Theoretische Physik I: Mathematische Grundlagen der Theoretischen Physik

Dirk H. Rischke

Sommersemester 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Vorbereitungen **1**

1.1 Vektoren . . . 1
1.1.1 Einführung . . . 1
1.1.2 Definition eines Vektors . . . 2
1.1.3 Definition des kartesischen Koordinatensystems . . . 3
1.1.4 Rechenregeln für Vektoren . . . 4
1.1.5 Skalarprodukt . . . 9
1.1.6 Vektorprodukt . . . 12
1.1.7 "Höhere" Vektorprodukte . . . 19
1.1.8 Basisvektoren und Komponentendarstellung . . . 20
1.1.9 Rechenregeln in Komponentendarstellung . . . 23
1.2 Vektorwertige Funktionen . . . 25
1.2.1 Parametrisierung von Raumkurven . . . 25
1.2.2 Differentiation vektorwertiger Funktionen . . . 28
1.2.3 Bogenlänge . . . 30
1.2.4 Das begleitende Dreibein . . . 31
1.3 Felder . . . 36
1.3.1 Klassifikation von Feldern . . . 36
1.3.2 Partielle Ableitungen . . . 37
1.3.3 Totale Ableitung und totales Differential . . . 40
1.3.4 Gradient, Divergenz, Rotation . . . 41
1.4 Matrizen und Determinanten . . . 47
1.4.1 Matrizen . . . 47
1.4.2 Rechenregeln für Matrizen . . . 48
1.4.3 Drehmatrizen . . . 49
1.4.4 Determinanten . . . 53
1.4.5 Rechenregeln für Determinanten . . . 55
1.4.6 Anwendungen . . . 58
1.5 Koordinatensysteme . . . 61
1.5.1 Transformation der Variablen . . . 61
1.5.2 Krummlinige Koordinaten . . . 65
1.5.3 Zylinderkoordinaten . . . 74
1.5.4 Kugelkoordinaten . . . 79

2 Mechanik des freien Massenpunktes **85**

2.1 Kinematik . . . 85
2.1.1 Das Grundproblem der Kinematik . . . 85

2.1.2 Einfache Bewegungsformen . . . 86
2.2 Grundgesetze der Dynamik . . . 89
2.2.1 Die Newtonschen Axiome . . . 90
2.2.2 Kräfte . . . 93
2.2.3 Inertialsysteme, Galilei-Transformation . . . 96
2.2.4 Rotierende Bezugssysteme, Scheinkräfte . . . 97
2.2.5 Beliebig beschleunigte Bezugssysteme . . . 99
2.3 Einfache Probleme der Dynamik . . . 101
2.3.1 Das Grundproblem der Dynamik . . . 101
2.3.2 Lineare Differentialgleichungen . . . 102
2.3.3 Bewegung im homogenen Schwerefeld mit Reibung . . . 103
2.3.4 Das Fadenpendel . . . 107
2.3.5 Komplexe Zahlen . . . 110
2.3.6 Der lineare harmonische Ozillator . . . 115
2.3.7 Linearer harmonischer Oszillator mit Dämpfung . . . 118
2.3.8 Der gedämpfte lineare Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren Kraft . . . 124
2.4 Fundamentale Begriffe und Erhaltungssätze . . . 129
2.4.1 Arbeit . . . 129
2.4.2 Leistung . . . 132
2.4.3 Kinetische Energie . . . 133
2.4.4 Potentielle Energie und konservative Kräfte . . . 133
2.4.5 Energieerhaltungssatz . . . 138
2.4.6 Drehimpuls, Drehmoment . . . 139
2.4.7 Zentralkraftfelder . . . 142
2.5 Das Keplerproblem . . . 143
2.5.1 Bewegung in konservativen Zentralkraftfeldern . . . 143
2.5.2 Planetenbewegung . . . 146
2.5.3 Die kosmischen Geschwindigkeiten . . . 156
2.5.4 Die Keplerschen Gesetze . . . 158
2.6 Zwei-Teilchen-Systeme . . . 159
2.6.1 Relativbewegung . . . 159
2.6.2 Zweikörperstoß . . . 163

3 Spezielle Relativitätstheorie 166
3.1 Die Einsteinschen Postulate . . . 166
3.1.1 Ätherhypothese . . . 166
3.1.2 Das Michelson-Morley-Experiment . . . 167
3.1.3 Die Einsteinschen Postulate . . . 170
3.2 Lorentz-Transformationen . . . 171
3.2.1 Der Minkowski-Raum . . . 171
3.2.2 Die Lorentz-Transformation . . . 175
3.2.3 Zeitdilatation . . . 181
3.2.4 Längenkontraktion . . . 182
3.2.5 Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten . . . 182

3.2.6 Das Raum-Zeit–Diagramm (Minkowski–Diagramm) 184
3.3 Kovariante Formulierung der klassischen Mechanik 192
3.3.1 Lorentz-Tensoren 192
3.3.2 Kovariante Formulierung von Naturgesetzen 194
3.3.3 Rechenregeln 194
3.3.4 Differentialoperatoren: 195
3.3.5 Kinematische Grundgrößen 195
3.3.6 Die Newtonsche Grundgleichung in kovarianter Formulierung 197
3.3.7 Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung 198
3.3.8 Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie 200

1 Mathematische Vorbereitungen

1.1 Vektoren

1.1.1 Einführung

16.4.2013

Wir haben ein intuitives Verständnis von Naturvorgängen:

- **Beispiel 1:** Morgens geht die Sonne auf, abends geht sie unter.
  Frage: Warum geht sie auf und unter?
- **Beispiel 2:** Wenn die Sonne aufgeht, wird es hell.
  Frage: Was läßt die Sonne scheinen?
- **Beispiel 3:** Ein Ball, der losgelassen wird, fällt zu Boden (das berühmte Apfel-Experiment von Sir Isaac Newton!).
  Frage: Was läßt den Ball fallen?

Die **Physik** befaßt sich mit der Erklärung intuitiv akzeptierter, aber auch neuer, bislang unverstandener Erfahrungstatsachen mit Hilfe **wissenschaftlicher Methoden**.

Die **experimentelle Physik** befaßt sich mit der **Beobachtung** von erfahrbaren Tatsachen durch reproduzierbare **Experimente**.

Die **Theoretische Physik** befaßt sich mit der Erklärung der Beobachtung mit Hilfe **mathematisch-analytischer Methoden**. Manche meiner Kollegen fassen das so zusammen: "Der Experimentator blättert die Seiten im Buch der Natur um, der Theoretiker liest in ihm".

Um die Gesetzmäßigkeit zu verstehen, warum der Ball zu Boden fällt, müssen wir zunächst seine Bewegung beobachten und **quantitativ** (nicht nur qualitativ) erfassen. Mit anderen Worten, wir müssen festlegen, zu welchem **Zeitpunkt** er sich an welchem **Ort** befindet. Bei geradliniger Bewegung ist dies besonders einfach, s. Abb. 1.1.

Dieses einfache Beispiel macht deutlich, dass physikalische Größen durch die Angabe von **drei** Größen bestimmt sind: **Dimension**, **Maßeinheit** und **Maßzahl**. Beispiele sind in Tabelle 1.1 aufgeführt. Physikalische Größen, die durch diese drei Größen bestimmt sind, nennt man in der Physik **skalare** Größen, oder kurz **Skalare**.

Es gibt aber auch Größen, die zusätzlich die Angabe einer **Richtung** benötigen. Ein Beispiel ist die **Geschwindigkeit**. Im oben genannten Beispiel des fallenden Balls zeigt die Geschwindigkeit nach unten. Solche Größen nennt man **vektorielle** Größen, oder kurz **Vektoren**.

Dies ist verallgemeinerbar: es gibt Größen, die durch die Angabe von zwei, drei, vier *etc.* Richtungen definiert sind. Diese Größen nennt man **Tensoren zweiter, dritter, vierter *etc.* Stufe**. Ein Vektor ist ein Tensor erster Stufe, ein Skalar ein Tensor nullter Stufe.

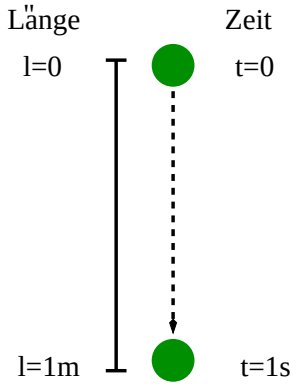


Abbildung 1.1: Ein nach unten fallender Ball.

Dimension	Maßeinheit	Maßzahl
Länge	Meter (m)	(z.B.) 1
Zeit	Sekunde (s)	(z.B.) 1
Masse	Kilogramm (kg)	(z.B.) 82
Temperatur	Grad Celsius (°C)	(z.B.) 36.5

Tabelle 1.1: Beispiele für physikalische Größen mit Dimension, Maßeinheit und Maßzahl.

1.1.2 Definition eines Vektors

Der einfachste Vektor in der Mechanik ist der **Ortsvektor**. Er mißt den Abstand eines Raumpunktes von einer vorher festgelegten Ausgangsposition, dem **Ursprung** eines vorher festgelegten **Koordinatensystems**, s. Abb. 1.2. Im oben genannten Beispiel des fallenden Balles sei der Koordinatenursprung die Position des Balles zum Zeitpunkt $t = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 1$s ist die Position des Balles 1m nach unten vom Koordinatenursprung entfernt. Der Ortsvektor des Balles zeigt deshalb nach unten und hat die Länge 1m.

Bei einer **eindimensionalen** Bewegung (wie im Beispiel des fallenden Balles) ist die

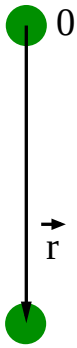


Abbildung 1.2: Der Ortsvektor $\vec{r}$ des nach unten fallenden Balls aus Abb. 1.1.

Richtung klar und man benötigt nicht unbedingt einen Vektor, um diese festzulegen. Die Sache verkompliziert sich, wenn die Bewegung des Balles **zwei-** oder **dreidimensional** wird.

Im allgemeinen beschreiben Ortsvektoren $\vec{r}$ Punkte im dreidimensionalen **Euklidschen Raum E_3**. Bevor man einen Ortsvektor definieren kann, benötigt man den **Koordinatenursprung** O. Der Ortsvektor eines Punktes A ergibt sich dann dadurch, dass man den Ursprung O mit A verbindet. Die Richtung des Ortsvektors ergibt sich aus der Festlegung, die Strecke OA von O nach A zu durchlaufen, s. Abb. 1.3.

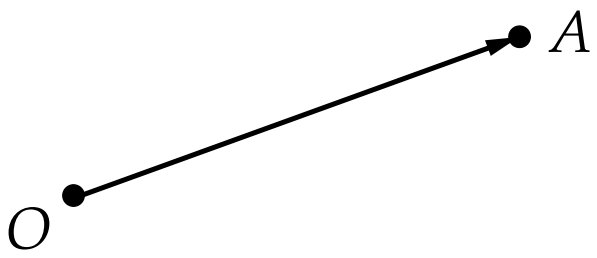


Abbildung 1.3: Der Ortsvektor des Punktes A.

Jeder Vektor $\vec{a}$ hat eine **Länge** (einen **Betrag**),

$$a = |\vec{a}| \ , \tag{1.1}$$

und eine **Richtung**, die durch einen Vektor vom Betrag eins, einen sog. **Einheitsvektor**, festgelegt wird:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} \ , \quad |\hat{a}| = 1 \ . \tag{1.2}$$

Der Betrag eines Vektors ist vom **Bezugs-** oder **Koordinatensystem** unabhängig. Die Richtung eines Vektors kann sich aber bei einem Wechsel des Bezugs- bzw. Koordinatensystems **scheinbar** ändern, wenn sie durch ihre Koordinaten im **neuen** Bezugssystems ausgedrückt wird. Hierzu später mehr.

1.1.3 Definition des kartesischen Koordinatensystems

Das einfachste Bezugs- bzw. Koordinatensystem sind drei senkrecht, d.h. **rechtwinklig** aufeinanderstehende Geraden, die sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Koordinatenursprung O, schneiden, s. Abb. 1.4.

Diese Geraden nennt man **Achsen** des Koordinatensystems. Man gibt ihnen Richtungen, und zwar so, dass sie in der Reihenfolge (1,2,3) bzw. (x, y, z) ein **rechtshändiges** System bilden. Woran sieht man, dass es sich um ein rechtshändiges System handelt? Die folgenden Finger der rechten Hand bilden ein solches System: Daumen = x, Zeigefinger = y, Mittelfinger = z. Eine weitere Möglichkeit ist, die Gerade 1 auf kürzestem Weg in die Gerade 2 zu drehen. Dann zeigt die Gerade 3 in die Richtung der Bewegung einer **Rechtsschraube**. Ein solches rechtshändiges Koordinatensystem nennt man **kartesisches Koordinatensystem**.

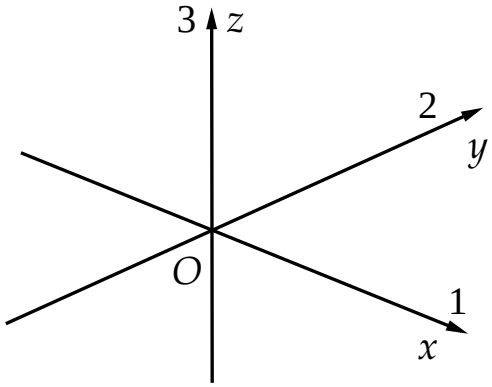


Abbildung 1.4: Rechtshändiges Koordinatensystem.

Es gibt auch **linkshändige** Koordinatensysteme. Sie lassen sich nicht durch stetige **Drehungen** (welche eine sog. **kontinuierliche Symmetrieoperation** darstellen) in rechtshändige überführen, sondern nur durch eine **Raumspiegelung** (eine sog. **diskrete Symmetrieoperation**). Dazu müssen eine **ungerade** Anzahl von Koordinatenachsen ihre Richtung umkehren, z.B. alle drei, wie in Abb. 1.5 gezeigt. Es genügt aber auch, lediglich eine Achse, z.B. die z-Achse, umzudrehen. Die Umkehrung einer geraden Anzahl von Achsen ändert die Händigkeit des Koordinatensystems nicht.

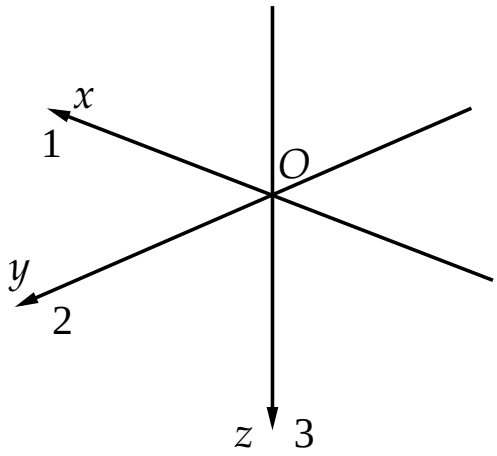


Abbildung 1.5: Linkshändiges Koordinatensystem.

1.1.4 Rechenregeln für Vektoren

Vorbemerkungen

1. Man bezeichnet zwei Vektoren als gleich, wenn sie die gleiche Länge und die gleiche Richtung aufweisen. Sie brauchen **nicht** den gleichen Ausgangspunkt zu haben, s. Abb. 1.6. Mit anderen Worten, Vektoren sind **frei verschiebbar**.

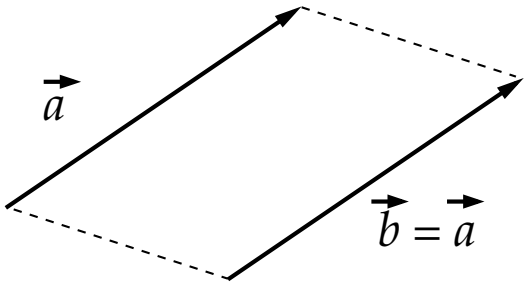


Abbildung 1.6: Zwei gleiche Vektoren.

2. Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen gleich langen, aber **antiparallelen** Vektor $-\vec{a}$.
3. Ein sog. **Einheitsvektor** ist ein Vektor vom Betrag 1 (s. o.).

Addition von Vektoren

1. **Parallelogrammregel:** Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, vgl. Abb. 1.7(a). Man verschiebe nun $\vec{b}$ so, dass der Fußpunkt von $\vec{b}$ an der Spitze von $\vec{a}$ zu liegen kommt. Der **Summenvektor** $\vec{a}+\vec{b}$ beginnt am Fußpunkt von $\vec{a}$ und endet an der Spitze von $\vec{b}$, s. Abb. 1.7(b). Die Addition von Vektoren ist einfach, da zwei Vektoren eine Ebene aufspannen. Man kann sie sich also einfach graphisch verdeutlichen.

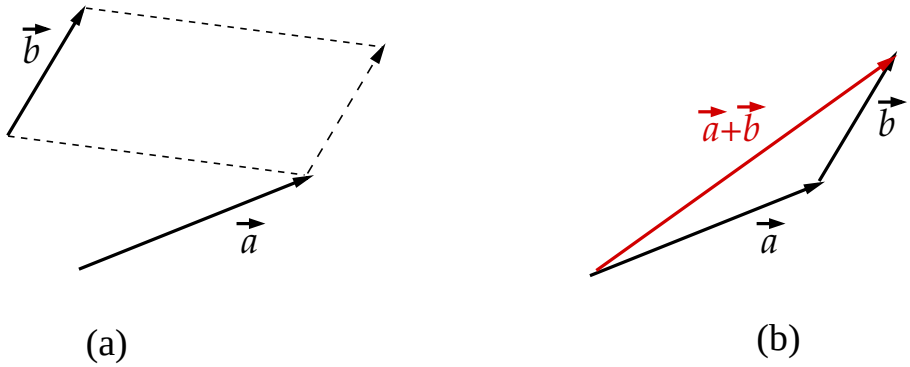


Abbildung 1.7: Addition von Vektoren mit Hilfe der Parallelogrammregel.

2. **Kommutativität:**
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\,. \tag{1.3}$$
Dies wird unmittelbar aus Abb. 1.8 deutlich.
3. **Assoziativität:**
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\,. \tag{1.4}$$
Auch dies kann man sich graphisch veranschaulichen, da drei Vektoren maximal den dreidimensionalen Raum aufspannen, vgl. Abb. 1.9.

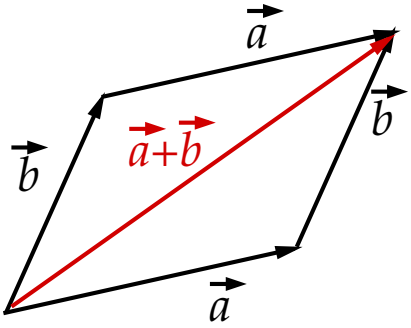


Abbildung 1.8: Verdeutlichung der Kommutativität der Vektoraddition.

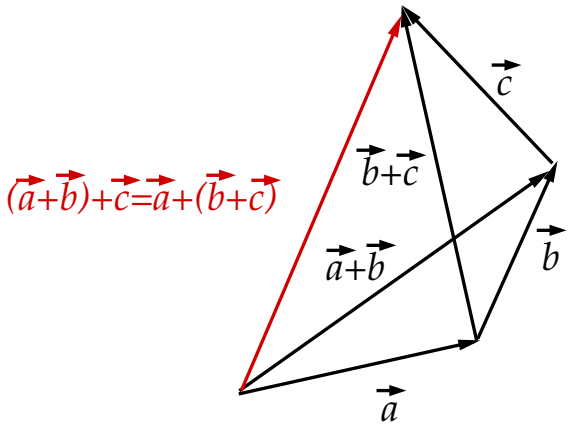


Abbildung 1.9: Verdeutlichung der Assoziativität der Vektoraddition.

4. **Subtraktion:**

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \; . \tag{1.5}$$

Die Subtraktion des Vektors $\vec{b}$ von Vektor $\vec{a}$ ergibt sich aus der **Addition** des zu $\vec{b}$ **antiparallelen** Vektors $-\vec{b}$ zu Vektor $\vec{a}$, s. Abb. 1.10. Der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ ist ein Vektor, der von der Spitze von $\vec{b}$ zur Spitze von $\vec{a}$ zeigt.

5. Subtrahiert man $\vec{a}$ von sich selbst, so ergibt sich der sog. **Nullvektor** $\vec{0}$,

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}; . \tag{1.6}$$

Er ist der einzige Vektor, der **keine** Richtung hat, damit ist er gleichzeitig ein **Skalar**, $\vec{0} = 0$. Für alle Vektoren $\vec{a}$ gilt

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \; . \tag{1.7}$$

Die Eigenschaften (1.3), (1.4), (1.6) und (1.7) bedeuten, dass die Gesamtheit der Vektoren im $\boldsymbol{E_3}$ eine **kommutative Gruppe** bilden.

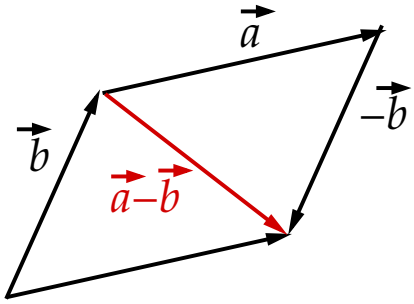


Abbildung 1.10: Verdeutlichung der Vektorsubtraktion.

Multiplikation von Vektoren mit einer Zahl

23.4.2013

1. **Einfache Multiplikation:** α sei eine reelle Zahl, $\alpha \in \mathbb{R}$, und $\vec{a}$ sei ein beliebiger Vektor. $\alpha\vec{a}$ ist ein Vektor mit folgenden Eigenschaften:
   (i) Falls $\alpha > 0$, so ist $\alpha\vec{a}$ **parallel** zu $\vec{a}$.
   (ii) Falls $\alpha < 0$, so ist $\alpha\vec{a}$ **antiparallel** zu $\vec{a}$.
   (iii) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|a$.
   (iv) $1\vec{a} = \vec{a}$.
   (v) $0\vec{a} = \vec{0} = 0$.
   (vi) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

2. **Distributivität:** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b}$ seien Vektoren. Dann gilt:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\,. \tag{1.8}$$

   Beweis: s. Abb. 1.11.

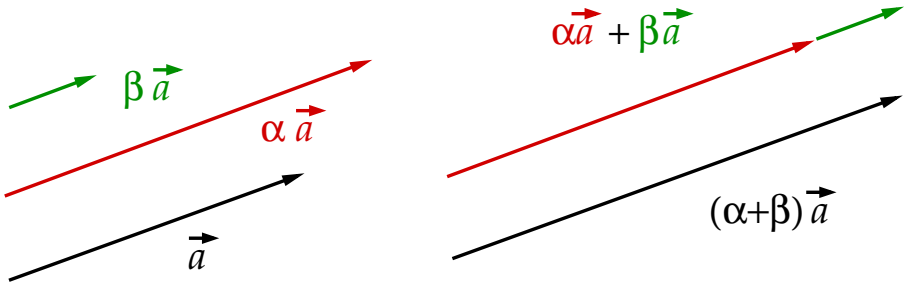


Abbildung 1.11: Veranschaulichung des ersten Distributivgesetzes.

Ferner gilt:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\,. \tag{1.9}$$

Beweis: s. Abb. 1.12. Es gilt $\alpha\vec{a}+\vec{x} = \vec{y}$. Außerdem gilt $\vec{x} = \hat{\alpha}\vec{b}$ mit einer Konstanten $\hat{\alpha} > 0$. Ferner gilt $\vec{y} = \bar{\alpha}(\vec{a} + \vec{b})$ mit einer Konstanten $\bar{\alpha} > 0$. Die Behauptung ist

bewiesen, wenn wir zeigen können, dass $\hat{\alpha} = \bar{\alpha} = \alpha$, denn dann ist $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{y} = \alpha\vec{a} + \vec{x} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$, q.e.d.

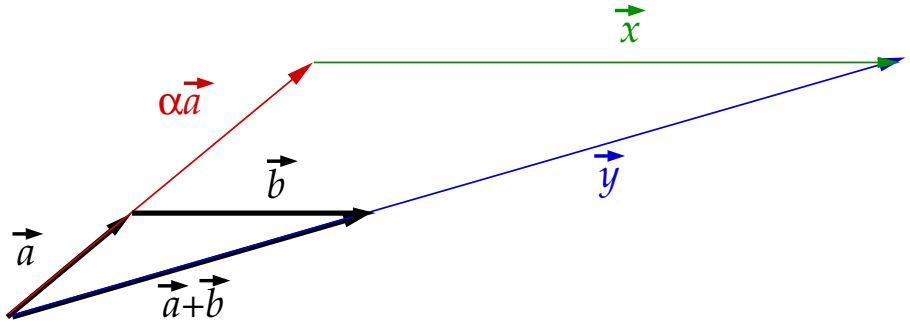


Abbildung 1.12: Veranschaulichung des zweiten Distributivgesetzes.

Nach dem ersten Strahlensatz gilt

$$\frac{|\vec{y}|}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{|\alpha\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \alpha \iff \frac{|\bar{\alpha}(\vec{a}+\vec{b})|}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \bar{\alpha} = \alpha \; . \tag{1.10}$$

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\frac{|\vec{x}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\alpha\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \alpha \iff \frac{|\hat{\alpha}\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \hat{\alpha} = \alpha \; . \tag{1.11}$$

3. **Assoziativität:** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a}$ sei ein beliebiger Vektor. Dann gilt:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha\beta\vec{a} \; . \tag{1.12}$$

Beweis: Die Beträge der Vektoren auf beiden Seiten der Gleichung sind gleich, $|\alpha\beta\vec{a}| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta\vec{a}|$. Die Richtungen der Vektoren ist ebenfalls gleich, alle Richtungen zeigen in Richtung von $\vec{a}$, q.e.d.

4. **Einheitsvektor:** Aus jedem Vektor $\vec{a}$ läßt sich durch Multiplikation mit dem Inversen seines Betrages ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$ konstruieren:

$$\vec{e}_a = \hat{a} = \frac{1}{a}\vec{a} \;\; , \quad |\vec{e}_a| = |\hat{a}| = \frac{1}{a}|\vec{a}| = \frac{a}{a} = 1 \; . \tag{1.13}$$

Einheitsvektoren werden in der Regel mit dem Symbol $\vec{e}$ oder $\vec{n}$ oder mit einem "Hut" anstelle des Vektorzeichens gekennzeichnet.

Definition eines Vektorraums

Die o.g. Eigenschaften von Vektoren kann man – anstelle sie für bestimmte Vektoren im $\boldsymbol{E_3}$ zu beweisen – auch zunächst **fordern**. Sie sind dann sog. **Axiome**. Alle Objekte, die dann diese Eigenschaften erfüllen, bezeichnet man als **Vektoren**. Die Menge **aller** Vektoren, die diesen Axiomen genügen, nennt man einen **linearen Vektorraum** $\boldsymbol{V}$ über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Axiome lauten noch einmal zusammengefaßt:

1. Zwischen zwei Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ ist eine Verknüpfung (Addition) definiert,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}\,, \tag{1.14}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\vec{s} \in \mathbf{V}$,

(ii) Assoziativität:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\,, \quad \vec{c} \in \mathbf{V}\,, \tag{1.15}$$

(iii) $\exists$ Nullelement $\vec{0}$ mit $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\ \ \forall\, \vec{a} \in \mathbf{V}$,

(iv) $\forall\, \vec{a} \in \mathbf{V}\ \ \exists(-\vec{a}) \in \mathbf{V}$ mit $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,

(v) Kommutativität:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,. \tag{1.16}$$

2. Multiplikation mit reellen Zahlen α, β:

(i) $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{a} \in \mathbf{V} \longrightarrow \alpha\vec{a} \in \mathbf{V}$,

(ii) Distributivität:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\,, \tag{1.17}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\,, \tag{1.18}$$

(iii) Assoziativität:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}\,, \tag{1.19}$$

(iv) $\exists$ Einselement 1 mit $1\vec{a} = \vec{a}\ \ \forall\, \vec{a} \in \mathbf{V}$.

Dies definiert die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren. Aber kann man auch Vektoren mit Vektoren multiplizieren? Dies geht in der Tat und zwar auf zwei verschiedene Arten und Weisen, wie in den nächsten beiden Abschnitten erläutert. Man unterscheidet ein sog. **inneres Produkt**, das **Skalarprodukt**, und ein sog. **äußeres Produkt**, das **Vektorprodukt**.

1.1.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\,\cos\varphi\,. \tag{1.20}$$

wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, vgl. Abb. 1.13. Aus der Definition ist sofort ersichtlich, dass das Skalarprodukt **kommutativ** ist,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}\,. \tag{1.21}$$

Die graphische Veranschaulichung in Abb. 1.13(a) besagt, dass das Skalarprodukt das Produkt aus der Länge des zweiten Vektors und der Projektion des ersten Vektors in Richtung des zweiten Vektors ist. Aufgrund der Kommutativität (1.21) des Skalarprodukts kann man auch umgekehrt den zweiten Vektor auf den ersten projizieren und dann mit der Länge des ersten Vektors multiplizieren, s. Abb. 1.13(b).

Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften:

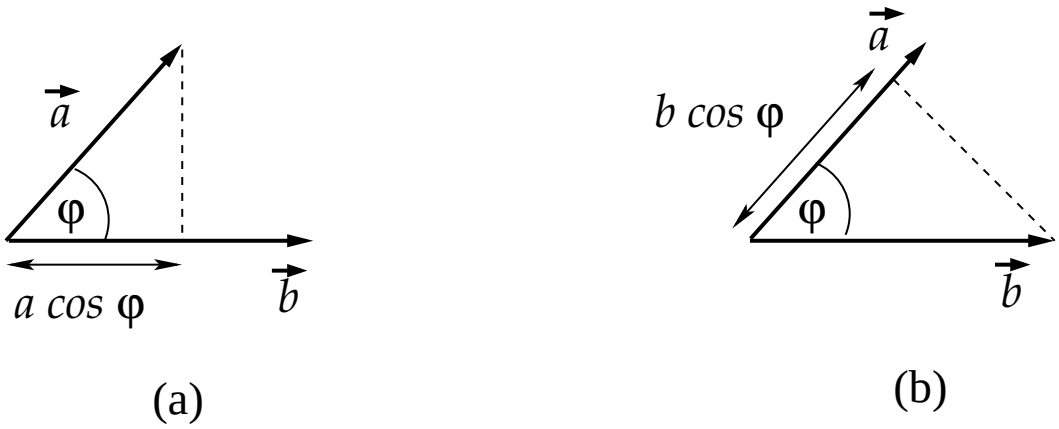


Abbildung 1.13: Graphische Veranschaulichung des Skalarprodukts.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, falls (i) $a = 0$ und/oder $b = 0$, oder (ii) $\varphi = \pi/2$ (da $\cos \pi/2 = 0$). In diesem Fall stehen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ **orthogonal** zueinander, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2. **Projektionen** eines Vektors $\vec{a}$ in Richtung eines anderen Vektors $\vec{b}$ lassen sich durch das Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit dem **Einheitsvektor** in Richtung von $\vec{b}$ darstellen: $\vec{a} \cdot \hat{b} = a \cos \varphi$.

3. **Distributivität:**
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \,. \tag{1.22}$$
Beweis: Aus Abb. 1.14 ist ersichtlich, dass für die Projektion von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{c}$ gilt: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \hat{c} = \vec{a} \cdot \hat{c} + \vec{b} \cdot \hat{c}$. Multipliziert man diese Gleichung mit c, so folgt wegen $\vec{c} = c\,\hat{c}$ die Behauptung, q.e.d.

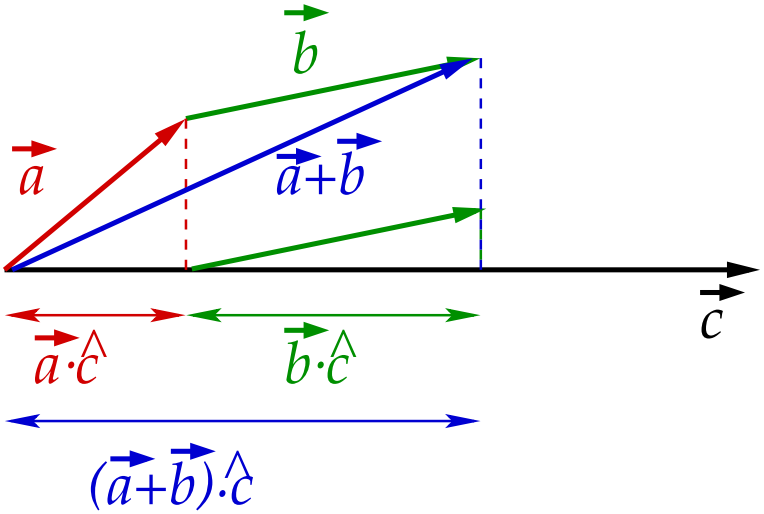


Abbildung 1.14: Veranschaulichung des Distributivgesetzes für das Skalarprodukt.

4. **Bilinearität:** $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \; . \tag{1.23}$$

Beweis: Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung trivial erfüllt. Für $\alpha \neq 0$ unterscheiden wir zwei Fälle,

(i) $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} &= (\alpha a) b \cos\varphi = \alpha a b \cos\varphi = \alpha(ab\cos\varphi) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= a(\alpha b)\cos\varphi = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) \; , \end{aligned}$$

(ii) $\alpha < 0$: Wir benutzen $\alpha\vec{a} = |\alpha|(-\vec{a})$ und die Tatsache, dass der Winkel zwischen den Vektoren $-\vec{a}$ und $\vec{b}$ gerade $\pi - \varphi$ beträgt, s. Abb. 1.15. Dann gilt wegen $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$:

$$\begin{aligned} (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\alpha| a b \cos(\pi - \varphi) = -|\alpha| a b \cos\varphi = \alpha a b \cos\varphi = \alpha(ab\cos\varphi) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= a(\alpha b \cos\varphi) = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) \; . \end{aligned}$$

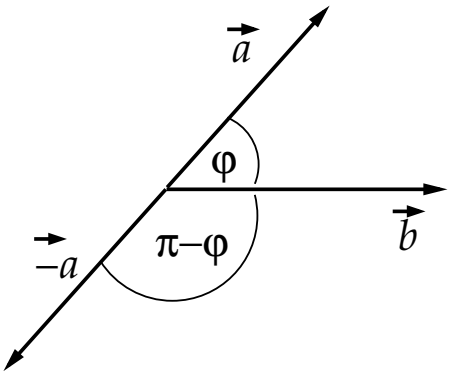


Abbildung 1.15: Zum Beweis der Bilinearität des Skalarprodukts für $\alpha < 0$.

25.4.2013

5. **Betrag** eines Vektors: Es gilt für das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = aa\cos 0 = a^2 \geq 0 \; , \tag{1.24}$$

wobei das Gleichheitszeichen für den Fall steht, dass $\vec{a} = \vec{0}$. Daraus folgt, dass man den Betrag oder die sog. **Norm** eines Vektors wie folgt berechnen kann: $a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Für Einheitsvektoren gilt natürlich $\hat{a} \cdot \hat{a} = 1$.

6. **Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab \; . \tag{1.25}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $|\cos\varphi| \leq 1$.

7. **Dreiecksungleichung:**

$$|a-b| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le a+b\,. \tag{1.26}$$

Beweis: Die Schwarzsche Ungleichung (1.25), bzw. die Tatsache, dass $-1 \le \cos\varphi \le 1$, liefert $-ab \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le ab$. Wir multiplizieren mit 2 und addieren a^2+b^2:

$$\begin{aligned} & a^2+b^2-2ab \le a^2+b^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \le a^2+b^2+2ab \\ \Longleftrightarrow\quad & (a-b)^2 \le (\vec{a}+\vec{b})^2 \le (a+b)^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & |a-b| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le a+b\,, \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Die zweite Zeile folgt aus der ersten, indem man das Distributivgesetz (1.22) und die Kommutativität (1.21) anwendet.

Wir haben die Glgen. (1.21), (1.22), (1.23) und (1.24) aus den Eigenschaften des Skalarprodukts für Vektoren im $\boldsymbol{E_3}$ bewiesen. In der Mathematik wird das Skalarprodukt aber in abstrakter Weise durch die Zuordnung $\vec{a}\cdot\vec{b} \to \alpha \in \mathbb{R}$ definiert, die die Eigenschaften (1.21), (1.22), (1.23) und (1.24) haben muss. Wir wollen die Schwarzsche Ungleichung (1.25) nur mit Hilfe dieser Eigenschaften beweisen, ohne die geometrische Veranschaulichung zu Hilfe zu nehmen. Zunächst ist der Beweis trivial, falls $\vec{a}=\vec{0}$ und/oder $\vec{b}=\vec{0}$ ist. Daher können wir uns auf den Fall beschränken, dass $\vec{a}\neq\vec{0}$ **und** $\vec{b}\neq\vec{0}$ ist. In diesem Fall gilt aufgrund von Gl. (1.24) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; (\vec{a}+\alpha\vec{b})^2 = (\vec{a}+\alpha\vec{b})\cdot(\vec{a}+\alpha\vec{b}) \\ &=\; \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})+(\alpha\vec{b})\cdot\vec{a}+(\alpha\vec{b})\cdot(\alpha\vec{b}) \\ &=\; a^2+\alpha^2b^2+2\,\alpha\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir von der Kommutativität (1.21), der Distributivität (1.22) und der Bilinearität (1.23) Gebrauch gemacht. Da das Ergebnis für beliebige α gilt, gilt es insbesondere für den Wert $\alpha = -\vec{a}\cdot\vec{b}/b^2 \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir nun

$$0 \le a^2 + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{b^2} - 2\,\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{b^2} = a^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{b^2}\,.$$

Multiplikation mit b^2 ergibt

$$0 \le a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \quad\Longleftrightarrow\quad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le ab \;\;, \text{q.e.d.}$$

Ein Vektorraum mit einem inneren Produkt (Skalarprodukt) heißt in der Mathematik **unitärer Vektorraum**.

1.1.6 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt, bzw. das sog. **Kreuzprodukt**, ordnet zwei Vektoren einen Vektor zu:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\,. \tag{1.27}$$

Dieser Vektor hat folgende Eigenschaften:

1. Der **Betrag** von $\vec{c}$ ist

$$c = ab \sin\varphi \; . \tag{1.28}$$

Damit ist die Maßzahl des Betrags von $\vec{c}$ gleich der Maßzahl der **Fläche** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, vgl. Abb. 1.16.

