berechnet man sofort

$$\begin{aligned} A^{\mu\lambda}A_{\lambda}{}^{\nu} &= (g^{\mu\lambda} - B^{\mu\lambda} - E^{\mu\lambda})(g_{\lambda}{}^{\nu} - B_{\lambda}{}^{\nu} - E_{\lambda}{}^{\nu}) \\ &= g^{\mu\nu} - B^{\mu\nu} - E^{\mu\nu} \\ &\quad - B^{\mu\nu} + B^{\mu\lambda}B_{\lambda}{}^{\nu} + B^{\mu\lambda}E_{\lambda}{}^{\nu} - E^{\mu\nu} + E^{\mu\lambda}B_{\lambda}{}^{\nu} + E^{\mu\lambda}E_{\lambda}{}^{\nu} \\ &= g^{\mu\nu} - B^{\mu\nu} - E^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (5.359)$$

wobei wir Gl. (5.360) benutzt haben.

(c) Es gilt wegen Gl. (5.351)

$$B^{\mu\lambda}E_{\lambda}{}^{\nu} = \frac{N^{\mu}Q^{\nu}}{N^2Q^2}N \cdot Q = 0 , \quad E^{\mu\lambda}B_{\lambda}{}^{\nu} = \frac{Q^{\mu}N^{\nu}}{N^2Q^2}Q \cdot N = 0 , \quad (5.360)$$

und damit auch

$$A^{\mu\lambda}B_{\lambda}{}^{\nu} = (g^{\mu\lambda} - B^{\mu\lambda} - E^{\mu\lambda})B_{\lambda}{}^{\nu} = B^{\mu\nu} - B^{\mu\nu} = 0 , \quad (5.361)$$

wobei wir Gl. (5.357) benutzt haben. Letztlich gilt auch

$$A^{\mu\lambda}E_{\lambda}{}^{\nu} = (g^{\mu\lambda} - B^{\mu\lambda} - E^{\mu\lambda})E_{\lambda}{}^{\nu} = E^{\mu\nu} - E^{\mu\nu} = 0 , \quad (5.362)$$

wobei wir die Glgen. (5.358) und (5.360) benutzt haben.

(d) Wir zeigen zuerst

$$C^{\mu\nu}E_{\mu\nu} = (N^{\mu}Q^{\nu} + N^{\nu}Q^{\mu})\frac{Q_{\mu}Q_{\nu}}{Q^2} = 2N \cdot Q = 0 , \quad (5.363)$$

s. Gl. (5.351). Ferner gilt

$$C^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = (N^{\mu}Q^{\nu} + N^{\nu}Q^{\mu})\frac{N_{\mu}N_{\nu}}{N^2} = 2N \cdot Q = 0 . \quad (5.364)$$

Schließlich gilt mit Gl. (5.353) und den eben bewiesenen Relationen

$$C^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = C^{\mu\nu}(g_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}) = C^{\mu}{}_{\mu} = 2N \cdot Q = 0 , \quad \text{q.e.d.} \quad (5.365)$$

Übungsaufgabe 5.7: Beweise Gl. (5.355).

Beweis: Zunächst erhalten wir mit

$$N^2 = \frac{q_0^2 q^4}{(Q^2)^2} - \frac{q_0^4 \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}{(Q^2)^2} = \frac{q_0^2 q^2}{(Q^2)^2}(q^2 - q_0^2) = -\frac{q_0^2 q^2}{Q^2} \quad (5.366)$$

für A^{00}

$$A^{00} = g^{00} - B^{00} - E^{00} = 1 - \frac{N_0^2}{N^2} - \frac{q_0^2}{Q^2} = 1 - \frac{q_0^2 q^4}{(Q^2)^2 N^2} - \frac{q_0^2}{Q^2} = 1 + \frac{q^2}{Q^2} - \frac{q_0^2}{Q^2} = 0. \quad (5.367)$$

Ferne haben wir

$$A^{0i} = g^{0i} - B^{0i} - E^{0i} = -\frac{N_0 N^i}{N^2} - \frac{q_0 q^i}{Q^2} = -\frac{q_0^3 q^2 q^i}{(Q^2)^2 N^2} - \frac{q_0 q^i}{Q^2} = \frac{q_0 q^i}{Q^2} - \frac{q_0 q^i}{Q^2} = 0. \quad (5.368)$$

Letztlich gilt

$$\begin{aligned} A^{ij} &= g^{ij} - B^{ij} - E^{ij} = -\delta^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} - \frac{q^i q^j}{Q^2} = -\delta^{ij} - \frac{q_0^4 q^i q^j}{(Q^2)^2 N^2} - \frac{q^i q^j}{Q^2} \\ &= -\delta^{ij} - \frac{q^i q^j}{Q^2} \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2}\right) = -\delta^{ij} + \hat{q}^i \hat{q}^j, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (5.369)$$

Im Medium wird der räumlich longitudinale Freiheitsgrad des Eichfeldes,

9.2.2022

$$A_N(Q) \equiv \frac{N \cdot A(Q)}{N^2}, \quad (5.370)$$

ein **physikalischer** Freiheitsgrad. Es handelt sich dabei um eine **kollektive Anregung**, das sog. **Plasmon**. Die Tensorzerlegung von $\Pi^\mu(Q)$ lautet nun

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = \Pi_a(Q) A_{\mu\nu} + \Pi_b(Q) B_{\mu\nu} + \Pi_c(Q) C_{\mu\nu} + \Pi_e(Q) E_{\mu\nu}, \quad (5.371)$$

die des freien inversen Propagators

$$\Delta_{0,\mu\nu}^{-1}(Q) = Q^2 (P_{\mu\nu} + \lambda E_{\mu\nu}) = Q^2 (A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + \lambda E_{\mu\nu}), \quad (5.372)$$

und damit die des vollen inversen Propagators

$$\bar{\Delta}_{\mu\nu}^{-1}(Q) = [Q^2 + \Pi_a(Q)] A_{\mu\nu} + [Q^2 + \Pi_b(Q)] B_{\mu\nu} + \Pi_c(Q) C_{\mu\nu} + [\lambda Q^2 + \Pi_e(Q)] E_{\mu\nu}. \quad (5.373)$$

Wir berechnen nun durch Projektion von $\Pi^{\mu\nu}(Q)$ auf $C_{\mu\nu}$ mit der Identität $C^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 2N^2 Q^2 = -2q_0^2 q^2$

$$\begin{aligned} -2q_0^2 q^2 \Pi_c(Q) &\equiv \Pi_{\mu\nu}(Q) C^{\mu\nu} = m_{\gamma,el}^2 \left(\frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{K}_\mu \hat{K}_\nu C^{\mu\nu}}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q} - C_{00} \right) \\ &= 2m_{\gamma,el}^2 q_0 \left(\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{K} \cdot N \hat{K} \cdot Q}{q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}} - \frac{q_0 q^2}{Q^2} \right) \\ &= 2m_{\gamma,el}^2 q_0 \left[\int \frac{d\Omega}{4\pi} (N^0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}) - \frac{q_0 q^2}{Q^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.374)$$

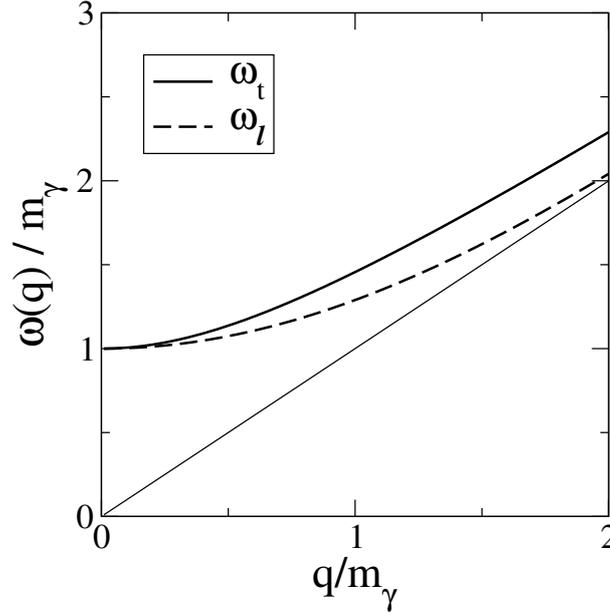


Abbildung 5.13: Die Dispersionsrelationen $\omega_{t,\ell}(\mathbf{q})$ der transversalen Eichbosonen (durchgezogen) bzw. des Plasmons (gestrichelt) als Funktion des Impulses q . Alle Größen in Einheiten der thermischen Photonmasse $m_\gamma = eT/3$.