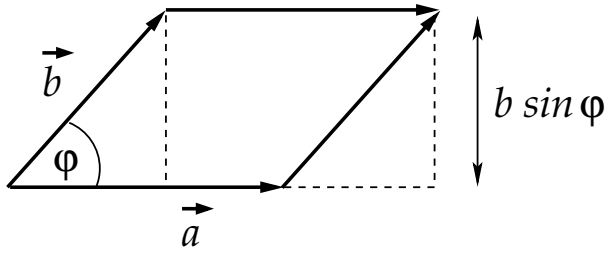


Abbildung 1.16: Zur Interpretation des Betrags des Kreuzproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

2. Der Vektor $\vec{c}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. Seine Orientierung ergibt sich daraus, dass man den ersten Vektor ($\vec{a}$) auf kürzestem Weg in den zweiten Vektor ($\vec{b}$) dreht. Die Orientierung von $\vec{c}$ stimmt dabei mit dem Drehsinn einer Rechtsschraube überein, s. Abb. 1.17. Gemäß der (zweiten) Definition

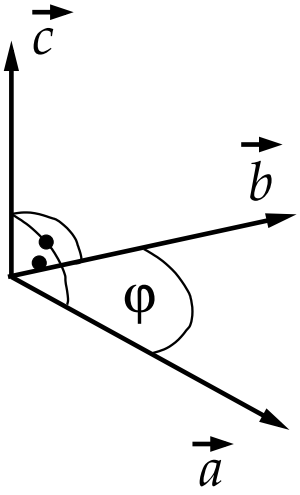


Abbildung 1.17: Zur Orientierung des Kreuzproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

eines rechtshändigen Koordinatensystems bilden die Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ also gerade ein solches. Das Kreuzprodukt besitzt allerdings weniger eine Richtung als vielmehr einen **Drehsinn**.

3. **Raumspiegelungen:** Das Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ hat andere Eigenschaften unter Raumspiegelungen als die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$. Spiegeln wir die Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ am Ursprung (ihrem gemeinsamen Fußpunkt), so werden sie in die zu ihnen antiparallelen

Vektoren übergeführt (ihre Richtung kehrt sich um),

$$\vec{a} \longrightarrow -\vec{a}\,, \quad \vec{b} \longrightarrow -\vec{b}\,,$$

vgl. Abb. 1.18. Solche Vektoren heißen **polare Vektoren**. Wie aber verhält sich

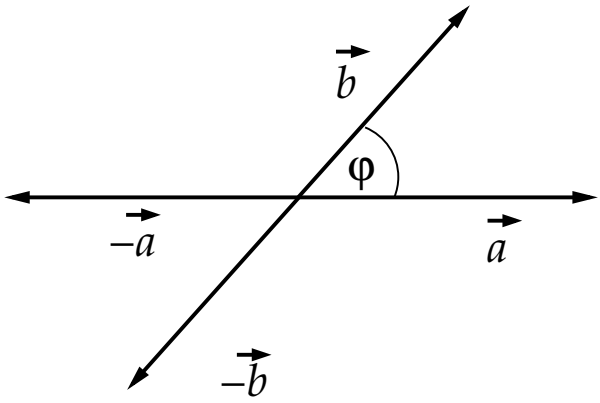


Abbildung 1.18: Transformation polarer Vektoren unter Raumspiegelungen.

das Kreuzprodukt unter Raumspiegelung? Rein mathematisch ergibt sich

$$(-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}\,,$$

d.h. das Kreuzprodukt ändert sein Vorzeichen **nicht** unter Raumspiegelungen. Dies kann man sich aber auch über das Argument hinsichtlich des Drehsinnes von $\vec{c}$ graphisch veranschaulichen. Der Drehsinn, wenn man $-\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg in $-\vec{b}$ dreht, bleibt der gleiche wie bei der Drehung von $\vec{a}$ in $\vec{b}$, s. Abb. 1.19. Solche Vektoren heißen **axiale Vektoren** oder **Pseudovektoren**. Bemerkung: Skalarprodukte aus

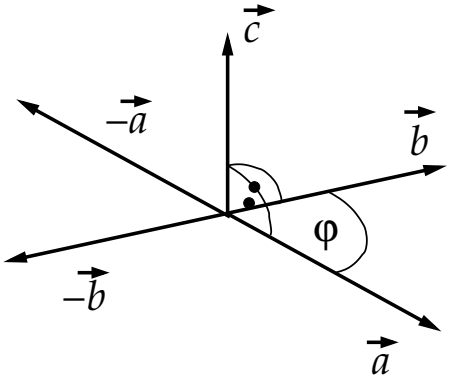


Abbildung 1.19: Transformation des Kreuzproduktes unter Raumspiegelungen.

zwei polaren oder zwei axialen Vektoren ändern sich nicht unter Raumspiegelungen, sind also echte Skalare. Skalarprodukte aus einem polaren und einem axialen Vektor ändern ihr Vorzeichen unter Raumspiegelungen. Man nennt sie daher **Pseudoskalare**.

4. **Antikommutativität:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \,. \tag{1.29}$$

Beweis: aufgrund der Definition des Kreuzproduktes ist der Vektor $\vec{b} \times \vec{a}$ vom Betrag her identisch mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, aber er zeigt in die entgegengesetzte Richtung, s. Abb. 1.20. Daraus folgt $-\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$. Nach Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit -1 folgt die Behauptung, q.e.d.

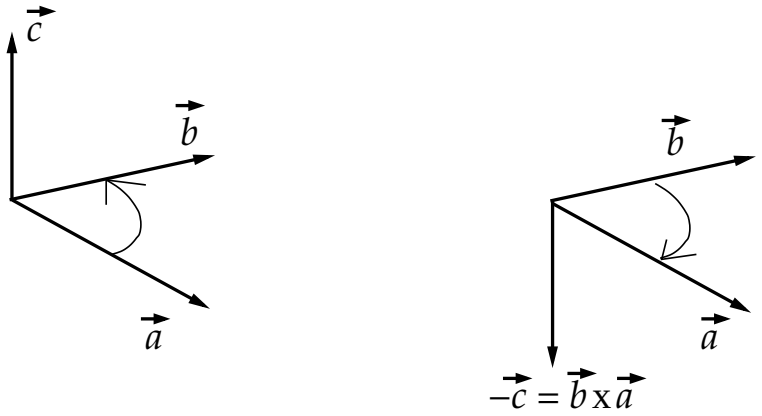


Abbildung 1.20: Zur Antikommutativität des Kreuzproduktes.

5. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, falls (i) $\vec{a} = \vec{0}$ und/oder $\vec{b} = \vec{0}$, (ii) $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. wenn die beiden Vektoren in dieselbe (oder die entgegengesetzte) Richtung zeigen. Dies folgt unmittelbar aus $\sin 0 = 0$. Solche Vektoren nennt man **kollinear**. Kollineare Vektoren spannen keine Ebene auf.

6. **Distributivität:**

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \,. \tag{1.30}$$

Beweis: Man zerlege $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{c}$, s. Abb. 1.21.

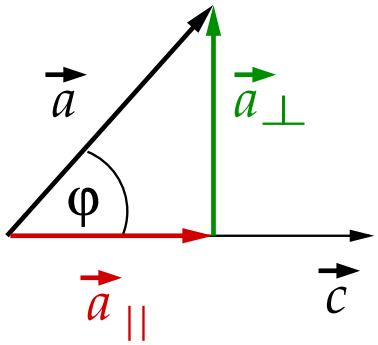


Abbildung 1.21: Zerlegung von $\vec{a}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{c}$.

Offenbar gilt $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$ und analog $\vec{b} = \vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp$, $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b})_\parallel + (\vec{a} + \vec{b})_\perp$. Im Vektorprodukt mit $\vec{c}$ tragen aber ausschließlich die **senkrechten** Komponenten dieser Vektoren bei, z.B.

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a}_\perp \times \vec{c}\,.$$

Um dies zu beweisen, bemerkt man zunächst, dass $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{a}_\perp \times \vec{c}$ in die gleiche Richtung zeigen. Man muss also nur noch zeigen, dass ihre Beträge übereinstimmen. Dies folgt unmittelbar aus Abb. 1.21:

$$|\vec{a}_\perp \times \vec{c}| = a_\perp c \sin\frac{\pi}{2} = a_\perp c = (a \sin\varphi)c = ac \sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{c}|\,.$$

Weil also der parallele Anteil $\vec{a}_\parallel$ von $\vec{a}$ beim Bilden des Kreuzprodukts mit $\vec{c}$ wegfällt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) im folgenden annehmen, dass $\vec{a}$ bereits senkrecht zu $\vec{c}$ steht, vgl. Abb. 1.22. Gleiches gilt für $\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$.

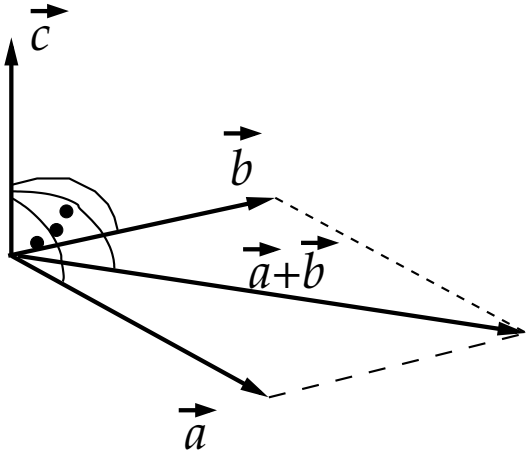


Abbildung 1.22: Zum Beweis des Distributivgesetzes.

Wir machen folgende Beobachtungen:

(i) Die Vektoren $\vec{a} \times \hat{c}$, $\vec{b} \times \hat{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times \hat{c}$ liegen in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. Dies liegt daran, dass $\vec{c}$ bereits senkrecht zu den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$ steht.

(ii) Für die Richtungen gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \hat{c} \quad &\perp \quad \vec{a}\,, \\ \vec{b} \times \hat{c} \quad &\perp \quad \vec{b}\,, \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \hat{c} \quad &\perp \quad \vec{a} + \vec{b}\,. \end{aligned}$$

Damit sind die Vektoren $\vec{a} \times \hat{c}$, $\vec{b} \times \hat{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \hat{c}$ gegenüber den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ lediglich um $\pi/2$ gedreht. Untereinander stehen die erstgenannten aber im selben Winkel zueinander wie die letztgenannten, vgl. Abb. 1.23.

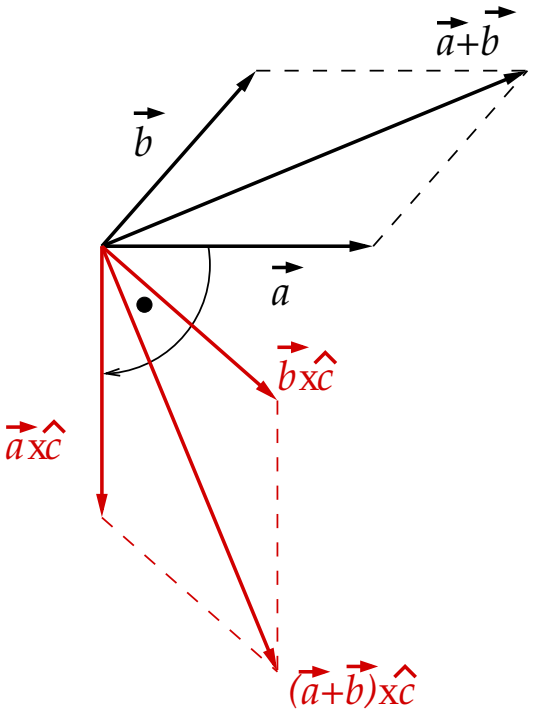


Abbildung 1.23: Die Vektoren $\vec{a}\times\hat{c}$, $\vec{b}\times\hat{c}$ und $(\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c}$ sind im Vergleich zu $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ um $\pi/2$ gedreht. Alle Vektoren liegen in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

(iii) Für die Beträge gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{a}\times\hat{c}| &= a = |\vec{a}|\,, \\ |\vec{b}\times\hat{c}| &= b = |\vec{b}|\,, \\ |(\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c}| &= |\vec{a}+\vec{b}|\,, \end{aligned}$$

d.h. der Betrag von $\vec{a}\times\hat{c}$ identisch mit dem von $\vec{a}$, *etc.*

Folglich ist die Relation $(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}+\vec{b}$ nach Drehung aller beteiligten Vektoren um $\pi/2$ (durch vektorielle Multiplikation aller Vektoren mit $\hat{c}$) gemäß (ii) und (iii) identisch mit:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c} = \vec{a}\times\hat{c}+\vec{b}\times\hat{c}\,.$$

Multiplikation beider Seiten mit c ergibt die Behauptung, q.e.d.

7. Das Kreuzprodukt ist **nicht assoziativ**,

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\,.$$

Dies wird unmittelbar klar, wenn man sich überlegt, dass der Vektor auf der linken Seite ein Vektor in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene ist, während der auf der rechten Seite ein Vektor in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene ist. Diese können i.a. also nicht identisch sein.

8. **Bilinearität:** $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) \; . \tag{1.31}$$

Beweis: Die Multiplikation eines Vektors mit einer Konstanten ändert nichts an seiner Richtung. Aufgrund der Definition des Kreuzprodukts stimmen daher die Richtungen aller in dieser Gleichung beteiligten Vektoren überein. Wir brauchen sie also nur für die Beträge der beteiligten Vektoren überprüfen. Ferner ist die Gleichung trivial erfüllt für $\alpha = 0$. Wir betrachten daher nur $\alpha \neq 0$ und unterscheiden:

(i) $\alpha > 0$:

$$|(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}| = (\alpha a)b \sin\varphi = a(\alpha b) \sin\varphi = |\vec{a} \times (\alpha\vec{b})| = \alpha(ab \sin\varphi) = \alpha|\vec{a} \times \vec{b}| \; .$$

(ii) $\alpha < 0$: wegen $\alpha\vec{a} = |\alpha|(-\vec{a})$, $\alpha\vec{b} = |\alpha|(-\vec{b})$, $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = |\alpha|(-\vec{a} \times \vec{b})$ und Abb. 1.18 gilt

$$\begin{aligned} |(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}| &= |\alpha|\, ab \sin(\pi - \varphi) = -|\alpha|\, ab \sin\varphi = \alpha|\vec{a} \times \vec{b}| \; , \\ |\vec{a} \times (\alpha\vec{b})| &= |\alpha|\, ab \sin(\pi - \varphi) = -|\alpha|\, ab \sin\varphi = \alpha|\vec{a} \times \vec{b}| \; , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel: **Sinussatz**
Betrachte Abb. 1.24. Es gilt $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Daraus folgt unter Zuhilfenahme des Dis-

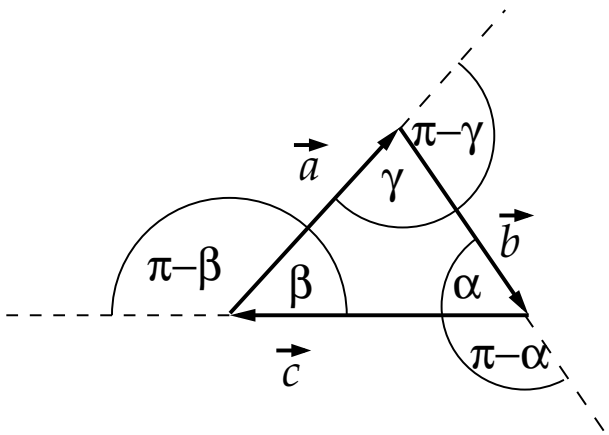


Abbildung 1.24: Zum Sinussatz.

tributivgesetzes, der Antikommutativität und der Tatsache, dass das Kreuzprodukt für kollineare Vektoren verschwindet:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{a} \times (-\vec{a} - \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \\ &= (-\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \; . \end{aligned}$$

Offenbar gilt für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ erfüllen, dass $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$. Betrachten wir den Betrag der letzten Gleichung, $ab \sin(\pi - \gamma) = ca \sin(\pi - \beta) = bc \sin(\pi - \alpha)$ und benutzen $\sin(\pi - \varphi) = -\sin\varphi$, so folgt $ab \sin\gamma = ca \sin\beta = bc \sin\alpha$, oder, nach Division durch die entsprechenden Größen,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \; , \quad \text{q.e.d.} \tag{1.32}$$

1.1.7 "Höhere" Vektorprodukte

30.4.2013

Das Kreuzprodukt bildet einen Vektor, den man auf zwei verschiedene Arten mit anderen Vektoren multiplizieren kann.

Spatprodukt

Wir bilden das **Skalarprodukt** eines Kreuzproduktes mit einem Vektor,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,. \tag{1.33}$$

Dieses Skalarprodukt heißt **Spatprodukt**. Zur Interpretation des Spatprodukts betrachten wir das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte **Parallelepiped**, vgl. Abb. 1.25.

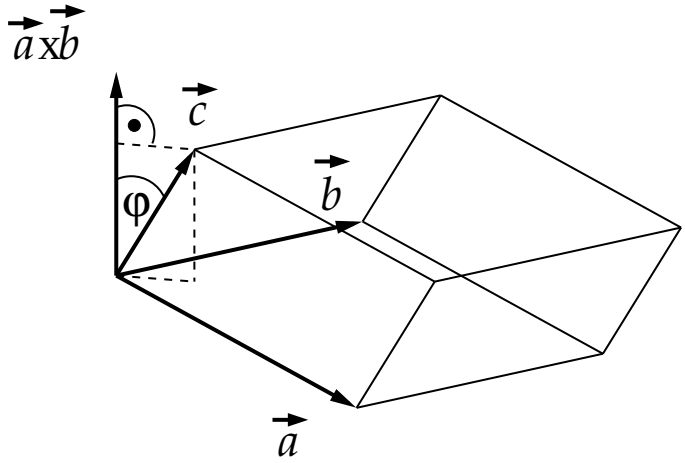


Abbildung 1.25: Zur geometrischen Interpretation des Spatprodukts.

Offenbar ist

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|\, c \cos\varphi\,,$$

d.h. die Fläche $|\vec{a} \times \vec{b}|$ des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, multipliziert mit der Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$. Ersteres ist aber auch die **Grundfläche** und letzteres die **Höhe** des Parallelepipeds. Grundfläche mal Höhe ergibt genau das **Volumen** des Parallelepipeds. Das Spatprodukt ist mit dem Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds identisch.

Da es keine Rolle spielt, welche der Seitenflächen des Parallelepipeds als Grundfläche gewählt wird, ändert sich das Spatprodukt nicht unter **zyklischer Vertauschung** der Vektoren,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}\,. \tag{1.34}$$

Doppeltes Kreuzprodukt

Wir bilden das **Kreuzprodukt** eines Kreuzprodukts mit einem Vektor,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \,. \tag{1.35}$$

Es gilt der **Entwicklungssatz**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \,, \tag{1.36}$$

den wir weiter unten beweisen werden. Mit dem Entwicklungssatz beweist man die **Jacobi-Identität**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \,. \tag{1.37}$$

Der Beweis wird als Übungsaufgabe gestellt.

1.1.8 Basisvektoren und Komponentendarstellung

Im folgenden sollen Vektoren durch Zahlenschemata dargestellt werden, welche ihre Komponenten in einer vorgegebenen Basis enthalten. Dazu bemerken wir zunächst, dass jeder Vektor $\vec{a}$ als Produkt seines Betrags a mit dem Einheitsvektor $\hat{a}$ in $\vec{a}$-Richtung dargestellt werden kann,

$$\vec{a} = a\,\hat{a} \,.$$

Wir betrachten nun zwei **kollineare** Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, d.h. zwei Vektoren, die in dieselbe Richtung zeigen, $\hat{a} = \hat{b}$, aber i.a. unterschiedliche Beträge haben. Offenbar kann man $\vec{a}$ durch $\vec{b}$ folgendermaßen ausdrücken:

$$\vec{a} = a\,\hat{a} = a\,\hat{b} = \frac{a}{b}\,b\,\hat{b} = \frac{a}{b}\,\vec{b} \,,$$

oder

$$b\,\vec{a} - a\,\vec{b} = 0 \,. \tag{1.38}$$

Allgemein bezeichnet man zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ als **linear abhängig**, wenn man nichtverschwindende Zahlen α, $\beta \in \mathbb{R}$ finden kann, für die gilt:

$$\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = 0 \,. \tag{1.39}$$

Kollineare Vektoren sind offenbar linear abhängig, denn Gl. (1.39) ist für die Wahl $\alpha = b$ und $\beta = -a$ wegen Gl. (1.38) identisch erfüllt.

Definition: n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbf{V}$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\vec{a}_j = 0$$

folgt, dass $\alpha_j = 0 \;\; \forall\, j \,,\; 1 \le j \le n$. Falls nicht, so heißen sie linear abhängig.

Definition: Die **Dimension** eines Vektorraums $\mathbf{V}$ ist gleich der **maximalen** Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

Definition: Die **Basis** eines d-dimensionalen Vektorraumes $\mathbf{V}$ ist eine Menge von d linear unabhängigen Vektoren.

Satz: Jeder **beliebige** Vektor $\vec{b} \in \mathbf{V}$ läßt sich als Linearkombination der Vektoren einer Basis von $\mathbf{V}$ schreiben.

Beweis: Sei $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_d\}$ eine Basis des d-dimensionalen Vektorraums $\mathbf{V}$. Per Definition sind $\{\vec{b}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_d\}$ linear abhängig, denn sonst wäre $\mathbf{V}$ $(d+1)$-dimensional. Daraus folgt, dass $\exists$ Koeffizienten $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d\} \neq \{0, 0, 0, \ldots, 0\}$ mit

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \, \vec{a}_j + \beta \, \vec{b} = 0 \; .$$

Offenbar muss $\beta \neq 0$ sein, da ansonsten $\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \, \vec{a}_j = 0$ mit Koeffizienten $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$, was aber wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_d\}$ unmöglich ist. Dann darf man die obige Gleichung mittels Division durch β nach $\vec{b}$ auflösen:

$$\vec{b} = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\alpha_j}{\beta} \, \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j \, \vec{a}_j \; ,$$

mit $\gamma_j = -\alpha_j / \beta$, q.e.d.

Definition: Eine Menge paarweise zueinander **orthogonaler** Vektoren, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n\}$, mit $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \;\; \forall \; i \neq j \; , \; 1 \leq i, j \leq n \; , \; n < d$, bezeichnet man als **Orthogonalsystem**. Falls $n = d$ (Dimension von $\mathbf{V}$), so bilden diese Vektoren eine Basis und man spricht von einem **vollständigen Orthogonalsystem**, bzw. einer **Orthogonalbasis** von $\mathbf{V}$.

Die beste Wahl für die Basisvektoren stellen **Einheitsvektoren** dar, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_d\}$, welche paarweise zueinander **orthogonal** sind,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \; , \\ 0 & \text{falls } i \neq j \; . \end{cases} \tag{1.40}$$

Hier haben wir das sog. **Kronecker-Delta** δ_{ij} eingeführt. Jede Menge von paarweise zueinander orthogonalen Einheitsvektoren bezeichnet man als **Orthonormalsystem**. Eine Basis von orthogonalen Einheitsvektoren bezeichnet man als **vollständiges Orthonormalsystem**, bzw. als **Orthonormalbasis** von $\mathbf{V}$.

Aufgrund des oben bewiesenen Satzes gilt $\forall \; \vec{a} \in \mathbf{V}$:

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{d} a_j \, \vec{e}_j \; . \tag{1.41}$$

Man bezeichnet die Koeffizienten a_j als **Komponenten** von $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_d\}$, bzw. als **Koordinaten** von $\vec{a}$ in dieser Basis.

Die Komponenten bzw. Koordinaten sind von der Wahl der Basis abhängig. Man kann sie als Projektionen von $\vec{a}$ auf die einzelnen Basisvektoren darstellen,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{a} = \sum_{j=1}^{d} a_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{d} a_j \, \delta_{ij} = a_i \; , \quad i = 1, \ldots, d \; , \tag{1.42}$$

wobei wir Gl. (1.40) benutzt haben. Die spezielle Eigenschaft des Kronecker-Deltas läßt die Summe über j "zusammenbrechen" und nur der Term mit $j = i$ "überlebt".

Bei fest vorgegebener Basis ist jeder Vektor $\vec{a}$ **eindeutig** durch seine Komponenten festgelegt. Man kann ihn daher auch durch ein **Zahlenschema** darstellen, z.B. als **Spaltenvektor**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} .$$

oder als **Zeilenvektor**

$$\vec{a}^T = (a_1,\, a_2, \ldots,\, a_d) .$$

Das Superskript T bedeutet **Transposition**, d.h. Vertauschung von Spalten und Zeilen. Der transponierte Spaltenvektor $\vec{a}^T$ ist damit ein Zeilenvektor. In der Regel definieren wir Vektoren $\vec{a}$ als Spaltenvektoren.

Beispiel: Das Orthonormalsystem $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\}$ (auch als $\{\vec{e}_x,\, \vec{e}_y,\, \vec{e}_z\}$ bezeichnet) bildet eine Basis des $\boldsymbol{E_3}$, vgl. Abb. 1.26(a). Daraus folgt (s. Abb. 1.26(b)):

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 \;(= a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z) \;, \quad \text{mit } a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a} = a\,\cos\varphi_i \;,\; i = 1, 2, 3 \;.$$

Hierbei ist φ_i der Winkel zwischen dem Einheitsvektor $\vec{e}_i$ und dem Vektor $\vec{a}$, $\varphi_i = \angle(\vec{e}_i, \vec{a})$. Man bezeichnet $\cos\varphi_i = a_i/a$ als **Richtungskosinus**.

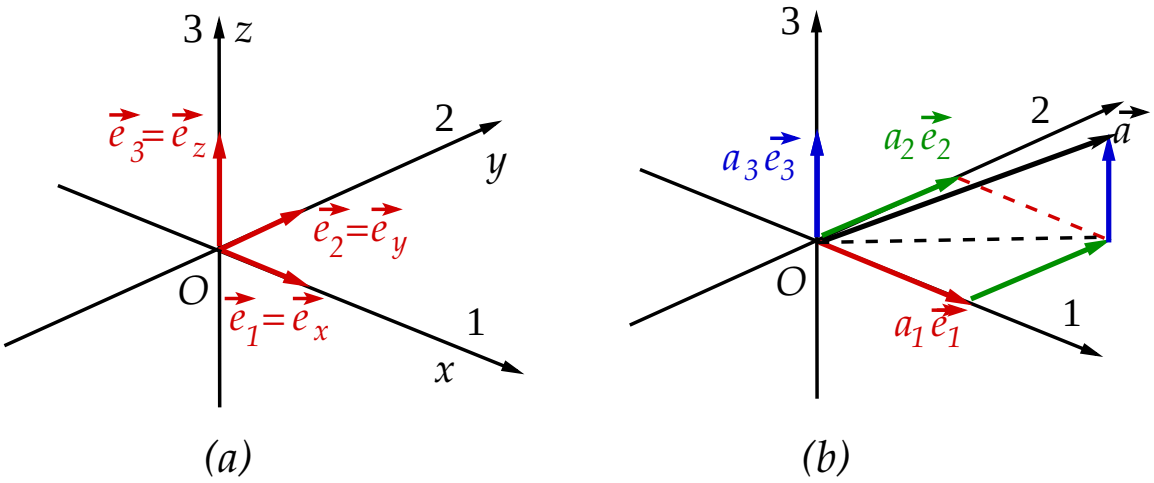


Abbildung 1.26: (a) Das Orthonormalsystem $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\}$ als Basis des $\boldsymbol{E_3}$. (b) Der Vektor $\vec{a}$ als Summe der mit den Komponenten a_i skalierten Einheitsvektoren $\vec{e}_i$.

Der Betrag von $\vec{a}$ ist eindeutig durch seine Komponenten festgelegt,

$$a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j\,\delta_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \;.$$

Daraus folgt auch

$$1 = \sqrt{\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3}\ , \quad \text{oder} \quad 1 = \cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3\ .$$

Bei Vorgabe von zwei Richtungskosinus ist der dritte also bis auf das Vorzeichen festgelegt, $\cos\varphi_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2}$.

1.1.9 Rechenregeln in Komponentendarstellung

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den Vektorraum $\boldsymbol{E_3}$ mit der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, d.h. Vektoren $\vec{a} \in \boldsymbol{E_3}$ kann man schreiben als $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T = \sum_{j=1}^{3} a_j\,\vec{e}_j$.

1. **Spezielle Vektoren:**
   (i) Nullvektor: $\vec{0} = (0,0,0)^T$.
   (ii) Basisvektoren:
   $$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1,0,0)^T\ , \\ \vec{e}_2 &= (0,1,0)^T\ , \\ \vec{e}_3 &= (0,0,1)^T\ . \end{aligned} \tag{1.43}$$

2. **Addition:**
   $$\begin{aligned} & \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \\ \Longleftrightarrow\ & \sum_{j=1}^{3} c_j\,\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} (a_j + b_j)\,\vec{e}_j \\ \Longrightarrow\ & \vec{e}_i \cdot \vec{c} = c_i = \sum_{j=1}^{3} (a_j + b_j)\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} (a_j + b_j)\,\delta_{ij} = a_i + b_i \\ \Longrightarrow\ & \vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)^T\ . \end{aligned}$$
   Bei vorgegebener Basis entspricht die Addition von Vektoren der Addition der Komponenten der Vektoren.

3. **Multiplikation mit reellen Zahlen:** Sei $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt
   $$\begin{aligned} & \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j\,\vec{e}_j = \alpha\vec{a} = \sum_{j=1}^{3} (\alpha a_j)\,\vec{e}_j \\ \Longrightarrow\ & b_i = \alpha\,a_i \\ \Longrightarrow\ & \vec{b} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)^T\ . \end{aligned}$$
   Bei vorgegebener Basis entspricht die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl der Multiplikation jeder Komponente des Vektors mit dieser Zahl.

4. **Skalarprodukt:**
   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i\ .$$
   Das Skalarprodukt ist gleich der Summe der Produkte der Komponenten.

5. **Vektorprodukt:** Man überzeugt sich zunächst anhand von Abb. 1.26, dass folgende Identitäten gelten:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \ , \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \ , \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \ .$$

Daraus folgt

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) \textbf{ gerade} \text{ Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \,, \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \textbf{ ungerade} \text{ Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \,, \\ 0 & \text{sonst} \ . \end{cases} \tag{1.44}$$

Gerade Permutationen von (1,2,3) sind **zyklische** Permutationen, also (2,3,1) und (3,1,2). Ungerade Permutationen sind **antizyklische** Permutationen, also (3,2,1), (2,1,3) und (1,3,2). In Gl. (1.44) haben wir mit dem Symbol ϵ_{ijk} den **total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe**, auch **Levi-Cività-Tensor** genannt, eingeführt.

2.5.2013

Eigenschaften des Levi-Cività-Tensors:

(i) Die Komponenten des Tensors verschwinden für zwei oder drei **gleiche** Indizes,

$$\epsilon_{iik} = \epsilon_{iji} = \epsilon_{ijj} = 0 \quad \forall \, i,j,k \ . \tag{1.45}$$

Nur **unterschiedliche** Indizes ergeben eine von null verschiedene Komponente.

(ii) Die Komponenten des Tensors wechseln ihr Vorzeichen unter Vertauschung zweier Indizes,

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{kji} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} \ . \tag{1.46}$$

Dies folgt aus der Definition (1.44) des Tensors.

(iii) **Konvolutionssatz:**

$$\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ikj} \, \epsilon_{jlm} = \delta_{il} \, \delta_{km} - \delta_{im} \, \delta_{kl} \ . \tag{1.47}$$

Dies beweist man leicht durch Ausschreiben der Summe auf der linken Seite und eine explizite Fallbetrachtung für die "freien" Indizes i,k,l,m (benutze, dass die Komponenten des Levi-Cività-Tensors für zwei oder drei gleiche Indizes verschwinden).

Die Zahlen ϵ_{ijk} sind die Komponenten des Kreuzprodukts $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$. Zum Beweis berechnen wir die $k$te Komponente dieses Vektors durch Projektion auf den Einheitsvektor in k-Richtung, vgl. Gl. (1.42):

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_j)_k = \vec{e}_k \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \epsilon_{ijk} \ ,$$

wobei wir die Definition (1.44) und die zyklische Vertauschbarkeit des Spatprodukts, Gl. (1.34), benutzt haben. Das Kreuzprodukt $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ hat also die Komponentendarstellung

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \vec{e}_k \ .$$

Das Kreuzprodukt beliebiger Vektoren läßt sich damit nun wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} & \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\, \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j\, \epsilon_{ijk}\, \vec{e}_k \\ \Longrightarrow \quad & c_k = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j \\ \Longrightarrow \quad & c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \ , \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \ , \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ . \end{aligned}$$

6. **Spatprodukt:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k\, \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k \ .$$

7. Wir beweisen nun den **Entwicklungssatz** (1.36). Die $k$te Komponente des doppelten Kreuzprodukts aus Gl. (1.36) lautet unter Benutzung der Glgen. (1.46) und (1.47):

$$\begin{aligned} \Big[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\Big]_k &= \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i\, (\vec{b} \times \vec{c})_j = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i \sum_{l,m=1}^{3} \epsilon_{jlm}\, b_l\, c_m \\ &= \sum_{i,j,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{jlm}\, a_i\, b_l\, c_m = - \sum_{i,j,l,m=1}^{3} \epsilon_{ikj}\, \epsilon_{jlm}\, a_i\, b_l\, c_m \\ &= - \sum_{i,l,m=1}^{3} (\delta_{il}\, \delta_{km} - \delta_{im}\, \delta_{kl})\, a_i\, b_l\, c_m = \sum_{l,m=1}^{3} (a_m\, b_l\, c_m\, \delta_{kl} - a_l\, b_l\, c_m\, \delta_{km}) \\ &= b_k \sum_{m=1}^{3} a_m\, c_m - c_k \sum_{l=1}^{3} a_l\, b_l = \Big[\vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})\Big]_k \ , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

1.2 Vektorwertige Funktionen

1.2.1 Parametrisierung von Raumkurven

Wir betrachten wieder das Beispiel des fallenden Balles aus Abb. 1.2, allerdings wollen wir zur besseren Verdeutlichung der nachfolgenden Argumentation den Ursprung O nicht identisch mit der Position des Balles zum Anfangszeitpunkt $t_a = 0$ wählen, sondern etwas versetzt davon. Der Ortsvektor $\vec{r}(t_a)$ des Balles zu diesem Zeitpunkt ist dann nicht mehr

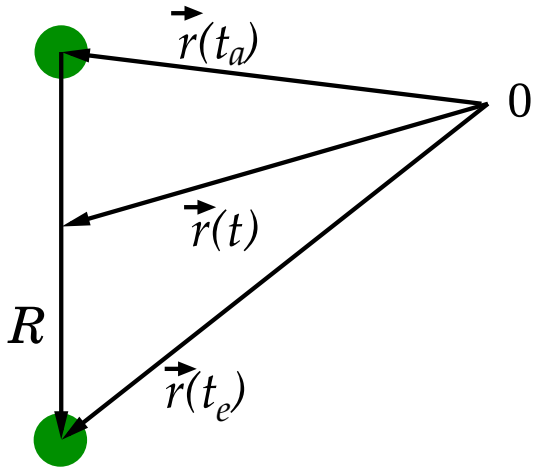


Abbildung 1.27: Der Ortsvektor des fallenden Balls als Funktion der Zeit.

identisch mit dem Nullvektor. Wenn der Ball zu Boden fällt, ändert sich der Ortsvektor im Laufe der Zeit wie in Abb. 1.27 gezeigt, bis er den Boden zum Zeitpunkt t_e erreicht.

Im Laufe der Zeit beschreibt der Ortsvektor die **Raum-** bzw. **Bahnkurve**, oder **Trajektorie** $\mathcal{R}$ des fallenden Balls. Dies läßt sich mathematisch so ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{r} : \mathbb{R} \supset [t_a,\, t_e] &\rightarrow \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \\ [t_a,\, t_e] \ni t &\mapsto \vec{r}(t) \in \mathcal{R} \; . \end{aligned}$$

Damit ist der Ortsvektor eine **vektorwertige Funktion einer Variablen**, in diesem Fall der Zeit. In der Physik gibt man üblicherweise weder den Definitionsbereich $[t_a,\, t_e]$ noch den Wertebereich $\mathcal{R}$ explizit an. Um auszudrücken dass es sich eine Funktion handelt, genügt üblicherweise die Angabe, dass $\vec{r}$ von einem Argument, hier der Zeit t, abhängt: $\vec{r}(t)$.

Die **Raumkurve** $\mathcal{R}$ des Balls schreibt man auch wie folgt:

$$\mathcal{R} = \{\vec{r}(t),\, t_a \leq t \leq t_e\} \; .$$

Die Zeit t ist hier ein Parameter, der von t_a bis t_e durchlaufen wird, währenddessen $\vec{r}(t)$ die Werte annimmt, die der Raumkurve $\mathcal{R}$ entsprechen. Raumkurven parametrisiert man in der Regel als Funktion der Zeit t, aber es sind auch andere Parametrisierungen möglich.

In einer festen, zeitunabhängigen Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\}$ gilt

$$\vec{r}(t) = \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\, \vec{e}_j = (x_1(t),\; x_2(t),\; x_3(t))^T = (x(t),\, y(t),\, z(t))^T \; . \tag{1.48}$$

Beispiele:

1. **Kreisbewegung** in der $(x, y)-$Ebene, vgl. Abb. 1.28:

   Der Kreis habe den Radius R. Der Winkel der momentanen Position des Teilchens relativ zur $x-$Achse ist $\varphi(t) = \omega t$, wobei ω die sog. **Kreisfrequenz** ist. Der Ortsvektor ist dann

   $$\vec{r}(t) = (R\, \cos(\omega t),\, R\, \sin(\omega t), 0)^T \; . \tag{1.49}$$

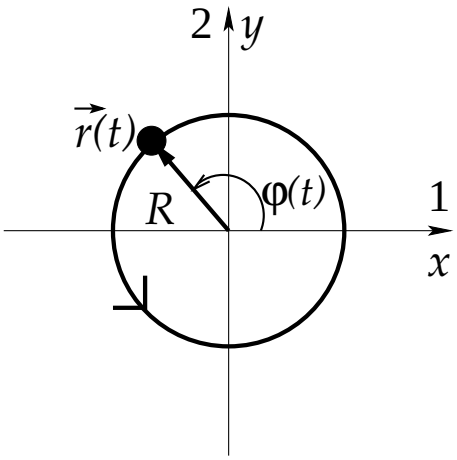


Abbildung 1.28: Kreisbewegung in der $(x, y)-$Ebene.