Hier haben wir zum letzten Schritt ausgenutzt, dass nach Definition von \hat{K}^μ gilt $\hat{K} \cdot Q = q_0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q}$. Der Term $\sim \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}$ verschwindet aus Symmetriegründen bei Integration über den gesamten Raumwinkel. Nach Definition von N^0 , Gl. (5.350), ist dann aber

$$\Pi_c(Q) = 0. \quad (5.375)$$

Damit besteht $\bar{\Delta}_{\mu\nu}^{-1}(Q)$, Gl. (5.373), aus einer Linearkombination von Projektoren und lässt sich folglich sofort invertieren,

$$\bar{\Delta}^{\mu\nu}(Q) = \frac{A^{\mu\nu}}{Q^2 + \Pi_a(Q)} + \frac{B^{\mu\nu}}{Q^2 + \Pi_b(Q)} + \frac{\lambda E^{\mu\nu}}{Q^2 + \lambda \Pi_c(Q)}. \quad (5.376)$$

Mit $\Pi_t(Q) \equiv -\Pi_a(Q)$ definieren wir den **räumlich transversalen Propagator**

$$\Delta_t(Q) \equiv \frac{1}{Q^2 - \Pi_t(Q)}, \quad (5.377)$$

und mit $\Pi_\ell(Q) \equiv -q^2 \Pi_b(Q)/Q^2$ den **räumlich longitudinalen Propagator**

$$\Delta_\ell(Q) \equiv -\frac{Q^2}{q^2} \frac{1}{Q^2 + \Pi_b(Q)} = -\frac{1}{q^2 - \Pi_\ell(Q)}. \quad (5.378)$$

Die Selbstenergien $\Pi_t(Q)$ und $\Pi_\ell(Q)$ werden in Übungsaufgabe 5.8 explizit berechnet. Die **Dispersionsrelationen** der physikalischen Anregungen ergeben sich nun als **Pole** $\omega = \omega_{t,\ell}(\mathbf{q})$ von $\Delta_t(\omega, \mathbf{q})$ (transversale Eichbosonen) und $\Delta_\ell(\omega, \mathbf{q})$ (Plasmon). Diese müssen numerisch bestimmt werden und sind in Abb. 5.13 dargestellt.

Für kleine Impulse gehen beide Dispersionsrelationen gegen die **thermische Photonmasse**

$$\omega_{t,\ell}(q) \longrightarrow m_\gamma \equiv \frac{eT}{3} = \frac{m_{\gamma,el}}{\sqrt{3}}, \quad (q \longrightarrow 0). \quad (5.379)$$

Die thermische Photonmasse m_γ ist einen Faktor $1/\sqrt{3}$ kleiner als die elektrische Abschirmmasse $m_{\gamma,el}$, Gl. (5.19). Man beachte, dass die thermische Photonmasse **dynamisch** generiert wird, also daher **nicht**, wie beispielsweise ein Massenparameter in der Lagrange-Dichte, die Eichinvarianz der Theorie bricht.

Ähnlich kann man auch die Dispersionsrelation für das Fermion berechnen. Interessanterweise gibt es auch hier eine kollektive Anregung; in Analogie zum Plasmon wird sie nun **Plasmino** genannt (da es sich um eine Anregung mit fermionischen Quantenzahlen handelt). Wir können an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen und verweisen auf die Literatur [19]. Für die QCD muss man lediglich die thermische Photonmasse m_γ durch die thermische Gluonmasse $m_g \equiv m_{g,el}/\sqrt{3}$ ersetzen.

Übungsaufgabe 5.8: Berechne $\Pi_t \equiv -\Pi_a(Q)$ und $\Pi_\ell(Q) = -q^2\Pi_b(Q)/Q^2$.

Wir erhalten durch Projektion von $\Pi^{\mu\nu}(Q)$ auf $A_{\mu\nu}$ mit Hilfe der Glgen. (5.346) und (5.355)

$$\begin{aligned} \Pi_t(Q) &= -\Pi_a(Q) \equiv -\frac{1}{2}\Pi^{\mu\nu}(Q)A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Pi^{ij}(Q)A_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j)\Pi^{ij}(Q) \\ &= m_{\gamma,el}^2 \frac{q_0}{2q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q} \\ &= m_{\gamma,el}^2 \frac{q_0}{4q} \int_{-1}^1 dx \frac{1 - x^2}{x + q_0/q} \\ &= m_{\gamma,el}^2 \frac{q_0}{4q} \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1 - (q_0/q)^2}{x + q_0/q} - \frac{x^2 - (q_0/q)^2}{x + q_0/q} \right] \\ &= m_{\gamma,el}^2 \frac{q_0}{4q} \left[\left(1 - \frac{q_0^2}{q^2}\right) \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} + 2\frac{q_0}{q} \right] \\ &= m_{\gamma,el}^2 \left[\frac{q_0^2}{2q^2} + \frac{q_0}{4q} \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2}\right) \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} \right]. \end{aligned} \quad (5.380)$$

Zur Berechnung von $\Pi_b(Q)$ betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \hat{K}^\mu \hat{K}^\nu B_{\mu\nu} &= \frac{(\hat{K} \cdot N)^2}{N^2} = \frac{(N^0 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N})^2}{N^2} = \frac{q_0^2 q^4}{(Q^2)^2 N^2} \left(1 + \frac{q_0}{q} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}\right)^2 \\ &= -\frac{q^2}{Q^2} \left(1 + \frac{q_0}{q} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}\right)^2, \end{aligned} \quad (5.381)$$

wobei wir $\hat{K}^\mu = (1, -\hat{\mathbf{k}})^T$ und die Glgen. (5.350) und (5.366) benutzt haben. Damit erhalten wir durch Projektion von $\Pi^{\mu\nu}(Q)$ auf $B_{\mu\nu}$ mit Hilfe der Glgen. (5.346) und

(5.352)

$$\begin{aligned}
 \Pi_b(Q) \equiv \Pi^{\mu\nu}(Q)B_{\mu\nu} &= m_{\gamma,el}^2 \left\{ -\frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{q^2}{Q^2} \frac{[1 + (q_0/q) \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}]^2}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q} - \frac{N_0^2}{N^2} \right\} \\
 &= \frac{q^2}{Q^2} m_{\gamma,el}^2 \left\{ 1 - \frac{q_0}{q} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{[1 + (q_0/q) \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}]^2}{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}} + q_0/q} \right\} \\
 &= \frac{q^2}{Q^2} m_{\gamma,el}^2 \left\{ 1 - \frac{q_0}{2q} \int_{-1}^1 dx \frac{[1 + (q_0/q)x]^2}{x + q_0/q} \right\} \\
 &= \frac{q^2}{Q^2} m_{\gamma,el}^2 \left[1 - \frac{q_0}{2q} \int_{-1+q_0/q}^{1+q_0/q} dy \frac{1}{y} \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2} + \frac{q_0}{q} y \right)^2 \right] \\
 &= \frac{q^2}{Q^2} m_{\gamma,el}^2 \left[1 - \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right)^2 \frac{q_0}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} - 2 \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right) \frac{q_0^2}{q^2} - \frac{q_0^4}{q^4} \right] \\
 &= \frac{q^2}{Q^2} m_{\gamma,el}^2 \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right)^2 \left(1 - \frac{q_0}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} \right) \\
 &= \frac{Q^2}{q^2} m_{\gamma,el}^2 \left(1 - \frac{q_0}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} \right), \tag{5.382}
 \end{aligned}$$

und damit

$$\Pi_\ell(Q) = -\frac{q^2}{Q^2} \Pi_b(Q) = -m_{\gamma,el}^2 \left(1 - \frac{q_0}{2q} \ln \frac{q_0 + q}{q_0 - q} \right). \tag{5.383}$$

5.9 Funktionale Renormierungsgruppe

Die Idee, die der **Funktionale Renormierungsgruppe (FRG)** zugrundeliegt, ist die Berechnung der 1PI-effektiven Wirkung mittels **sukzessiven Ausintegrierens** von Impulsskalen, beginnend im UV. Dies ist sehr ähnlich zum Konzept der **Wilsonschen Renormierungsgruppe** [20]. Man löst dabei eine Differentialgleichung, die sog. **FRG-Flussgleichung**, für $\Gamma[\varphi]$. Das Interessante dabei ist, dass diese Gleichung lediglich **Ein-Schleifen-Charakter** hat, aber durch den FRG-Fluss Diagramme von **beliebig hoher** Schleifen-Ordnung resummiert werden.