Der Periodizität der Kreisbewegung wird dadurch Rechnung getragen, dass die trigonometrischen Funktionen für Winkel, die sich um Vielfache von 2π (ein voller Umlauf) unterscheiden, identisch sind. Die **Periode**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

entspricht der Umlaufzeit des Teilchens auf dem Kreis.

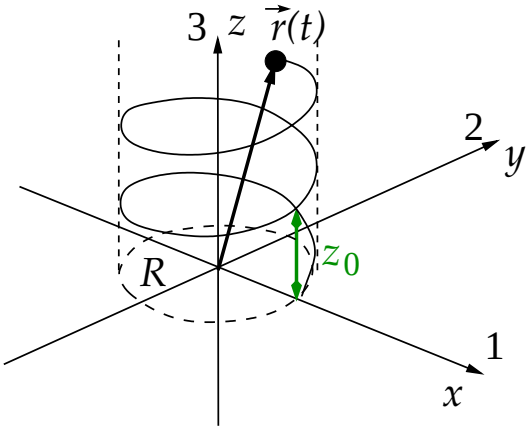


Abbildung 1.29: Schraubenlinie.

2. **Schraubenlinie**, vgl. Abb. 1.29: Der Ortsvektor ist

$$\vec{r}(t) = (R\,\cos(\omega t),\, R\,\sin(\omega t),\, b\,t)^T \ ,$$

wobei b ein Parameter ist, der die **Steig-** oder **Ganghöhe** z_0 der Schraubenlinie bestimmt,

$$z_0 = b\,T = b\,\frac{2\pi}{\omega} \ .$$

Neben der Parametrisierung als Funktion der Zeit t kann man Raumkurven auch anders parametrisieren. Beispielsweise bietet sich bei der Kreisbewegung die Parametrisierung als Funktion des Kreiswinkels an,

$$\vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi,\, R\sin\varphi,\, 0)^T \ .$$

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine Koordinate, z.B. x, als Parameter zu verwenden. Da der Radius des Kreises durch $R = \sqrt{x^2+y^2}$ gegeben ist, gilt $y = \pm\sqrt{R^2-x^2}$, je nachdem, ob man sich in der oberen ($y \geq 0$) oder unteren ($y < 0$) Halbebene befindet. Damit ist

$$\vec{r}(x) = \begin{cases} \left(x,\, \sqrt{R^2-x^2},\, 0\right)^T & \text{für } \ y \geq 0 \ , \\ \left(x,\, -\sqrt{R^2-x^2},\, 0\right)^T & \text{für } \ y < 0 \ . \end{cases}$$

1.2.2 Differentiation vektorwertiger Funktionen

Raumkurven von physikalischen Objekten sind üblicherweise **stetig** im mathematischen Sinn: $\vec{r}(t)$ stetig in $t = t_0$, falls $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$, so dass $\forall\ t$ mit $|t - t_0| < \delta$ gilt $|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| < \epsilon$. $\vec{r}(t)$ ist insbesondere dann stetig in t_0, wenn **alle** Komponenten $x_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, stetig in t_0 sind.

Raumkurven sind üblicherweise auch **differenzierbar** im mathematischen Sinn (es sei denn, das Objekt ändert schlagartig seine Bewegungsrichtung, z.B. ein Ball, der auf dem Boden aufschlägt). Sei $\vec{r}(t)$ der Ortsvektor des Objektes zum Zeitpunkt t und $\vec{r}(t+\Delta t)$ der Ortsvektor zum um ein kleines Zeitintervall Δt späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$. Wir definieren den **Differenzvektor** als

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \ ,$$

vgl. Abb. 1.30,

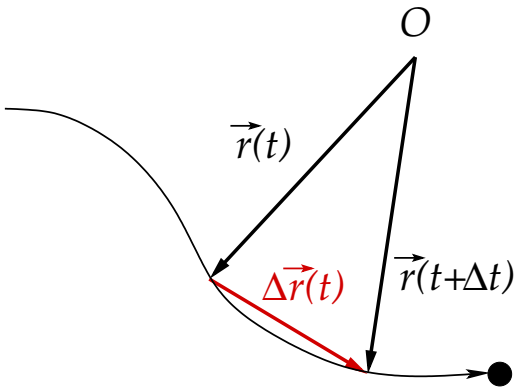


Abbildung 1.30: Definition des Differenzvektors.

Die **Ableitung** des Ortsvektors nach der Zeit ist dann als Grenzwert definiert,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \ . \tag{1.50}$$

7.5.2013

Physikalisch ist diese infinitesimale Änderung der Position des Objektes in einem infinitesimalen Zeitintervall nichts anderes als die **Geschwindigkeit** des Objektes,

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{r}}(t) \; . \tag{1.51}$$

Hier haben wir auf der rechten Seite der Gleichung die in der Physik für Zeitableitungen übliche Abkürzung mit einem Punkt über dem abzuleitenden Objekt eingeführt. In einer ortsfesten, d.h. zeitunabhängigen Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ gilt

$$\vec{v}(t) = \sum_{j=1}^{3} v_j(t)\,\vec{e}_j = \dot{\vec{r}}(t) = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j(t)\,\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x_j(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_j \; , \tag{1.52}$$

d.h. die Ableitung einer vektorwertigen Funktion ist in einer solchen zeitunabhängigen Basis durch die Ableitung ihrer Komponenten gegeben. Ganz entsprechend kann man höhere Ableitungen definieren,

$$\frac{\mathrm{d}^n\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^n x_j(t)}{\mathrm{d}t^n}\,\vec{e}_j \; , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Für $n = 2$ erhalten wir die **Beschleunigung**:

$$\vec{a}(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j(t)\,\vec{e}_j = \dot{\vec{v}}(t) = \sum_{j=1}^{3} \dot{v}_j(t)\,\vec{e}_j = \ddot{\vec{r}}(t) = \sum_{j=1}^{3} \ddot{x}_j(t)\,\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^2 x_j(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_j \; . \tag{1.53}$$

Differentiationsregeln:

$$(i) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{a}(t) + \vec{b}(t)\right] = \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{b}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t) \; , \tag{1.54}$$

$$(ii) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(t)\vec{a}(t)\right] = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{a}(t) + f(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{f}(t)\,\vec{a}(t) + f(t)\,\dot{\vec{a}}(t) \; , \tag{1.55}$$

$$(iii) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)\right] = \dot{\vec{a}}(t)\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\cdot\dot{\vec{b}}(t) \; , \tag{1.56}$$

$$(iv) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right] = \dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\dot{\vec{b}}(t) \; . \tag{1.57}$$

Der Beweis erfolgt unter Benutzung der Komponentendarstellung und Anwendung der üblichen Differentiationsregeln für gewöhnliche Funktionen. Die Gleichungen (1.55), (1.56) und (1.57) stellen die Verallgemeinerung der **Produktregel** der Differentiation auf die Multiplikation von Vektoren mit Zahlen, Gl. (1.55), auf das Skalarprodukt von Vektoren, Gl. (1.56), und auf das Kreuzprodukt, Gl. (1.57), dar. Wegen der Nichtkommutativität des Kreuzprodukts ist auf die Reihenfolge der Faktoren im zweiten Term von Gl. (1.57) zu achten.

Als wichtiges Anwendungsbeispiel für Gl. (1.56) betrachten wir den Einheitsvektor $\hat{a}(t) = \vec{a}(t)/a(t)$. Es gilt $\hat{a}(t)\cdot\hat{a}(t) = 1 \;\; \forall\; t$. Da die Zeitableitung einer Konstante verschwindet, folgt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\hat{a}(t)\cdot\hat{a}(t)\right] = 2\,\dot{\hat{a}}(t)\cdot\hat{a}(t) \; . \tag{1.58}$$

Dies wiederum bedeutet, dass $\dot{\hat{a}}(t)$ zu allen Zeiten orthogonal zu $\hat{a}(t)$ steht.

1.2.3 Bogenlänge

Eine sog. **glatte Raumkurve** ist eine Raumkurve, für die es (mindestens) eine **stetig differenzierbare** Parametrisierung $\vec{r}(t)$ gibt, für die nirgends $\mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t = 0$ gilt. Für glatte Raumkurven kann man anstelle der Zeit t auch die sog. **Bogenlänge** s als Parametrisierung verwenden. Die Bogenlänge ist grob gesprochen die Länge der Raumkurve. Um dies zu präzisieren, zerlegen wir eine beliebige Raumkurve in N Teilstücke, wie in Abb. 1.31 gezeigt.

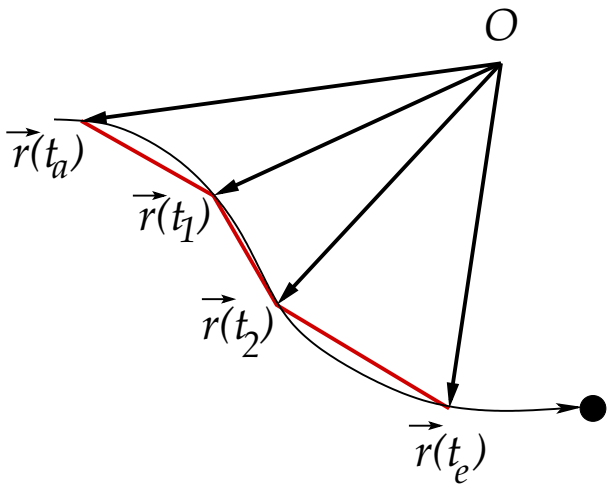


Abbildung 1.31: Zerlegung der Raumkurve in einen Polygonzug.

Hierbei wird das Zeitintervall $[t_a, t_e]$ in N gleiche Zeitintervalle Δt_N zerlegt, mit

$$t_n = t_a + n\,\Delta t_N\ ,\quad n = 0, 1, 2, \ldots, N\ ,\quad t_0 = t_a\ ,\quad t_N = t_a + N\Delta t_N = t_e\ .$$

Zu jeder Zeitmarke t_n ist die Position des Objektes durch den Ortsvektor $\vec{r}(t_n)$ gegeben. Für sehr große N kann man die Teilstücke der Bahnkurve in guter Näherung als **gerade** annehmen. Diese geraden Teilstücke definieren einen sog. **Polygonzug**. Der Polygonzug hat die Länge

$$L_N(t_a, t_e) = \sum_{n=0}^{N-1} |\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)| = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_N \left| \frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_N} \right| .$$

Die **Bogenlänge** s entspricht der Länge L_N des Polygonzugs für $N \to \infty$, $\Delta t_N \to 0$, $t_e - t_a = N\Delta t_N = const.$,

$$s = \lim_{N\to\infty} L_N(t_a, t_e) = \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{d}t \left| \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \equiv \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{d}t\ |\vec{v}(t)|\ . \tag{1.59}$$

Zu einem beliebigen, festen Zeitpunkt t gilt

$$s(t) = \int_{t_a}^{t} \mathrm{d}t' \left| \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t')}{\mathrm{d}t'} \right| \equiv \int_{t_a}^{t} \mathrm{d}t'\ |\vec{v}(t')|\ . \tag{1.60}$$

Damit gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \equiv |\vec{v}(t)| > 0 \,, \tag{1.61}$$

nach Voraussetzung für glatte Raumkurven. Diese Gleichung besagt, dass $s(t)$ eine streng monoton wachsende Funktion von t ist. Damit ist $t(s)$ eindeutig bestimmt und wir können den Raumkurvenparameter t durch s ersetzen,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s) \,.$$

Dies nennt man die sog. **natürliche Parametrisierung** der Raumkurve.

Beispiel: Wir betrachten die **Kreisbewegung** (1.49). Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = (-\omega R\,\sin(\omega t),\, \omega R\,\cos(\omega t),\, 0)^T \implies |\vec{v}(t)| = \omega R \,.$$

Wird die Kreisbewegung zum Zeitpunkt $t_a = 0$ gestartet, so ist die Bogenlänge zum Zeitpunkt t dann gemäß Gl. (1.60)

$$s(t) = \int_0^t \mathrm{d}t'\, \omega R = \omega R\, t \implies t(s) = \frac{s}{\omega R} \,.$$

Daraus folgt für die natürliche Parametrisierung

$$\vec{r}(s) = \left(R\,\cos\frac{s}{R},\, R\,\sin\frac{s}{R},\, 0\right)^T \,. \tag{1.62}$$

Nach einem vollen Umlauf ist $s/R = 2\pi$, d.h. $s = 2\pi R$. Damit ist die Bogenlänge erwartungsgemäß gleich dem Kreisumfang.

1.2.4 Das begleitende Dreibein

Das begleitende Dreibein ist ein spezielles Koordinatensystem, das auf der Raumkurve des Ortsvektors mitwandert. Es besteht aus drei Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \hat{t} \quad & \textbf{Tangentialvektor} \,, \\ \hat{n} \quad & \textbf{Normalenvektor} \,, \\ \hat{b} \quad & \textbf{Binormalenvektor} \,. \end{aligned}$$

Diese Einheitsvektoren bilden eine Orthonormalbasis,

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{b} \,, \quad \hat{n} = \hat{b} \times \hat{t} \,, \quad \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \,. \tag{1.63}$$

Der **Tangentialvektor** liegt tangential an der Raumkurve an, vgl. Abb. 1.32.

Daher gilt mit Gl. (1.61) und der Kettenregel, angewendet auf $\vec{r}(s(t))$,

$$\hat{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\left(\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|\right)^{-1} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \equiv \hat{t}(s) \,.$$

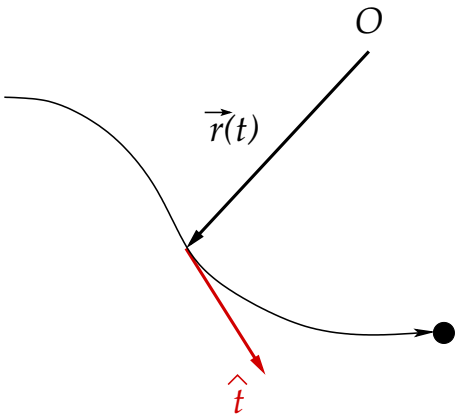


Abbildung 1.32: Der Tangentialvektor $\hat{t}$.

Die **Krümmung** κ der Raumkurve ist definiert als Betrag der Änderung des Tangentialvektors mit s, s. auch Abb. 1.33,

$$\kappa = \left| \frac{\mathrm{d}\hat{t}(s)}{\mathrm{d}s} \right| . \tag{1.64}$$

Der **Krümmungsradius** ρ ist das Inverse der Krümmung,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} . \tag{1.65}$$

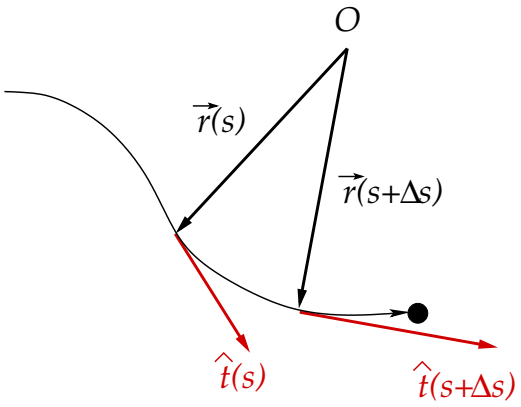


Abbildung 1.33: Änderung des Tangentialvektors mit s.

Für eine **geradlinige** Bewegung gilt

$$\hat{t}(s) = \widehat{const.} , \quad \kappa = 0 , \quad \rho = \infty .$$

Gleichung (1.63) bedingt, dass Normalenvektor und Binormalenvektor in einer Ebene senkrecht zu $\hat{t}$ liegen, vgl. Abb. 1.34.

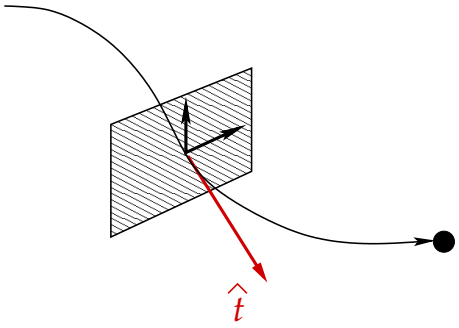


Abbildung 1.34: Die von Normalen- und Binormalenvektor aufgespannte Ebene senkrecht zu $\hat{t}$.

Da $\hat{t}$ ein Einheitsvektor ist, ist $\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{t}$; der Beweis ist analog zu Gl. (1.58). Einer der beiden Einheitsvektoren kann daher proportional zu $\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}$ gewählt werden. Dies ist der **Normalenvektor**,

$$\hat{n} = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\left(\left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\right|\right)^{-1} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \rho\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} \equiv \hat{n}(s)\ . \tag{1.66}$$

Die von $\hat{t}$ und $\hat{n}$ aufgepannte Ebene heißt **Schmiegungsebene**, vgl. Abb. 1.35.

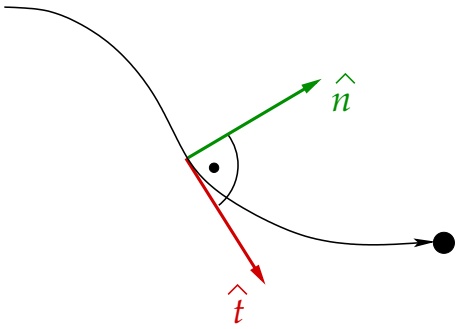


Abbildung 1.35: Tangential- und Normalenvektor. Die Schmiegungsebene ist identisch mit der Zeichenebene.

Der **Binormalenvektor** kann nun einfach durch das Kreuzprodukt von $\hat{t}$ mit $\hat{n}$ definiert werden, vgl. Gl. (1.63):

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}\ . \tag{1.67}$$

Er steht senkrecht auf der Schmiegungsebene, vgl. Abb. 1.36.

Erfolgt die Bewegung in einer festen, d.h. zeitlich konstanten Ebene (womit die Schmiegungsebene, die mit dieser Ebene identisch ist, ebenfalls zeitlich konstant ist), dann ist $\hat{b}$ unabhängig von s, $\hat{b} = \widehat{const.}$. Falls $\hat{b}$ sich mit s ändert, so ist dies ein Maß dafür, wie stark sich die Raumkurve aus der Schmiegungsebene "herausschraubt". Daher ist auch die Ableitung $\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s}$ von Interesse. Unter Benutzung von Gl. (1.66) in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\,\hat{n} \tag{1.68}$$

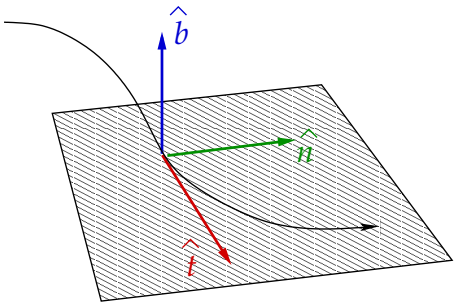


Abbildung 1.36: Tangential-, Normalen- und Binormalenvektor. Die von $\hat{t}$ und $\hat{n}$ aufgespannte Schmiegungsebene ist ebenfalls eingezeichnet.

und der Tatsache, dass das Kreuzprodukt identischer Vektoren verschwindet, erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} \times \hat{n} + \hat{t} \times \frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}s} = \kappa\, \hat{n} \times \hat{n} + \hat{t} \times \frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}s} = \hat{t} \times \frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}s} \,.$$

Also ist $\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{t}$. Weil $\hat{b}$ ein Einheitsvektor ist, ist außerdem $\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{b}$. Also muss $\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} \parallel \hat{n}$ sein. Die (negative) Proportionalitätskonstante bezeichnet man als **Torsion** τ der Raumkurve,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau\, \hat{n} \,. \tag{1.69}$$

Die inverse Torsion heißt **Torsionsradius**,

$$\sigma = \frac{1}{\tau} \,. \tag{1.70}$$

Die Glgen. (1.68) und (1.69) definieren die Ableitungen von Tangential- und Binormalenvektor nach s. Es fehlt nur noch die Ableitung von $\hat{n} = \hat{b} \times \hat{t}$ nach s,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}s} \times \hat{t} + \hat{b} \times \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} \\ &= -\tau\, \hat{n} \times \hat{t} + \hat{b} \times (\kappa\, \hat{n}) \\ &= \tau\, \hat{b} - \kappa\, \hat{t} \,, \end{aligned} \tag{1.71}$$

wobei wir im letzten Schritt $\hat{n} \times \hat{t} = -\hat{b}$ und $\hat{b} \times \hat{n} = -\hat{t}$ ausgenutzt haben. Die Glgen. (1.68), (1.69) und (1.71) heißen **Frenetsche Formeln**.

Beispiele:

1. **Kreisbewegung:** Der Ortsvektor in natürlicher Darstellung ist durch Gl. (1.62) gegeben. Daraus folgt für den Tangentialvektor

$$\hat{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}, 0\right)^T \,.$$

Die Ableitung von $\hat{t}$ nach s berechnet sich zu

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}, 0\right)^T ,$$

woraus für die Krümmung folgt

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{1}{R} .$$

Der Krümmungsradius ist also $\rho = 1/\kappa \equiv R$, d.h. identisch mit dem Radius des Kreises – ein bei der Kreisbewegung nicht weiter überraschendes Ergebnis. Der Normalenvektor ist dann

$$\hat{n} = \rho\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}, 0\right)^T ,$$

und der Binormalenvektor errechnet sich zu

$$\begin{aligned}\hat{b} = \hat{t}\times\hat{n} &= \vec{e}_1(t_2n_3 - t_3n_2) + \vec{e}_2(t_3n_1 - t_1n_3) + \vec{e}_3(t_1n_2 - t_2n_1)\\ &= \vec{e}_3\left(\sin^2\frac{s}{R} + \cos^2\frac{s}{R}\right)\\ &= \vec{e}_3 .\end{aligned}$$

Der Binormalenvektor ist also konstant (wie man es bei der Bewegung in einer festen Ebene erwartet, s.o.) und zeigt in z-Richtung, also senkrecht zur Kreisbewegung in der $(x, y)-$Ebene. Zur Lage von Tangential- und Normalenvektor s. Abb. 1.37.

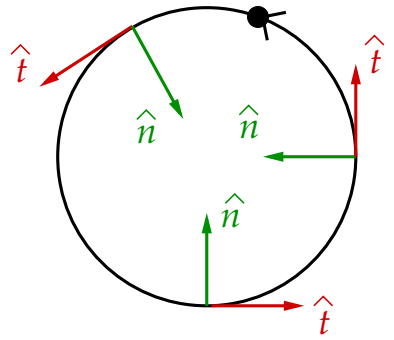


Abbildung 1.37: Tangential- und Normalenvektor bei der Kreisbewegung.

2. **Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes:** Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{t} \quad\Longrightarrow\quad v = |\vec{v}| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} .$$

Die Beschleunigung ist

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\hat{t})}{\mathrm{d}t} = \dot{v}\,\hat{t} + v\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{v}\,\hat{t} + v^2\,\kappa\,\hat{n} = \dot{v}\,\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{n} .$$

Diese Gleichung besagt, dass die Beschleunigung in der von $\hat{t}$ und $\hat{n}$ aufgespannten Schmiegungsebene liegt. Wir unterscheiden die **Tangentialbeschleunigung** $a_t = \hat{t}\cdot\vec{a} = \dot{v}$ und die **Normal-** oder **Zentripetalbeschleunigung** $a_n = \hat{n}\cdot\vec{a} = v^2/\rho$. Selbst wenn sich der Geschwindigkeits**betrag** zeitlich nicht ändert, $\dot{v} = 0$, und somit die Tangentialbeschleunigung verschwindet, so kann es dennoch eine Zentripetalbeschleunigung geben, welche die Geschwindigkeits**richtung** verändert. Voraussetzung dafür ist, dass der Krümmungsradius $\rho < \infty$. Umgekehrt gilt, dass es auf gekrümmten Bahnen **immer** eine Beschleunigung gibt, selbst wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist.

9.5.2013 (2)

1.3 Felder

Die Raumkurve $\mathcal{R}$ eines physikalischen Objekts ordnet einem Parameter, gewöhnlich der Zeit t, den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ zu diesem Zeitpunkt zu. Damit ist die Bahnbewegung des Objekts beschrieben. Wir kennen jedoch noch nicht die Ursache dafür, dass das Objekt eine bestimmte Bahnbewegung durchführt. Beim fallenden Ball aus Abb. 1.2 ist dies das **Gravitationsfeld** der Erde.

Allgemein ist ein Feld $A(\vec{r}, t)$ eine physikalische Größe, die an jedem Raumpunkt $\vec{r}$ und zu jeder Zeit t einen gewissen Wert annimmt. Im folgenden wollen wir uns auf **statische**, d.h. zeitunabhängige Felder $A(\vec{r})$ beschränken.

1.3.1 Klassifikation von Feldern

1. **Skalare Felder:** Ein skalares Feld φ ordnet einem Raumpunkt $\vec{r}$ eine Zahl $\varphi(\vec{r})$ zu,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N} \subset \mathbb{R} \\ \mathcal{M} \ni \vec{r} &\mapsto \varphi(\vec{r}) \in \mathcal{N} \, . \end{aligned}$$

   Mathematisch bedeutet dies, dass φ eine **skalarwertige** Funktion dreier unabhängiger Variablen $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ist.

   Ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$ kann man in Form von **Höhenlinien** im $\mathbb{R}^3$ darstellen, entlang derer das Feld konstante Werte annimmt, $\varphi(\vec{r}) = const.$. Hierbei sollte die Differenz $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_j$ zwischen den Werten des Feldes für benachbarte Höhenlinien $\varphi(\vec{r}) = \varphi_i = const.$ und $\varphi(\vec{r}) = \varphi_j = const.$ immer konstant gewählt werden.

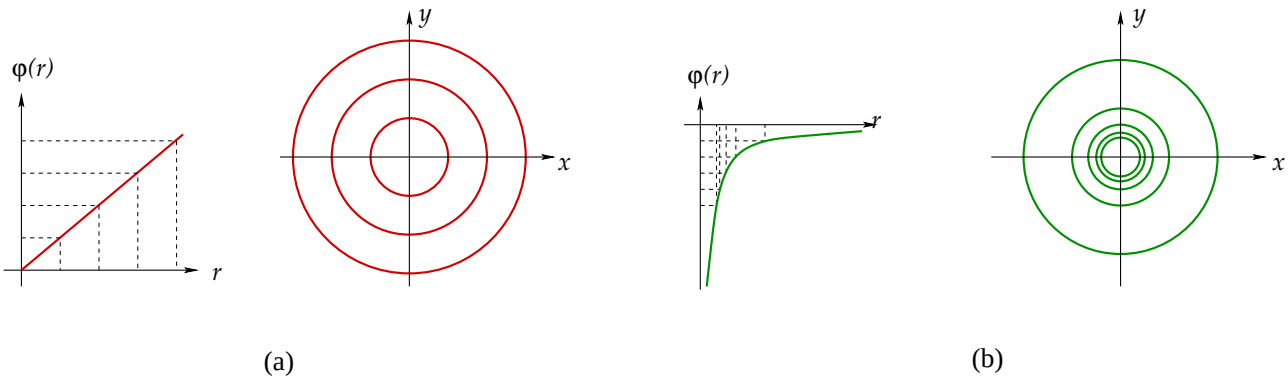
   Beispiele:

   (i) $\varphi(\vec{r}) = \beta\, r \;, \quad \beta > 0$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, vgl. Abb. 1.38(a). Für dieses sehr einfache Feld sind die Höhenlinien im $(x, y)-$Diagramm äquidistant.

   (ii) $\varphi(\vec{r}) = \alpha/r \;, \quad \alpha < 0$, vgl. Abb. 1.38(b).

2. **Vektorfelder:** Ein Vektorfeld ordnet einem Raumpunkt $\vec{r}$ einen Vektor $\vec{a}(\vec{r})$ zu,

$$\begin{aligned} \vec{a} : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{M} \ni \vec{r} &\mapsto \vec{a}(\vec{r}) \in \mathcal{N} \, . \end{aligned}$$



(a) (b)

Abbildung 1.38: (a) Das Feld $\varphi(\vec{r}) = \beta\, r\,,\ \beta > 0$, als Funktion von r und als Höhenliniendarstellung. (b) Entsprechendes für das Feld $\varphi(\vec{r}) = \alpha/r\,,\ \alpha < 0$.

Mathematisch bedeutet dies, dass $\vec{a}$ eine **vektorwertige** Funktion dreier unabhängiger Variablen $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ist.

Auch hier kann man die **Höhenliniendarstellung** verwenden, für Linien konstanten **Betrags** $|\vec{a}(\vec{r})| \equiv a(\vec{r}) = const.$ im $\mathbb{R}^3$. Allerdings muss man **zusätzlich** die Richtung von $\vec{a}(\vec{r})$ angeben, z.B. durch Vektorpfeile der Länge $a(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$.

Beispiele:

(i) $\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\vec{r}\,,\quad \beta > 0$, vgl. Abb. 1.39. Die Richtung von $\vec{a}(\vec{r})$ stimmt mit der Richtung von $\vec{r}$ überein, also zeigen die Vektorpfeile **radial** nach außen.

(ii) $\vec{a}(\vec{r}) = q\,\vec{r}/(4\pi\epsilon_0 r^3) = q\,\hat{r}/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Dies ist das elektrische Feld einer Punktladung q, die im Ursprung lokalisiert ist. Wir werden dies in der Elektrodynamik-Vorlesung ausführlich diskutieren. Auch dieses Feld zeigt radial nach außen, aber seine Stärke nimmt umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstands von der Punktladung ab.

Eine zweite Möglichkeit, Vektorfelder darzustellen, ist die sog. **Feldliniendarstellung**. Hier gibt die **Richtung** der Feldlinien die **Richtung** des Vektorfeldes und die Feldlinien**dichte** die **Stärke** bzw. den Betrag des Feldes an. Beispiele sind in Abb. 1.40 aufgeführt.

1.3.2 Partielle Ableitungen

Wie für Funktionen und vektorwertige Funktionen gibt es den Begriff der **Stetigkeit** auch für Felder:

1. Ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$ ist **stetig** in $\vec{r}_0$, falls $\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$, so dass $\forall\ \vec{r}$ mit $|\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta$ gilt $|\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0)| < \epsilon$.

2. Ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$ ist stetig in einem Raumbereich $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, wenn $\varphi(\vec{r})$ stetig $\forall\ \vec{r} \in \mathcal{M}$ ist.

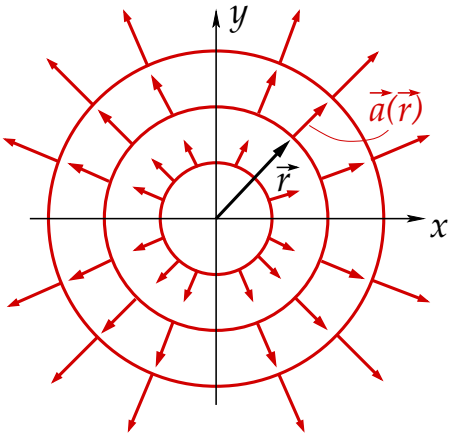


Abbildung 1.39: Das Feld $\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\vec{r}\,,\ \beta > 0$, als Höhenliniendarstellung und mit Richtungsfestlegung.

3. Ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ ist stetig in $\vec{r}_0$, wenn **jede** Komponente $a_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, dort stetig ist.

Felder sind auch **differenzierbar**. Da ein Feld von **drei** unabhängigen Variablen $\vec{r} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ abhängt, kann man auch nach diesen drei Variablen differenzieren. Dies führt zum Begriff der **partiellen Ableitung**. Dabei hält man beim Ableiten nach einer bestimmten Variablen die anderen konstant, z.B. lautet die Ableitung nach x_1

$$\left.\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_1}\right|_{x_2,x_3} = \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\varphi(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}\,. \tag{1.72}$$

Da bei der partiellen Ableitung nach einer Variablen die anderen **immer** konstant gehalten werden, kann man sich die explizite Notation mit dem senkrechten Strich auch sparen. Andere Schreibweisen der partiellen Ableitung sind daher

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \partial_{x_1}\varphi = \partial_1\varphi\,.$$

Analog definiert man die partiellen Ableitungen nach x_2 und x_3,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_2}\right|_{x_1,x_3} &= \lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{\varphi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2}\,,\\
\left.\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_3}\right|_{x_1,x_2} &= \lim_{\Delta x_3\to 0}\frac{\varphi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\varphi(\vec{r}) = r \quad\Longrightarrow\quad \partial_i\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{3} x_j^2} = \frac{x_i}{r}\,. \tag{1.73}$$

Vektorfelder leitet man ab, indem man **jede Komponente** partiell ableitet.

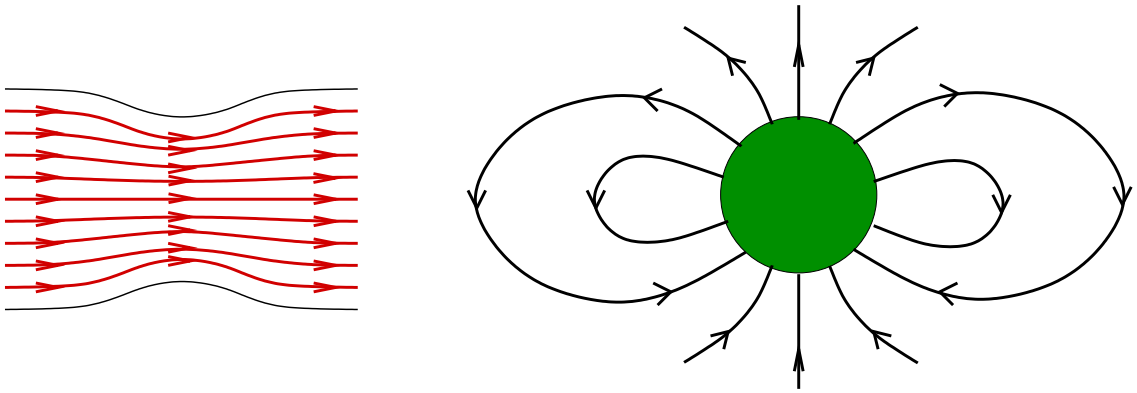


Abbildung 1.40: (a) Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. (b) Magnetfeld der Erde.

Beispiele:

1. $$\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\vec{r} \implies \partial_i\,\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\partial_i \sum_{j=1}^{3} x_j\,\vec{e}_j = \beta \sum_{j=1}^{3} \partial_i x_j\,\vec{e}_j = \beta \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\vec{e}_j = \beta\,\vec{e}_i\ ,$$

   wobei wir $\partial x_j/\partial x_i = \delta_{ij}$ ausgenutzt haben.

2. $$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{r}) = \alpha\,\frac{\vec{r}}{r^3} \implies \partial_i\,\vec{a}(\vec{r}) &= \alpha\,\partial_i\frac{\vec{r}}{r^3} = \alpha\left[-\frac{3}{r^4}\,(\partial_i\,r)\,\vec{r} + \frac{1}{r^3}\,\partial_i\,\vec{r}\right] \\ &= \alpha\left(-\frac{3\,\vec{r}}{r^4}\,\frac{x_i}{r} + \frac{1}{r^3}\,\vec{e}_i\right) = \frac{\alpha}{r^3}\left(-3\,\frac{x_i}{r}\,\hat{r} + \vec{e}_i\right)\ . \end{aligned}$$

Regeln der partiellen Differentiation:

1. $\partial_i\,(\varphi_1 + \varphi_2) = \partial_i\,\varphi_1 + \partial_i\,\varphi_2\,.$
2. $\partial_i\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\partial_i\,\vec{a})\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot(\partial_i\,\vec{b})\,.$
3. $\partial_i\,(\vec{a}\times\vec{b}) = (\partial_i\,\vec{a})\times\vec{b} + \vec{a}\times(\partial_i\,\vec{b})\,.$

Mehrfache partielle Ableitungen:

1. **Zweifache** partielle Ableitung nach einer Variablen wird auf die partielle Ableitung der ersten partiellen Ableitung zurückgeführt:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ .$$

2. Dies läßt sich auf **mehrfache** partielle Ableitungen verallgemeinern:

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_i^n} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x_i^{n-1}} \; .$$

3. **Gemischte** partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \; .$$

Gewöhnlich werden Ableitungen von rechts nach links abgearbeitet. Falls das Feld jedoch **zweifach stetig differenzierbar** ist, darf man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \; .$$

1.3.3 Totale Ableitung und totales Differential

Wir erinnern uns an die übliche **Kettenregel** für Funktionen **einer** Veränderlichen, z.B. $f(x(t))$:

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \; . \tag{1.74}$$

Diese Regel hat auch Bestand, wenn wir Funktionen **mehrerer** Veränderlicher betrachten, falls lediglich eine davon von dem Parameter, nach dem abgeleitet wird, abhängt. Z.B. für das Feld $\varphi(x_1(t), x_2, x_3)$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x_1(t), x_2, x_3)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi(\vec{r})}{\mathrm{d}x_1} \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \; . \tag{1.75}$$

Wie aber verhält es sich, wenn **alle** Variablen von demselben Parameter abhängen, z.B. $\varphi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \varphi(\vec{r}(t))$? Wir definieren

$$\Delta x_i(t) = x_i(t + \Delta t) - x_i(t) \iff x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta x_i(t) \; ,$$

und berechnen den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}
D \equiv & \frac{\varphi(\vec{r}(t + \Delta t)) - \varphi(\vec{r}(t))}{\Delta t} = \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta t} \\
= & \frac{1}{\Delta t} [\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \\
& \qquad - \; \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) + \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \\
& \qquad + \; \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)] \\
= & \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\Delta x_1} \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \\
+ & \frac{\varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\Delta x_2} \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \\
+ & \frac{\varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \frac{\Delta x_3}{\Delta t} \; ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Zeitabhängigkeit der Argumente unterdrückt haben. Im Limes $\Delta t \to 0$, in dem wegen der Stetigkeit der Funktionen $x_i(t)$ auch $\Delta x_i(t) \to 0\,,\ i = 1,2,3\,$, gehen die Differenzenquotienten der Felder in die partiellen Ableitungen und die Differenzenquotienten der Komponenten des Ortsvektors in die gewöhnliche Ableitung nach der Zeit über. Wir erhalten die sog. **totale Ableitung** des Feldes $\varphi(\vec{r}(t))$ nach t,

$$\lim_{\Delta t\to 0} D = \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_1}\,\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_2}\,\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_3}\,\frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_j}\,\frac{\mathrm{d}x_j(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t}\ . \tag{1.76}$$

Diese Gleichung verallgemeinert die übliche Kettenregel (1.74) auf die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Gleichung (1.75) folgt sofort als Spezialfall, für den x_2 und x_3 nicht von der Zeit abhängen. Multipliziert man Gl. (1.76) mit dem Differential $\mathrm{d}t$, so erhält man das **totale Differential** des Feldes $\varphi(\vec{r})$,

$$\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\ . \tag{1.77}$$

Anschaulich bedeutet dies die totale Änderung von φ, wenn man von der Position $\vec{r}$ zur neuen Position $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$ übergeht.