5.9.1 Herleitung der FRG-Flussgleichung

Wir definieren zunächst die sog. **effektive mittlere 1PI-Wirkung** $\Gamma_k[\varphi]$, die von einer **Impulsskala** k abhängt. Die FRG-Flussgleichung ist eine Differentialgleichung für $\Gamma_k[\varphi]$ in der Variable k und zwar dergestalt, dass ihre Lösung

- (i) für $k \rightarrow \Lambda$, wobei Λ ein willkürlich gewählter Impuls im UV ist, gegen die **klassische, mikroskopische Wirkung** der Theorie konvergiert,

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k[\varphi] \equiv \Gamma_\Lambda[\varphi] = S[\varphi], \tag{5.384}$$

- (ii) für $k \rightarrow 0$, also im IR, gegen die **volle 1PI-effektive Wirkung**, die **alle** thermischen und Quantenfluktuationen enthält, konvergiert,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\varphi] = \Gamma[\varphi] . \quad (5.385)$$

In der Regel ist Bedingung (i) automatisch erfüllt, da man die klassische Wirkung $S[\varphi]$ als **Anfangsbedingung** für den FRG-Fluss von $\Gamma_k[\varphi]$ bei $k = \Lambda$ wählt. Die effektive mittlere Wirkung $\Gamma_k[\varphi]$ bei der Impulsskala $k < \Lambda$ enthält als Resultat des FRG-Flusses alle thermischen und Quantenfluktuationen im Impulsintervall $[k, \Lambda]$.

Wir konstruieren nun die FRG-Flussgleichung. Dazu definieren wir die modifizierte großkanonische Zustandssumme

$$\mathcal{Z}_k[J] \equiv \Re \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ S[\phi] + \Delta S_k[\phi] + \int_X J(X)\phi(X) \right\} = \exp \left\{ \Delta S_k \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \mathcal{Z}[J] , \quad (5.386)$$

wobei $\mathcal{Z}[J]$ die gewöhnliche großkanonische Zustandssumme in Anwesenheit äußerer Quellen J ist, s. Gl. (5.24), und

$$\Delta S_k[\phi] \equiv -\frac{1}{2} \int_{X,Y} \phi(X) R_k(X,Y) \phi(Y) \quad (5.387)$$

einen zusätzlichen Term in der Wirkung darstellt, der quadratisch in den Feldern ist. Hierbei ist $R_k(X,Y)$ die sog. **Regulatorfunktion**. Die Fourier-Transformation dieser Funktion lautet

$$R_k(X,Y) = \frac{T}{V} \sum_Q \tilde{R}_k(Q) e^{-iQ \cdot (X-Y)} . \quad (5.388)$$

Der Vorfaktor ist so gewählt, dass $\tilde{R}_k(Q)$ die Bedeutung eines **impulsabhängigen Massenterms** (mit Dimension Energie²) hat. Mit den Gln. (3.56), (3.57) und (5.388) wird Gl. (5.387) im Impulsraum zu

$$\begin{aligned} \Delta S_k[\phi] &= -\frac{1}{2V^2} \sum_{K,Q,P} \tilde{\phi}_K \tilde{R}_k(Q) \tilde{\phi}_P \int_{X,Y} e^{-iK \cdot X - iQ \cdot (X-Y) - iP \cdot Y} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_Q \tilde{\phi}_{-Q} \frac{\tilde{R}_k(Q)}{T^2} \tilde{\phi}_Q . \end{aligned} \quad (5.389)$$

Wir haben also lediglich eine impulsabhängige Modifikation der ursprünglichen Theorie durchgeführt.

Die Fourier-Transformierte der Regulatorfunktion wird nun so gewählt, dass sie folgende Bedingungen erfüllt:

- (a) Für $q \gg k$: $\tilde{R}_k(Q) \rightarrow 0$.

Dies bedeutet, dass alle Impulsmoden, die bereits zum FRG-Fluss beigetragen haben, weil ihr 3-Impuls $q \gg k$ ist, voll berücksichtigt wurden. Insbesondere gilt dann für festes q , dass $\lim_{k \rightarrow 0} \tilde{R}_k(Q) = 0$. Dies wiederum bedeutet in Anbetracht von Gl. (5.386), dass das Funktionalintegral alle thermischen und Quantenfluktuationen der

ursprünglichen Theorie enthält, was konsistent mit Gl. (5.385) ist (nachdem wir die 1PI-effektive Wirkung $\Gamma[\varphi]$ wie in Abschnitt 5.2 besprochen aus $\mathcal{Z}[J]$ hergeleitet haben).

(b) Für $q \ll k$: $\tilde{R}_k(Q) \sim k^2$.

Dies bedeutet, dass alle Impulsmoden, die der FRG-Fluss noch nicht erreicht hat, weil ihr 3-Impuls $q \ll k$ ist, eine artifizielle Masse $\sim k^2$ bekommen (unabhängig von ihrer physikalischen Masse). Falls ihre physikalische Masse $m \gg k$, sind ihre Fluktuationen bereits auf der Skala m “eingefroren” und tragen sowieso nicht mehr zum FRG-Fluss bei der Skala k bei, andernfalls werden sie nun an dieser Skala “eingefroren”. Insbesondere gilt dann für festes q , dass $\lim_{k \rightarrow \Lambda} \tilde{R}_k(Q) \sim \Lambda^2 \rightarrow \infty$ für $\Lambda \rightarrow \infty$. Dies wiederum bedeutet in Anbetracht von Gl. (5.386), dass das Funktionalintegral durch die klassische Feldkonfiguration dominiert wird, was konsistent mit Gl. (5.384) ist (wenn wir den Zusammenhang zwischen der 1PI-effektiven Wirkung und der klassischen Wirkung wie in Abschnitt 5.2 besprochen ausnutzen).

Ein Beispiel für eine Regulatorfunktion, die die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, ist in Abb. 5.14 gezeigt.

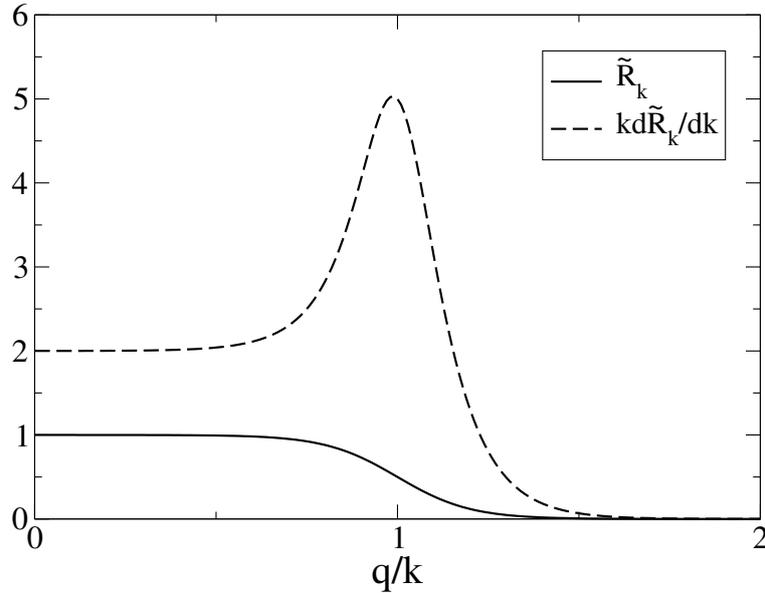


Abbildung 5.14: Abhängigkeit der Regulatorfunktion $\tilde{R}_k(Q)$ und ihrer logarithmischen Ableitung $k d\tilde{R}_k(Q)/dk$ vom 3-Impuls q .

Wir definieren nun wie gehabt, s. Gl. (5.26), das erzeugende Funktional für die verbundenen n -Punkt-Funktionen der modifizierten Theorie,

$$W_k[J] \equiv \ln \mathcal{Z}_k[J]. \quad (5.390)$$

Die Ein-Punkt-Funktion ist, s. Gl. (5.27),

$$\frac{\delta W_k[J]}{\delta J(X)} = \langle \phi \rangle_J^k \equiv \varphi(X). \quad (5.391)$$

Diese Gleichung definiert J als Funktional von φ , $J[\varphi]$. Die verbundene Zwei-Punkt-Funktion ist, s. Gl. (5.39),

$$\begin{aligned} G_k^{(2)}(X, Y) &= \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(X) \delta J(Y)} = \frac{\delta \varphi(X)}{\delta J(Y)} = \langle \phi(X) \phi(Y) \rangle_J^k - \langle \phi(X) \rangle_J^k \langle \phi(Y) \rangle_J^k \\ &= \langle \phi(X) \phi(Y) \rangle_J^k - \varphi(X) \varphi(Y). \end{aligned} \quad (5.392)$$

Mit der Definition $t \equiv \ln(k/\Lambda)$ und

$$k \frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial \ln(k/\Lambda)} = \frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t \quad (5.393)$$

betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \partial_t W_k[J] &= \frac{1}{\mathcal{Z}_k[J]} \Re \int \mathcal{D}\phi \partial_t \Delta S_k[\phi] e^{S[\phi] + \Delta S_k[\phi] + \int_X J\phi} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_k[J]} \Re \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{1}{2} \int_{X,Y} \phi(X) \partial_t R_k(X, Y) \phi(Y) \right] e^{S[\phi] + \Delta S_k[\phi] + \int_X J\phi} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{X,Y} \partial_t R_k(X, Y) \frac{1}{\mathcal{Z}_k[J]} \Re \int \mathcal{D}\phi \phi(X) \phi(Y) e^{S[\phi] + \Delta S_k[\phi] + \int_X J\phi} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{X,Y} \partial_t R_k(X, Y) \langle \phi(X) \phi(Y) \rangle_J^k \\ &= -\frac{1}{2} \int_{X,Y} \partial_t R_k(X, Y) \left[G_k^{(2)}(X, Y) + \varphi(X) \varphi(Y) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \left(\partial_t R_k G_k^{(2)} \right) + \partial_t \Delta S_k[\varphi], \end{aligned} \quad (5.394)$$

wobei wir die Glgen. (5.387) und (5.392) benutzt haben.