1.3.4 Gradient, Divergenz, Rotation

14.5.2013

Aus den partiellen Ableitungen des skalaren Feldes $\varphi(\vec{r})$ nach den einzelnen Komponenten des Ortsvektors kann man ein Vektorfeld konstruieren, das sog. **Gradientenfeld** bzw. den **Gradienten** von φ,

$$\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_1},\,\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_2},\,\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_3}\right)^T = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_j}\,\vec{e}_j\ . \tag{1.78}$$

Eine alternative (modernere und daher weitaus häufiger vorkommende) Schreibweise für den Gradienten ist die folgende. Man definiert zunächst den sog. **Nabla-Operator**, einen **vektorwertigen Differentialoperator**,

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\,\frac{\partial}{\partial x_2},\,\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T = \sum_{j=1}^{3}\vec{e}_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3}\vec{e}_j\,\partial_j\ . \tag{1.79}$$

Dieser Operator wirkt auf Funktionen, die rechts von ihm stehen. Damit läßt sich der Gradient von $\varphi(\vec{r})$ auch schreiben als

$$\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\ .$$

Mit dem infinitesimalen Differenzenvektor $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)$ kann man daher das totale Differential (1.77) als **Skalarprodukt** des Gradienten von $\varphi(\vec{r})$ mit $\mathrm{d}\vec{r}$ schreiben,

$$\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = [\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})]\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right]\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{1.80}$$

Wie kann man sich den Gradientenvektor eines Feldes veranschaulichen? Die infinitesimale Positionsänderung $\mathrm{d}\vec{r}$ ist beliebig, also können wir sie im speziellen entlang einer Richtung wählen, in der sich $\varphi(\vec{r})$ **nicht** ändert, also entlang einer Höhenlinie $\varphi(\vec{r}) = const.$, entlang der gilt $\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = 0$. Dann ist

$$0 = \left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,\Big|_{\text{Höhenlinie}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \perp \mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Der Gradient steht also **senkrecht** auf den Höhenlinien, vgl. Abb. 1.41(a). Gleichung (1.80) läßt sich nun wie folgt interpretieren:

$$\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = |\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})|\,|\mathrm{d}\vec{r}|\,\cos\theta\,,$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{\nabla}\varphi$ und $\mathrm{d}\vec{r}$ ist, vgl. Abb. 1.41(b). Falls $\theta = 0$, dann steht $\mathrm{d}\vec{r}$ **parallel** zu $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$, also **senkrecht** zu den Höhenlinien und die Änderung $\mathrm{d}\varphi(\vec{r})$ ist maximal. Falls $\theta = \pi/2$, dann steht $\mathrm{d}\vec{r}$ senkrecht zu $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$, also entlang einer Höhenlinie und $\mathrm{d}\varphi(\vec{r})$ verschwindet. Für jeden Winkel $0 < \theta < \pi/2$ ist $\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) > 0$, aber gegenüber der maximal möglichen Änderung um $\cos\theta < 1$ reduziert.

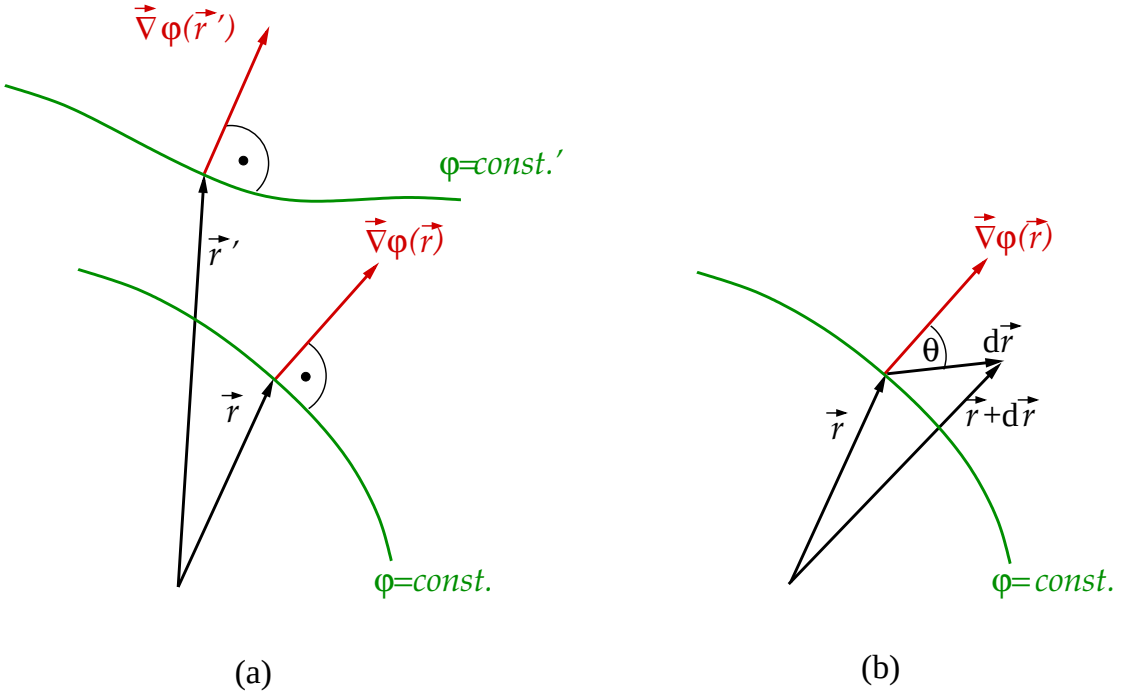


Abbildung 1.41: (a) Veranschaulichung des Gradientenfeldes. (b) Lage der Vektoren $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ und $\mathrm{d}\vec{r}$ zur Bestimmung des Skalarprodukts $\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Rechenregeln:

1. $\vec{\nabla}(\varphi_1 + \varphi_2) = \vec{\nabla}\varphi_1 + \vec{\nabla}\varphi_2$.
2. $\vec{\nabla}(\varphi_1\varphi_2) = (\vec{\nabla}\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1\vec{\nabla}\varphi_2$.

Den Beweis führt man am einfachsten in Komponentenschreibweise.

Beispiele:

1. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) &= \vec{\nabla}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i\, \vec{\nabla} x_i = \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j\, \partial_j x_i = \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j\, \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i\, \vec{e}_i = \vec{a}\ .\end{aligned}$$

2. Wegen Gl. (1.73) ist

$$\vec{\nabla} r = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, \partial_i\, r = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, \frac{x_i}{r} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, x_i = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}\ . \tag{1.81}$$

3. Wegen $\partial_i\, r^{-2} = -2\, r^{-3}\, \partial_i\, r$ und Gl. (1.73) ist

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^2} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, \partial_i \frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^3} \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, \frac{x_i}{r} = -\frac{2}{r^3}\, \hat{r}\ .$$

4. Mit $f'(r) \equiv \mathrm{d}f(r)/\mathrm{d}r$ und Gl. (1.73) ist

$$\vec{\nabla} f(r) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, \partial_i f(r) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\, \partial_i\, r = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\, \frac{x_i}{r} = f'(r)\, \hat{r}\ .$$

Der Gradient ist ausschließlich für **skalare** Felder definiert. Der Nabla-Operator ist aber formal ein Vektor, der mit anderen Vektoren durch das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt verknüpft werden kann. Die Verknüpfung des Nabla-Operators mit einem stetig differenzierbaren Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ mittels des Skalarprodukt führt zum Begriff der **Divergenz** des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$,

$$\mathrm{div}\, \vec{a}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j\, a_j(\vec{r})\ . \tag{1.82}$$

Man nennt die Divergenz von $\vec{a}(\vec{r})$ auch das **Quellenfeld** von $\vec{a}(\vec{r})$. Wir werden die physikalische Interpretation aber später ausführlich diskutieren.

Rechenregeln:

1. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b}$.
2. Für $\gamma = const. \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{\nabla} \cdot (\gamma \vec{a}) = \gamma\, \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$.
3. Für ein skalares Feld φ und ein Vektorfeld $\vec{a}$ gilt $\vec{\nabla} \cdot (\varphi\, \vec{a}) = \varphi\, \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi$. Diese Gleichung lautet in etwas antiquierter Fassung $\mathrm{div}\, (\varphi\, \vec{a}) = \varphi\, \mathrm{div}\, \vec{a} + \vec{a} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi$.

Der Beweis gelingt sehr einfach in Komponentenschreibweise für das Skalarprodukt.

Beispiele:

1. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$. Dann folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$; konstante Vektorfelder sind quellenfrei.

2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \partial_j x_j = 3$.

3. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) &= \sum_{k=1}^{3} \partial_k (\vec{r} \times \vec{a})_k = \sum_{k=1}^{3} \partial_k \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, x_i\, a_j \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_j\, \partial_k\, x_i = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_j\, \delta_{ik} = 0 \ , \end{aligned}$$

   d.h. das Feld $\vec{r} \times \vec{a}$ ist quellenfrei.

Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst führt auf einen neuen Operator, den sog. **Laplace-Operator** Δ:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) &\equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_j^2} \equiv \Delta \varphi(\vec{r}) \ , \\ \text{mit } \Delta &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \equiv \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 \ . \end{aligned} \tag{1.83}$$

Zum Schluß verknüpfen wir noch den Nabla-Operator mit einem stetig differenzierbaren Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ mittels des Kreuzprodukts. Dies führt zum Begriff der **Rotation** des Vektorfelds $\vec{a}(\vec{r})$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \partial_i\, a_j(\vec{r})\, \vec{e}_k \\ &= \vec{e}_1 \left(\frac{\partial a_3(\vec{r})}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2(\vec{r})}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial a_1(\vec{r})}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3(\vec{r})}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial a_2(\vec{r})}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1(\vec{r})}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \tag{1.84}$$

Die Rotation definiert das sog. **Wirbelfeld** eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$; mehr zur physikalischen Interpretation folgt später.

Rechenregeln:

1. $\vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times \vec{b}$.

2. Für $\gamma = const. \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{\nabla} \times (\gamma\, \vec{a}) = \gamma\, \vec{\nabla} \times \vec{a}$.

3. $\vec{\nabla} \times (\varphi\, \vec{a}) = \varphi\, \vec{\nabla} \times \vec{a} + (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{a}$. Beweis als Übungsaufgabe.

4. Für zweimal stetig differenzierbare skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ gilt:

$$\text{rot grad}\,\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right] = 0\;, \tag{1.85}$$

Gradientenfelder sind stets wirbelfrei.
Beweis:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\partial_i(\partial_j\,\varphi)\,\vec{e}_k = \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{1}{2}\,(\epsilon_{ijk} - \epsilon_{jik})\;(\partial_i\,\partial_j\,\varphi)\,\vec{e}_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,(\partial_i\,\partial_j\,\varphi)\,\vec{e}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{jik}\,(\partial_j\,\partial_i\,\varphi)\,\vec{e}_k\;,\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile im zweiten Term die zweifache stetige Differenzierbarkeit von φ ausgenutzt haben, welche auf $\partial_i\,\partial_j\,\varphi = \partial_j\,\partial_i\,\varphi$ führt. Wenn wir nun im zweiten Term die Umbenennung $i \leftrightarrow j$ in den Summationsindizes vornehmen, sehen wir, dass der zweite Term identisch mit dem ersten ist, die beiden Terme sich also gegenseitig wegheben, q.e.d. 16.5.2013

Bemerkung: Die Beweisidee stützt sich auf folgende allgemein gültige Regel. Sei $a_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_n}$ ein Tensor $n$ter Stufe, der **symmetrisch** in den Indizes i und j ist, $a_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_n} = a_{i_1 i_2 \cdots j \cdots i \cdots i_n}$, und $b_{j_1 j_2 \cdots i \cdots j \cdots j_m}$ ein Tensor $m$ter Stufe, der **antisymmetrisch** im gleichen Indexpaar ist, $b_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_m} = -b_{i_1 i_2 \cdots j \cdots i \cdots i_m}$. Dann gilt

$$\sum_{i,j} a_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_n}\, b_{j_1 j_2 \cdots i \cdots j \cdots j_m} = 0\;. \tag{1.86}$$

Der Beweis erfolgt analog dem für obige Rechenregel 4., indem man unter Benutzung von $b_{j_1 j_2 \cdots i \cdots j \cdots j_m} = (b_{j_1 j_2 \cdots i \cdots j \cdots j_m} - b_{j_1 j_2 \cdots j \cdots i \cdots j_m})/2$ die Doppelsumme in zwei Terme aufspaltet, die Symmetrie von $a_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_n}$ im zweiten Term ausnutzt und schließich die Summationsindizes $i \leftrightarrow j$ umbenennt.

5. Für zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$ gilt:

$$\text{div rot}\,\vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})\right] = 0\;, \tag{1.87}$$

Wirbelfelder sind stets quellenfrei.
Beweis:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \sum_{i=1}^{3} \partial_i \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jki}\,(\partial_j\,a_k) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{jki}\,(\partial_i\,\partial_j\,a_k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{1}{2}\,(\epsilon_{jki} - \epsilon_{ikj})\;(\partial_i\,\partial_j\,a_k) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{1}{2}\,(\epsilon_{ijk} - \epsilon_{jik})\;(\partial_i\,\partial_j\,a_k)\;.\end{aligned}$$

Ab hier verläuft der Beweis analog dem in der vorangegangenen Regel 4. Man erhält das Ergebnis aber auch schon ausgehend von der vorangehenden Zeile unter Benutzung von Gl. (1.86), denn ϵ_{jki} ist antisymmetrisch in i und j, während $\partial_i\,\partial_j\,a_k$ symmetrisch in diesen beiden Indizes ist, q.e.d.

6. Ein Vektorfeld, welches in Richtung des Ortsvektors zeigt und nur vom Betrag des Ortsvektors abhängt, z.B. $f(r)\,\hat{r}$, bezeichnet man als **Zentralfeld**. Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times [f(r)\,\hat{r}] = 0\ , \tag{1.88}$$

Zentralfelder sind stets wirbelfrei.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times [f(r)\,\hat{r}] &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\partial_i \left[f(r)\,\frac{x_j}{r} \right] \vec{e}_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left[f'(r)\,\frac{x_i}{r}\,\frac{x_j}{r} + f(r)\,\frac{r\,\partial_i\,x_j - x_j\,\partial_i\,r}{r^2} \right] \vec{e}_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left[f'(r)\,\frac{x_i\,x_j}{r^2} + f(r)\,\frac{r\,\delta_{ij} - x_i\,x_j/r}{r^2} \right] \vec{e}_k = 0\ ,
\end{aligned}$$

nach Anwendung von Gl. (1.86), denn der Ausdruck in eckigen Klammern ist symmetrisch in den Indizes i und j, während ϵ_{ijk} antisymmetrisch ist, q.e.d.

7. Für zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\text{rot rot}\,\vec{a}(\vec{r}) &= \text{grad div}\,\vec{a}(\vec{r}) - \Delta\,\vec{a}(\vec{r}) \\
\text{oder} \quad \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) \right] &= \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \right] - \Delta\,\vec{a}(\vec{r})\ .
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Beweis als Übungsaufgabe.

1.4 Matrizen und Determinanten

1.4.1 Matrizen

Ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{array}{l} {\scriptstyle i=1,\ldots,m} \\ {\scriptstyle j=1,\ldots,n} \end{array}$$

heißt $\boldsymbol{(m \times n)}$**−Matrix**.

Zwei $(m \times n)-$Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ sind **identisch**, wenn alle ihre Elemente identisch sind, $a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall\, i, j\,,\; i = 1, \ldots, m\,,\; j = 1, \ldots, n$.

Spezielle Matrizen:

1. **Quadratische Matrix:** $m = n$.
2. **Zeilenvektor:** $m = 1$.
3. **Spaltenvektor:** $n = 1$.
4. **Nullmatrix:** alle Elemente sind null.
5. **Symmetrische Matrix:** quadratische Matrix mit $a_{ij} = a_{ji} \;\; \forall\, i, j$. Insbesondere ist die Matrix dann symmetrisch gegenüber einer Spiegelung ihrer Elemente an der Hauptdiagonalen.
   Beispiel:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$
6. **Diagonalmatrix:** quadratische Matrix mit $a_{ij} = a_i\, \delta_{ij}$; nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen sind von null verschieden,
   $$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} .$$
7. **Einheitsmatrix:** quadratische Matrix mit $a_{ij} = \delta_{ij}$, bzw. Diagonalmatrix mit $a_i = 1$,
   $$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

8. **Transponierte Matrix:** $A^T = (a_{ij}^T) = (a_{ji})$. Sie folgt aus der Matrix A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

   Die transponierte Matrix A^T ist eine $(n \times m)-$Matrix.

Rang einer Matrix: Man kann die m Zeilen bzw. n Spalten einer $(m \times n)-$Matrix als Zeilen- bzw. Spaltenvektoren interpretieren. Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren heißt **Zeilen-** bzw. **Spaltenrang** der Matrix. Man kann zeigen, dass der Zeilenrang mit dem Spaltenrang identisch ist, deshalb spricht man allgemein vom **Rang** der Matrix.

1.4.2 Rechenregeln für Matrizen

1. **Addition:** A, B seien $(m \times n)-$Matrizen. Dann ist $C = A + B$ eine $(m \times n)-$Matrix mit den Elementen

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, i, j \ .$$

   Matrizen werden also elementweise addiert. Es ist klar, dass man nur Matrizen **gleichen** Typs, also mit gleicher Anzahl von Zeilen und Spalten addieren kann.

2. **Multiplikation mit reellen Zahlen:** A sei eine $(m \times n)-$Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda\, A = (\lambda\, a_{ij}) \ .$$

   Jedes Element von A wird mit λ multipliziert.

3. **Multiplikation von Matrizen:** Sei A eine $(m \times n)-$Matrix und B eine $(n \times r)-$Matrix. Dann ist $C = AB$ eine $(m \times r)-$Matrix mit den Elementen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \ , \quad i = 1, \ldots, m \ , \quad j = 1, \ldots, r \ .$$

   Mit anderen Worten, c_{ij} ist das Skalarprodukt des i-ten **Zeilen**vektors von A mit dem j-ten **Spalten**vektor von B,

$$\begin{matrix} \\ \text{Zeile } i \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Spalte } j \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \\ \text{Zeile } i \end{matrix} \begin{matrix} \text{Spalte } j \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots & \\ \cdots & c_{ij} \quad \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} .$$

   Offenbar ist die Matrizenmultiplikation **nur** für den Fall definiert, dass die **Anzahl der Spalten** der ersten Matrix A mit der **Anzahl der Zeilen** der zweiten Matrix B übereinstimmt.

Spezialfälle:

(i) $m = r = 1$. In diesem Fall ist A ein Zeilenvektor und B ein Spaltenvektor und die Matrix C besteht aus einem einzigen Element, c_{11}, welches mit dem Skalarprodukt der beiden Vektoren identisch ist,

$$C = A\,B = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, b_{k1} = c_{11} \; .$$

(ii) $r = 1$. In diesem Fall ist A eine $(m \times n)-$Matrix, aber B ein n-dimensionaler Spaltenvektor. Damit ist C ein m-dimensionaler Spaltenvektor,

$$C = A\,B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \;\; , \;\; c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_j \; .$$

Die Matrizenmultiplikation ist i.a. **nicht kommutativ**,

$$A\,B \neq B\,A \; .$$

Dies ist klar, da i.a. $m \neq r$ und das Produkt $B\,A$ gar nicht definiert ist. Für den Fall, dass $m = r$, ist dies ebenfalls klar, da $A\,B$ eine $(m \times m)-$Matrix ist, während $B\,A$ eine $(n \times n)-$Matrix ist und i.a. $m \neq n$. Voraussetzung für die Kommutativität der Matrizen A und B wäre also, dass $m = n = r$, d.h. dass sie **quadratische** Matrizen sind. Aber selbst dann ist das Produkt $A\,B$ nicht gleich $B\,A$, wie man sich anhand von Gegenbeispielen leicht klarmacht.

4. **Inverse Matrix:** Die inverse Matrix A^{-1} hat die Eigenschaft, dass

$$A^{-1}\,A = A\,A^{-1} = \mathbf{1} \; .$$

1.4.3 Drehmatrizen

Seien Σ, Σ' zwei rechtshändige Koordinatensysteme, repräsentiert durch die Orthonormalbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bzw. $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$. Man kann durch eine **Translation** bewirken, dass die Ursprünge von Σ und Σ' zusammenfallen, $O = O'$. Dann sind Σ und Σ' i.a. noch gegeneinander gedreht, vgl. Abb. 1.42.

Wir betrachten nun den Ortsvektor der Position eines physikalischen Objektes, die selbstverständlich **unabhängig** von der Wahl des Koordinatensystems ist,

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} x_j\, \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x_j'\, \vec{e}_j' \; . \tag{1.90}$$

Bei vorgegebenen Basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ und bei Kenntnis der Komponenten x_j lassen sich die Komponenten x_i' durch Projektion von Gl. (1.90) auf den Einheitsvektor $\vec{e}_i'$ ausrechnen,

$$\sum_{j=1}^{3} x_j\, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} x_j'\, \vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} x_j'\, \delta_{ji} = x_i' \; , \tag{1.91}$$

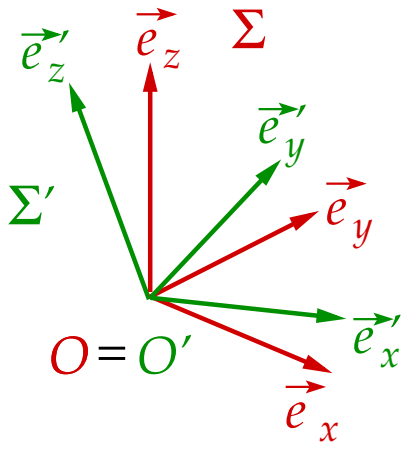


Abbildung 1.42: Die beiden gegeneinander gedrehten Koordinatensysteme Σ und Σ'.

wobei wir die Orthonormalität der Einheitsvektoren in der gestrichenen Basis ausgenutzt haben, $\vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_i = \delta_{ji}$. Die Frage ist, wie das Skalarprodukt $\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i$ zu berechnen ist. Dazu machen wir die folgende Überlegung. Jeder Einheitsvektor $\vec{e}'_i$ im gestrichenen System hat natürlich auch eine Komponentendarstellung im ungestrichenen System,

$$\vec{e}'_i = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, \vec{e}_k \ , \tag{1.92}$$

wobei wir die Komponenten des i-ten gestrichenen Einheitsvektors im ungestrichenen System mit d_{ik} bezeichnet haben. Durch Projektion dieser Gleichung auf $\vec{e}_j$ und Ausnutzen der Orthonormalität $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$ erhalten wir

$$\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, \delta_{jk} = d_{ij} = \cos\varphi_{ij} \ , \tag{1.93}$$

wobei φ_{ij} der Winkel zwischen der i-ten Achse im gestrichenen System Σ' und der j-ten Achse im ungestrichenen System Σ ist.

Die neun Zahlen d_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, lassen sich in Form einer $(3 \times 3)-$Matrix schreiben, der sog. **Drehmatrix**,

$$D = (d_{ij}) = (\cos\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \ . \tag{1.94}$$

Aus der Orthonormalität der Basisvektoren und Gl. (1.92) berechnen wir

$$\delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \sum_{k,l=1}^{3} d_{ik}\, d_{jl}\, \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \sum_{k,l=1}^{3} d_{ik}\, d_{jl}\, \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{jk} \ . \tag{1.95}$$

Dies bedeutet, dass der Zeilenvektor, der durch die Elemente der i-ten Zeile der Drehmatrix D gebildet wird, orthonormal zu dem Zeilenvektor ist, der durch die Elemente der

j-ten Zeile gebildet wird. Man bezeichnet diesen Sachverhalt auch als **Zeilenorthonormalität** der Drehmatrix.

Gleichung (1.91) kann nun unter Zuhilfenahme von Gl. (1.93) folgendermaßen geschrieben werden,

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}\, x_j \ , \tag{1.96}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\vec{r}(\Sigma') = D\, \vec{r}(\Sigma) \ . \tag{1.97}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{r}(\Sigma')$ den Vektor, der aus den Komponenten x'_j des Ortsvektors im gestrichenen, gegenüber Σ **gedrehten** System Σ' gebildet wird, während $\vec{r}(\Sigma)$ der Ortsvektor im ungestrichenen System Σ ist. Die Drehmatrix D bewirkt die Drehung des Koordinatensystems Σ nach Σ'. Man beachte hierbei, dass sich der **physikalische Ort** des Objektes **nicht** ändert, sondern lediglich das Koordinatensystem zur Beschreibung dieses Ortes. Drehungen des Koordinatensystems bezeichnet man als **passive Drehungen**. Im Gegensatz dazu gibt es auch die sog. **aktiven Drehungen**, bei denen sich das Koordinatensystem nicht ändert, aber Vektoren in diesem System gedreht werden und damit ihre Lage verändern.

21.5.2013

Die **inverse** Matrix D^{-1} macht die Transformation (1.97) rückgängig,

$$D^{-1}\, \vec{r}(\Sigma') = D^{-1}\, D\, \vec{r}(\Sigma) = \mathbf{1}\, \vec{r}(\Sigma) = \vec{r}(\Sigma) \ . \tag{1.98}$$

Die Elemente d_{ij}^{-1} von D^{-1} ergeben sich aus folgender Überlegung. Wir projezieren Gl. (1.90) auf $\vec{e}_i$ und benutzen Gl. (1.93) in der Form $\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j = d_{ji}$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} x'_j\, \vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ji}\, x'_j \ ,$$

oder unter Benutzung von $d_{ji} = d_{ij}^T$ in Matrixschreibweise:

$$\vec{r}(\Sigma) = D^T\, \vec{r}(\Sigma') \ . \tag{1.99}$$

Der Vergleich von Gl. (1.98) mit Gl. (1.99) liefert:

$$D^{-1} = D^T \ , \quad d_{ij}^{-1} = d_{ij}^T = d_{ji} \ . \tag{1.100}$$

Matrizen, die diese Identität erfüllen, nennt man **orthogonale Matrizen**.

Die Zeilenorthornormalität (1.95) läßt sich ebenfalls in Matrixschreibweise fassen:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{jk} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{kj}^T = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{kj}^{-1} \iff \mathbf{1} = D\, D^T = D\, D^{-1} \ .$$

Es gilt aber auch $\mathbf{1} = D^{-1} D$, oder in Komponenten

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}^{-1}\, d_{kj} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}^T\, d_{kj} = \sum_{k=1}^{3} d_{ki}\, d_{kj} \ . \tag{1.101}$$

Diese Gleichung läßt sich analog der Zeilenorthonormalität so interpretieren, dass die **Spaltenvektoren**, die die Matrix D bilden, **orthonormal** zueinander stehen. Man spricht von der **Spaltenorthonormalität** der Drehmatrix.

Beispiel: Wir betrachten eine Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse, vgl. Abb. 1.43. Eine solche Drehung verändert lediglich die x- und y-Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$, also die Komponenten von $\vec{\rho}$, der Projektion des Ortsvektors auf die (x, y)–Ebene. Die z-Komponente von $\vec{r}$ bleibt unverändert, $x_3' = x_3$.

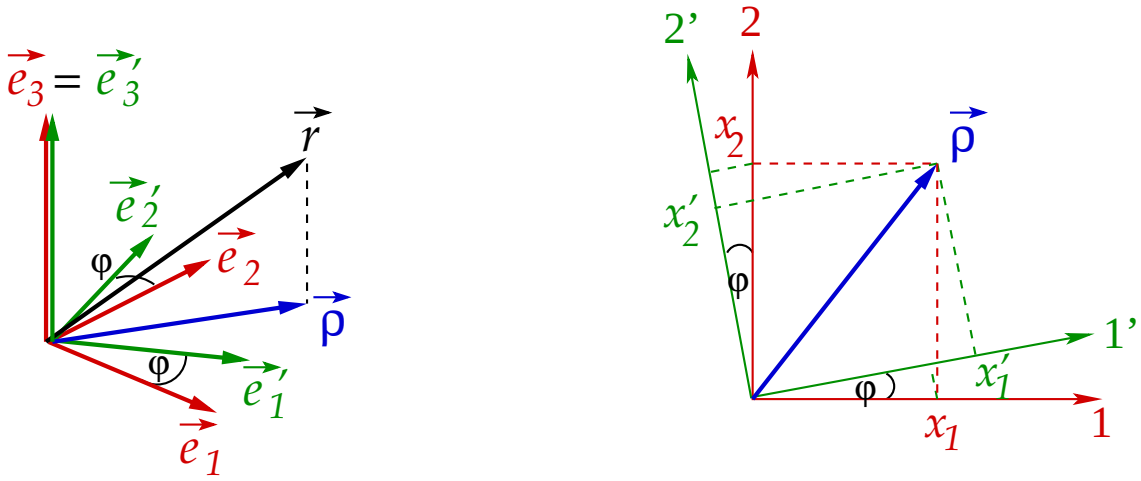


Abbildung 1.43: Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse.

Wir betrachten zunächst die rechte Seite der Abb. 1.43. Eine geometrische Überlegung führt auf die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} x_1\,\vec{e}_1 &= x_1\,\cos\varphi\,\vec{e}_1' - x_1\,\sin\varphi\,\vec{e}_2' \,, \\ x_2\,\vec{e}_2 &= x_2\,\sin\varphi\,\vec{e}_1' + x_2\,\cos\varphi\,\vec{e}_2' \,. \end{aligned}$$

Die Projektion $\vec{\rho}$ des Ortsvektor ist aber in beiden Systemen identisch,

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 \equiv x_1'\,\vec{e}_1' + x_2'\,\vec{e}_2' \\ &= (x_1\,\cos\varphi + x_2\,\sin\varphi)\,\vec{e}_1' + (-x_1\,\sin\varphi + x_2\,\cos\varphi)\,\vec{e}_2' \\ \Longrightarrow\quad x_1' &= x_1\,\cos\varphi + x_2\,\sin\varphi \,, \qquad (1.102) \\ x_2' &= -x_1\,\sin\varphi + x_2\,\cos\varphi \,. \qquad (1.103) \end{aligned}$$

Andererseits lassen sich die Komponenten im gedrehten System bei Kenntnis der Drehmatrix auch über Gl. (1.97) berechnen. Die Komponenten der Drehmatrix können aus ihrer Definition (1.93) und Abb. 1.43 bestimmt werden. Mit $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$ und $\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin\varphi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &d_{11} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1' = \cos\varphi \,, && d_{12} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1' = \sin\varphi \,, && d_{13} = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1' = 0 \,, \\ &d_{21} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2' = -\sin\varphi \,, && d_{22} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2' = \cos\varphi \,, && d_{23} = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2' = 0 \,, \\ &d_{31} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3' = 0 \,, && d_{32} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3' = 0 \,, && d_{33} = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3' = 1 \,, \end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist

$$\vec{r}(\Sigma') = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = D\,\vec{r}(\Sigma) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Nach den Regeln der Matrixmultiplikation führt dies ebenfalls auf die Gleichungen (1.102) und (1.103), sowie auf $x_3' = x_3$.

Damit eine Matrix D eine Drehung beschreibt, muss sie eine orthogonale Matrix sein, d.h. Gl. (1.100) bzw. die Zeilenorthonormalität (1.95) und die Spaltenorthonormalität (1.101) müssen erfüllt sein. Aber führt diese Drehung eine rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ in eine rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ über? Dazu muss offenbar aus $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = 1$ auch $\vec{e}_1' \cdot (\vec{e}_2' \times \vec{e}_3') = 1$ folgen. Dies kann man mit Hilfe der sog. **Determinante** von D überprüfen, $\det D$. Um die Händigkeit des Koordinatensystems bei der Drehung zu erhalten, muss $\det D = +1$ gelten (dies werden wir weiter unten beweisen). Diese Drehungen heißen **eigentliche** Drehungen. Falls $\det D = -1$, so handelt es sich um **uneigentliche** Drehungen. Man erhält sie aus den eigentlichen Drehungen durch Hinzunahme der **Raumspiegelung** (z.B. durch Inversion einer ungeraden Anzahl von Koordinatenachsen).

Orthogonale Matrizen in n Dimensionen bilden eine **Gruppe** im mathematischen Sinn, die man mit $O(n)$ bezeichnet. Orthogonale Matrizen, die zusätzlich noch $\det D = +1$ erfüllen, bilden eine Untergruppe der $O(n)$, die Gruppe der **speziellen** orthogonalen Matrizen, $SO(n)$. Es gilt $O(n) = SO(n) \times Z_2$. Die Gruppe Z_2 ist die **zyklische Gruppe** mit zwei Elementen, welche man zur Charakterisierung von Raumspiegelungen verwenden kann. Während die $SO(n)$ eine sog. **kontinuierliche Gruppe** darstellt, ist Z_2 eine sog. **diskrete Gruppe**.

1.4.4 Determinanten

Sei A eine $(n \times n)-$Matrix. Dann ist die **Determinante** von A definiert als

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \mathrm{sgn}\,(P)\, a_{1\,p(1)}\, a_{2\,p(2)} \cdots a_{n\,p(n)} \,, \tag{1.104}$$

wobei $\{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \equiv P(1, 2, \ldots, n)$ eine **Permutation** der Folge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Eine Permutation ist definiert als eine Abfolge von **Transpositionen**, das sind **sukzessive** Vertauschungen benachbarter Elemente der Folge. **Gerade** Permutationen entstehen aus der ursprünglichen Folge durch eine **gerade** Zahl von Transpositionen, **ungerade** Permutationen entsprechend durch eine **ungerade** Zahl von Transpositionen.

Eine Permutation ändert die Reihenfolge der Elemente der Folge, jedes Element kommt aber weiterhin genau einmal vor. Dies bedeutet, dass jeder Summand auf der rechten Seite der Definition (1.104) ein Element aus jeder Zeile und ein Element aus jeder Spalte der Matrix A enthält. Die Summe läuft über **alle** möglichen Permutationen dieser Folge und besteht damit aus $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ Termen.

Das Symbol $\mathrm{sgn}\,(P)$ steht für das **Vorzeichen** der Permutation P. Es ist definiert als $\mathrm{sgn}\,(P) = (-1)^Z$, wobei Z die Zahl der Transpositionen ist, um aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ die Folge $\{p(1), p(2), \ldots, p(n)\}$ zu erhalten. Mit anderen Worten, $\mathrm{sgn}\,(P) = +1$ für **gerade** Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathrm{sgn}\,(P) = -1$ für **ungerade** Permutationen.

Für $n \leq 2$ ist die Determinante direkt aus ihrer Definition (1.104) berechenbar:

$$\begin{aligned} n = 1 \;:\quad & \det A &&= \det(a_{11}) = a_{11}\;, \\ n = 2 \;:\quad & \det A &&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(12)\, a_{11}\, a_{22} + \mathrm{sgn}(21)\, a_{12}\, a_{21} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}\;. \end{aligned}$$

Daraus resultiert eine einfache Merkregel für die Berechnung von $(2 \times 2)-$Determinanten: man subtrahiere das Produkt der beiden Nebendiagonalelemente vom Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente.

Für $n > 2$ wird die Berechnung der Determinante gemäß ihrer Definition (1.104) schnell zu kompliziert, da die Zahl der Permutationen rapide ansteigt. Z.B. gibt es für $n = 3$ schon $3! = 6$ Terme unter der Summe. Hier hilft der sog. **Entwicklungssatz**:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, A_{ij}\;, \tag{1.105}$$

wobei A_{ij} die sog. **Unterdeterminante** ist, die aus Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus $\det A$ resultiert. Man beachte, dass der Zeilenindex i in Gl. (1.105) fest vorgegeben, aber frei wählbar ist. Man entwickelt also nach der i-ten Zeile der Determinante. Bei konkreten Berechnungen ist es daher sinnvoll, die Zeile mit den meisten Nullen zu wählen, weil dann die Zahl der Terme in der Summe auf der rechten Seite von Gl. (1.105) auf ein Minimum reduziert werden kann.

Die Unterdeterminante A_{ij} ist die Determinante einer $[(n-1) \times (n-1)]-$Matrix, für die gemäß der Definition (1.104) $n! - (n-1)! = (n-1) \cdot (n-1)!$ weniger Terme in der Summe in Gl. (1.104) auftreten als für die ursprüngliche Determinante. Allerdings muss man i.a. n solcher Unterdeterminanten ausrechnen, es sei denn, einige Elemente a_{ij} der $i-$ten Zeile der Matrix A sind null.

In praktischen Berechnungen wendet man den Entwicklungssatz **rekursiv** an, also berechnet jede Unterdeterminante A_{ij} erneut mit Hilfe des Entwicklungssatzes. Dies führt letztlich auf $(2 \times 2)-$Unterdeterminanten, die man einfach wie oben beschrieben berechnen kann.

Man kann aber anstatt nach einer Zeile auch nach einer Spalte entwickeln,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, A_{ij}\;. \tag{1.106}$$

Den Beweis führt man ausgehend von der Identität

$$\det A = \det A^T\;, \tag{1.107}$$

welche man durch Anwenden der Definition (1.104) der Determinanten und geeignetem Umsortieren der Terme beweist.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir den Fall $n = 3$ und die Entwicklung nach der ersten Zeile. Dieser Spezialfall des Entwicklungssatzes ist als **Sarrus-Regel** bekannt:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \; .
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt auch direkt aus der Definition (1.104), wenn wir bedenken, dass ϵ_{ijk} mit dem Vorzeichen der Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ identisch ist.

1.4.5 Rechenregeln für Determinanten

1. Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit $\alpha \in \mathbb{R}$, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{i1} & \cdots & \alpha\, a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.108}$$

   Der Beweis folgt direkt aus dem Entwicklungssatz, durch Entwickeln nach der betreffenden Zeile oder Spalte. n-faches Anwenden liefert

$$\det(\alpha\, A) = \alpha^n \det A \; .$$

2. Addition eines Vektors zu einer Zeile oder einer Spalte, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & \cdots & a_{in} + b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \; . \tag{1.109}$$

   Der Beweis folgt direkt aus dem Entwicklungssatz, durch Entwickeln nach der betreffenden Zeile oder Spalte.