Nun definieren wir die **effektive mittlere 1PI-Wirkung**,

$$\Gamma_k[\varphi] \equiv W_k[J] - \Delta S_k[\varphi] - \int_X J(X) \varphi(X). \quad (5.395)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(X)} &= \int_Y \frac{\delta W_k[J]}{\delta J(Y)} \frac{\delta J(Y)}{\delta \varphi(X)} + \int_Y R_k(X, Y) \varphi(Y) - \int_Y \frac{\delta J(Y)}{\delta \varphi(X)} \varphi(Y) - J(X) \\ &= \int_Y R_k(X, Y) \varphi(Y) - J(X), \end{aligned} \quad (5.396)$$

wobei wir Gl. (5.391) benutzt haben. Differenzieren wir diese Gleichung nach $\varphi(Y)$, so erhalten wir

$$\frac{\delta J(X)}{\delta \varphi(Y)} = R_k(X, Y) - \Gamma_k^{(2)}(X, Y), \quad (5.397)$$

mit der Zwei-Punkt-Vertexfunktion

$$\Gamma_k^{(2)}(X, Y) \equiv \frac{\delta^2 \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(X) \delta \varphi(Y)}. \quad (5.398)$$

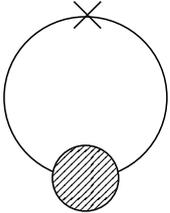
Damit gilt

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(X - Y) &\equiv \frac{\delta J(X)}{\delta J(Y)} = \int_Z \frac{\delta J(X)}{\delta \varphi(Z)} \frac{\delta \varphi(Z)}{\delta J(Y)} = \int_Z \left[R_k(X, Z) - \Gamma_k^{(2)}(X, Z) \right] G_k^{(2)}(Z, Y) \\ \iff \mathbb{1} &= \left(R_k - \Gamma_k^{(2)} \right) G_k^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.399)$$

was bedeutet, dass

$$G_k^{(2)} \equiv \left(R_k - \Gamma_k^{(2)} \right)^{-1}. \quad (5.400)$$

Bei festem φ und daher festem $J[\varphi]$ gilt für den Fluss der effektiven mittleren 1PI-Wirkung (5.395)

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\varphi] &= \partial_t W_k[J] - \partial_t \Delta S_k[\varphi] \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \left(\partial_t R_k G_k^{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}_X \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr}_X \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (5.401)$$


wobei wir die Glgen. (5.394) und (5.400) benutzt haben. Dies ist die gesuchte **FRG-Flussgleichung**, auch **Wetterich-Gleichung** genannt [21]. Wie angekündigt, handelt es sich um eine **Ein-Schleifen-Gleichung**. Das Kreuz notiert $\partial_t R_k$, während die Linie mit dem schraffierten Kreis wie in Abschnitt 5.2 die Zwei-Punkt-Funktion $G_k^{(2)} \equiv (R_k - \Gamma_k^{(2)})^{-1}$ darstellt.

11.2.2022

Wir machen uns nun durch die Betrachtung eines Grenzfalls klar, dass die Lösung der Wetterich-Gleichung, obwohl sie Ein-Schleifen-Charakter hat, weit über die Ein-Schleifen-Näherung für $\Gamma[\varphi]$, vgl. Abschnitt 5.2, hinausgeht. Wenn wir die Ergebnisse von Abschnitt 5.2 auf die effektive mittlere 1PI-Wirkung übertragen, dann erhalten wir in Analogie zu Gl. (5.60)

$$\Gamma_k[\varphi] = S[\varphi] + O(\hbar). \quad (5.402)$$

Man erwartet zwar gemäß den Glgen. (5.60) und (5.386), dass im Ausdruck für $\Gamma_k[\varphi]$ in führender Ordnung in \hbar die klassische Wirkung $S[\varphi]$ durch $S[\varphi] + \Delta S_k[\varphi]$ ersetzt wird. In der Definition (5.395) von $\Gamma_k[\varphi]$ wird der Term $\Delta S_k[\varphi]$ auf der rechten Seite aber wieder abgezogen, so dass sich Gl. (5.402) ergibt. Damit haben wir

$$\Gamma_k^{(2)}(X, Y) = \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta \varphi(X) \delta \varphi(Y)} + O(\hbar) = -\mathcal{D}^{-1}(X, Y; \varphi) + O(\hbar), \quad (5.403)$$

wobei wir Gl. (5.50) benutzt haben. Approximieren wir $\Gamma_k^{(2)}$ in Gl. (5.401) also in führender Ordnung in \hbar durch den inversen Baum-Graphen-Propagator, dann können wir die FRG-

Flussgleichung direkt durch Integration von $t = -\infty$ bis $t = 0$ lösen,

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma_k[\varphi] &\simeq -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \left\{ \partial_t R_k [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) + R_k]^{-1} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \partial_t \text{Tr}_X \ln [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) + R_k] \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 dt \partial_t \Gamma_k[\varphi] &= S[\varphi] - \Gamma[\varphi] \\
 &\simeq -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) + R_\Lambda] + \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln [\mathcal{D}^{-1}(\varphi) + R_0] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi) + \text{const} , \tag{5.404}
 \end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (5.384), (5.385) für die Grenzen des Integrals auf der linken Seite, sowie die Bedingungen (a), (b) für die Regulatorfunktion auf der rechten Seite benutzt haben. Die (für $\Lambda \rightarrow \infty$ unendliche) Konstante spielt keine Rolle, so dass wir

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \ln \mathcal{D}^{-1}(\varphi) \tag{5.405}$$

erhalten. In der Näherung $\Gamma_k^{(2)} \simeq -\mathcal{D}^{-1}(\varphi)$ liefert also die Wetterich-Gleichung die effektive 1PI-Wirkung in der Ein-Schleifen-Näherung, vgl. Abschnitt 5.2. Ohne diese Näherung werden höhere Schleifen-Ordnungen effektiv mitberücksichtigt.

5.9.2 Gradientenentwicklung und “local-potential approximation”

Die Lösung der FRG-Flussgleichung (5.401) für $\Gamma_k[\varphi]$ erfordert, dass $\Gamma_k^{(2)}$ bekannt ist. Differenzieren wir Gl. (5.401) nach dem Erwartungswert des Feldes $\varphi(X)$, so erhalten wir mit der Matrix-Identität

$$dA^{-1} = -A^{-1} dA A^{-1} \tag{5.406}$$

eine Flussgleichung für $\Gamma_k^{(1)}$,

$$\partial_t \Gamma_k^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr}_X \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \Gamma_k^{(3)} \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \right] , \tag{5.407}$$

und nach erneutem funktionalem Differenzieren nach dem Erwartungswert des Feldes eine Flussgleichung für $\Gamma_k^{(2)}$,

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma_k^{(2)} &= \text{Tr}_X \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \Gamma_k^{(3)} \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \Gamma_k^{(3)} \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr}_X \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \Gamma_k^{(4)} \left(\Gamma_k^{(2)} - R_k \right)^{-1} \right] . \tag{5.408}
 \end{aligned}$$

Die Bestimmung von $\Gamma_k^{(2)}$ erfordert also Kenntnis von $\Gamma_k^{(3)}$ und $\Gamma_k^{(4)}$. Durch weiteres Differenzieren von Gl. (5.408) kann man Flussgleichungen für diese Vertex-Funktionen ableiten,

deren Lösung aber von Vertex-Funktionen noch höherer Ordnung abhängt. Dieses unendliche System von gekoppelten funktionalen Integro-Differentialgleichungen läßt sich nur approximativ durch Wahl einer geeigneten Trunkierung lösen.