3. Vertauschen einer benachbarten Zeile oder Spalte ändert das Vorzeichen der Deter-

minante, z.B. für eine Zeile,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \tag{1.110}$$

Dies beweist man direkt mit der Definition (1.104) der Determinante, unter Berücksichtigung, dass $\operatorname{sgn}(1, 2, \ldots, i, i+1, \ldots, n) = -\operatorname{sgn}(1, 2, \ldots, i+1, i, \ldots, n)$; eine weitere Transposition zweier Zahlen in einer gegebenen Permutation ändert das Vorzeichen der Permutation.

4. Die Determinante einer Matrix mit zwei identischen Zeilen oder Spalten verschwindet, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 . \tag{1.111}$$

Der Beweis lautet wie folgt: zunächst vertauscht man Zeilen oder Spalten, bis die beiden identischen Zeilen oder Spalten **benachbart** sind. Aufgrund der Definition (1.104) mag sich dabei das Vorzeichen der Determinante ändern (bei einer ungeraden Zahl von Vertauschungen), oder aber es bleibt wie es ist (bei einer geraden Zahl von Vertauschungen). Dieses Vorzeichen spielt aber für die weitere Argumentation keine Rolle. Nun vertauscht man noch die beiden identischen benachbarten Zeilen oder Spalten. Nach Gl. (1.110) sollte sich dabei das Vorzeichen der Determinante ändern. Jedoch hat man die Determinante nicht verändert, da die beiden Zeilen oder Spalten identisch sind. Dies ist nur möglich, falls die Determinante null ist.

5. Addition einer mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ multiplizierten Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile oder Spalte ändert die Determinante nicht, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \alpha\, a_{j1} & \cdots & a_{in} + \alpha\, a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \tag{1.112}$$

Hierbei wurden die Eigenschaften (1.109) und (1.111) ausgenutzt.

6. Die Determinante eines Produktes von zwei Matrizen ist gleich dem Produkt der jeweiligen Determinanten,

$$\det(A\,B) = \det A \det B\ . \tag{1.113}$$

7. Die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente,

$$\det \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i\ . \tag{1.114}$$

Der Beweis folgt direkt aus dem Entwicklungssatz.

8. Als Korollar zu Gl. (1.114) folgt: die Determinante der Einheitsmatrix ist 1,

$$\det \mathbf{1} = 1\ . \tag{1.115}$$

9. Aus den Eigenschaften (1.113) und (1.115) folgt sofort

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ . \tag{1.116}$$

Beweis: $\det \mathbf{1} = \det(A\,A^{-1}) = \det A \det A^{-1}$, q.e.d.

23.5.2013

10. Multipliziert man die Elemente a_{ik} der i-ten Zeile mit $(-1)^{j+k}\,A_{jk}$, wobei $j \neq i$, und summiert über alle k, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(-1)^{j+k}\,A_{jk} = 0\ . \tag{1.117}$$

Entsprechendes gilt für die Spalten,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\,(-1)^{j+k}\,A_{kj} = 0\ . \tag{1.118}$$

Zum Beweis von Gl. (1.117) definieren wir eine Matrix B, die mit A identisch ist, bis auf die Tatsache, dass die Elemente der j-ten Zeile wieder die gleichen sind wie die in der i-ten Zeile,

$$B = \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{Zeile } j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\ .$$

Gemäß Gl. (1.111) verschwindet die Determinante von B. Andererseits ist nach dem Entwicklungssatz, bei Entwicklung nach der j-ten Zeile,

$$0 = \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\,(-1)^{j+k}\,A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(-1)^{j+k}\,A_{jk}\ , \quad \text{q.e.d.}$$

Der Beweis für Spalten geht analog.

1.4.6 Anwendungen

1. **Inverse Matrix:** Die Inverse A^{-1} einer Matrix A existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$, und sie hat die Elemente

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{\det A} \; . \tag{1.119}$$

Man beachte die Reihenfolge der Indizes in der Unterdeterminante A_{ji}!

Beweis: Wir definieren eine $(n \times n)-$Matrix B mit Elementen $b_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ji}$. Nach dem Entwicklungssatz gilt

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = (A\,B)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = (B\,A)_{jj} \; . \end{aligned}$$

Hier haben wir in der ersten Zeile nach der i-ten Zeile und in der zweiten Zeile nach der j-ten Spalte entwickelt. Da i und j beliebig waren, sind offenbar **alle** Diagonalelemente der Produktmatrizen $A\,B$ und $B\,A$ alle identisch mit $\det A$. Andererseits verschwinden alle Nebendiagonalelemente aufgrund von Gl. (1.117),

$$(A\,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} A_{jk} = 0 \quad \text{für } i \neq j \; .$$

Die Produktmatrizen haben also die Form

$$A\,B = B\,A = (\det A)\,\mathbf{1} \quad \Longleftrightarrow \quad (A\,B)_{ij} = (B\,A)_{ij} = (\det A)\,\delta_{ij} \; .$$

Multiplikation dieser Gleichung von links oder von rechts mit A^{-1} liefert

$$A^{-1} = \frac{B}{\det A} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{\det A} \; , \quad \text{q.e.d.}$$

2. **Vektorprodukt:** Die Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$ läßt sich mit Hilfe der Sarrus-Regel gestalten:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1 (a_2\,b_3 - a_3\,b_2) - \vec{e}_2 (a_1\,b_3 - a_3\,b_1) + \vec{e}_3 (a_1\,b_2 - a_2\,b_1) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, \vec{e}_k \\ &= \vec{a} \times \vec{b} \; . \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass der Ausdruck auf der linken Seite nur als mnemonische Hilfe (von griech.: *μνήμη*, Gedächtnis, oder *μνημονικός*, ein gutes Gedächtnis habend; auf gut deutsch: Gedächtnisstütze) zur Berechnung der rechten Seite dient; eine Determinante mit **Vektoren** als Elemente einer Zeile ist mathematisch nicht wohldefiniert.

3. **Rotation:** Für die Rotation gilt entsprechendes,

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} .$$

4. **Spatprodukt:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Dies folgt aus der Regel für das Vektorprodukt, oder durch direktes Ausrechnen der Determinante.

Spezialfall:

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \mathbf{1} = 1 .$$

5. **Drehmatrix:** Unter welchen Voraussetzungen ist eine beliebige Matrix D eine Drehmatrix? Wir hatten gesehen, dass sie einerseits eine orthogonale Matrix sein muss, $D^T = D^{-1}$. Aus dieser Tatsache folgt sofort, dass ihre Determinante den Wert ± 1 annimmt,

$$\begin{aligned} 1 &= \det \mathbf{1} = \det (D\, D^{-1}) = \det (D\, D^T) = \det D \det D^T = (\det D)^2 \\ \Longrightarrow \quad \det D &= \pm 1 , \end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (1.107), (1.113) und (1.115) benutzt haben.

Andererseits muss sie eine rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ in eine ebenfalls rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ überführen, d.h. aus $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = +1$ muss $\vec{e}_1' \cdot (\vec{e}_2' \times \vec{e}_3') = +1$ folgen. Letzteres ist durch die Orthogonalität allein nicht gewährleistet. Wenn man z.B. in der i-ten Zeile die Vorzeichen aller Elemente umkehrt, $d_{ij} \to -d_{ij}$, dann ändert sich die Zeilenorthonormalität nicht, aber der gestrichene i-te Einheitsvektor ändert sein Vorzeichen,

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}\, \vec{e}_j \quad \longrightarrow -\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} (-d_{ij})\, \vec{e}_j .$$

Wenn man den Vorzeichenwechsel der Elemente für eine ungerade Zahl von Zeilen durchführt, macht man aus einem rechtshändigen Koordinatensystem ein linkshändiges. Offensichtlich bewirkt diese Änderung auch einen Vorzeichenwechsel der Determinante, $\det D \to -\det D$.

Aber welches Vorzeichen hat $\det D$ für die Überführung eines rechtshändigen in ein rechtshändiges System? Hierzu benutzen wir die für rechtshändige Systeme gültige Identität (1.44) und berechnen mit der Drehung (1.92) der Einheitsvektoren und der Sarrus-Regel

$$\vec{e}_1' \cdot (\vec{e}_2' \times \vec{e}_3') = \sum_{m,n,r=1}^{3} d_{1m}\, d_{2n}\, d_{3r}\, \vec{e}_m \cdot (\vec{e}_n \times \vec{e}_r) = \sum_{m,n,r=1}^{3} \epsilon_{mnr}\, d_{1m}\, d_{2n}\, d_{3r} = \det D \; .$$

Damit nun das gestrichene Koordinatensystem wieder ein rechtshändiges System ist, muss $\det D = +1$ gelten.

6. **Lineare Gleichungssysteme:** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n &=& b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n &=& b_n \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad A\,\vec{x} = \vec{b}\; . \tag{1.120}$$

Falls $\vec{b} = 0$, spricht man von einem **homogenen** Gleichungssystem, andernfalls von einem **inhomogenen** Gleichungssystem. Dieses Gleichungssystem hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det A \neq 0$. Die **Cramersche Regel** gibt an, wie diese Lösung zu konstruieren ist. Wir betrachten die Matrix

$$A_k \;=\; \begin{array}{c} \text{Spalte } k \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) ,$$

d.h. die Matrix, die sich aus A durch Ersetzen der k-ten Spalte durch den Vektor $\vec{b}$ ergibt. Dann ist die Lösung des Gleichungssystems (1.120) gegeben durch

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} \; , \quad k = 1, \ldots, n \; . \tag{1.121}$$

Beweis: Wir multiplizieren die n Gleichungen (1.120) mit $(-1)^{i+k}\, A_{ik}$, wobei k fest gewählt wird und i der jeweilige Zeilenindex ist,

$$\begin{array}{rcl} (a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n)\, (-1)^{1+k}\, A_{1k} &=& b_1\, (-1)^{1+k}\, A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n)\, (-1)^{n+k}\, A_{nk} &=& b_n\, (-1)^{n+k}\, A_{nk} \; , \end{array}$$

und summieren alle Gleichungen auf,

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, (-1)^{i+k}\, A_{ik} \right) x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i\, (-1)^{i+k}\, A_{ik} \; .$$

Der Ausdruck in der Klammer auf der linken Seite der Gleichung verschwindet gemäß Gl. (1.118) für $j \neq k$, so dass lediglich ein Term in der Summe über j übrig bleibt,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,(-1)^{i+k}\,A_{ik}\,x_k \equiv x_k \det A = \sum_{i=1}^{n} b_i\,(-1)^{i+k}\,A_{ik} = \det A_k\ ,$$

wobei wir auf der rechten Seite den Entwicklungssatz für die Entwicklung nach der k-ten Spalte der Determinante von A_k angewendet haben. Daraus folgt sofort die Behauptung, q.e.d.

Wir schließen mit einer Bemerkung zu homogenen linearen Gleichungssystemen. Wegen $\vec{b} = 0$ ist auch $\det A_k = 0$. Falls $\det A \neq 0$, bleibt nach der Cramerschen Regel nur die triviale Lösung, $\vec{x} = 0$. Nichttriviale Lösungen $\vec{x} \neq 0$ kann es also nur für $\det A = 0$ geben. Dies ist ein häufig verwendetes Kriterium, um zu entscheiden, ob ein Gleichungssystem nichttriviale Lösungen hat. Es bedeutet aber auch, dass nicht alle Zeilen oder Spalten von A **linear unabhängig** sind. Mit anderen Worten, **linear abhängige** Zeilen oder Spalten lassen sich durch eine geeignete Linearkombination der anderen ausdrücken. Wendet man nun Eigenschaft (1.112) mehrfach an, kann man auf diese Weise eine Nullzeile generieren. Dann verschwindet aber auch die Determinante.

28.5.2013

1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Transformation der Variablen

Bislang wurden kartesische Koordinatensysteme betrachtet, die man durch Drehungen ineinander überführen kann. Kartesische Koordinatensysteme sind jedoch unzweckmäßig, wenn man beispielsweise ein Problem mit **sphärischer Symmetrie**, d.h. **Kugelsymmetrie**, lösen möchte. In diesem Fall ist es besser, sog. **Kugelkoordinaten** zu verwenden. I.a. sollte man das Koordinatensystem der **Symmetrie** des Problems anpassen. Dadurch vereinfacht man in der Regel den Rechenaufwand. Die neuen Koordinaten sind i.a. nicht kartesisch. Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, welche Gesetzmäßigkeiten beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem zu beachten sind.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

Nach Abb. 1.44 gilt:

$$x_1 = r\,\cos\varphi = x_1(r,\varphi)\ , \tag{1.122}$$

$$x_2 = r\,\sin\varphi = x_2(r,\varphi)\ . \tag{1.123}$$

Dies definiert eine Abbildung $(r,\varphi) \mapsto (x_1, x_2)$, eine sog. **zweidimensionale Punkttransformation**. Sie bildet die $(r,\varphi)-$Ebene Punkt für Punkt auf die $(x_1, x_2)-$Ebene ab.

Offenbar ist **jeder** Punkt (x_1, x_2) durch einen Punkt (r,φ) beschreibbar. Aber ist dies **genau ein** Punkt (r,φ), oder gibt es Mehrdeutigkeiten? Gibt es u.U. **mehrere** Punkte in der $(r,\varphi)-$Ebene, die **denselben** Punkt (x_1, x_2) beschreiben? Ganz offensichtlich ist

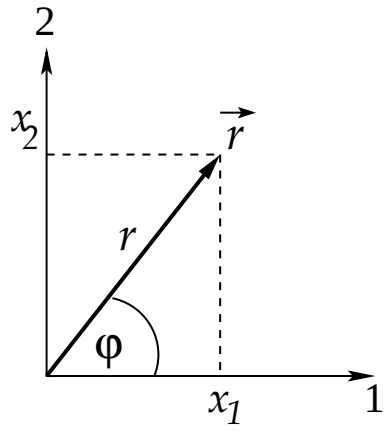


Abbildung 1.44: Ebene Polarkoordinaten.

dies der Fall, denn wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen führen die Winkel φ, $\varphi \pm 2\pi, \varphi \pm 4\pi$, etc. zu demselben Punkt (x_1, x_2). Man sollte sich daher beim Definitionsbereich des Winkels φ auf das halboffene Intervall $[0, 2\pi)$ beschränken. Aber auch dann ist die Zuordnung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ nicht eindeutig, z.B. werden **alle** Punkte $(0, \varphi)$ (d.h. $r = 0$ und **beliebige** Werte für φ) stets auf einen einzigen Punkt, den Ursprung $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, abgebildet. Man sagt, die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ ist nicht eindeutig umkehrbar. Solange man den Ursprung aus der Betrachtung nimmt, also für alle $r \neq 0$, ist sie jedoch eindeutig umkehrbar:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \tag{1.124}$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}\,. \tag{1.125}$$

Man sagt, die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ ist **fast überall** umkehrbar.

Diese Betrachtung läßt sich auf d Dimensionen verallgemeinern. Dazu definieren wir zuerst die Begriffe der **Eineindeutigkeit** und der **lokalen Umkehrbarkeit**.

Definition: Eine Abbildung $\vec{y} \equiv (y_1, \ldots, y_d) \mapsto \vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_d)$ heißt **eineindeutig**, wenn jeder Punkt $\vec{y}$ auf **genau einen** Punkt $\vec{x}$ abgebildet wird **und umgekehrt**, vgl. Abb. 1.45.

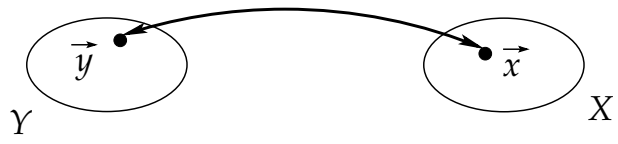


Abbildung 1.45: Eine eineindeutige Abbildung.

Definition: Eine Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ heißt **lokal umkehrbar**, wenn die Abbildung in einer **Umgebung** X von $\vec{x}$ und einer **Umgebung** Y von $\vec{y}$ eineindeutig ist, vgl. Abb. 1.45.

Definition: Eine Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ heißt **fast überall lokal umkehrbar**, wenn die lokale Umkehrbarkeit lediglich auf Untermannigfaltigkeiten niedrigerer Dimension $d' < d$ verletzt ist.

Beispiel: Bei den Polarkoordinaten in der **zwei**dimensionalen Ebene ist die lokale Umkehrbarkeit auf der **ein**dimensionalen Untermannigfaltigkeit $\{r = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ verletzt.

Wie entscheidet man, ob eine Variablentransformation lokal umkehrbar ist? Wir betrachten den Punkt $\vec{y}$, der auf $\vec{x}$ abgebildet wird. Eine infinitesimale Verschiebung um $\mathrm{d}\vec{y} \equiv (\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_d)$ verursacht eine Verschiebung $\mathrm{d}\vec{x} \equiv (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_d)$ des Punktes $\vec{x}$, die wir mit Hilfe des totalen Differentials berechnen:

$$\mathrm{d}x_i = x_i(y_1 + \mathrm{d}y_1, \ldots, y_d + \mathrm{d}y_d) - x_i(y_1, \ldots, y_d) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\, \mathrm{d}y_j \ , \quad i = 1, \ldots, d \ .$$

Dies läßt sich in Matrixform schreiben:

$$\mathrm{d}\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_d}{\partial y_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y_d \end{pmatrix} \equiv F(x;y)\, \mathrm{d}\vec{y} \ . \tag{1.126}$$

Hier haben wir auf der rechten Seite die sog. **Funktionalmatrix** $F(x;y)$ eingeführt, deren Elemente $f(x;y)_{ij} = \partial x_i / \partial y_j$ sind. Da die Verschiebung $\mathrm{d}\vec{y}$ beliebig ist, gilt der durch die Funktionalmatrix vermittelte Zusammenhang (1.126) zwischen $\mathrm{d}\vec{y}$ und $\mathrm{d}\vec{x}$ für **alle** Punkte in einer **Umgebung** von $\vec{y}$ und entsprechend für **alle** Punkte in einer Umgebung von $\vec{x}$. Wenn die Verschiebung $\mathrm{d}\vec{y}$ vorgegeben wird, dann läßt sich die Verschiebung $\mathrm{d}\vec{x}$ **eindeutig** aus Gl. (1.126) berechnen, einem beliebigen Punkt in einer Umgebung von $\vec{y}$ wird also **eindeutig** ein Punkt in einer Umgebung von $\vec{x}$ zugeordnet.

Nun läßt sich entscheiden, ob die Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ lokal umkehrbar ist: offenbar muss man in der Lage sein, Punkten in der Umgebung von $\vec{x}$ auch wieder **eindeutig** Punkte in der Umgebung von $\vec{y}$ zuzuordnen. Genau dann ist die Abbildung nämlich **eineindeutig**, und da sie dies für **alle** Punkte in den entsprechenden Umgebungen von $\vec{y}$ und $\vec{x}$ ist, auch **lokal umkehrbar**. Diese Rücktransformation wird durch Auflösen von Gl. (1.126) nach $\mathrm{d}\vec{y}$ vermittelt, also durch **Invertieren** der Funktionalmatrix,

$$\mathrm{d}\vec{y} = F^{-1}(x;y)\mathrm{d}\vec{x} \ .$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit einer Matrix ist aber, dass ihre Determinante nicht null ist,

$$\det F(x;y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_d}{\partial y_d} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x_1, \ldots, x_d)}{\partial(y_1, \ldots, y_d)} \neq 0 \ .$$

Die Variablentransformation $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_d)$ ist also genau dann lokal umkehrbar, wenn $\det F(x;y) \neq 0$.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten
Wir berechnen die Elemente der Funktionalmatrix mittels der Transformationsformeln (1.122) und (1.123),

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial r} &= \cos\varphi \quad , \quad \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r\,\sin\varphi \;, \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} &= \sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r\,\cos\varphi \;. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Determinante der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{vmatrix} = r\,\cos^2\varphi + r\,\sin^2\varphi = r \;. \tag{1.127}$$

Damit ist die Abbildung $(r,\varphi) \mapsto (x_1,x_2)$ überall mit Ausnahme des Punktes $r = 0$ umkehrbar.

Man kann die Variablen auch mehrfach aufeinanderfolgend wechseln. Wie dies vonstatten geht, beschreibt der nachfolgende
Satz: Seien

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(y_1,\ldots,y_d) \;, \quad i = 1,\ldots,d \;, \\ y_i &= y_i(z_1,\ldots,z_d) \;, \quad i = 1,\ldots,d \;, \end{aligned}$$

stetig partiell differenzierbare Variablentransformationen. Für die **zusammengesetzte Transformation**

$$x_i = x_i(y_1(z_1,\ldots,z_d),\ldots,y_d(z_1,\ldots,z_d)) \;, \quad i = 1,\ldots,d \;,$$

gilt

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_d)}{\partial(z_1,\ldots,z_d)} = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_d)}{\partial(y_1,\ldots,y_d)}\,\frac{\partial(y_1,\ldots,y_d)}{\partial(z_1,\ldots,z_d)} \;.$$

Beweis: Gemäß der Kettenregel gilt

$$f(x;z)_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\,\frac{\partial y_k}{\partial z_j} \equiv \sum_{k=1}^{d} f(x;y)_{ik}\,f(y;z)_{kj} \;.$$

In Matrixform geschrieben lautet dies

$$F(x;z) = F(x;y)\,F(y;z) \;.$$

Für die Determinanten der Funktionalmatrizen gilt dann gemäß Gl. (1.113)

$$\det F(x;z) = \det F(x;y)\,\det F(y;z) \;, \quad \text{q.e.d.}$$

Als Korollar betrachten wir den Spezialfall $z_i = x_i$, d.h., die zusammengesetzte Transformation ändert nichts,

$$\mathbf{1} \equiv F(x;x) = F(x;y)\,F(y;x) \;.$$

Multiplikation mit der inversen Transformation $F^{-1}(x;y)$ ergibt

$$F^{-1}(x;y) = F(y;x) \ ,$$

woraus mit Gl. (1.116) folgt

$$\det F(y;x) = \frac{\partial(y_1,\ldots,y_d)}{\partial(x_1,\ldots,x_d)} = \det F^{-1}(x;y) = \frac{1}{\det F(x;y)} = \left(\frac{\partial(x_1,\ldots,x_d)}{\partial(y_1,\ldots,y_d)}\right)^{-1} \ .$$

Damit folgt aus $\det F(x;y) \neq 0$ auch $\det F(y;x) \neq 0$; wenn $x_i = x_i(y_1,\ldots,y_d)$ lokal umkehrbar ist, so ist es auch $y_i = y_i(x_1,\ldots,x_d)$.

Die Funktionaldeterminante bedeutet anschaulich, wie sich bei der Transformation $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ das infinitesimale Flächenelement ($d = 2$) bzw. das infinitesimale Volumenelement ($d = 3$) ändert. Dies werden wir im folgenden Abschnitt genauer untersuchen.

1.5.2 Krummlinige Koordinaten

Wir definieren zunächst den Begriff der **Koordinatenlinie**. Wir betrachten wieder die Variablentransformation $\vec{y} \mapsto \vec{x}$, bzw. $x_i = x_i(y_1,\ldots,y_d)$. Setzt man $d-1$ der d Variablen y_i konstant, z.B. $y_i = const.\ \forall\, i \neq j$, so ergibt sich eine durch y_j parametrisierte Raumkurve $\vec{f}(y_j)$ im Raum der Variablen x_i. Dies ist die sog. $\boldsymbol{y_j}$**−Koordinatenlinie**.

Beispiele:

1. **Kartesische Koordinaten in der Ebene:** Dies ist der Spezialfall, bei dem die Koordinaten gerade **nicht** gewechselt werden, also $\vec{y} \equiv \vec{x}$. Die $y_1 = x_1$−Koordinatenlinie verläuft also in der (x_1, x_2)−Ebene parallel zur 1−Achse, und die $y_2 = x_2$−Koordinatenlinie parallel zur 2−Achse, vgl. Abb. 1.46.

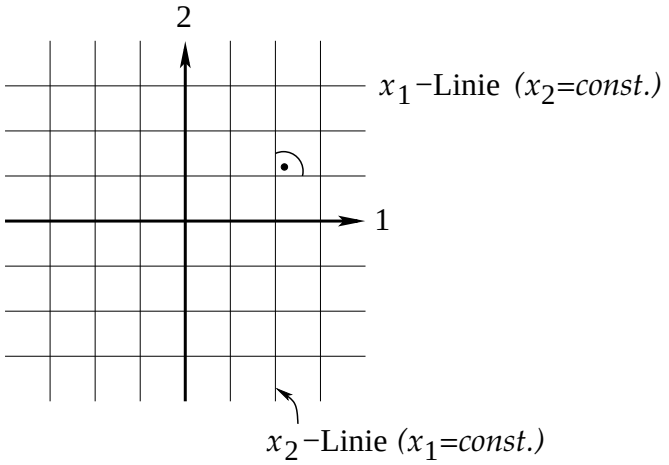


Abbildung 1.46: Koordinatenlinien für kartesische Koordinaten.

Die Koordinatenlinien bilden ein rechtwinkliges, geradliniges Netz.

2. **Ebene Polarkoordinaten:** Hier findet ein echter Koordinatenwechsel statt. Die $r-$Linien, auf denen $\varphi = const.$, sind Geraden, die durch den Ursprung gehen. Die $\varphi-$Linien, für die $r = const.$, sind konzentrische Kreise um den Ursprung, vgl. Abb. 1.47. Zwar sind die $r-$Linien Geraden, aber die $\varphi-$Linien sind gekrümmt. Die

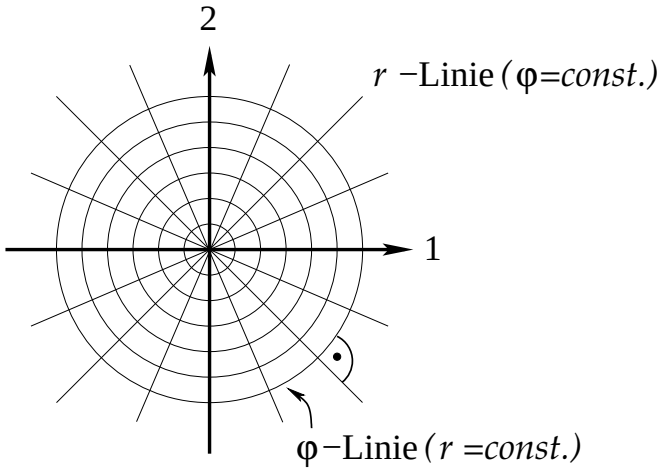


Abbildung 1.47: Koordinatenlinien für ebene Polarkoordinaten.

ebenen Polarkoordinaten sind damit das erste Beispiel für **krummlinige Koordinaten**. **Lokal** stehen $r-$ und $\varphi-$Linien jedoch stets **senkrecht** aufeinander, vgl. Abb. 1.47. Man nennt solche Koordinatensysteme **krummlinig-orthogonal**.

30.5.2013 (1)

Wir betrachten nun **infinitesimale Volumenelemente in krummlinigen Koordinaten**. Im Spezialfall der kartesischen Koordinaten gilt

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \ ,$$

vgl. Abb. 1.48.

Für ein Netz aus krummlinigen Koordinaten betrachten wir Abb. 1.49. Das infinitesimale Volumenelement kann durch ein Parallelepiped angenähert werden, welches durch die (nicht notwendigerweise orthogonalen) Vektoren $\mathrm{d}\vec{a}$, $\mathrm{d}\vec{b}$, $\mathrm{d}\vec{c}$ aufgespannt wird. Der infinitesimale Vektor $\mathrm{d}\vec{a}$ zeigt entlang der y_1-Linie, also sind y_2 und y_3 entlang dieser Linien konstant. Wir können $\mathrm{d}\vec{a}$ als Spezialfall einer infinitesimalen Verschiebung $\mathrm{d}\vec{r}$ des Ortsvektors $\vec{r}$ betrachten, die entlang der y_1-Linie (also für konstantes y_2, y_3) ausgeführt wird. Aus dem totalen Differential (1.77) der jeweiligen $i-$ten Komponente $\mathrm{d}x_i(\vec{y})$ eines beliebigen Verschiebungsvektors $\mathrm{d}\vec{r}(\vec{y})$ folgt für diesen Spezialfall:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{a} \equiv \mathrm{d}\vec{r}(\vec{y})\big|_{y_2,y_3} &= (\mathrm{d}x_1(\vec{y}),\, \mathrm{d}x_2(\vec{y}),\, \mathrm{d}x_3(\vec{y}))^T_{y_2,y_3} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_1}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j, \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_2}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j, \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_3}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j\right)^T_{y_2,y_3} \\
&= \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1,\, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1,\, \frac{\partial x_3}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1\right)^T \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 \ .
\end{aligned}$$

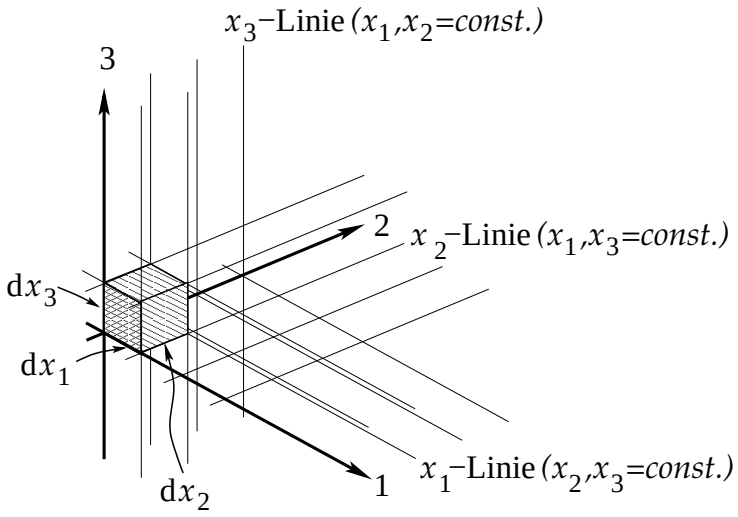


Abbildung 1.48: Das infinitesimale Volumenelement in kartesischen Koordinaten.

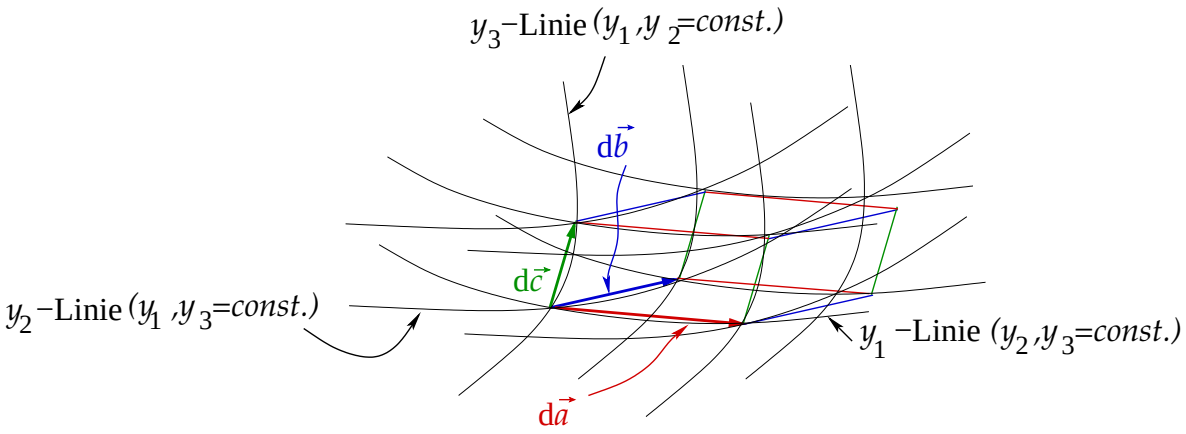


Abbildung 1.49: Das infinitesimale Volumenelement in krummlinigen Koordinaten.

Analoges gilt für die infinitesimalen Vektoren $d\vec{b}$ (entlang der y_2−Linie) und $d\vec{c}$ (entlang der y_3−Linie),

$$d\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_2}\, dy_2 \,,$$
$$d\vec{c} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_3}\, dy_3 \,.$$

Das Volumen des von $\mathrm{d}\vec{a}$, $\mathrm{d}\vec{b}$ und $\mathrm{d}\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds ist gleich dem Spatprodukt der drei Vektoren:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= \mathrm{d}\vec{a}\cdot(\mathrm{d}\vec{b}\times\mathrm{d}\vec{c}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 & \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 & \frac{\partial x_3}{\partial y_1}\,\mathrm{d}y_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\,\mathrm{d}y_2 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\,\mathrm{d}y_2 & \frac{\partial x_3}{\partial y_2}\,\mathrm{d}y_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3}\,\mathrm{d}y_3 & \frac{\partial x_2}{\partial y_3}\,\mathrm{d}y_3 & \frac{\partial x_3}{\partial y_3}\,\mathrm{d}y_3 \end{vmatrix} \\ &= \det F^T(x;y)\;\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 = \det F(x;y)\;\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3\;,\end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (1.107) und (1.108) benutzt haben.

Ein vorgegebenes Volumen V kann man auch als Integral über $\mathrm{d}V$ innerhalb der durch das Volumen definierten Grenzen schreiben. Der Wert dieses Integrals darf sich natürlich beim Wechsel der Koordinaten nicht ändern,

$$V = \int \mathrm{d}V = \int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \int \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3\;.$$

Da dies für beliebig gewählte Volumina, also auch für infinitesimale gelten muss, erhalten wir die folgende wichtige Formel für den Wechsel von Integrationsvariablen in Volumenintegralen:

$$\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3\;. \tag{1.128}$$

Die Determinante der Funktionalmatrix, oder kurz die **Funktionaldeterminante**, beschreibt also, wie oben angekündigt, die Änderung im infinitesimalen Volumenelement beim Wechsel der Variablen.

Beispiel: Flächeninhalt des Kreises
Wir wenden Gl. (1.128) für den zweidimensionalen Fall an. Beim Übergang von kartesischen zu ebenen Polarkoordinaten gilt

$$\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\varphi)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\;,$$

wobei wir das Resultat (1.127) benutzt haben. Der Flächeninhalt des Kreises läßt sich nun einerseits in kartesischen Koordinaten berechnen, vgl. Abb. 1.50,

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{Kreis}} &= 4\int_0^R \mathrm{d}x_1 \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \mathrm{d}x_2 = 4\int_0^R \mathrm{d}x_1\,\sqrt{R^2-x_1^2} \\ &= 4\left[\frac{x_1}{2}\sqrt{R^2-x_1^2} + \frac{R^2}{2}\,\arcsin\frac{x_1}{R}\right]_0^R = 2\,R^2\,\arcsin 1 = \pi R^2\;,\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\arcsin 1 = \pi/2$ und dass der Kreis aus vier gleichen Quadranten besteht. Andererseits können wir die Fläche in ebenen Polarkoordinaten berechnen,

$$F_{\mathrm{Kreis}} = \int_0^R \mathrm{d}r\,r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi\,\frac{R^2}{2} = \pi R^2\;.$$

Es besteht wenig Zweifel, welches der elegantere, weil der Symmetrie des Problems angepasste Weg ist.

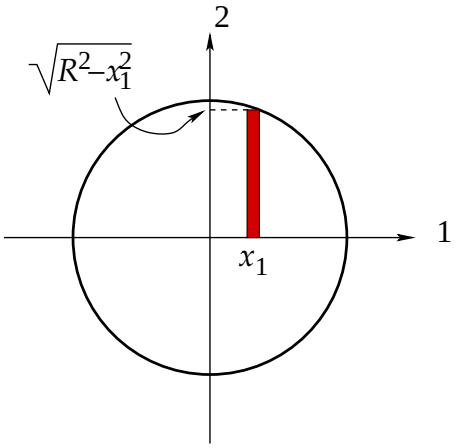


Abbildung 1.50: Zur Berechnung des Flächeninhalts des Kreises.

Wir betrachten nun die **Einheitsvektoren in krummlinigen Koordinaten**. Zunächst erinnern wir uns an die Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \tag{1.129}$$

vgl. Gl. (1.43), mit deren Hilfe wir den Ortsvektor ausdrücken als

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} x_j \, \vec{e}_j \ ,$$

vgl. Gl. (1.48). In der festen, zeitunabhängigen kartesischen Basis (1.129) gilt für eine infinitesimale Verschiebung

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}x_j \, \vec{e}_j \ . \tag{1.130}$$

Nun kann man den Ortsvektor aber auch als vektorwertige Funktion der drei Variablen x_1, x_2, x_3 auffassen, $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$. Damit gilt nach der Definition des totalen Differentials (1.77) auch

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_j \ . \tag{1.131}$$

Der Vergleich von Gl. (1.130) mit Gl. (1.131) liefert

$$\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} \ . \tag{1.132}$$

Wegen $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$ ist dies ganz offensichtlich mit der Definition (1.129) konsistent. Die Identität (1.132) ist aber leicht auf krummlinige Koordinaten verallgemeinerbar.

Wir betrachten den Satz $\{y_1, y_2, y_3\}$ von **krummlinigen Koordinaten**. Der **Einheitsvektor in y_i-Richtung** soll **tangential** zur y_i-Koordinatenlinie liegen,

$$\vec{e}_{y_i} \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \ ,$$

vgl. Abb. 1.51.

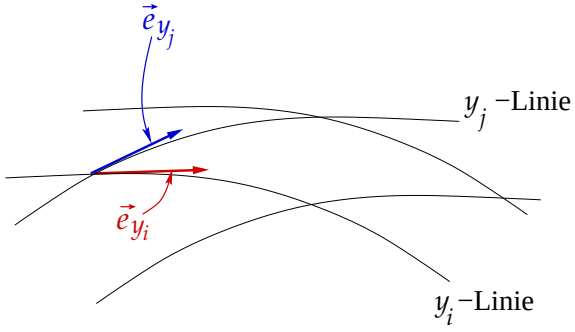


Abbildung 1.51: Einheitsvektoren in krummlinigen Koordinaten.

Um einen Einheitsvektor zu bekommen, muss man noch richtig normieren. Wir definieren den sog. **Skalenfaktor** als

$$b_{y_i} \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right| \ . \tag{1.133}$$

Der Einheitsvektor in y_i-Richtung lautet damit

$$\vec{e}_{y_i} = b_{y_i}^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \ . \tag{1.134}$$

Diese Basisvektoren bilden i.a. keine **ortsfeste** Basis, sondern ein **lokales** Vielbein (d.h. ein Zweibein in $d = 2$ Dimensionen, ein Dreibein in $d = 3$ Dimensionen, etc.).