Eine mögliche Trunkierung läßt sich aus der Gradientenentwicklung (5.82) für die effektive 1PI-Wirkung herleiten. Wir machen also den folgenden Ansatz für die effektive mittlere 1PI-Wirkung,

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_X \left[-\mathcal{V}_k(\varphi) + \frac{1}{2} Z_k(\varphi) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \dots \right]. \quad (5.409)$$

Hierbei hängen das effektive Potential $\mathcal{V}_k(\varphi)$ und die Wellenfunktionsrenormierung $Z_k(\varphi)$ (sowie alle Koeffizientenfunktionen höherer Ableitungen von φ) vom Flussparameter k ab. Sie werden durch Flussgleichungen bestimmt, die man aus der FRG-Flussgleichung (5.401) ableitet. In niedrigster Ordnung in der Gradientenentwicklung wird lediglich $\mathcal{V}_k(\varphi)$ als k -abhängig betrachtet, $Z_k(\varphi) \equiv 1$ gesetzt und alle höheren Ableitungsterme werden vernachlässigt. Diese Näherung trägt den Namen **“local-potential approximation” (LPA)**. Wird auch der Fluss von $Z_k(\varphi)$ betrachtet, spricht man von der LPA'-Näherung.

Wir wollen im Folgenden die LPA-Näherung genauer untersuchen. Zweimaliges funktionales Differenzieren von Gl. (5.409) nach dem Erwartungswert $\varphi(X)$ ergibt

$$\Gamma_k^{(2)}(X, Y) = - \int_Z [\mathcal{V}_k''(\varphi) + \square_Z] \delta^{(4)}(X - Z) \delta^{(4)}(Y - Z) = - [\square_X + \mathcal{V}_k''(\varphi)] \delta^{(4)}(X - Y), \quad (5.410)$$

wobei wir $d^2\mathcal{V}_k(\varphi)/d\varphi^2 \equiv \mathcal{V}_k''(\varphi)$ abgekürzt sowie einmal partiell integriert haben. Für die nachfolgende Rechnung ist es zweckmäßig, im Fourier-Raum zu rechnen. Mit der Darstellung (3.61) der vier-dimensionalen Dirac-Delta-Funktion und Gl. (5.388) berechnen wir

$$\Gamma_k^{(2)}(X, Y) - R_k(X, Y) = -\frac{T}{V} \sum_Q \left[-Q^2 + \mathcal{V}_k''(\varphi) + \tilde{R}_k(Q) \right] e^{-iQ \cdot (X - Y)}, \quad (5.411)$$

woraus für die Fourier-Transformation der Inversen folgt

$$\left[\Gamma_k^{(2)} - R_k \right]^{-1}(X, Y) = -\frac{T}{V} \sum_Q \frac{1}{-Q^2 + \mathcal{V}_k''(\varphi) + \tilde{R}_k(Q)} e^{-iQ \cdot (X - Y)}. \quad (5.412)$$

Setzen wir diese Gleichung und Gl. (5.388) auf der rechten Seite von Gl. (5.401), sowie Gl. (5.409) auf der linken Seite ein (unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in LPA-Näherung lediglich das effektive Potential $\mathcal{V}_k(\varphi)$ vom Flussparameter k abhängt), so

erhalten wir mit Gl. (3.57)

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{T} \partial_t \mathcal{V}_k(\varphi) &= -\frac{1}{2} \int_{X,Y} \partial_t R_k(X, Y) \left[\Gamma_k^{(2)} - R_k \right]^{-1} (Y, X) \\
 &= \frac{T^2}{2V^2} \sum_{K,Q} \frac{\partial_t \tilde{R}_k(K)}{-Q^2 + \mathcal{V}_k''(\varphi) + \tilde{R}_k(Q)} \int_{X,Y} e^{-i(K-Q)\cdot(X-Y)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_Q \frac{\partial_t \tilde{R}_k(Q)}{-Q^2 + \mathcal{V}_k''(\varphi) + \tilde{R}_k(Q)} \\
 \iff \partial_t \mathcal{V}_k(\varphi) &= \frac{T}{2V} \sum_Q \frac{\partial_t \tilde{R}_k(Q)}{-Q^2 + \mathcal{V}_k''(\varphi) + \tilde{R}_k(Q)}. \tag{5.413}
 \end{aligned}$$

Dies ist nicht länger eine funktionale Integro-Differentialgleichung sondern lediglich eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung für die Funktion $\mathcal{V}_k(\varphi)$. Wir können sie noch weiter vereinfachen, wenn wir einen expliziten Ausdruck für die Regulatorfunktion wählen.

Für Anwendung bei nichtverschwindender Temperatur (und, für geladene Teilchen, nichtverschwindendem chemischem Potential) wählt man üblicherweise einen sog. **drei-dimensionalen Regulator**, d.h. eine Regulatorfunktion, die nicht von der Matsubara-Frequenz q_0 abhängt, $\tilde{R}_k(Q) \equiv \tilde{R}_k(\mathbf{q})$. Ferner bietet sich an, für diesen Regulator den sog. **optimierten** bzw. **Litim-Regulator** zu wählen [22],

$$\tilde{R}_k(\mathbf{q}) = (k^2 - q^2)\theta(k^2 - q^2). \tag{5.414}$$

Dann gilt

$$\partial_t \tilde{R}_k(\mathbf{q}) = k \partial_k \tilde{R}_k(\mathbf{q}) = 2k^2 \theta(k^2 - q^2) + \frac{k^2 - q^2}{2} \delta(k^2 - q^2) = 2k^2 \theta(k^2 - q^2), \tag{5.415}$$

wobei wir die Identität $x\delta(x) = 0$ benutzt haben. Damit wird Gl. (5.413) zu

$$\partial_t \mathcal{V}_k(\varphi) = \frac{T}{V} \sum_Q \frac{k^2 \theta(k^2 - q^2)}{-q_0^2 + k^2 + \mathcal{V}_k''(\varphi)}. \tag{5.416}$$

Dann kann man die Matsubara-Summe in Gl. (5.413) mit Hilfe von Gl. (3.82) sofort ausführen,

$$\partial_t \mathcal{V}_k(\varphi) = \frac{k^2}{E_k^*} \left[\frac{1}{2} + n_B(E_k^*) \right] \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \theta(k^2 - q^2), \tag{5.417}$$

wobei $E_k^* \equiv \sqrt{k^2 + \mathcal{V}_k''(\varphi)}$. Das verbleibende Integral über \mathbf{q} ist elementar lösbar und wir erhalten

$$\partial_t \mathcal{V}_k(\varphi) = \frac{k^5}{6\pi^2} \frac{1}{E_k^*} \left[\frac{1}{2} + n_B(E_k^*) \right]. \tag{5.418}$$

Der erste Term in eckigen Klammern stellt die Quantenfluktuationen (des Vakuums) dar, der zweite die thermischen Fluktuationen. Diese Gleichung muss i.a. numerisch mit einem geeigneten Verfahren für nichtlineare partielle Differentialgleichungen gelöst werden.

5.9.3 Das $O(N)$ -Modell

Wir betrachten eine Feldtheorie mit N skalaren Feldern, $\vec{\phi} \equiv (\phi_1, \dots, \phi_N)^T$, welches eine $O(N)$ -Symmetrie aufweisen soll, d.h. die klassische Wirkung hängt lediglich von $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}$ ab und ist durch das Raum-Zeit-Integral über die Lagrange-Dichte aus Gl. (5.195) gegeben,

$$S[\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}] = \int_X \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - U(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) \right], \quad (5.419)$$

mit der klassischen Potentialdichte

$$U(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) = \frac{m^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + \frac{\lambda}{N} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2. \quad (5.420)$$

Die klassische Wirkung (5.419) ist auch der Startwert für den FRG-Fluss im UV, vgl. Gl. (5.384). Wir erwarten, dass während des FRG-Flusses die effektive mittlere 1PI-Wirkung $O(N)$ -symmetrisch ist, d.h. dass sie nur von der skalaren Größe

$$\rho(X) \equiv \frac{1}{2} \vec{\varphi}(X) \cdot \vec{\varphi}(X) \quad (5.421)$$

abhängt, wobei der Faktor $1/2$ Konvention ist und $\vec{\varphi} \equiv (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$ der Erwartungswert des Quantenfeldes $\vec{\phi}$ ist,

$$\vec{\varphi}(X) \equiv \langle \vec{\phi} \rangle_J^k, \quad (5.422)$$

vgl. Gl. (5.391). Falls der Grundzustand der Theorie ebenfalls $O(N)$ -symmetrisch ist, so ist $\vec{\varphi}(X) \equiv 0$ und damit auch $\rho(X) \equiv 0$. Der Grundzustand kann die $O(N)$ -Symmetrie jedoch brechen. Üblicherweise geschieht dies, indem eine der Komponenten von $\vec{\varphi}(X)$ einen nicht-verschwindenden Erwartungswert annimmt,

$$\varphi_a(X) = \varphi \delta_{a1}, \quad a = 1, \dots, N, \quad (5.423)$$

vgl. die Diskussion in Abschnitt 5.5. Wir nehmen an, dass $\varphi = \text{const} \neq 0$, also nicht raum-zeitlich variiert. Dann ist auch $\rho(X) = \frac{1}{2} \varphi^2 = \text{const} \neq 0$.