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten
Mit $\vec{r} = (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)^T = \vec{r}(r,\varphi)$ berechnen wir die Einheitsvektoren gemäß Gl. (1.134):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\cos\varphi,\, \sin\varphi)^T \ , \qquad b_r = 1 \implies \vec{e}_r = (\cos\varphi,\, \sin\varphi)^T \ , \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-r\sin\varphi,\, r\cos\varphi)^T \ , \quad b_\varphi = r \implies \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\, \cos\varphi)^T \ . \end{aligned}$$

Diese Basisvektoren sind nicht ortsfest, da sie mit dem Polarwinkel ihre Lage ändern, vgl. Abb. 1.52. Sie sind jedoch orthonormal, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = -\cos\varphi\,\sin\varphi + \sin\varphi\,\cos\varphi = 0$.

Man spricht von **krummlinig-orthonormalen** Basisvektoren, falls

$$\vec{e}_{y_i} \cdot \vec{e}_{y_j} = \delta_{ij} \ .$$

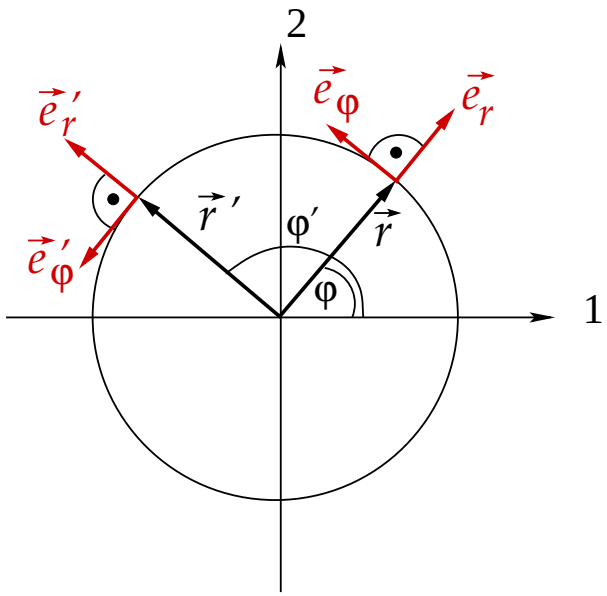


Abbildung 1.52: Die Einheitsvektoren für ebene Polarkoordinaten. Ihre Lage ändert sich als Funktion des Polarwinkels φ.

In $d = 3$ Dimensionen bilden diese Basisvektoren in geeigneter Reihenfolge eine rechtshändige Orthonormalbasis, d.h.

$$\vec{e}_{y_1} = \vec{e}_{y_2} \times \vec{e}_{y_3} \ , \quad \vec{e}_{y_2} = \vec{e}_{y_3} \times \vec{e}_{y_1} \ , \quad \vec{e}_{y_3} = \vec{e}_{y_1} \times \vec{e}_{y_2} \ . \tag{1.135}$$

Das **totale Differential** des Ortsvektors lautet in krummlinigen Koordinaten

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_j}\, \mathrm{d}y_j = \sum_{j=1}^{3} b_{y_j}\, \vec{e}_{y_j}\, \mathrm{d}y_j = \sum_{j=1}^{3} b_{y_j}\, \mathrm{d}y_j\, \vec{e}_{y_j} \ . \tag{1.136}$$

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten
In diesem Fall enthält die Summe in Gl. (1.136) lediglich zwei Terme, den Variablen r und φ der ebenen Polarkoordinaten entsprechend:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\, \vec{e}_r + r\, \mathrm{d}\varphi\, \vec{e}_{\varphi} \ .$$

Wir können auch die **Differentialoperatoren** aus Abschnitt 1.3.4 in **krummlinigen Koordinaten** ausdrücken:

1. **Gradient:** Wir erhalten die y_i-Komponente eines Gradientenfeldes $\vec{\nabla}\phi$ durch Projektion auf den Einheitsvektor $\vec{e}_{y_i}$:

$$\vec{e}_{y_i} \cdot \vec{\nabla}\phi = b_{y_i}^{-1}\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \cdot \vec{\nabla}\phi = b_{y_i}^{-1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_i}\, \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_i}\, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial y_i}\, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) = b_{y_i}^{-1}\, \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \ ,$$

wobei wir die Kettenregel für die Funktion $\phi(\vec{r}(y_i))$ angewendet haben. Das Gradientenfeld hat daher in krummlinigen Koordinaten die Komponentendarstellung

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{y_i}\, b_{y_i}^{-1}\, \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \ . \tag{1.137}$$

Daraus ergibt sich der **Nabla-Operator** als

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{y_i}\, b_{y_i}^{-1}\, \frac{\partial}{\partial y_i} \; . \tag{1.138}$$

Für die spezielle Wahl $\phi = y_j$ erhalten wir

$$\vec{\nabla} y_j = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{y_i}\, b_{y_i}^{-1}\, \frac{\partial y_j}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{y_i}\, b_{y_i}^{-1}\, \delta_{ij} = \vec{e}_{y_j}\, b_{y_j}^{-1} \; ,$$

was eine zu Gl. (1.134) alternative Formel für die Einheitsvektoren in krummlinigen Koordinaten ergibt:

$$\vec{e}_{y_i} = b_{y_i}\, \vec{\nabla} y_i \; . \tag{1.139}$$

30.5.2013 (2)

2. **Divergenz:** Mit dem Nabla-Operator (1.138) und einem beliebigen Vektorfeld

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{3} a_{y_j}\, \vec{e}_{y_j} \tag{1.140}$$

erhalten wir für die Divergenz von $\vec{a}$ in einer krummlinig-orthonormalen Basis:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \sum_{i,j=1}^{3} \left(\vec{e}_{y_i}\, b_{y_i}^{-1}\, \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \cdot \left(a_{y_j}\, \vec{e}_{y_j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} b_{y_i}^{-1} \left(\frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i}\, \vec{e}_{y_i} \cdot \vec{e}_{y_j} + a_{y_j}\, \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} b_{y_i}^{-1} \left(\frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i}\, \delta_{ij} + a_{y_j}\, \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} \right) \; .
\end{aligned} \tag{1.141}$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch weiter auswerten, indem man folgende Zwischenrechnung macht. Wegen der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit des Ortsvektors gilt

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_j \partial y_i} \; .$$

Dies kann man mit $\partial \vec{r} / \partial y_j = b_{y_j}\, \vec{e}_{y_j}$, s. Gl. (1.134), schreiben als

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i} \left(b_{y_j}\, \vec{e}_{y_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(b_{y_i}\, \vec{e}_{y_i} \right) \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i}\, \vec{e}_{y_j} + b_{y_j}\, \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} &= \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j}\, \vec{e}_{y_i} + b_{y_i}\, \frac{\partial \vec{e}_{y_i}}{\partial y_j} \; .
\end{aligned}$$

Skalare Multiplikation mit $\vec{e}_{y_i}$ ergibt:

$$\frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i}\, \delta_{ij} + b_{y_j}\, \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} = \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} + b_{y_i}\, \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_i}}{\partial y_j} = \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} \; ,$$

denn der letzte Term im Ausdruck zwischen den Gleichheitszeichen verschwindet wegen $0 = \mathrm{d}(\vec{e}_{y_i} \cdot \vec{e}_{y_i}) = 2\,\vec{e}_{y_i} \cdot \mathrm{d}\vec{e}_{y_i}$. Etwas umgestellt erhalten wir das Resultat

$$\vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} = b_{y_j}^{-1} \left(\frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} - \delta_{ij} \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \right) = b_{y_j}^{-1} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} (1 - \delta_{ij}) \; ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Indizes i und j im zweiten Term vertauscht haben (dies ist wegen des Kronecker-Deltas erlaubt, da dieses $i = j$ erzwingt). Dieses Resultat setzen wir nun in Gl. (1.141) ein:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \sum_{i,j=1}^{3} b_{y_i}^{-1} \left[\frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i} \, \delta_{ij} + a_{y_j} \, b_{y_j}^{-1} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} (1 - \delta_{ij}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3} b_{y_i}^{-1} \frac{\partial a_{y_i}}{\partial y_i} + \sum_{\substack{i,\, j\, =\, 1 \\ i \neq j}}^{3} a_{y_i} \, b_{y_i}^{-1} \, b_{y_j}^{-1} \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \; , \end{aligned} \tag{1.142}$$

wobei wir von der ersten zur zweiten Zeile die Indizes i und j im zweiten Term vertauscht haben. Man überzeugt sich durch explizites Ausschreiben der Summen, dass dies identisch ist mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{b_{y_1} \, b_{y_2} \, b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(b_{y_2} \, b_{y_3} \, a_{y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(b_{y_1} \, b_{y_3} \, a_{y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(b_{y_1} \, b_{y_2} \, a_{y_3} \right) \right] \; , \tag{1.143}$$

wenn man in diesem Ausdruck die partielle Differentiation per Produktregel ausführt.

3. **Laplace-Operator:** Der Laplace-Operator folgt sofort aus Gl. (1.143) mit Gl. (1.138):

$$\Delta = \frac{1}{b_{y_1} \, b_{y_2} \, b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{b_{y_2} \, b_{y_3}}{b_{y_1}} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{b_{y_1} \, b_{y_3}}{b_{y_2}} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{b_{y_1} \, b_{y_2}}{b_{y_3}} \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \right] \; . \tag{1.144}$$

4. **Rotation:** Mit der Komponentendarstellung (1.140) des Vektorfeldes $\vec{a}$ und Gl. (1.139) lautet dessen Rotation

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{a} &= \sum_{j=1}^{3} \vec{\nabla} \times \left(a_{y_j} \, \vec{e}_{y_j} \right) = \sum_{j=1}^{3} \vec{\nabla} \times \left(a_{y_j} \, b_{y_j} \, \vec{\nabla} y_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \left\{ a_{y_j} \, b_{y_j} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} y_j + \left[\vec{\nabla} \left(a_{y_j} \, b_{y_j} \right) \right] \times \left(b_{y_j}^{-1} \vec{e}_{y_j} \right) \right\} \; . \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet aufgrund von Gl. (1.85). Im zweiten Term setzen wir Gl. (1.138) ein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \sum_{\substack{i,\, j\, =\, 1 \\ i \neq j}}^{3} b_{y_i}^{-1} \, b_{y_j}^{-1} \, \vec{e}_{y_i} \times \vec{e}_{y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(b_{y_j} \, a_{y_j} \right) \; ,$$

wobei wegen des Kreuzproduktes der Einheitsvektoren die Summe auf Terme $i \neq j$ beschränkt werden kann. Weil die Einheitsvektoren eine rechtshändige Orthonormalbasis bilden, vgl. Gl. (1.135), können wir die Terme in der Summe umgruppieren und erhalten das Resultat

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{a} &= \frac{\vec{e}_{y_1}}{b_{y_2}\, b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_2} \left(b_{y_3}\, a_{y_3} \right) - \frac{\partial}{\partial y_3} \left(b_{y_2}\, a_{y_2} \right) \right] \\
&+ \frac{\vec{e}_{y_2}}{b_{y_1}\, b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_3} \left(b_{y_1}\, a_{y_1} \right) - \frac{\partial}{\partial y_1} \left(b_{y_3}\, a_{y_3} \right) \right] \\
&+ \frac{\vec{e}_{y_3}}{b_{y_1}\, b_{y_2}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(b_{y_2}\, a_{y_2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left(b_{y_1}\, a_{y_1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{b_{y_1}\, b_{y_2}\, b_{y_3}} \begin{vmatrix} b_{y_1}\, \vec{e}_{y_1} & b_{y_2}\, \vec{e}_{y_2} & b_{y_3}\, \vec{e}_{y_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ b_{y_1}\, a_{y_1} & b_{y_2}\, a_{y_2} & b_{y_3}\, a_{y_3} \end{vmatrix} ,
\end{aligned} \tag{1.145}$$

wobei die Notation als Determinante wiederum nur als mnemonische Hilfe zu verstehen ist.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die bislang allgemein hergeleiteten Ergebnisse auf zwei besonders wichtige Systeme krummliniger Koordinaten angewendet, die Zylinder- und die Kugelkoordinaten.

1.5.3 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten sind zweckmäßig für Probleme mit Zylindersymmetrie. Sie bestehen aus **ebenen Polarkoordinaten** in einer Ebene, z.B. der $(x, y)-$Ebene, ergänzt durch eine **kartesische Koordinatenachse** senkrecht zu dieser Ebene, z.B. die $z-$Achse, vgl. Abb. 1.53.

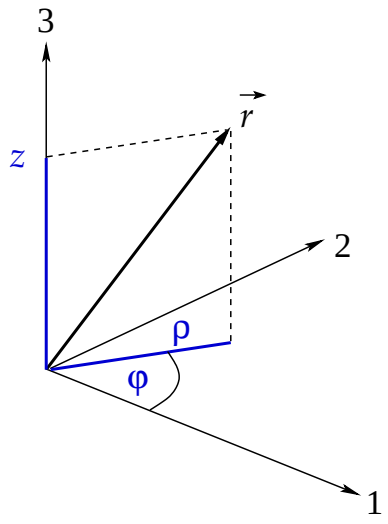


Abbildung 1.53: Zylinderkoordinaten.

Die **Transformationsformeln** für die Abbildung $(\rho, \varphi, z) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos\varphi \,, \\ x_2 &= \rho \sin\varphi \,, \\ x_3 &= z \,. \end{aligned} \tag{1.146}$$

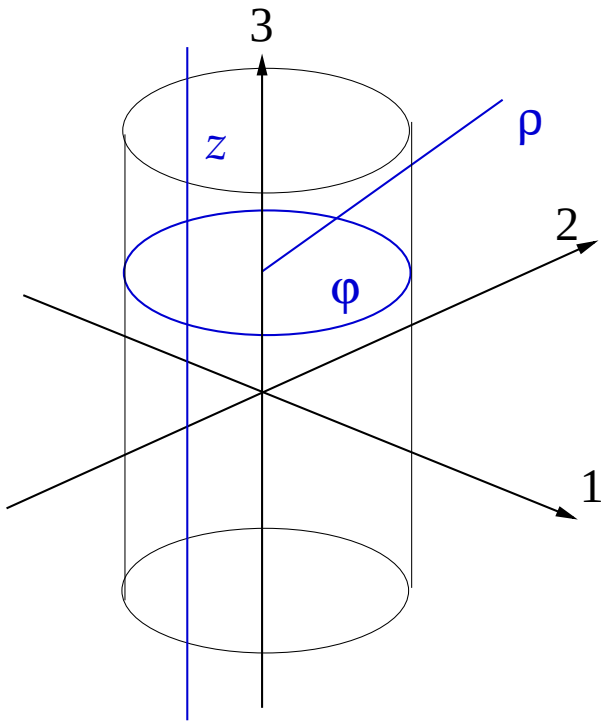


Abbildung 1.54: Koordinatenlinien in Zylinderkoordinaten.

Die **Koordinatenlinien** sind in Abb. 1.54 dargestellt. Aus den Transformationsformeln (1.146) berechnen wir die **Funktionaldeterminante**

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \,. \tag{1.147}$$

(Zur Berechnung empfiehlt sich eine Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile oder Spalte.) Dies bedeutet, dass die Abbildung $(\rho, \varphi, z) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ bis auf die durch $\rho = 0$ definierte Untermannigfaltigkeit lokal umkehrbar ist.

Aus der Funktionaldeterminante folgt sofort das **infinitesimale Volumenelement**

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \varphi, z)}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \,. \tag{1.148}$$

Dies ist in Abb. 1.55 veranschaulicht.

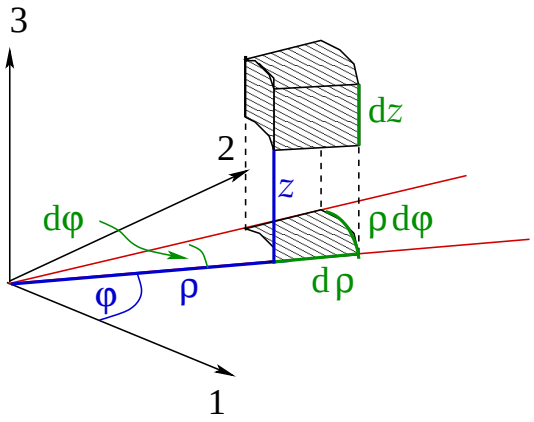


Abbildung 1.55: Das infinitesimale Volumenelement in Zylinderkoordinaten.

Mit $\vec{r} = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)^T$ berechnen sich die **Skalenfaktoren** und **Einheitsvektoren** wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} &= (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)^T\ , & b_\rho = 1 \implies \vec{e}_\rho &= (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)^T\ ,\\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} &= (-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ 0)^T\ , & b_\varphi = \rho \implies \vec{e}_\varphi &= (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)^T\ ,\\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} &= (0,\ 0,\ 1)^T\ , & b_z = 1 \implies \vec{e}_z &= \vec{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)^T\ .
\end{aligned} \tag{1.149}$$

Man prüft leicht nach, dass das durch $\{\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z\}$ aufgespannte Koordinatensystem eine **rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis** bildet. Die Einheitsvektoren stehen **tangential** zu den Koordinatenlinien, s. Abb. 1.56.

Das **totale Differential** berechnet sich gemäß Gl. (1.136) mit den Skalenfaktoren aus Gl. (1.149) wie folgt:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z\ . \tag{1.150}$$

Die **Differentialoperatoren** sind

1. **Nabla-Operator:** Aus den Glgen. (1.138) und (1.149) folgt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\ . \tag{1.151}$$

2. **Divergenz:** Aus den Glgen. (1.143) und (1.149) folgt

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{a} &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\,a_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}a_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\,a_z)\right]\\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\,a_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\\
&= \frac{\partial a_\rho}{\partial\rho} + \frac{a_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\ .
\end{aligned} \tag{1.152}$$

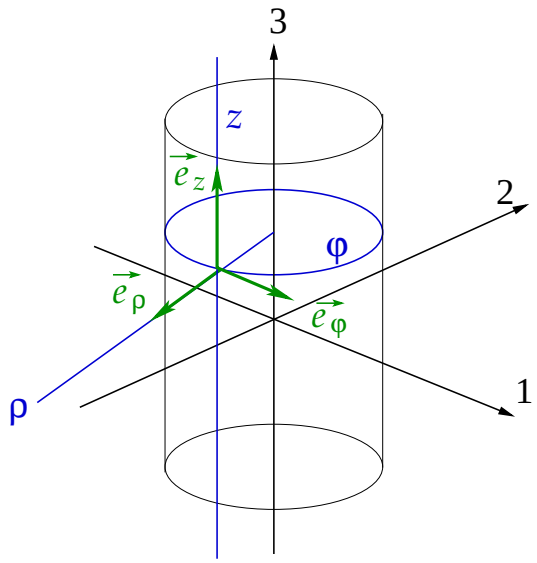


Abbildung 1.56: Die rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis $\{\vec{e}_\rho,\, \vec{e}_\varphi,\, \vec{e}_z\}$ steht tangential zu den Koordinatenlinien.

3. **Laplace-Operator:** Aus den Glgen. (1.144) und (1.149) folgt

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \rho\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \end{aligned} \tag{1.153}$$

4. **Rotation:** Aus den Glgen. (1.145) und (1.149) folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{a} &= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\,\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho\,a_\varphi & a_z \end{vmatrix} \qquad (1.154) \\ &= \frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\rho\left(\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \rho\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\,\vec{e}_z\left(\frac{\partial(\rho\,a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right) \\ &= \vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho} + \frac{a_\varphi}{\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right)\,. \end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel für Berechnungen in Zylinderkoordinaten bestimmen wir zum Abschluß dieses Abschnittes noch **Ortsvektor**, **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** eines physikalischen Objektes in **Zylinderkoordinaten**. Zunächst ist anhand von Abb. 1.57 klar, dass der Ortsvektor lediglich eine Komponente in $\rho-$ und eine Komponente in $z-$Richtung, aber keine in $\varphi-$Richtung hat,

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\,\vec{e}_\rho(t) + z(t)\,\vec{e}_z\,. \tag{1.155}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\vec{e}_\rho(t)$ als krummlinige Koordinate **nicht ortsfest** ist, sich also im Laufe der Zeit ändern kann. Dagegen ist $\vec{e}_z$ für alle Zeiten konstant, $\dot{\vec{e}}_z = 0$.

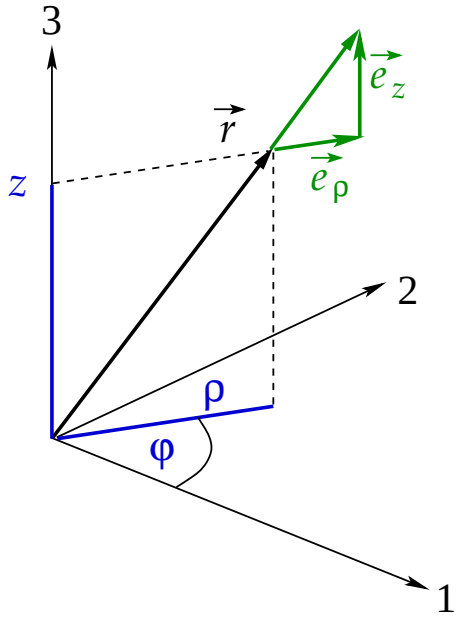


Abbildung 1.57: Der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten.

Die Zeitableitung des Ortsvektors ergibt die Geschwindigkeit,

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\,\vec{e}_\rho(t) + \rho(t)\,\dot{\vec{e}}_\rho(t) + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z \;. \tag{1.156}$$

Wir müssen noch die zeitliche Änderung $\dot{\vec{e}}_\rho$ des Einheitsvektors $\vec{e}_\rho$ bestimmen. Da die drei Einheitsvektoren $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ eine Orthonormalbasis bilden, muss $\dot{\vec{e}}_\rho$ durch diese drei Einheitsvektoren ausdrückbar sein. Den entsprechenden Zusammenhang leitet man am elegantesten mit Hilfe von Gl. (1.150) für das totale Differential her, welche wir durch dt dividieren. Wir erhalten

$$\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z \;, \tag{1.157}$$

wobei wir das Zeitargument der Einfachheit halber unterdrückt haben. Da alle Einheitsvektoren orthonormal zueinander stehen, ergibt der Vergleich von Gl. (1.156) mit (1.157):

$$\dot{\vec{e}}_\rho \equiv \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \;. \tag{1.158}$$

Ganz analog muss die Zeitableitung von $\vec{e}_\varphi$ durch die Einheitsvektoren $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ ausdrückbar sein. Jedoch gilt wegen Gl. (1.58) $\vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi = 0$, d.h. $\dot{\vec{e}}_\varphi \perp \vec{e}_\varphi$, d.h. $\dot{\vec{e}}_\varphi$ kann keine Komponente in $\vec{e}_\varphi-$Richtung besitzen:

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \alpha\,\vec{e}_\rho + \beta\,\vec{e}_z \;, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho = \alpha \;, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \beta \;. \tag{1.159}$$

Aus der Orthonormalität der Basisvektoren leiten wir folgende Beziehungen ab:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_\rho = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho = -\vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_\rho = -\dot{\varphi} \;, \end{aligned} \tag{1.160}$$

wobei wir die Glgen. (1.158) und (1.159) benutzt haben. Damit ist der Koeffizient $\alpha \equiv -\dot{\varphi}$ bestimmt. Für den Koeffizienten β machen wir eine entsprechende Rechnung,

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z) = 0 \implies \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_z + \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_z = \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \beta = 0 \,, \tag{1.161}$$

wobei wir Gl. (1.159) und $\dot{\vec{e}}_z = 0$ benutzt haben. Setzen wir Glgen. (1.160) und (1.161) in Gl. (1.159) ein, so erhalten wir

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho \,. \tag{1.162}$$

Nun sind wir in der Lage, auch die Beschleunigung als Zeitableitung von Gl. (1.157) zu berechnen (wir unterdrücken wieder die Abhängigkeit von der Zeit):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \\ &= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z \,, \end{aligned} \tag{1.163}$$

wobei wir die Glgen. (1.158) und (1.162) benutzt und die Terme geordnet haben.

Ebene Polarkoordinaten ergeben sich als Spezialfall der Zylinderkoordinaten für $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$. Da die Bewegung stets in der $(x, y)-$Ebene stattfindet, ist $\vec{\rho} \equiv \vec{r}$ und wir erhalten für den **Ortsvektor**

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t) \,, \tag{1.164}$$

für die **Geschwindigkeit**

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \,, \tag{1.165}$$

und für die **Beschleunigung**

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi \,. \tag{1.166}$$

1.5.4 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten bzw. **sphärische Koordinaten** bzw. **räumliche Polarkoordinaten** sind zweckmäßig für kugelsymmetrische Probleme. Sie bestehen aus einer **Radialkoordinate** r, die der Länge des Ortsvektors entspricht, einem **Polarwinkel** ϑ, der den Winkel zwischen $\vec{r}$ und der x_3-Achse beschreibt, $0 \le \vartheta \le \pi$, und einem **Azimutwinkel** φ, der den Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die $(x_1, x_2)-$Ebene und der x_1-Achse beschreibt, $0 \le \varphi < 2\pi$, vgl. Abb. 1.58.

Die **Transformationsformeln** für die Abbildung $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \,, \\ x_2 &= r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \,, \\ x_3 &= r\,\cos\vartheta \,. \end{aligned} \tag{1.167}$$

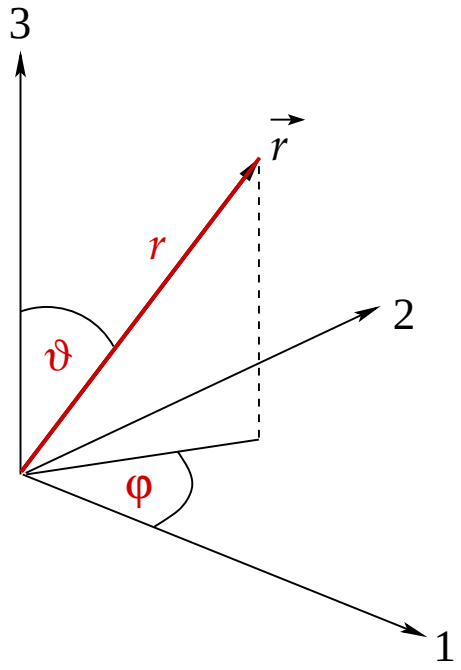


Abbildung 1.58: Kugelkoordinaten.

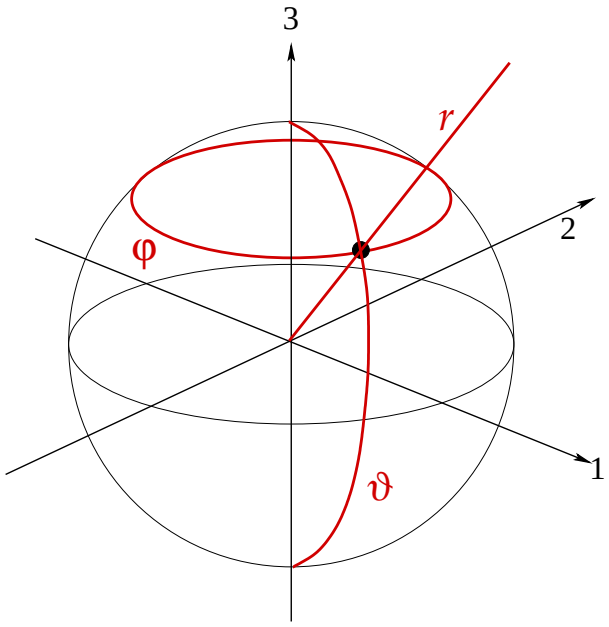


Abbildung 1.59: Koordinatenlinien in Kugelkoordinaten.

Die **Koordinatenlinien** sind in Abb. 1.59 dargestellt. Die $r-$Linien sind vom Ursprung ausgehende radiale Strahlen. Die $\vartheta-$Linien sind Halbkreise mit Zentrum im Ursprung und berandet durch die x_3-Achse. Die $\varphi-$Linien sind konzentrische Kreise um die x_3-Achse parallel zur $(x_1, x_2)-$Ebene.

Aus den Transformationsformeln (1.167) berechnen wir die **Funktionaldeterminante**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi & r\,\cos\vartheta\,\cos\varphi & -r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi & r\,\cos\vartheta\,\sin\varphi & r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\,\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cos\vartheta \begin{vmatrix} r\,\cos\vartheta\,\cos\varphi & -r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ r\,\cos\vartheta\,\sin\varphi & r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \end{vmatrix} + r\,\sin\vartheta \begin{vmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi & -r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi & r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= \cos\vartheta \left(r^2\cos^2\varphi\,\cos\vartheta\,\sin\vartheta + r^2\sin^2\varphi\,\cos\vartheta\,\sin\vartheta\right) \\
&+ r\,\sin\vartheta \left(r\,\sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi + r\,\sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi\right) \\
&= r^2\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta \\
&= r^2\,\sin\vartheta\;. \qquad (1.168)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Abbildung $(r,\vartheta,\varphi) \mapsto (x_1,x_2,x_3)$ bis auf die durch $r = 0$ und $\vartheta = 0,\,\pi$ definierte Untermannigfaltigkeit lokal umkehrbar ist.

Aus der Funktionaldeterminante folgt sofort das **infinitesimale Volumenelement**

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = r^2\,\mathrm{d}r\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\;. \qquad (1.169)$$

Als Anwendungsbeispiel berechnen wir das Volumen einer Kugel mit dem Radius R:

$$V = \int_0^R \mathrm{d}r\,r^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^R \mathrm{d}r\,r^2 \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\vartheta = 2\pi\,\frac{R^3}{3}\,2 = \frac{4\pi}{3}\,R^3\;.$$

Mit $\vec{r} = r(\sin\vartheta\,\cos\varphi,\,\sin\vartheta\,\sin\varphi,\,\cos\vartheta)^T$ berechnen sich die **Skalenfaktoren** und **Einheitsvektoren** wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} &= (\sin\vartheta\,\cos\varphi,\,\sin\vartheta\,\sin\varphi,\,\cos\vartheta)^T\;, \qquad b_r = 1 \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow\quad \vec{e}_r = (\sin\vartheta\,\cos\varphi,\,\sin\vartheta\,\sin\varphi,\,\cos\vartheta)^T\;, \\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} &= r(\cos\vartheta\,\cos\varphi,\,\cos\vartheta\,\sin\varphi,\,-\sin\vartheta)^T\;,\quad b_\vartheta = r \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow\quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\,\cos\varphi,\,\cos\vartheta\,\sin\varphi,\,-\sin\vartheta)^T\;, \qquad (1.170) \\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} &= r(-\sin\vartheta\,\sin\varphi,\,\sin\vartheta\,\cos\varphi,0)^T\;, \qquad b_\varphi = r\,\sin\vartheta \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow\quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\,\cos\varphi,\,0)^T\;.
\end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, dass das durch $\{\vec{e}_r,\,\vec{e}_\vartheta,\,\vec{e}_\varphi\}$ aufgespannte Koordinatensystem eine **rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis** bildet. Die Einheitsvektoren stehen **tangential** zu den Koordinatenlinien, s. Abb. 1.60.

Das **totale Differential** berechnet sich gemäß Gl. (1.136) mit den Skalenfaktoren aus Gl. (1.170) wie folgt:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + r\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi\;. \qquad (1.171)$$

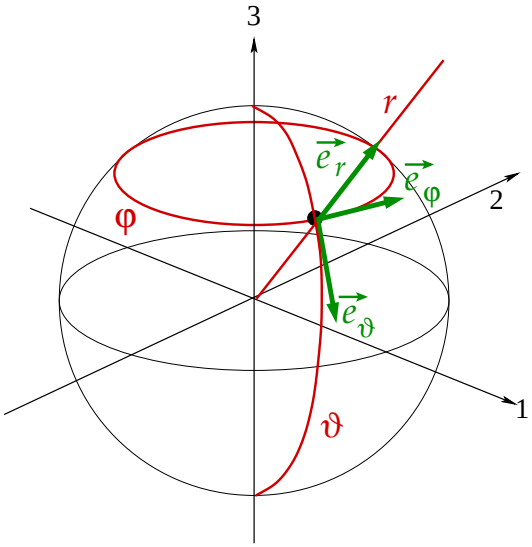


Abbildung 1.60: Die rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ steht tangential zu den Koordinatenlinien.

Die **Differentialoperatoren** sind

1. **Nabla-Operator:** Aus den Glgen. (1.138) und (1.170) folgt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \,. \tag{1.172}$$

2. **Divergenz:** Aus den Glgen. (1.143) und (1.170) folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\vartheta \, a_r \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(r \sin\vartheta \, a_\vartheta \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \, a_\varphi \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \, a_r \right) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \, a_\vartheta \right) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + 2 \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + + \frac{a_\vartheta \cot\vartheta}{r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \,. \end{aligned} \tag{1.173}$$

3. **Laplace-Operator:** Aus den Glgen. (1.144) und (1.170) folgt

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot\vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \,. \end{aligned} \tag{1.174}$$

4. **Rotation:** Aus den Glgen. (1.145) und (1.170) folgt

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{a} &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\,\vec{e}_\vartheta & r\,\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\vartheta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_r & r\,a_\vartheta & r\,\sin\vartheta\,a_\varphi \end{vmatrix} \qquad (1.175)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\vec{e}_r\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(r\,\sin\vartheta\,a_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\,a_\vartheta)\right]+r\,\vec{e}_\vartheta\left[\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\sin\vartheta\,a_\varphi\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.+\,r\,\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,a_\vartheta)-\frac{\partial a_r}{\partial\vartheta}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\vec{e}_r\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,a_\varphi\right)-\frac{\partial a_\vartheta}{\partial\varphi}\right]+\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta\left[\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,a_\varphi\right)\right]\\
&\qquad+\frac{1}{r}\,\vec{e}_\varphi\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,a_\vartheta)-\frac{\partial a_r}{\partial\vartheta}\right]\\
&= \vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial\vartheta}+\frac{a_\varphi\,\cot\vartheta}{r}-\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\frac{\partial a_\vartheta}{\partial\varphi}\right)+\vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial r}-\frac{a_\varphi}{r}\right)\\
&+\ \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial r}+\frac{a_\vartheta}{r}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial a_r}{\partial\vartheta}\right)\ .
\end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel für Berechnungen in Kugelkoordinaten bestimmen wir zum Abschluß dieses Abschnittes noch **Ortsvektor**, **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** eines physikalischen Objektes in **Kugelkoordinaten**. Zunächst ist anhand von Gl. (1.170) klar, dass der Ortsvektor lediglich eine Komponente in $r-$Richtung hat,

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)\ . \qquad (1.176)$$

Die Zeitableitung des Ortsvektors ergibt die Geschwindigkeit,

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r(t)\ . \qquad (1.177)$$

Andererseits gilt nach Gl. (1.171) für das totale Differential, dividiert durch dt

$$\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\ , \qquad (1.178)$$

wobei wir das Zeitargument der Einfachheit halber unterdrückt haben. Der Vergleich von Gl. (1.177) mit (1.178) ergibt

$$\dot{\vec{e}}_r \equiv \dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\ . \qquad (1.179)$$

Wegen der Orthogonalitätsrelation (1.58) und der Vollständigkeit der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_r,\,\vec{e}_\vartheta,\,\vec{e}_\varphi\}$ muss gelten:

$$\dot{\vec{e}}_\vartheta = \alpha\,\vec{e}_\varphi + \beta\,\vec{e}_r\ , \qquad (1.180)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \gamma\,\vec{e}_\vartheta + \delta\,\vec{e}_r\ . \qquad (1.181)$$

Aus der Orthonormalität der Basisvektoren leiten wir ferner folgende Beziehungen ab:

$$\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_r = 0 \iff \beta = \dot{\vec{e}}_\vartheta \cdot \vec{e}_r = -\vec{e}_\vartheta \cdot \dot{\vec{e}}_r = -\dot{\vartheta} \,, \tag{1.182}$$

$$\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \iff \alpha = \dot{\vec{e}}_\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\vartheta \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi = -\gamma \,, \tag{1.183}$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_r = 0 \iff \delta = \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_r = -\vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_r = -\sin\vartheta\,\dot{\varphi} \,, \tag{1.184}$$

wobei wir die Glgen. (1.180) und (1.181) benutzt haben. Den noch unbekannten Koeffizienten $\alpha = -\gamma$ bestimmt man wie folgt. Offenbar ist die x_3-Komponente von $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ stets null. Dies gilt auch für $\dot{\vec{e}}_\varphi$. Für dessen x_3-Komponente erhalten wir somit mit Gl. (1.181) die Beziehung

$$0 = -\alpha\,(-\sin\vartheta) - \sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\cos\vartheta \implies \alpha = \dot{\varphi}\,\cos\vartheta \,.$$

Die Glgen. (1.180) und (1.181) lauten also mit nun bestimmten Koeffizienten

$$\dot{\vec{e}}_\vartheta = \dot{\varphi}\,\cos\vartheta\,\vec{e}_\varphi - \dot{\vartheta}\,\vec{e}_r \,, \tag{1.185}$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta - \dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\vec{e}_r \,. \tag{1.186}$$

Nun sind wir in der Lage, auch die Beschleunigung als Zeitableitung von Gl. (1.178) zu berechnen (wir unterdrücken wieder die Abhängigkeit von der Zeit):

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\dot{\vartheta}\,\dot{\vec{e}}_\vartheta \\
&+ \dot{r}\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\sin\vartheta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi \\
&= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,(\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\,\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi) + \dot{r}\,\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\ddot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\,\dot{\vartheta}\,(\dot{\varphi}\,\cos\vartheta\,\vec{e}_\varphi - \dot{\vartheta}\,\vec{e}_r) \\
&+ \dot{r}\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\sin\vartheta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - r\,\sin\vartheta\,\dot{\varphi}^2\,(\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + \sin\vartheta\,\vec{e}_r) \\
&= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\vartheta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\vartheta\right)\vec{e}_r \\
&+ \left(r\,\ddot{\vartheta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\vartheta} - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\right)\vec{e}_\vartheta \\
&+ \left(r\,\ddot{\varphi}\,\sin\vartheta + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\vartheta + 2\,r\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\,\cos\vartheta\right)\vec{e}_\varphi \,,
\end{aligned} \tag{1.187}$$

wobei wir die Glgen. (1.179), (1.185) und (1.186) benutzt und die Terme geordnet haben.