Mit diesen Überlegungen machen wir folgenden Ansatz für die effektive mittlere 1PI-Wirkung in LPA-Näherung,

$$\Gamma_k[\vec{\varphi}] = \int_X \left[-\mathcal{V}_k(\rho) + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\varphi} \cdot \partial^\mu \vec{\varphi} \right]. \quad (5.424)$$

Daraus berechnen wir die Ein-Punkt-Vertex-Funktion wie folgt,

$$\Gamma_{k,a}^{(1)}[\vec{\varphi}] \equiv \frac{\delta \Gamma_k[\vec{\varphi}]}{\delta \varphi_a(X)} = - \int_Z [\mathcal{V}'_k(\rho) \varphi_a(Z) + \varphi_a(Z) \square_Z] \delta^{(4)}(Z - X), \quad (5.425)$$

wobei wir partiell integriert und Gl. (5.421) benutzt haben. Damit wird die Zwei-Punkt-Vertex-Funktion

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,ab}^{(2)}[\vec{\varphi}] &\equiv \frac{\delta^2 \Gamma_k[\vec{\varphi}]}{\delta \varphi_a(X) \delta \varphi_b(Y)} \\ &= - \int_Z [\mathcal{V}''_k(\rho) \varphi_a(Z) \varphi_b(Z) + \mathcal{V}'_k(\rho) \delta_{ab} + \delta_{ab} \square_Z] \delta^{(4)}(Z - Y) \delta^{(4)}(Z - X) \\ &= - [\delta_{ab} \square_X + \mathcal{V}''_k(\rho) \varphi_a(X) \varphi_b(Y) + \mathcal{V}'_k(\rho) \delta_{ab}] \delta^{(4)}(X - Y) \\ &= - [\delta_{ab} \square_X + 2\rho \mathcal{V}''_k(\rho) \delta_{a1} \delta_{b1} + \mathcal{V}'_k(\rho) \delta_{ab}] \delta^{(4)}(X - Y), \end{aligned} \quad (5.426)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (5.423) und $\rho \equiv \frac{1}{2}\varphi^2$ benutzt haben. Offensichtlich haben wir zwei unterschiedliche Moden: (i) für $a = b = 1$ eine Sigma-Mode mit der quadratischen Masse

$$M_\sigma^2(\rho) \equiv 2\rho\mathcal{V}_k''(\rho) + \mathcal{V}_k'(\rho) = \frac{d^2\mathcal{V}_k}{d\varphi^2}, \quad (5.427)$$

und (ii) für $a = b = 2, \dots, N$ Pion-Moden mit der quadratischen Masse

$$M_\pi^2(\rho) \equiv \mathcal{V}_k'(\rho) = \frac{1}{\varphi} \frac{d\mathcal{V}_k}{d\varphi}. \quad (5.428)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ergibt sich aus der Kettenregel $d\mathcal{V}_k/d\varphi = \mathcal{V}_k'(\rho) d\rho/d\varphi = \mathcal{V}_k'(\rho)\varphi$. Diese Regel haben wir bei der Sigma-Masse zweimal angewendet,

$$2\rho\mathcal{V}_k'' = \varphi^2 \frac{d\varphi}{d\rho} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\mathcal{V}_k}{d\varphi} \right) = \varphi \left(-\frac{1}{\varphi^2} \frac{d\mathcal{V}_k}{d\varphi} + \frac{1}{\varphi} \frac{d^2\mathcal{V}_k}{d\varphi^2} \right) = \frac{d^2\mathcal{V}_k}{d\varphi^2} - \mathcal{V}_k'. \quad (5.429)$$

Die FRG-Flussgleichung (5.401) verallgemeinert sich dahingehend, dass zusätzlich zur Spur über die Raum-Zeit-Indizes auch noch eine Summe über die internen Indizes zu nehmen ist,

$$\partial_t \Gamma_k[\vec{\varphi}] = \frac{1}{2} \text{Tr}_X \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_{k,\sigma}^{(2)} - R_k \right)^{-1} \right] + \frac{N-1}{2} \text{Tr}_X \left[\partial_t R_k \left(\Gamma_{k,\pi}^{(2)} - R_k \right)^{-1} \right], \quad (5.430)$$

wobei

$$\Gamma_{k,\sigma}^{(2)} \equiv -[\square_X + M_\sigma^2(\rho)] \delta^{(4)}(X - Y), \quad \Gamma_{k,\pi}^{(2)} \equiv -[\square_X + M_\pi^2(\rho)] \delta^{(4)}(X - Y). \quad (5.431)$$

Im Impulsraum ergeben dann analoge Schritte wie im vorangegangenen Abschnitt das Resultat

$$\partial_t \mathcal{V}_k(\rho) = \frac{k^5}{6\pi^2} \left\{ \frac{1}{E_{k,\sigma}} \left[\frac{1}{2} + n_B(E_{k,\sigma}) \right] + \frac{N-1}{E_{k,\pi}} \left[\frac{1}{2} + n_B(E_{k,\pi}) \right] \right\}, \quad (5.432)$$

wobei $E_{k,\sigma,\pi} = \sqrt{k^2 + M_{\sigma,\pi}^2(\rho)}$.

16.2.2022

5.9.4 Die FRG-Flussgleichung als Advektions-Diffusions-Gleichung

Für die folgende Diskussion ist es zweckmäßig, das effektive mittlere Potential $\mathcal{V}_k(\rho)$ als Funktion von den beiden Variablen $t = \ln(k/\Lambda)$ und ρ zu betrachten, $\mathcal{V}_k(\rho) \equiv \mathcal{V}(t, \rho)$. Die FRG-Flussgleichung (5.432) ist dann eine **nichtlineare partielle Differentialgleichung** in den Variablen t und ρ . Die linke Seite enthält die partielle Ableitung nach der ‘‘FRG-Zeit’’ t , die rechte die ersten und zweiten partiellen Ableitungen nach ρ . Außerdem ist es zweckmäßig, das Vorzeichen von t umzudrehen, $t \rightarrow -t$, d.h. $t = \ln(\Lambda/k)$. Dann ‘‘fließt’’ die FRG-Zeit vom UV ins IR von 0 bis ∞ (anstatt von 0 bis $-\infty$). Wir definieren

$$U(t, \rho) \equiv \frac{\partial \mathcal{V}(t, \rho)}{\partial \rho} \equiv \mathcal{V}_k'(\rho), \quad (5.433)$$

$$F(U; t) \equiv \frac{k^5}{6\pi^2} \frac{N-1}{E_{k,\pi}} \left[\frac{1}{2} + n_B(E_{k,\pi}) \right], \quad (5.434)$$

$$G(U, U'; t, \rho) \equiv \frac{k^5}{6\pi^2} \frac{1}{E_{k,\sigma}} \left[\frac{1}{2} + n_B(E_{k,\sigma}) \right], \quad (5.435)$$

und differenzieren Gl. (5.432) nach ρ ,

$$\partial_t U(t, \rho) + \partial_\rho F(U; t) = -\partial_\rho G(U, U'; t, \rho) . \quad (5.436)$$

Hier haben wir den Beitrag der Pion-Moden mit $F(U; t)$ und den der Sigma-Mode mit $G(U, U'; t, \rho)$ abgekürzt. Die Masse der Pionen hängt lediglich von $U = \mathcal{V}'_k$ ab, während die Masse der Sigma-Mode auch von $U' = \mathcal{V}''_k$ und explizit von ρ abhängt, vgl. Glgen. (5.427) und (5.428). Dies drückt sich in den Abhängigkeiten der Funktionen F und G von den Variablen U, U', t und ρ aus.

Gleichung (5.436) ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung vom **Advektions-Diffusions-Typ**, wie sie aus der Hydrodynamik bekannt ist. Die FRG-Zeitvariable t entspricht dabei der gewöhnlichen Zeit und die Variable ρ einer Raumkoordinate. Der Beitrag der Pion-Moden stellt den **Advektionsterm** dar. Er hängt lediglich von der Funktion $U(t, \rho)$ ab. Der Beitrag der Sigma-Mode ist ein **Diffusionsterm**, da er außerdem noch von $U'(t, \rho)$ abhängt. Für das Folgende ist es zweckmäßig, zu dimensionslosen Variablen überzugehen. Wir definieren

$$r \equiv \frac{\rho}{(N-1)\Lambda^2} , \quad (5.437)$$

$$u(t, r) \equiv \frac{U(t, \rho)}{\Lambda^2} , \quad (5.438)$$

$$u'(t, r) \equiv \frac{\partial u(t, r)}{\partial r} = \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial U(t, \rho)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} = (N-1)U'(t, \rho) , \quad (5.439)$$

woraus für die Massen von Pionen und Sigma folgt, dass

$$M_\pi^2(\rho) = U(t, \rho) = \Lambda^2 u(t, r) , \quad (5.440)$$

$$M_\sigma^2(\rho) = U(t, \rho) + 2\rho U'(t, \rho) = \Lambda^2 [u(t, r) + 2ru'(t, r)] . \quad (5.441)$$

Mit den dimensionslosen Energien

$$\epsilon_\pi(u; t) \equiv \frac{E_{k,\pi}}{\Lambda} = \sqrt{e^{-2t} + u(t, r)} , \quad (5.442)$$

$$\epsilon_\sigma(u; t, r) \equiv \frac{E_{k,\sigma}}{\Lambda} = \sqrt{e^{-2t} + u(t, r) + 2ru'(t, r)} \quad (5.443)$$

und den dimensionslosen Funktionen

$$f(u; t) \equiv \frac{F(U; t)}{(N-1)\Lambda^4} = \frac{e^{-5t}}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon_\pi(u; t)} \coth \left[\frac{\epsilon_\pi(u; t)}{2\theta} \right] , \quad (5.444)$$

$$g(u, u'; t, r) \equiv \frac{G(U, U'; t, \rho)}{(N-1)\Lambda^4} = \frac{1}{N-1} \frac{e^{-5t}}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon_\sigma(u, u'; t, r)} \coth \left[\frac{\epsilon_\sigma(u, u'; t, r)}{2\theta} \right] , \quad (5.445)$$

wobei $\theta \equiv T/\Lambda$, erhalten wir aus Gl. (5.436)

$$\partial_t u(t, r) + \partial_r f(u; t) = -\partial_r g(u, u'; t, r) . \quad (5.446)$$

Anhand von Gl. (5.445) erkennt man, dass der Diffusionsbeitrag im Limes $N \rightarrow \infty$ gegen null geht. Umgekehrt dominiert er die Dynamik im Limes $N \rightarrow 1$.

Die Differentialgleichung (5.446) kann noch weiter analysiert werden. Mit der sog. **charakteristischen Geschwindigkeit**

$$v(u; t) \equiv \frac{\partial f(u; t)}{\partial u} = -\frac{e^{-5t}}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon_\pi^3} \left[\coth\left(\frac{\epsilon_\pi}{2\theta}\right) + \frac{\epsilon_\pi}{2\theta} \sinh^{-2}\left(\frac{\epsilon_\pi}{2\theta}\right) \right]$$

schreibt sich Gl. (5.446)

$$\partial_t u(t, r) + v(u; t) \partial_r u(t, r) = -\partial_r g(u, u'; t, r). \quad (5.447)$$

Betrachten wir den Limes $N \rightarrow \infty$, d.h. vernachlässigen wir den Term auf der rechten Seite dieser Gleichung, so können wir sie als System gekoppelter **gewöhnlicher Differentialgleichungen** schreiben,

$$\frac{dt(s)}{ds} = 1, \quad \frac{dr(s)}{ds} = v(u; t), \quad \frac{du(s)}{ds} = 0. \quad (5.448)$$

Hierbei ist s der Parameter der sog. **charakteristischen Kurve** oder **Charakteristik**, $\mathcal{C}_{u_0} = \{t(s), r(s) | u(0) = u_0, s \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}\}$, in der Raum-Zeit. Die Größe $u_0 = u(0)$ der vorgegebene Anfangswert von $u(s)$ für die Integration der dritten Gleichung. Aus einer Anfangsbedingung $u(t = 0, r)$ für die partielle Differentialgleichung (5.446) läßt sich aus der Bedingung $u(t = 0, r = r_0) = u_0$ der Wert von r_0 bestimmen, bei dem die charakteristische Kurve \mathcal{C}_{u_0} die $t = 0$ -Achse schneidet. Variiert man u_0 , so erhält man eine **Schar** von charakteristischen Kurven.

Die erste Gleichung (5.448) bedeutet nichts anderes, als dass man anstelle des Kurvenparameters s auch die FRG-Zeit t nehmen kann, um die Kurve zu parametrisieren. Die zweite Gleichung (5.448) beschreibt die Form der charakteristischen Kurve in der Raum-Zeit. Die Steigung dt/dr der Kurve im Raum-Zeit-Diagramm (r, t) ist durch das Inverse der charakteristischen Geschwindigkeit $v(u; t)$ gegeben. Die dritte Gleichung (5.448) schließlich besagt, dass die Größe $u(s) = u(t, r)$ entlang der Charakteristik \mathcal{C}_{u_0} konstant bleibt. Die charakteristische Geschwindigkeit (5.447) ist manifest **negativ** definit. Dies bedeutet, dass sich die Charakteristiken im Raum-Zeit-Diagramm nach links, zu kleineren Werten von r biegen. In der Sprache der Hydrodynamik bedeutet dies, dass die Größe $u(t, r)$ im Laufe der Zeit t immer von großen r zu kleinen "fließt".

In Abb. 5.15 ist $u(t, r)$ als Funktion von r für verschiedene FRG-Zeiten t für die Temperatur $T = 0$ dargestellt. Anfangsbedingung für den Fluss ist das UV-Potential (5.420), woraus nach Ableiten nach ρ und Skalieren gemäß Gl. (5.438) die Anfangsbedingung

$$u(0, r) = \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{8\lambda(N-1)}{N} r \quad (5.449)$$

folgt. Für die in Abb. 5.15 gezeigten Resultate wurde exemplarisch $m^2/\Lambda^2 = -0.2$ und $8\lambda(N-1)/N = 36.0$ gewählt, also eine Anfangsbedingung in der symmetriebrochenen Phase. Außerdem wurde der Limes $N \rightarrow \infty$ angenommen, d.h. der diffusive Beitrag der Sigma-Mode zum Fluss wurde vernachlässigt.

Man erkennt, dass, wie erwartet, die Größe $u(t, r)$ im Laufe der FRG-Zeit nach links "fließt" und den Bereich negativer $u(t, r)$ bei kleinen r "auffüllt". Nach $t = 5.9400$ (entsprechend $k \simeq 2.632 \cdot 10^{-3} \Lambda$) ist $u(t, r)$ im Bereich kleiner r nahezu null, d.h. das zugehörige effektive mittlere Potential ist flach. Letzteres gewinnt man aus $u(t, r)$ durch

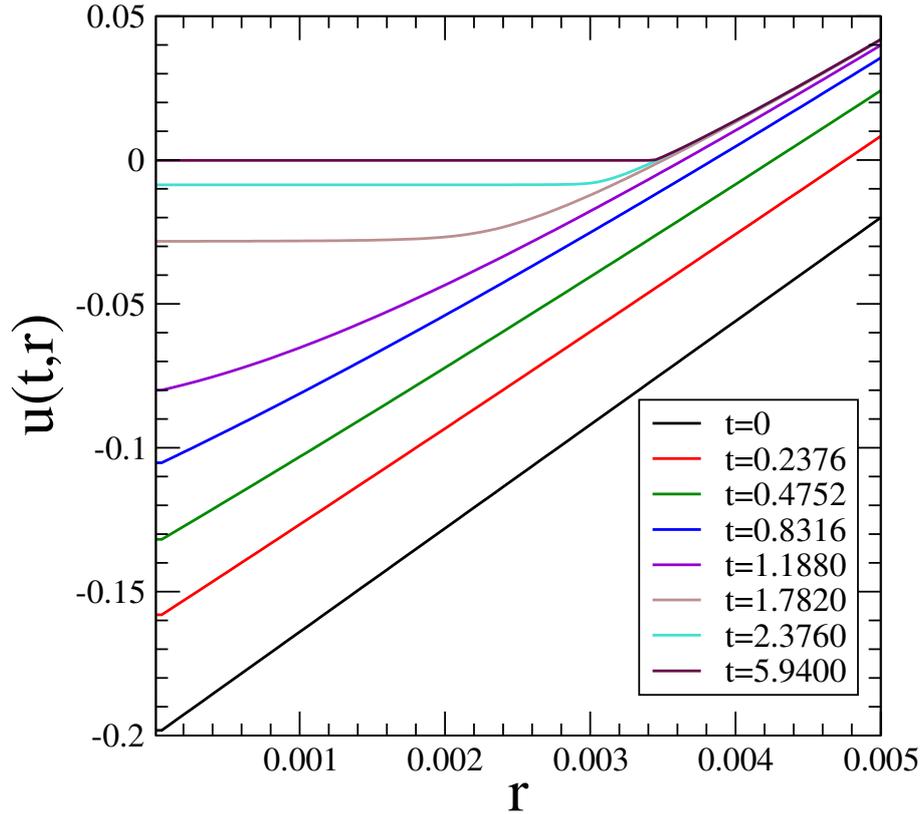


Abbildung 5.15: $u(t, r)$ als Funktion von r für verschiedene FRG-Zeiten t . Die Temperatur ist $T = 0$, die Parameter für das UV-Potential (5.420) sind $m^2/\Lambda^2 = -0.2$ und $8\lambda(N-1)/N = 36.0$.