4.6.2013

2 Mechanik des freien Massenpunktes

Wir kommen nun zum ersten wichtigen Thema der klassischen Mechanik: der Beschreibung der **Bewegung von Massenpunkten**. Ein **Massenpunkt** ist hierbei ein **physikalischer Körper** der **Masse** $\boldsymbol{m}$ mit **vernachlässigbarer Ausdehnung**. "Vernachlässigbare Ausdehnung" bedeutet, dass sie für das betrachtete Problem **irrelevant** ist.

Beispiel: Die Ausdehnung der Erde bezüglich der Bahnbewegung der Erde um die Sonne. Der Erdradius ist im Mittel $R_{\text{Erde}} \simeq 6.371$ km, während der mittlere Abstand der Erde von der Sonne $d_{\text{AE}} \simeq 149.597.870$ km $\equiv 1$ AE (Astronomische Einheit) beträgt. Es gilt also $R_{\text{Erde}}/d_{\text{AE}} \simeq 4,26 \cdot 10^{-5}$, d.h. $R_{\text{Erde}} \ll d_{\text{AE}}$. Dieses Beispiel macht deutlich, dass man sich bei einem gegebenen physikalischen Problem zunächst Klarheit über die Größen- bzw. Skalenverhältnisse verschaffen muss, damit man physikalische Körper als Massenpunkte behandeln kann.

Die **freie Bewegung** von Massenpunkten bedeutet eine Bewegung **ohne Zwangsbedingungen**. Bewegungen, die Zwangsbedingungen unterliegen, werden wir im zweiten Teil der Vorlesung (Mechanik II: Analytische Mechanik) ausführlich behandeln.

2.1 Kinematik

2.1.1 Das Grundproblem der Kinematik

Die **Kinematik** besteht aus der Beschreibung der Bahnbewegung, **ohne** nach den Ursachen für diese Bewegung zu fragen. Die **typische Aufgabenstellung** in der Kinematik ist die folgende: gegeben sei die **Beschleunigung** $\vec{a}(t)$ eines Massenpunktes. Zu bestimmen ist die daraus resultierende **Raumkurve** $\vec{r}(t)$. Da die Beschleunigung die zweite Ableitung von $\vec{r}(t)$ nach der Zeit ist, $\vec{a}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$, besteht die Lösung des Problems im zweifachen Integrieren nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \vec{a}(t') \;, && (2.1)\\
\Longrightarrow \quad \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \vec{v}(t') \\
&= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \left[\vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\, \vec{a}(t'')\right] \\
&= \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)\,(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\, \vec{a}(t'') \;. && (2.2)
\end{aligned}$$

Hierbei treten zwei **Integrationskonstanten** auf, die Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ und der Ort $\vec{r}(t_0)$ zum Anfangszeitpunkt t_0 der Integration. Eine eindeutige Lösung des kinematischen Problems erfordert die Kenntnis dieser beiden Integrationskonstanten. Im folgenden Abschnitt werden wir die allgemeine Lösung für einfache Bewegungsformen konstruieren, die aus einer speziellen Wahl für die Beschleunigung resultieren.

2.1.2 Einfache Bewegungsformen

1. **Geradlinig gleichförmige Bewegung:**
   In diesem Fall ist die Beschleunigung für alle Zeiten null, $\vec{a}(t) = 0 \quad \forall\ t$ und die Geschwindigkeit ist für alle Zeiten konstant, $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \quad \forall\, t$. Gemäß Gl. (2.2) erhalten wir:
   $$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0\,(t - t_0)\ . \tag{2.3}$$
   Diese Bewegungsform ist in Abb. 2.1 graphisch veranschaulicht.

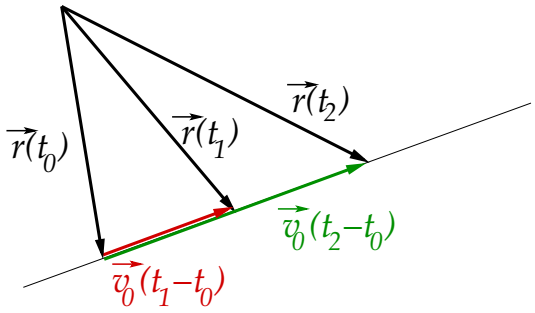


Abbildung 2.1: Die geradlinig gleichförmige Bewegung.

   Geradlinig bedeutet, dass die Bewegung zu allen Zeiten auf einer Geraden stattfindet, die **Bewegungsrichtung** $\sim \hat{v}_0$ also konstant bleibt. **Gleichförmig** bedeutet, dass in gleichen Zeitintervallen gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden.

2. **Geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung:**
   In diesem Fall ist die Beschleunigung für alle Zeiten konstant, $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \overrightarrow{const.}$ und entweder ist $\vec{v}(t_0) = 0$ oder $\hat{v}(t_0) = \hat{a}_0$. Wir betrachten zunächst $\vec{v}(t_0) = 0$; der Fall $\hat{v}(t_0) = \hat{a}_0$ wird bei der nächsten Bewegungsform diskutiert. Gemäß Glgen. (2.1), (2.2) erhalten wir:
   $$\vec{v}(t) = \vec{a}_0\,(t - t_0)\ , \tag{2.4}$$
   $$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \vec{a}_0 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'(t' - t_0) \\ &= \vec{r}(t_0) + \vec{a}_0 \int_{0}^{t-t_0} \mathrm{d}z\, z \\ &= \vec{r}(t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a}_0\,(t - t_0)^2\ ,\end{aligned} \tag{2.5}$$
   wobei wir $z \equiv t' - t_0$ als Integrationsvariable substituiert haben.

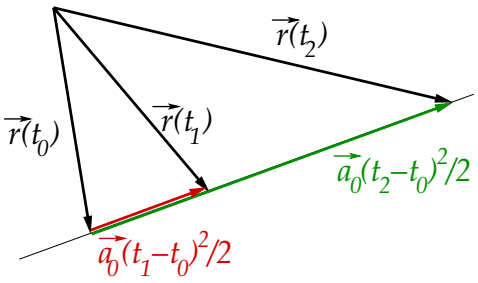


Abbildung 2.2: Die geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Diese Bewegungsform ist in Abb. 2.2 graphisch veranschaulicht.

Die Bewegung ist **geradlinig**, da sie auf einer Geraden stattfindet, die parallel zu $\vec{a}_0$ ausgerichtet ist, die Bewegungsrichtung bleibt also konstant $\sim \hat{a}_0$. **Gleichmäßig** bedeutet, dass die Beschleunigung dem Betrag nach konstant ist.

3. **Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:**
Für diese Bewegungsform ist die Beschleunigung ebenfalls konstant, $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \overrightarrow{const.}$, aber jetzt ist i.a. $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \neq 0$ und $\hat{v}_0 \neq \hat{a}_0$. Aus den Glgen. (2.1), (2.2) folgt:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\,(t - t_0)\,, \tag{2.6}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a}_0\,(t - t_0)^2\,. \tag{2.7}$$

Ganz offensichtlich resultiert die Trajektorie aus der **Überlagerung** der beiden vorangegangenen Bewegungsformen der geradlinig gleichförmigen, Gl. (2.3), in Richtung der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ und der geradlinig gleichmäßig beschleunigten, Gl. (2.5), in Richtung der Beschleunigung $\vec{a}_0$, vgl. Abb. 2.3.

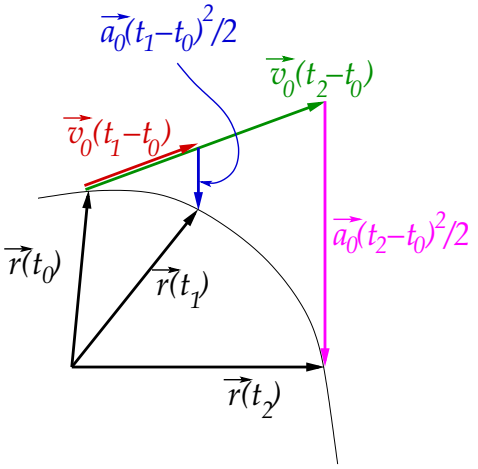


Abbildung 2.3: Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Die Trajektorie ist für $\hat{v}_0 \neq \hat{a}_0$ gekrümmt. Für $\hat{v}_0 \to \hat{a}_0$ geht diese Krümmung jedoch gegen null und wir erhalten eine geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung, der eine geradlinig gleichförmige Bewegung (in der gleichen Richtung) überlagert ist.

4. **Kreisbewegung:**
Zur Beschreibung dieser Bewegungsform bieten sich ebene Polarkoordinaten an. Wir nehmen an, dass der Radius des Kreises konstant bleibt, $r = const.$, also $\dot{r} = 0$. Dann folgt aus den Glgen. (1.164), (1.165) und (1.166):

$$\vec{r}(t) = r\,\vec{e}_r(t)\ , \tag{2.8}$$
$$\vec{v}(t) = r\,\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t)\ , \tag{2.9}$$
$$\vec{a}(t) = -r\,\dot{\varphi}^2(t)\,\vec{e}_r(t) + r\,\ddot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t)\ . \tag{2.10}$$

Hier haben wir die Zeitabhängigkeiten explizit ausgeschrieben. Die Zeitableitung des Polarwinkels bezeichnet man als **Winkelgeschwindigkeit**,

$$\omega(t) \equiv \dot{\varphi}(t)\ . \tag{2.11}$$

Damit gilt für den **Betrag** der Geschwindigkeit:

$$v(t) = r\,\omega(t)\ . \tag{2.12}$$

Die Radialkomponente der Beschleunigung ist identisch mit der im Zusammenhang mit den natürlichen Koordinaten eingeführten **Zentripetalbeschleunigung**,

$$a_r(t) = -r\,\omega^2(t)\ . \tag{2.13}$$

Das negative Vorzeichen besagt, dass sie zum Ursprung, also dem Kreismittelpunkt, zeigt. Die Polarkomponente der Beschleunigung ist die sog. **Tangentialbeschleunigung**,

$$a_\varphi(t) = r\,\dot{\omega}(t)\ . \tag{2.14}$$

Der Spezialfall der **gleichförmigen Kreisbewegung** ergibt sich für eine **konstante Winkelgeschwindigkeit**, $\omega = const.$, für den $a_\varphi = 0$, $a_r = -r\,\omega^2 = const.$ und $v = \omega\,r = const.$ folgt.

Man kann der Winkelgeschwindigkeit einen Vektor zuordnen, dessen Richtung die **Drehrichtung** charakterisiert. Dies muss dann ein **axialer Vektor** sein. Die Zuordnung ist so definiert, dass der Vektor in Richtung der $z-$Achse zeigt, $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\vec{e}_z$, wenn die Drehung im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) verläuft. Es gilt

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)\ , \tag{2.15}$$

vgl. Abb. 2.4.

Wir überprüfen, dass diese Gleichung korrekt ist:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = \omega(t)\,r\,\vec{e}_z \times \vec{e}_r(t) = \omega(t)\,r\,\vec{e}_\varphi(t)\ ,$$

wobei wir $\vec{e}_z \times \vec{e}_r(t) = \vec{e}_\varphi(t)$ benutzt haben, was aus Abb. 2.4 folgt. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber unter Benutzung von Gl. (2.12) identisch mit Gl. (2.9), woraus die Richtigkeit von Gl. (2.15) und damit die der Zuordnung der Richtung von $\vec{\omega}(t)$ folgt.

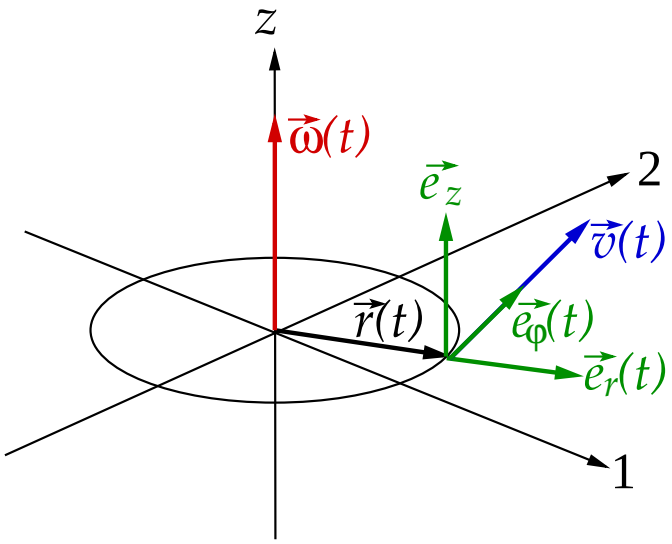


Abbildung 2.4: Zur Definition der Richtung von $\vec{\omega}(t)$.

2.2 Grundgesetze der Dynamik

Die **Dynamik** fragt im Gegensatz zur Kinematik nach der **Ursache** für eine Bewegung. Bei bekannter Ursache soll dann die Bahnkurve des Körpers berechnet werden.

Bevor wir mit der Diskussion der Grundgesetze der Dynamik beginnen, verschaffen wir uns kurz Klarheit über die **Struktur einer physikalischen Theorie**. In jeder Theorie gibt es **Definitionen**, die sich in **Basisdefinitionen** und **Folgedefinitionen** unterteilen. **Basisdefinitionen** beziehen sich auf Begriffe, die keiner weiteren Erläuterung bedürfen, z.B. der physikalische Ort eines Massenpunktes, beschrieben durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$. **Folgedefinitionen** beziehen sich auf Begriffe, die aus Basisdefinitionen abgeleitet werden, z.B. die Geschwindigkeit eines Massenpunktes, die sich aus der Zeitableitung des Ortsvektors ergibt, $\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t)$.

In ähnlicher Weise unterteilt man die **Sätze** einer physikalischen Theorie. Es gibt **Axiome** bzw. **Prinzipien** oder **Postulate**, die die Theorie begründen und an deren Anfang stehen. Diese sind mathematisch unbeweisbar. Für die Klassische Mechanik sind dies die **Newtonschen Axiome**, die wir im nächsten Abschnitt vorstellen werden. Aus den Axiomen leiten sich **Theoreme** ab, d.h. sie sind unter Zuhilfenahme der Axiome, also im Rahmen der Klassischen Mechanik der Newtonschen Axiome, mathematisch beweisbar.

In der Physik entscheidet die Übereinstimmung mit der Naturbeobachtung über die Richtigkeit einer bestimmten Theorie. Die Klassische Mechanik hat sich für alle Naturphänomene auf der Größenskala der alltäglichen Erfahrung und z.T. auch darüberhinaus auf größeren Skalen in diesem Sinne als richtig erwiesen. Dies begründet ihre zentrale Rolle im Kanon der Grundvorlesungen der Theoretischen Physik.

2.2.1 Die Newtonschen Axiome

Die Newtonschen Axiome erfordern die Einführung der Begriffe **Kraft** und **träger Masse**, also zweier **Basisdefinitionen**.

1. **Kraft:** Die Kraft entspricht der Anstrengung, die nötig ist, um den **Bewegungszustand** eines Körpers zu **ändern**. Da die Bewegung eines Körpers üblicherweise in einer bestimmten Richtung erfolgt, und damit die **Änderung** eines Bewegungszustands ebenfalls in einer gewissen **Richtung** stattfinden muss, ist die Kraft eine **vektorielle Größe**, $\vec{F}$. Die **Einheit** der Kraft ist **Newton**, $[\vec{F}] = \mathrm{N}$.

   Dass die Kraft mit der **Änderung** eines Bewegungszustands einhergeht, ist beileibe nicht so selbstverständlich wie es klingt. Newtons Zeitgenossen waren nämlich der Auffassung, dass die Kraft die **Ursache** für die Bewegung von Körpern ist. Damit müßte selbst ein gleichförmig bewegter Körper ständig einer Kraft ausgesetzt sein, um seinen Bewegungszustand zu erhalten. Umgekehrt würde ein bewegter Körper, auf den keine Kraft ausgeübt wird, irgendwann zur Ruhe kommen. Dies entsprach der gängigen Meinung von Newtons Zeitgenossen, weil sie offenbar mit Beobachtungstatsachen zu begründen ist, z.B. dass eine Kutsche von Pferden gezogen werden muss, um eine konstante Reisegeschwindigkeit zu halten und irgendwann zum Stillstand kommt, wenn sie nicht mehr gezogen wird. Dies ist natürlich ein **Trugschluss**, denn die Kutsche hört aufgrund von **Reibungskräften** auf zu rollen und muss gezogen werden, um diese Reibungskräfte auszugleichen. In der Tat ist es gerade die **Einwirkung** der **Reibungskräfte**, die den Bewegungszustand einer rollenden, nicht von Pferden gezogenen Kutsche **ändert**, ganz im Sinne der obigen Definition der Kraft.

2. **Träge Masse:** Die träge Masse ist der **Widerstand** eines Körpers gegen **Änderungen** seines Bewegungszustands. Da dieser Widerstand i.a. unabhängig von der Richtung der Änderung des Bewegungszustands ist, ist die träge Masse eine **skalare Größe**, m_t. Sie ist **reell** und **positiv definit**, $m_t \in \mathbb{R}$, $m_t > 0$. Die **Einheit** der Masse ist **Kilogramm**, $[m_t] = \mathrm{kg}$.

   Offenbar müssen wir für verschiedene Körper unterschiedliche Kraftanstrengungen aufbringen, um sie in einen Zustand der Bewegung zu versetzen, selbst wenn sie die gleiche Größe, d.h. das gleiche Volumen, besitzen, z.B. ein Stück Eisen im Vergleich zu einem Stück Holz gleicher Größe. Diese Körper unterscheiden sich in ihrer trägen Masse, die träge Masse ist also eine **Materialeigenschaft**.

Aus diesen Basisdefinitionen leiten sich folgende **Folgedefinitionen** ab:

1. **Kräftefreier Körper:** Ein kräftefreier Körper ist ein Körper, auf den **keine äußeren Kräfte wirken**.

   Dies ist im Grunde eine Modellvorstellung, die niemals exakt zu realisieren ist, da man einen solchen Körper vollständig von seiner Umgebung und deren Einflüssen isolieren müßte. Nach gegenwärtigem Kenntnisstand der Naturkräfte ist dies nicht möglich.

2. **Inertialsystem:** Ein Inertialsystem ist ein **Koordinatensystem**, in dem ein kräftefreier Körper im Zustand der **Ruhe** oder der **geradlinig gleichförmigen** Bewegung verharrt.

   Dies bedeutet, dass der Körper **nicht beschleunigt** wird, $\vec{a}(t) = 0 \ \ \forall\, t$.

3. **Impuls:** Der Impuls ist das Produkt aus träger Masse und Geschwindigkeit eines Körpers,

$$\vec{p} = m_t\, \vec{v}\ . \tag{2.16}$$

   Wie die Geschwindigkeit ist er eine vektorielle Größe. Als Produkt einer Basisgröße (m_t) und einer abgeleiteten Größe ($\vec{v} = \dot{\vec{r}}$) ist er ebenfalls eine abgeleitete Größe. Dadurch dass der Impuls sowohl zur Geschwindigkeit wie auch zur trägen Masse eines Körpers proportional ist, charakterisiert er einerseits dessen Bewegungszustand und andererseits auch dessen Widerstand gegen Änderungen dieses Bewegungszustandes.

Nach diesen Definitionen sind wir nun in der Lage, die **Newtonschen Axiome** anzugeben:

1. Newtonsches Axiom (Galileisches Trägheitsgesetz):

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

Unter Zuhilfenahme des Begriffs des kräftefreien Körpers läßt sich das 1. Newtonsche Axiom auch als **Definition des Inertialsystems** verstehen, s. oben.

2. Newtonsches Axiom (Bewegungsgesetz):

In einem Inertialsystem ist die Änderung des Impulses gleich der Kraft, die diese Änderung hervorruft,

$$\boldsymbol{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_t\, \vec{v})}\ \ . \tag{2.17}$$

Bemerkungen:

(i) Aus der Produktregel folgt

$$\vec{F} = \dot{m}_t\, \vec{v} + m_t\, \dot{\vec{v}} = \dot{m}_t\, \vec{v} + m_t\, \vec{a}\ . \tag{2.18}$$

Falls $m_t = const.$, so ist $\dot{m}_t = 0$ und

$$\vec{F} = m_t\, \vec{a}\ . \tag{2.19}$$

Dies ist die **dynamische Grundgleichung der klassischen Mechanik**. Es ist aber stets zu bedenken, dass sie **ausschließlich** für Körper gilt, deren träge Masse **zeitlich konstant** ist.

Bei näherer Betrachtung ist dies für **alle** Fortbewegungsmittel, die Treibstoff verbrauchen, den sie selbst mitführen, wie z.B. Autos, Flugzeuge, Raketen etc. **nicht** der Fall, nicht einmal für Radfahrer, Läufer oder Fußgänger. Für alle diese Fälle gilt (in der Regel, d.h. bis zum nächsten Auftanken) $\dot{m}_t < 0$, also $m_t \neq const.$.

(ii) Die dynamische Grundgleichung (2.19) läßt sich nach der Beschleunigung auflösen,

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_t} \, .$$

Damit bestimmt das Verhältnis von Kraft zu träger Masse die **Trajektorie** $\vec{r}(t)$, denn diese kann man im Prinzip durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit (und Angabe von zwei Integrationskonstanten) aus der Beschleunigung berechnen, wie in Abschnitt 2.1.1 ausführlich diskutiert.

(iii) Mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms läßt sich die Kraft als **Folgedefinition** auffassen, die aus der trägen Masse (einer Basisgröße) und der Beschleunigung (eine aus der Basisgröße Ort abgeleitete Größe) abgeleitet wird. Newton als Einheit der Kraft kann dann durch die Einheiten von träger Masse, Länge und Zeit ausgedrückt werden:

$$[\vec{F}] = \mathrm{N} = \left[m_t \, \frac{\vec{r}}{t^2} \right] = \mathrm{kg} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \, .$$

6.6.2013

3. Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip, actio = reactio):

Gegeben seien zwei Körper. Sei $\vec{F}_{12}$ die Kraft, die der zweite Körper auf den ersten ausübt, und $\vec{F}_{21}$ die Kraft, die der erste auf den zweiten ausübt. Dann gilt:

$$\boldsymbol{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}} \, . \tag{2.20}$$

Beispiel: Eine Kugel, die auf einer Tischplatte liegt, übt auf die Platte eine Kraft aus. Umgekehrt übt die Tischplatte eine Kraft auf die Kugel aus, vgl. Abb. 2.5.

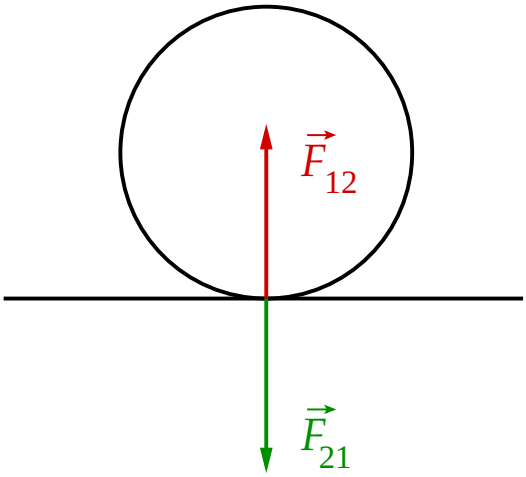


Abbildung 2.5: Beispiel für das 3. Newtonsche Axiom.

Mit Hilfe des 3. Newtonschen Axioms läßt sich eine **Meßvorschrift** für die träge Masse definieren. Für zwei Massenpunkte mit den trägen Massen $m_{t,1}$ und $m_{t,2}$, die aufeinander Kräfte ausüben, aber ansonsten keiner anderen Kraft ausgesetzt sind, gilt

$$m_{t,1} \, \vec{a}_1 = -m_{t,2} \, \vec{a}_2 \quad \Longrightarrow \quad m_{t,1} \, a_1 = m_{t,2} \, a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m_{t,1}}{m_{t,2}} = \frac{a_2}{a_1} \, . \tag{2.21}$$

Beschleunigungen sind gut meßbare Größen; man benötigt lediglich Zeit- und Ortsmessungen, um sie festzulegen, aber braucht die Kräfte, die die Beschleunigungen verursachen, nicht zu kennen. Das Verhältnis der Beschleunigungen und damit auch das Verhältnis der trägen Massen ist damit unabhängig von den wirkenden Kräften. Dies macht noch einmal deutlich, dass die träge Masse eine Materialeigenschaft ist.

Durch die Einführung eines **Massennormals**, d.h. einer Testmasse, deren Wert wir frei festlegen können, kann man alle anderen Massen durch Vergleich mit dieser Testmasse bestimmen. Die Testmasse habe den Wert 1 kg. Damit werden alle anderen Massen in Einheiten von kg festgelegt, z.B. nach Gl. (2.21) für $m_{t,1} = 1$ kg als Testmasse:

$$m_{t,2} = \frac{a_1}{a_2}\,\mathrm{kg}\ .$$

Die Maßzahl a_1/a_2 der Masse $m_{t,2}$ muss nun noch durch ein geeignetes Experiment, welches das Verhältnis der Beschleunigungen festlegt, bestimmt werden.

4. **Newtonsches Axiom (Superpositionsprinzip):**

   Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$, so addieren sich diese wie Vektoren,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\ . \tag{2.22}$$

2.2.2 Kräfte

Kräfte sind i.a. nicht überall in Raum und Zeit konstant, sondern variieren mit $\vec{r}$ und t. Sie sind also im mathematischen Sinn **Kraftfelder**. Sie können darüberhinaus auch von der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ abhängen; eine Abhängigkeit von der Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ ist aber in der Regel auszuschließen,

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\ .$$

Beispiele:

1. **Gewichtskraft, Schwerkraft:**

$$\vec{F}_s = m_s\,\vec{g}\ . \tag{2.23}$$

   Hierbei ist m_s die sog. **schwere Masse** und $\vec{g}$ die **Erdbeschleunigung**. In einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die $z-$Achse senkrecht zur Erdoberfläche steht, ist $\vec{g} = (0, 0, -g)$, wobei $g \simeq 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ der (mittlere) Wert der Beschleunigung an der Erdoberfläche ist. Die Einheit der schweren Masse ist dieselbe wie die der trägen Masse, $[m_s] = \mathrm{kg}$.

   Das sog. **Gewicht**, welches man im Alltagsgebrauch gerne in kg angibt, ist streng genommen keine Masse, sondern eine Kraft, nämlich die **Gewichtskraft** bzw. **Schwerkraft** (2.23), die auf eine Masse an der Erdoberfäche einwirkt. Eine schwere Masse $m_s = 1$ kg erfährt aufgrund dieser Gewichtskraft die Beschleunigung von 9,81 $\mathrm{m/s^2}$. Die Gewichtskraft bzw. Schwerkraft beträgt also eigentlich 9,81 N, und nicht 1 kg (was schon aufgrund der Einheit keine Kraft sein kann).

Was ist die Relation zwischen schwerer Masse und träger Masse? Die Beschleunigung $\vec{a}$, die ein Körper der trägen Masse m_t im Schwerefeld der Erde erfährt, ist aufgrund des 2. Newtonschen Axioms und Gl. (2.23) mit seiner schweren Masse verknüpft:

$$F = m_t\, a = F_s = m_s\, g = const. \implies a = \frac{m_s}{m_t}\, g = const. \implies \frac{m_s}{m_t} = const.$$
$$\implies m_s \sim m_t \ .$$

Träge Masse und schwere Masse sind also zumindest zueinander proportional. Aber was ist der Wert der Proportionalitätskonstanten? Diese Frage beantwortet das sog. **Einsteinsche Äquivalenzprinzip**. Es besagt, dass die beiden folgende Situationen hinsichtlich des Meßergebnisses prinzipiell ununterscheidbar sind:

(i) Eine Person führt in einem fensterlosen Raumschiff, welches sich mit Beschleunigung $\vec{a} = (0, 0, a)$ durch den kräftefreien Raum bewegt, eine Messung der trägen Masse m_t eines Körpers durch.

(ii) Eine Person führt in einem fensterlosen und bis auf die Schwerkraft kräftefreien Raum auf der Erdoberfläche eine Messung der schweren Masse m_s desselben Körpers durch.

Dies ist in Abb. 2.6 noch einmal bildlich dargestellt. Da beide Personen keinen Bezugspunkt außerhalb des Raumes haben, mit dessen Hilfe sie entscheiden könnten, ob sie sich im Raumschiff oder auf der Erde befinden, ist die Schlußfolgerung aus der Messung der beiden Massen

$$m_s = m_t = m \ . \tag{2.24}$$

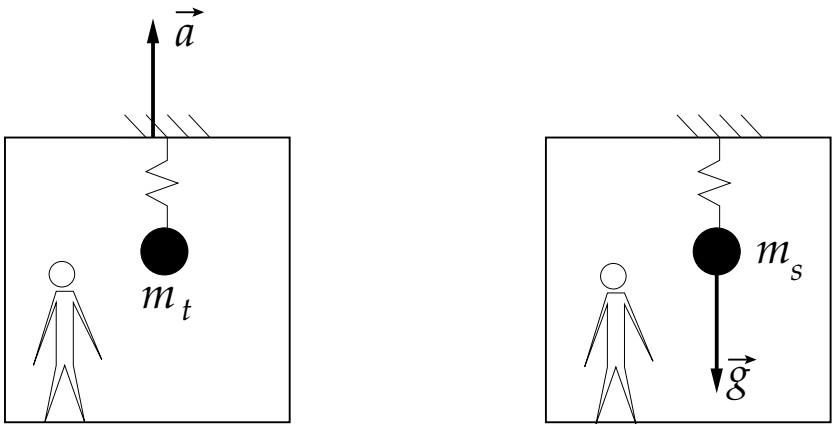


Abbildung 2.6: Zum Einsteinschen Äquivalenzprinzip.

2. **Zentralkräfte:**

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, \vec{e}_r \ . \tag{2.25}$$

Die Kraft wirkt immer radial vom Ursprung weg ($f > 0$) bzw. zum Ursprung hin ($f < 0$).

Beispiele:

(i) **Gravitationskraft**, die von einer Masse M im Koordinatenursprung auf eine Masse m am Ort $\vec{r}$ ausgeübt wird, vgl. Abb. 2.7,

$$f(r) = -\gamma \frac{m\,M}{r^2} \; . \tag{2.26}$$

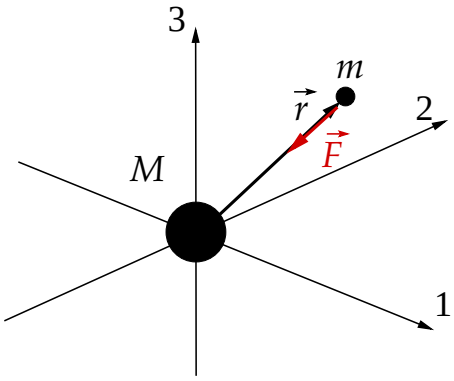


Abbildung 2.7: Zu der von der Masse M auf die Masse m ausgeübten Gravitationskraft.

Die Konstante $\gamma \simeq 6,674 \cdot 10^{-11}$ N(m/kg)^2 heißt **Newtonsche Gravitationskonstante**.

(ii) **Coulombkraft,** die von einer Ladung Q im Koordinatenursprung auf eine Ladung q am Ort $\vec{r}$ ausgeübt wird,

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\,Q}{r^2} \; . \tag{2.27}$$

Die Konstante $\epsilon_0 \simeq 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm ist die sog. **Dielektrizitätskonstante** des Vakuums.

3. **Lorentzkraft**, die ein Teilchen der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld erfährt,

$$\vec{F} = q\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right] \; . \tag{2.28}$$

Hierbei ist $\vec{v}$ die Teilchengeschwindigkeit, $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke und $\vec{B}$ die magnetische Induktion. Die Lorentzkraft ist i.a. eine **geschwindigkeitsabhängige** Kraft.

4. **Reibungskräfte**, die der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers entgegenwirken und ihn zur Ruhe bringen möchten:

$$\vec{F}_R = -\alpha(v)\,\vec{v}\,, \quad \alpha(v) > 0 \; . \tag{2.29}$$

Man unterscheidet

(i) **Stokessche Reibung:** $\alpha(v) = \alpha = const.$.

(ii) **Newtonsche Reibung:** $\alpha(v) = \beta\,v\,, \;\; \beta = const.$.

Auch Reibungskräfte sind, wie die Lorentzkraft, **geschwindigkeitsabhängig**.

2.2.3 Inertialsysteme, Galilei-Transformation

Die Verschiebung oder Drehung eines Koordinatensystems hat keinen Einfluss auf die Bahnbewegung eines Körpers. Man wählt günstigerweise dasjenige Koordinatensystem, in dem die Berechnung der Bahnbewegung besonders einfach wird.

Die Frage ist, was mit der Beschreibung der Bahnbewegung passiert, wenn wir von einem Koordinatensystem Σ in ein Koordinatensystem Σ' transformieren, das sich relativ zu Σ mit **konstanter Geschwindigkeit** bewegt, vgl. Abb. 2.8. Der Einfachheit halber wählen wir kartesische Koordinaten.

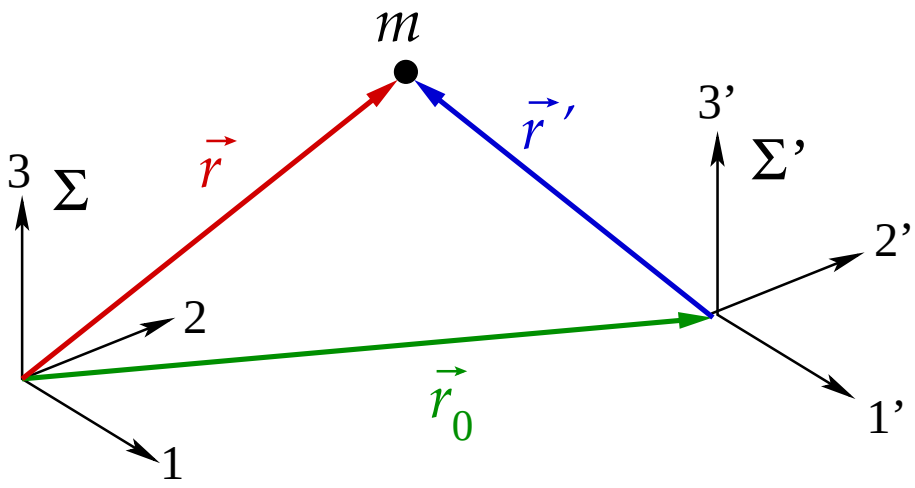


Abbildung 2.8: Galilei-Transformation.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ mögen die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme übereinstimmen. Da sich der Ursprung von Σ' in Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \overrightarrow{const.}$ bewegt, gilt

$$\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0\, t \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_0(t) \equiv \dot{\vec{r}}_0(t) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{const.} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}_0(t) \equiv \dot{\vec{v}}_0(t) = \ddot{\vec{r}}_0(t) = \dot{\vec{v}}_0 \equiv 0 \; .$$

Offenbar gilt dann

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{r}_0(t) \; , \tag{2.30}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}\,'(t) + \dot{\vec{r}}_0(t) \equiv \vec{v}\,'(t) + \vec{v}_0 \; , \tag{2.31}$$

$$\vec{a}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}\,'(t) + \ddot{\vec{r}}_0(t) = \vec{a}\,'(t) \; . \tag{2.32}$$

Damit gilt aber auch

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\vec{a}\,' = \vec{F}\,' \; , \tag{2.33}$$

d.h. die Kräfte, die in Σ und in Σ' auf die Masse m wirken, sind identisch. Insbesondere ist ein **kräftefreier Körper** in Σ, $\vec{F} = m\,\vec{a} = 0$, auch ein kräftefreier Körper in Σ', $\vec{F}\,' = m\,\vec{a}\,' = 0$. Mit anderen Worten, falls Σ ein **Inertialsystem** ist, so ist auch Σ' ein Inertialsystem und umgekehrt.

Offenbar ist Σ' genau dann ein Inertialsystem, wenn Σ ein Inertialsystem ist und wenn $\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0\, t$, mit $\vec{v}_0 = \overrightarrow{const.}$. Da $\vec{v}_0$ beliebig ist, gibt es **unendlich viele** Inertialsysteme.

Die Transformation (2.30) – (2.32), welche ein Inertialsystem in ein anderes transformiert, heißt **Galilei-Transformation**. Dabei nimmt man an, dass es eine **absolute Zeit** gibt, die sich bei der Transformation nicht ändert,

$$t = t' \ .$$

Diese Annahme wird später in der speziellen Relativitätstheorie widerlegt werden; anstelle der Galilei-Transformation tritt die **Lorentz-Transformation**.

2.2.4 Rotierende Bezugssysteme, Scheinkräfte

Aus dem letzten Abschnitt ist klar, dass ein relativ zu einem Inertialsystem **rotierendes** Koordinatensystem **kein** Inertialsystem darstellt, da hier $\vec{v}_0(t) \neq \overrightarrow{const.}$ ist. Die Gleichungen (2.31) und (2.32) werden ersetzt durch

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}\,'(t) + \vec{v}_0(t) + \dot{\vec{v}}_0(t)\, t \ , \\ \vec{a}(t) &= \vec{a}\,'(t) + 2\,\dot{\vec{v}}_0(t) + \ddot{\vec{v}}_0(t)\, t \neq \vec{a}\,'(t) \ . \end{aligned}$$

Damit ist ein im System Σ kräftefreier Körper **nicht mehr kräftefrei** im System Σ',

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = 0 = 2\,\dot{\vec{v}}_0(t) + \ddot{\vec{v}}_0(t)\, t + \vec{a}\,'(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\vec{F}\,'(t)}{m} = \vec{a}\,'(t) = -2\,\dot{\vec{v}}_0(t) - \ddot{\vec{v}}_0(t)\, t \neq 0 \ ,$$

d.h., er erfährt in Σ' eine Beschleunigung $\vec{a}\,'(t) \neq 0$, auch wenn er in Σ beschleunigungsfrei ist.

Wir machen uns dies anhand eines Beispiels klar. Wir betrachten ein **Inertialsystem** Σ und ein relativ dazu mit **konstanter Winkelgeschwindigkeit** $\omega = const.$ rotierendes **Nicht-Inertialsystem** Σ', vgl. Abb. 2.9.