numerische Integration gemäß

$$\mathcal{V}_k(\varphi) = (N-1)\Lambda^4 \int_0^{r(\varphi)} dr' u(t, r'). \quad (5.450)$$

Dieses ist in Abb. 5.16 dargestellt. Man erkennt, dass das UV-Potential bei $t = 0$ in der Phase startet, in der die $O(N)$ -Symmetrie gebrochen ist. Im IR muss das effektive Potential konvex sein, daher kann es keinen Bereich negativer Krümmung (wie beispielsweise beim UV-Potential) geben. Notwendigerweise muss es daher im Bereich kleiner φ flach sein. Das Minimum $\bar{\varphi}(T = 0) \equiv \varphi_0$ des effektiven Potentials entspricht dem Wert am rechten Ende des flachen Bereichs. Dies entspricht dem Schnittpunkt r_0 von $u(t, r)$ mit der r -Achse. Wir lesen aus der Abbildung ab, dass $r_0 \simeq 3.4386 \cdot 10^{-3}$, was für $N = 4$ einem Wert $\varphi_0 \simeq 0.14364 \Lambda$ entspricht.

In Abb. 5.17 ist der Verlauf des Erwartungswertes $\bar{\varphi}(T)$ (in Einheiten von Λ) als Funktion der Temperatur T (in Einheiten von Λ) dargestellt. Wie man sieht, wird die Symmetrie bei einer Temperatur von $T \simeq 0.324 \Lambda$ restauriert.

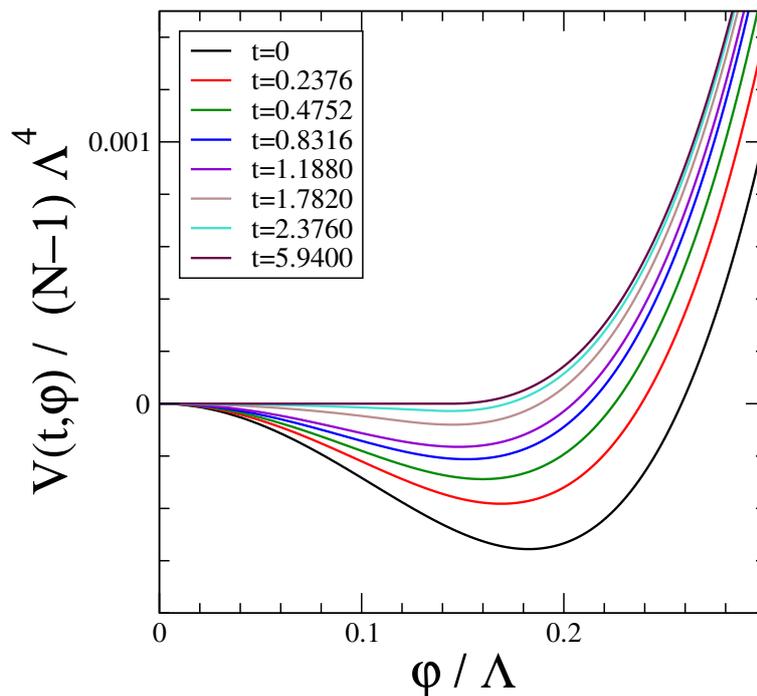


Abbildung 5.16: Das gemäß Gl. (5.450) aus $u(t, r)$ berechnete effektive mittlere Potential $\mathcal{V}(t, \varphi)$ als Funktion von φ für dieselben FRG-Zeiten und Parameter wie in Abb. 5.15.

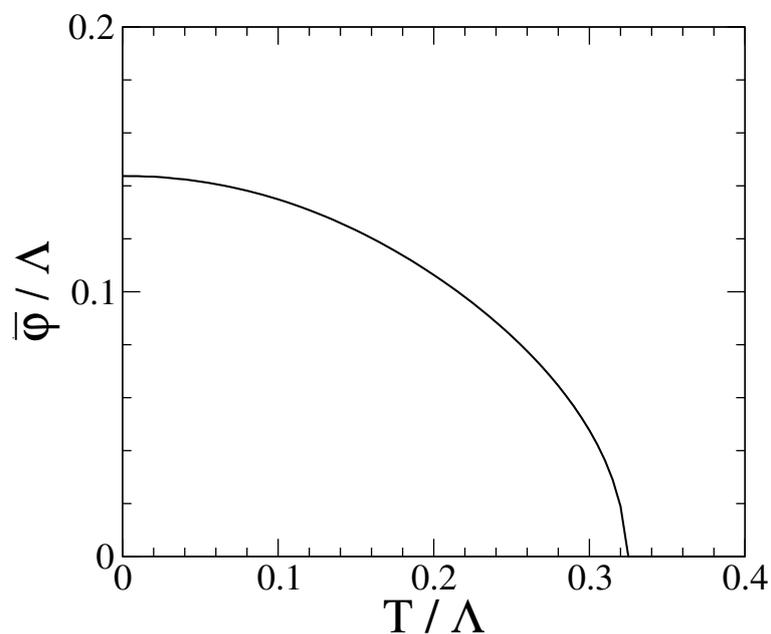


Abbildung 5.17: Der Erwartungswert $\bar{\varphi}(T)$ (in Einheiten von Λ) als Funktion der Temperatur T (ebenfalls in Einheiten von Λ) für dieselben Parameter wie in Abb. 5.15.

Literaturverzeichnis

- [1] J.I. Kapusta, C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 2nd edition)
- [2] M. Laine, A. Vuorinen, *Basics of Thermal Field Theory* (Springer Lecture Notes in Physics 925, Switzerland, 2016)
- [3] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996)
- [4] A.L. Fetter, J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971)
- [5] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, 1963)
- [6] L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York)
- [7] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego, 1979)
- [8] D.-H. Rischke, W. Greiner, *A functional integral approach to the thermodynamics of the $\sigma - \omega$ model*, Int. J. Mod. Phys. E3 (1994) 1157.
- [9] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential*, Phys. Rev. D 9 (1974) 1686.
- [10] J.M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, *Effective action for composite operators*, Phys. Rev. D 10 (1974) 2428.
- [11] R.E. Norton, J.M. Cornwall, *On the formalism of relativistic many body theory*, Ann. Phys. 91 (1975) 106.
- [12] L. Dolan, R. Jackiw, *Symmetry behavior at finite temperature*, Phys. Rev. D 9 (1974) 3320.
- [13] S. Coleman, E. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, Phys. Rev. D 7 (1973) 1888.
- [14] J.T. Lenaghan, D.H. Rischke, *The $O(N)$ model at finite temperature: renormalization of the gap equations in Hartree and large- N approximation*, J. Phys. G 26 (2000) 431.
- [15] M. Buballa, *NJL model analysis of quark matter at large density*, Phys. Rept. 407 (2005) 205.

- [16] R.D. Pisarski, D.H. Rischke, *Superfluidity in a model of massless fermions coupled to scalar bosons*, Phys. Rev. D 60 (1999) 094013 .
- [17] D.D. Dietrich, D.H. Rischke, *Gluons, tadpoles, and color neutrality in a two-flavor color superconductor*, Prog. Part. Nucl. Phys. 53 (2004) 305.
- [18] E. Braaten, R.D. Pisarski, *Calculation of the gluon damping rate in hot QCD*, Phys. Rev. D 42 (1990) 2156.
- [19] H.A. Weldon, *Dynamical holes in the quark-gluon plasma*, Phys. Rev. D 40 (1989) 2410.
- [20] K. Wilson, *Problems in physics with many scales of length*, Scientific American, August 1979, <https://web.archive.org/web/20120710073400/http://physics.ohio-state.edu/~jay/846/Wilson.pdf>.
- [21] C. Wetterich, *Exact evolution equation for the effective potential*, Phys. Lett. B 301 (1993) 90.
- [22] D.F. Litim, *Optimized renormalization group flows*, Phys. Rev. D 64 (2001) 105007.