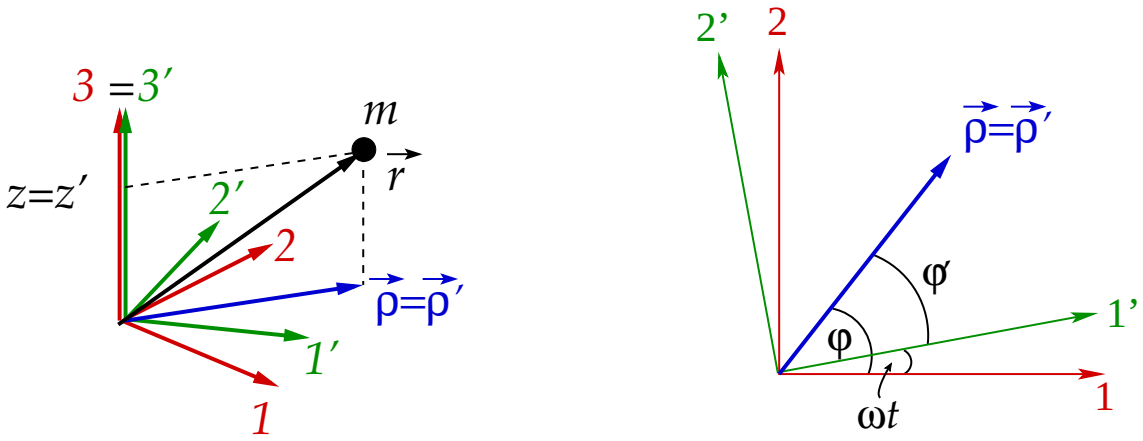


Abbildung 2.9: Das Inertialsystem Σ und das relativ dazu rotierende Nicht-Inertialsystem Σ'.

Die beiden Koordinatensysteme mögen denselben Ursprung und dieselben 3−Achsen haben, $\vec{e}_3 = \vec{e}_3'$. Die Rotationsachse sei die z−Achse, d.h. die $(1', 2')$−Achsen von Σ'

rotieren in der $(1,2)-$Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen die $(1',2')-$Achsen gerade mit den $(1,2)-$Achsen identisch sein. Es ist vorteilhaft, für die weitere Betrachtung Zylinderkoordinaten zu benutzen. Dann gilt

11.6.2013

$$\begin{aligned} \rho &= \rho' \,, \\ \varphi &= \varphi' + \omega\, t \,, \\ z &= z' \,. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten ist durch Gl. (1.163) gegeben, woraus wir für die Komponenten der Kraft im System Σ erhalten

$$F_\rho = m\, a_\rho = m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2\right) \,, \tag{2.35}$$

$$F_\varphi = m\, a_\varphi = m\left(\rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\right) \,, \tag{2.36}$$

$$F_z = m\, a_z = m\,\ddot{z} \,. \tag{2.37}$$

Im System Σ' erhalten wir dagegen mit den Beziehungen (2.34)

$$\begin{aligned} F'_\rho &= m\, a'_\rho = m\left(\ddot{\rho}' - \rho'\,\dot{\varphi}'^{\,2}\right) = m\left[\ddot{\rho} - \rho\,(\dot{\varphi} - \omega)^2\right] \\ &= m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2\right) + m\,\rho\,\omega\,(2\,\dot{\varphi} - \omega) = F_\rho + m\,\rho\,\omega\,(2\,\dot{\varphi}' + \omega) \,, \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} F'_\varphi &= m\, a'_\varphi = m\,(\rho'\,\ddot{\varphi}' + 2\,\dot{\rho}'\,\dot{\varphi}') = m\left[\rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\,(\dot{\varphi} - \omega)\right] \,, \\ &= F_\varphi - 2\,m\,\dot{\rho}\,\omega \,, \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$F'_z = m\, a'_z = m\,\ddot{z}' = m\,\ddot{z} = F_z \,. \tag{2.40}$$

Für einen in Σ kräftefreien Körper gilt $F_\rho = F_\varphi = F_z = 0$, aber in Σ' gilt dann für denselben Körper

$$F'_\rho = 2\,m\,\rho\,\omega\,\dot{\varphi}' + m\,\rho\,\omega^2 \,, \tag{2.41}$$

$$F'_\varphi = -2\,m\,\dot{\rho}\,\omega \,, \tag{2.42}$$

$$F'_z = 0 \,. \tag{2.43}$$

Der Körper ist nicht mehr kräftefrei in Σ', welches damit offensichtlich **kein** Inertialsystem mehr ist. Auf den Körper wirken sog. **Scheinkräfte**. Die beiden wichtigsten davon sind

1. die **Zentrifugalkraft**, entsprechend dem zweiten Term in Gl. (2.41). Falls die Masse m in Σ' ruht, so dass $\dot{\varphi}' = 0$, dann ist $F'_\rho = m\,\rho\,\omega^2$. Diese Kraftkomponente, die vom Ursprung weg in radialer Richtung wirkt, spürt man beispielsweise im Auto bei der Fahrt durch eine Kurve. Im System Σ' des Autos scheint die Zentrifugalkraft den Fahrer nach außen zu drücken. Dies ist eine Scheinkraft, da die Ursache der Beschleunigung eigentlich das Bestreben des Fahrers ist, in seinem ursprünglichen Bewegungszustand (geradlinige Bewegung) zu verharren. In einer Raumstation kann man mit Hilfe der Zentrifugalkraft eine künstliche Schwerkraftwirkung erzeugen.

2. die **Corioliskraft** (2.42). Diese Kraftkomponente bewirkt, dass ein Stein, den man von einem Turm auf der (rotierenden) Erde fallen läßt, nicht senkrecht nach unten fällt. Zunächst würde man vermuten, dass der Auftreffpunkt gegenüber dem Startpunkt entgegen der Erdrotation (also westlich) versetzt erscheint, weil sich die Erde

während der Fallbewegung ein Stückchen weitergedreht hat. Dies ist zwar richtig, aber der Stein hat beim Loslassen auch eine nichtverschwindende Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Erdrotation und diese ist auf der Turmspitze größer als am Fuß des Turms. Dies kehrt den Effekt um und sorgt für eine Ablenkung in Richtung der Erdrotation (also östlich).

2.2.5 Beliebig beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten ein Inertialsystem $\Sigma = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und ein sich **relativ dazu beliebig bewegendes** System $\Sigma' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$. Diese Relativbewegung setzt sich aus einer **Translation** des Urprungs und einer **Rotation** der Koordinatenachsen zusammen, vgl. Abb. 2.10.

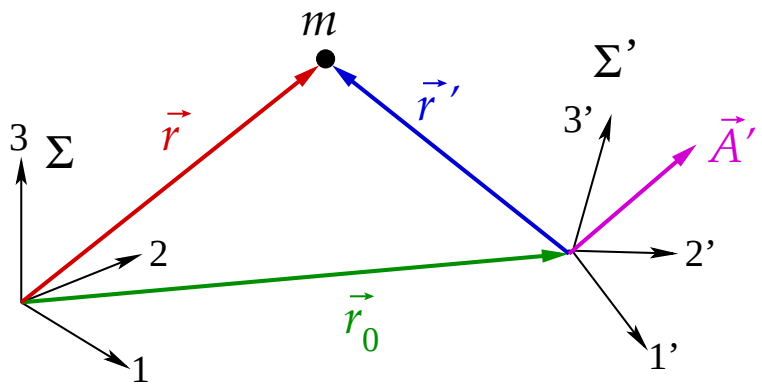


Abbildung 2.10: Das Inertialsystem Σ und das sich relativ dazu beliebig bewegende Nicht-Inertialsystem Σ'.

Wir betrachten einen beliebigen Vektor $\vec{A}'$ im System Σ',

$$\vec{A}' = \sum_{i=1}^{3} a_i' \, \vec{e}_i' \, ,$$

und berechnen seine Zeitableitung, aber vom System Σ aus gesehen, in dem sich Σ' relativ zu Σ bewegt,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\mathrm{d}a_i'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \vec{e}_i' + \sum_{i=1}^{3} a_i' \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \, . \tag{2.44}$$

Der erste Term beschreibt die zeitliche Änderung von $\vec{A}'$ von Σ' aus gesehen, denn dort sind die $\vec{e}_i'$ als kartesische Einheitsvektoren konstant und nur die Komponenten (Koordinaten) des Vektors ändern sich,

$$\sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\mathrm{d}a_i'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \vec{e}_i' \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} \, . \tag{2.45}$$

Welche Bedeutung aber hat der zweite Term in Gl. (2.44)? Falls $\vec{A}' = \overrightarrow{const.}$ in Σ', so wäre der erste Term in Gl. (2.44) null und der zweite Term gleich der gesamten Änderung von $\vec{A}'$

pro Zeiteinheit $\mathrm{d}t$ von Σ aus gesehen. Diese resultiert nun allein aus der **Rotation** von Σ' relativ zu Σ, denn eine Translation ändert nichts an den Einheitsvektoren $\vec{e}_i'$ des Systems Σ' (Vektoren lassen sich stets beliebig verschieben). Die Änderung von $\vec{A}'$ aufgrund der Rotation läßt sich mit Hilfe des Vektors $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit ausdrücken. Dazu betrachten wir Abb. 2.11.

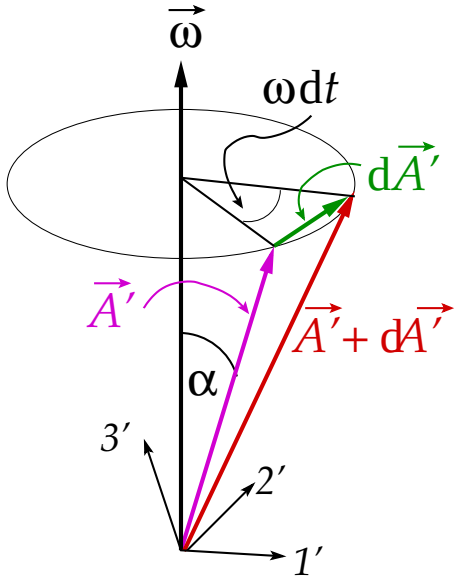


Abbildung 2.11: Die Rotation des Systems Σ' erzeugt von Σ aus betrachtet eine Änderung des Vektors $\vec{A}'$.

Offenbar ist $\mathrm{d}\vec{A}' \perp \vec{A}'$ und $\mathrm{d}\vec{A}' \perp \vec{\omega}$. Ferner ist der Betrag $\mathrm{d}A' = A' \sin\alpha\,(\omega \mathrm{d}t)$. Diese Tatsachen lassen sich als

$$\mathrm{d}\vec{A}' = (\vec{\omega} \times \vec{A}')\,\mathrm{d}t$$

ausdrücken, bzw. nach Division durch $\mathrm{d}t$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}'}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{Rotation}} = \vec{\omega} \times \vec{A}' \,. \tag{2.46}$$

Fassen wir beide Resultate (2.45) und (2.46) zusammen, so erhalten wir für Gl. (2.44) das Endresultat

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{A}' \,. \tag{2.47}$$

Dies gilt für beliebige Vektoren, also auch für den Ortsvektor $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} - \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \,. \tag{2.48}$$

Nochmaliges Ableiten nach der Zeit, relativ vom System Σ aus gesehen, ergibt

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma} - \left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_0}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right)_{\Sigma} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}\times\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}\times\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma'} + 2\,\vec{\omega}\times\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')\,. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Im folgenden bezeichnen wir zur Vereinfachung der Notation die Zeitableitung vom System Σ aus betrachtet wieder mit einem Punkt über der abzuleitenden Größe. Die Zeitableitung vom System Σ' aus betrachtet schreiben wir allerdings voll aus. Dann folgt aus Gl. (2.49) nach Multiplikation mit m und Umstellen der Terme für die Kraft im System Σ'

$$\vec{F}\,' = m\left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\Sigma'} = \vec{F} - m\,\ddot{\vec{r}}_0 - 2\,m\,\vec{\omega}\times\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_{\Sigma'} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - m\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'\,, \qquad (2.50)$$

wobei wir $\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}$ benutzt haben. Der zweite Term auf der rechten Seite ist die Relativbeschleunigung der beiden Koordinatensysteme. Der dritte Term ist die Corioliskraft und der vierte die Zentrifugalkraft.

2.3 Einfache Probleme der Dynamik

2.3.1 Das Grundproblem der Dynamik

Das Grundproblem der Dynamik besteht in der Berechnung der **Raumkurve** eines Körpers mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms (2.17) bzw. der dynamischen Grundgleichung (2.19),

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\dot{\vec{v}} = m\,\ddot{\vec{r}}\,. \qquad (2.51)$$

Nach Division durch m sieht dieses Problem formal genauso aus wie das Grundproblem der Kinematik: finde $\vec{r}(t)$ aus der Gleichung $\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \vec{F}/m$ für gegebenes $\vec{a}$ bzw. $\vec{F}/m$. Man mag jetzt vermuten, dass die Lösung ähnlich einfach zu erhalten sein wird wie dort, nämlich durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit. Dies trifft zu, wenn $\vec{a}$ bzw. $\vec{F}$ lediglich eine Funktion der Zeit ist, $\vec{a} = \vec{a}(t)$ bzw. $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Beispiele dafür sind der freie Fall, der senkrechte Wurf oder der schräge Wurf, jeweils ohne Luftreibung. Diese Fälle wurden ausgiebig in den Übungsaufgaben behandelt.

I.a. aber ist die Kraft nicht nur eine Funktion der Zeit, sondern auch des Ortes und ggfs. der Geschwindigkeit, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. In diesem Fall handelt es sich bei der dynamischen Grundgleichung (2.51) um eine **Differentialgleichung** für die Funktion $\vec{r}(t)$, die es zu lösen gilt. Um zu sehen, wie dies vonstatten geht, machen wir als nächstes einen mathematischen Einschub.

2.3.2 Lineare Differentialgleichungen

Wir bezeichnen die $n-$te Ableitung der Funktion $x(t)$ nach t mit

$$x^{(n)}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \; . \tag{2.52}$$

Definition: Eine Beziehung

$$f(x^{(n)},\, x^{(n-1)},\, \ldots,\, \dot{x},\, x,\, t) = 0 \; , \tag{2.53}$$

die t, x, sowie alle Ableitungen von $x(t)$ nach t bis zur maximal $n-$ten Ordnung miteinander verknüpft, heißt **Differentialgleichung $n-$ter Ordnung** für die Funktion $x(t)$.

Beispiele:

1. Die Newtonsche Bewegungsgleichung in einer Raumdimension,

   $$f(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) \equiv m\,\ddot{x} - F(x, \dot{x}, t) = 0 \; ,$$

   ist eine **Differentialgleichung zweiter Ordnung** für die Funktion $x(t)$.

2. Die Newtonsche Bewegungsgleichung in drei Raumdimensionen,

   $$\begin{aligned} & m\,\ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &&= 0 \; , \\ \Longleftrightarrow \quad & m\,\ddot{x}_i - F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_1, \dot{x}_3, t) &&= 0 \; , \quad i = 1, 2, 3 \; , \end{aligned}$$

   stellt ein **gekoppeltes System** von **drei** Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ dar.

Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung $n-$ter Ordnung ist von der Gestalt

$$x(\, t \mid \gamma_1,\, \gamma_2, \ldots,\, \gamma_n) \; ,$$

d.h. sie hängt von dem Satz n **unabhängiger** Parameter $\gamma_1,\, \gamma_2, \ldots,\, \gamma_n$ ab. Jeder vorgegebene Satz spezifiziert eine **spezielle** Lösung der Differentialgleichung. Die Parameter γ_i können über die Anfangswerte $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$, $\ldots$, $x^{(n-1)}(t_0)$ festgelegt werden.

Definition: Eine **lineare Differentialgleichung** ist eine Differentialgleichung, in der die Ableitungen $x^{(j)}(t)$ höchstens in erster (linearer) Ordnung auftreten,

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t)\, x^{(j)}(t) = \beta(t) \; . \tag{2.54}$$

Falls $\beta(t) = 0$, so liegt eine **homogene** lineare Differentialgleichung vor, falls $\beta(t) \neq 0$, so heißt sie **inhomogen**.

Für homogene lineare Differentialgleichungen gilt das **Superpositionsprinzip**: Seien $x_1(t)$, $x_2(t)$ zwei Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung. Dann ist auch

$$c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t)$$

mit beliebigen Koeffizienten c_1, c_2 eine Lösung.

Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_m(t)$ einer Differentialgleichung heißen **linear unabhängig**, falls die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, x_j(t) = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ erfüllt wird.

Sei m die **maximale Zahl** linear unabhängiger Lösungsfunktionen. Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung kann man als **Linearkombination** dieser m linear unabhängigen Lösungsfunktionen schreiben,

$$x(\, t \mid \gamma_1, \, \gamma_2, \ldots, \, \gamma_n) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, x_j(t) \; . \tag{2.55}$$

Dies zeigt man am besten durch einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass dies nicht möglich wäre. Das bedeutet dann aber, dass die linke Seite von den anderen Lösungen linear **un**abhängig ist, weil man sie nicht als Linearkombination der linear unabhängigen Lösungen schreiben kann. Dann wiederum ist m nicht die maximale Zahl linear unabhängiger Lösungen, was aber ein Widerspruch ist, q.e.d..

Auf der rechten Seite der Gl. (2.55) treten m Parameter α_j auf, auf der linken dagegen n Parameter γ_j. Die Zahl m der Parameter α_j darf nicht kleiner als n sein, also $m \geq n$, denn die allgemeine Lösung $x(\, t \mid \gamma_1, \, \gamma_2, \ldots, \, \gamma_n)$ benötigt **mindestens** n Parameter. Andererseits muss auch $m \leq n$ gelten, denn sonst hinge $x(\, t \mid \gamma_1, \, \gamma_2, \ldots, \, \gamma_n)$ von **mehr** als n Parametern ab. Beide Bedingungen lassen sich nur für $m = n$ erfüllen,

$$x(\, t \mid \gamma_1, \, \gamma_2, \ldots, \, \gamma_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, x_j(t) \; . \tag{2.56}$$

Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung läßt sich als Linearkombination von n linear unabhängigen Lösungsfunktionen darstellen. Für eine Differentialgleichung $n-$ter Ordnung existieren maximal n linear unabhängige Lösungsfunktionen. Es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den α_j und den γ_j, z.B. $\alpha_j = \gamma_j$.

Die Lösung einer **inhomogenen linearen Differentialgleichung** besteht aus einer Superposition der **allgemeinen Lösung** $x(\, t \mid \gamma_1, \, \gamma_2, \ldots, \, \gamma_n)$ der **homogenen** Differentialgleichung und einer **speziellen Lösung** $x_0(t)$ der **inhomogenen** Differentialgleichung,

$$\bar{x}(\, t \mid \gamma_1, \, \gamma_2, \ldots, \, \gamma_n) = x(\, t \mid \gamma_1, \, \gamma_2, \ldots, \, \gamma_n) + x_0(t) \; . \tag{2.57}$$

2.3.3 Bewegung im homogenen Schwerefeld mit Reibung

13.6.2013

Als erstes Anwendungsbeispiel für das Lösen von Differentialgleichungen betrachten wir den freien Fall unter dem Einfluss von Luftreibung. Wir setzen hierzu die geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft (2.29) zusammen mit der Schwerkraft (2.23) in die dynamische Grundgleichung (2.51) ein,

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_R = m\,\vec{g} - \alpha(|\dot{\vec{r}}|)\,\dot{\vec{r}} \;\; &= \;\; m\,\ddot{\vec{r}} \\ \iff \;\; m\,\ddot{\vec{r}} + \alpha(|\dot{\vec{r}}|)\,\dot{\vec{r}} \;\; &= \;\; m\,\vec{g} \; . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Hier haben wir $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ geschrieben, um die Abhängigkeit von den Zeitableitungen von $\vec{r}$ deutlich zu machen. Offenbar handelt es sich um eine **inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung** für die Funktion $\vec{r}(t)$.

Für **Newtonsche Reibung**, $\alpha(|\dot{\vec{r}}|) = \beta\,|\dot{\vec{r}}|$, ist diese Differentialgleichung **nichtlinear**, denn es tritt eine **transzendente Funktion** der ersten Ableitung $\dot{\vec{r}}$ auf, $|\dot{\vec{r}}| \equiv \sqrt{\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}}$, die darüberhinaus noch mit $\dot{\vec{r}}$ multipliziert wird. Wir beschränken uns daher auf den Fall **Stokesscher Reibung**, $\alpha(|\dot{\vec{r}}|) = \alpha = const.$. In diesem Fall handelt es sich um eine **inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung** für die Funktion $\vec{r}(t)$,

$$m\,\ddot{\vec{r}} + \alpha\,\dot{\vec{r}} = m\,\vec{g}\;. \tag{2.59}$$

Die allgemeine Lösung setzt sich gemäß Gl. (2.57) aus der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen.

Lösen wir also zunächst die homogene Differentialgleichung

$$m\,\ddot{x}_i + \alpha\,\dot{x}_i = 0\;,\quad i = 1,2,3\;. \tag{2.60}$$

Offenbar ist die Lösung eine Funktion, für die bis auf das Vorzeichen und Vorfaktoren die zweite Ableitung nach der Zeit gleich der ersten Ableitung nach der Zeit ist. Eine Funktion, die sich beim Ableiten stets selbst reproduziert, ist bekannterweise die **Exponentialfunktion**. Wir machen daher den **Lösungsansatz**

$$x_i = e^{\gamma t} \implies \dot{x}_i = \gamma\,e^{\gamma t} \implies \ddot{x}_i = \gamma^2\,e^{\gamma t}\;. \tag{2.61}$$

Einsetzen in Gl. (2.60) ergibt

$$m\,\gamma^2\,e^{\gamma t} + \alpha\,\gamma\,e^{\gamma t} = (m\,\gamma + \alpha)\,\gamma\,e^{\gamma t} = 0 \implies \gamma_1 = 0\;,\quad \gamma_2 = -\frac{\alpha}{m}\;.$$

Die beiden (es gibt nur zwei!) **linear unabhängigen** Lösungen der homogenen Differentialgleichung (2.60) sind also

$$x_i^{(1)}(t) = 1\;,\quad x_i^{(2)}(t) = e^{-\alpha t/m}\;. \tag{2.62}$$

Die **allgemeine** Lösung der homogenen Differentialgleichung ist dann

$$x_i^{(\mathrm{a})}(t) = a_i^{(1)} + a_i^{(2)}\,e^{-\alpha t/m}\;, \tag{2.63}$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$. Diese ist in Abb. 2.12 skizziert.

Nun müssen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung konstruieren. Die Inhomogenität tritt aber nur in der x_3-Komponente auf, da $\vec{g} = (0,0,-g)$ ist,

$$m\,\ddot{x}_3 + \alpha\,\dot{x}_3 = -m\,g\;. \tag{2.64}$$

Wir erhalten eine spezielle Lösung aus folgender Überlegung. Die Schwerkraft erhöht die Geschwindigkeit des Körpers so lange, bis die damit ebenfalls anwachsende Reibungskraft der Schwerkraft das Gleichgewicht hält,

$$F_{R,3} + F_{s,3} = 0 \iff F_{R,3} = -\alpha\,\dot{x}_3^{(\mathrm{s})} = m\,g = -F_{s,3}\;. \tag{2.65}$$

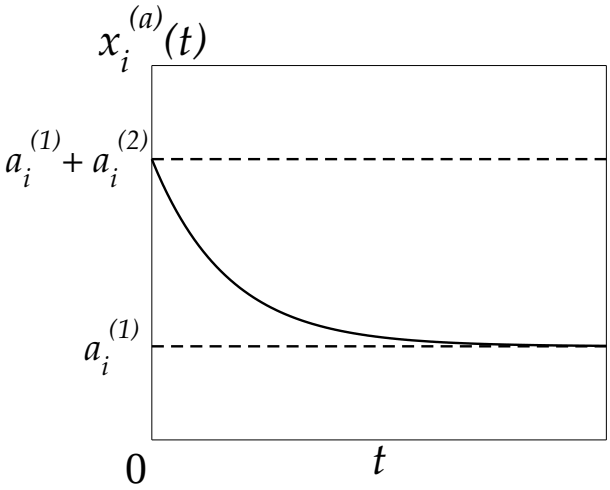


Abbildung 2.12: Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (2.60).

Dann ist der Körper **kräftefrei**, $m\,\ddot{x}_3^{(\mathrm{s})} = 0$. Die Zeitableitung der speziellen Lösung ergibt sich aus der Bedingung (2.65) für das Kräftegleichgewicht,

$$\dot{x}_3^{(\mathrm{s})} = -\frac{m}{\alpha}\,g\ .$$

Dies ist die **Grenzgeschwindigkeit** eines Körpers für den freien Fall mit Luftreibung. Einmaliges Integrieren nach der Zeit von 0 bis t ergibt

$$x_3^{(\mathrm{s})}(t) = -\frac{m}{\alpha}\,g\,t\ . \tag{2.66}$$

Die Anfangsbedingung dieser speziellen Lösung können wir ohne weiteres zu $x_3^{(\mathrm{s})}(0) = 0$ wählen, denn wir werden die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ohnehin an die Anfangsbedingungen anpassen müssen. Dazu dienen die Parameter $a_i^{(1)}$ und $a_i^{(2)}$ der allgemeinen Lösung (2.63) der homogenen Differentialgleichung.

Gemäß Gl. (2.57) ergibt sich nun die **allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung** (2.59) aus der Addition von (2.63) und (2.66),

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1^{(1)} + a_1^{(2)}\,e^{-\alpha t/m}\ , \\ x_2(t) &= a_2^{(1)} + a_2^{(2)}\,e^{-\alpha t/m}\ , \\ x_3(t) &= a_3^{(1)} + a_3^{(2)}\,e^{-\alpha t/m} - \frac{m}{\alpha}\,g\,t\ . \end{aligned} \tag{2.67}$$

Für die Geschwindigkeiten gilt

$$\begin{aligned} v_1(t) = \dot{x}_1(t) &= -\frac{\alpha}{m}\,a_1^{(2)}\,e^{-\alpha t/m}\ , \\ v_2(t) = \dot{x}_2(t) &= -\frac{\alpha}{m}\,a_2^{(2)}\,e^{-\alpha t/m}\ , \\ v_3(t) = \dot{x}_3(t) &= -\frac{\alpha}{m}\,a_3^{(2)}\,e^{-\alpha t/m} - \frac{m}{\alpha}\,g\ . \end{aligned} \tag{2.68}$$

Diese zeigen das korrekte asymptotische Verhalten, nämlich $v_{1,2}(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ und $v_3(t) \to -mg/\alpha \equiv \dot{x}_3^{(s)}$ $(t \to \infty)$, die oben diskutierte Grenzgeschwindigkeit für den freien Fall.

Wir passen nun die sechs Parameter $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $i = 1, 2, 3$, an die Anfangsbedingungen für ein spezielles Problem an, z.B. den freien Fall aus der Höhe h mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit, $\vec{r}(0) = (0, 0, h)$, $\vec{v}(0) = 0$. Eingesetzt in die Glgen. (2.67) und (2.68) ergibt dies

$$\begin{aligned} 0 &= a_1^{(1)} + a_1^{(2)} \,, \qquad 0 = -\frac{\alpha}{m}\, a_1^{(2)} \,, \\ 0 &= a_2^{(1)} + a_2^{(2)} \,, \qquad 0 = -\frac{\alpha}{m}\, a_2^{(2)} \,, \\ h &= a_3^{(1)} + a_3^{(2)} \,, \qquad 0 = -\frac{\alpha}{m}\, a_3^{(2)} - \frac{m}{\alpha}\, g \,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = a_2^{(1)} = a_2^{(2)} = 0 \,, \quad a_3^{(1)} = h + \frac{m^2}{\alpha^2}\, g \,, \quad a_3^{(2)} = -\frac{m^2}{\alpha^2}\, g \,.$$

Wir erhalten also die Lösung

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \,, & v_1(t) &= 0 \,, \\ x_2(t) &= 0 \,, & v_2(t) &= 0 \,, \\ x_3(t) &= h + \frac{m}{\alpha}\, g \left[\frac{m}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t/m} \right) - t \right] \,, & v_3(t) &= \frac{m}{\alpha}\, g \left(e^{-\alpha t/m} - 1 \right) \,. \end{aligned}$$

Die $z-$Komponente der Geschwindigkeit ist in Abb. 2.13 als Funktion der Zeit dargestellt.

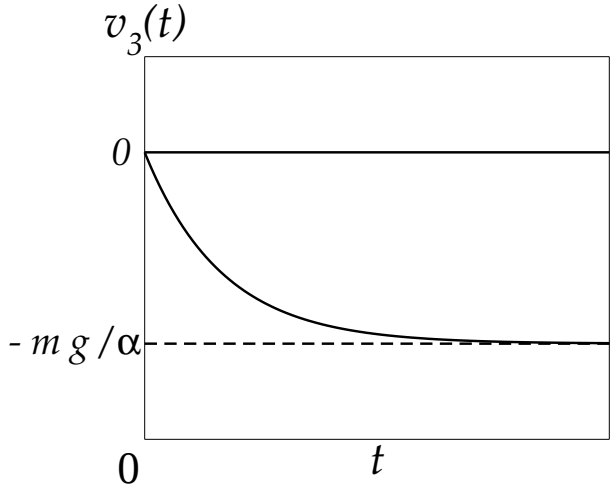


Abbildung 2.13: Die $z-$Komponente der Geschwindigkeit für den freien Fall.

Die Fallzeit t_F ergibt sich aus der Bedingung

$$x_3(t_F) = 0 = h + \frac{m}{\alpha}\, g \left[\frac{m}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t_F/m} \right) - t_F \right] \,.$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für t_F, die Lösung ist also nicht analytisch angebbar.

2.3.4 Das Fadenpendel

Wir betrachten die Bewegung einer Masse m, welche an einem masselosen Faden der Länge ℓ befestigt ist, vgl. Abb. 2.14. Die Masse bewegt sich ganz offensichtlich auf einem Kreisbogen mit Radius ℓ. Es bietet sich daher an, für die Diskussion dieses Problems **ebene Polarkoordinaten** zu verwenden.

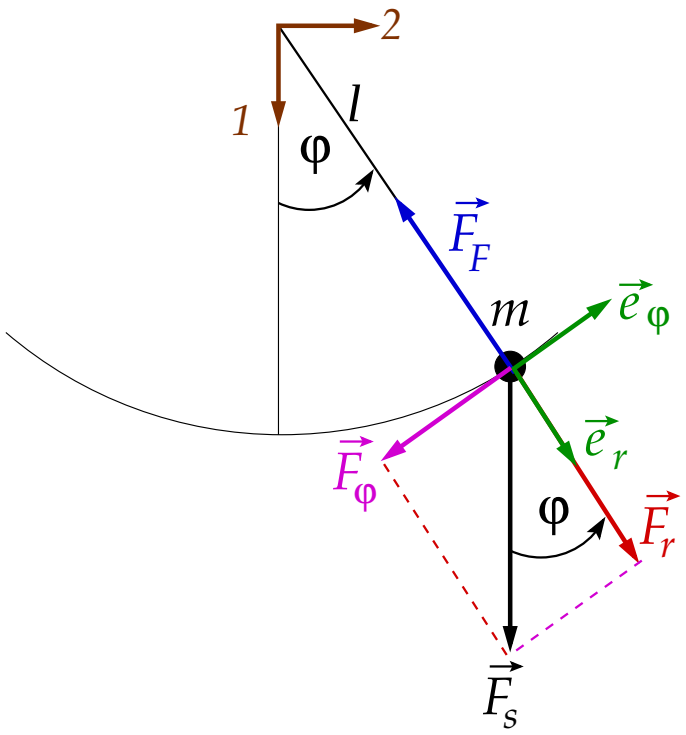


Abbildung 2.14: Das Fadenpendel.

Welche Käfte wirken auf m?

1. **Schwerkraft:**
$$\vec{F}_s = m\,\vec{g} = \vec{F}_r + \vec{F}_\varphi = F_r\,\vec{e}_r + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi \tag{2.69}$$
Aus Abb. 2.14 ergibt sich
$$F_r = m\,g\,\cos\varphi\;,\quad F_\varphi = -m\,g\,\sin\varphi\;. \tag{2.70}$$

2. **Fadenspannung:** $\vec{F}_F$. Sie sorgt dafür, dass der Faden stets gespannt bleibt, aber nicht reißt. Dies **zwingt** die Masse m auf einen Kreisbogen mit konstantem Radius
$$r = \ell = const.\;,\quad \Longrightarrow\quad \dot{r} = \ddot{r} = 0\;. \tag{2.71}$$
Es handelt sich hierbei um eine **Zwangsbedingung**, die Fadenspannung ist eine sog. **Zwangskraft**.

Die dynamische Grundgleichung lautet in ebenen Polarkoordinaten

$$m\,\ddot{\vec{r}} = m\left[\left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\right)\,\vec{e}_r + \left(r\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\right)\,\vec{e}_\varphi\right] = \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_F = (F_r - F_F)\,\vec{e}_r + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi\ . \quad (2.72)$$

In Komponenten und unter Ausnutzung der Zwangsbedingung (2.71) ergibt sich

$$\begin{aligned} -\,m\,\ell\,\dot{\varphi}^2 &= F_r - F_F = m\,g\,\cos\varphi - F_F\ , \\ m\,\ell\,\ddot{\varphi} &= F_\varphi = -m\,g\,\sin\varphi\ . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die erste dieser Gleichungen legt die Zwangskraft fest,

$$F_F = m\,g\,\cos\varphi + m\,\ell\,\dot{\varphi}^2\ . \quad (2.74)$$

Hierbei ist der erste Term auf der rechten Seite die **radiale Komponente der Gewichtskraft** und der zweite die durch die Drehbewegung der Masse entstehende **Zentrifugalkraft**. Beide Kräfte werden von der Fadenspannung kompensiert, so dass die Länge ℓ des Fadens konstant bleibt, d.h. keine Bewegung in radialer Richtung stattfindet, $\dot{r} = 0$.

Die zu lösende Bewegungsgleichung ist die zweite Gl. (2.73),

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\,\sin\varphi = 0\ . \quad (2.75)$$

Dies ist eine **nichtlineare** Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $\varphi(t)$, also den Winkel der Auslenkung aus der Ruhelage. Diese Differentialgleichung vereinfacht sich in der Näherung **kleiner Pendelausschläge**. Dann können wir nämlich $\sin\varphi$ durch den ersten Term seiner **Reihenentwicklung** ersetzen,

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{3!}\,\varphi^3 + \frac{1}{5!}\,\varphi^5 - \ldots \simeq \varphi + O(\varphi^3)\ .$$

Mit der Definition

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{\ell} \quad (2.76)$$

ergibt sich

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\,\varphi = 0\ . \quad (2.77)$$

Dies ist eine **homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**.

Wegen $\ddot{\varphi} = -\omega^2\,\varphi$ muss $\varphi(t)$ eine Funktion sein, die sich bis auf das Vorzeichen und den Vorfaktor ω^2 bei zweimaligem Ableiten nach der Zeit selbst reproduziert. Es sind aber gerade die **trigonometrischen Funktionen**, die diese Eigenschaft besitzen. Wir machen daher den **Lösungsansatz**

$$\varphi_1(t) = \sin(\omega t)\ ,\quad \varphi_2(t) = \cos(\omega t)\ . \quad (2.78)$$

Man bezeichnet die trigonometrischen Funktionen auch als **harmonische Funktionen** und diesen Lösungsansatz als **harmonische Schwingung**. Die Näherung kleiner Pendelausschläge nennt sich auch **harmonische Näherung**. In der Tat löst der Ansatz (2.78) die Differentialgleichung (2.77),

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 = \omega\,\cos(\omega t) \quad &,\quad \dot{\varphi}_2 = -\omega\,\sin(\omega t)\ , \\ \ddot{\varphi}_1 = -\omega^2\,\sin(\omega t) = -\omega^2\,\varphi_1 \quad &,\quad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2\,\cos(\omega t) = -\omega^2\,\varphi_2\ . \end{aligned}$$

Ferner sind $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ **linear unabhängige** Lösungen (man kann nicht die eine Funktion als Linearkombination der anderen ausdrücken). Daher lautet die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (2.77)

$$\varphi(t) = A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t)\;, \tag{2.79}$$

mit Konstanten A, B, die durch die Anfangsbedingung für $\varphi(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$ festgelegt werden, also durch $\varphi(0)$ und $\dot{\varphi}(0)$:

$$\varphi(0) = B\;,\quad \dot{\varphi}(0) = A\,\omega \quad\Longleftrightarrow\quad A = \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega}\;. \tag{2.80}$$

Die **Schwingungsdauer** T errechnet sich aus der Bedingung $\omega\,T = 2\pi$, d.h. wenn $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ eine volle **Periode** durchlaufen haben,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}\;. \tag{2.81}$$

Dies ist die Zeit, die vergeht, wenn das Pendel einmal hin, zurück, durch die Nullage, in die entgegengesetzte Richtung und wieder zurück geschwungen ist. Die **Schwingungsfrequenz** ist das Inverse der Schwingungsdauer,

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\,\sqrt{\frac{g}{\ell}}\;. \tag{2.82}$$

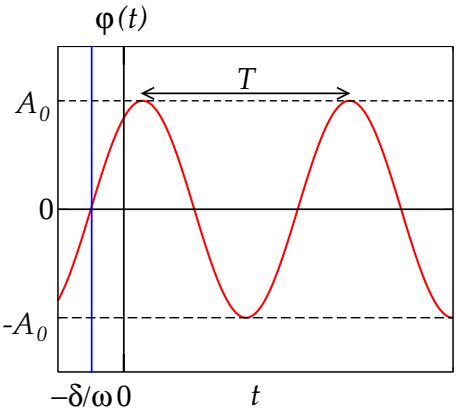


Abbildung 2.15: Die phasenverschobene harmonische Schwingung.

Mit den Definitionen

$$A_0 \equiv \sqrt{A^2 + B^2}\;,\quad \cos\delta \equiv \frac{A}{A_0}\;,\quad \sin\delta = \sqrt{1-\cos^2\delta} = \frac{\sqrt{A_0^2 - A^2}}{A_0} = \frac{B}{A_0}$$

können wir eine **alternative Form** der allgemeinen Lösung angeben,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= A_0\,[\cos\delta\,\sin(\omega t) + \sin\delta\,\cos(\omega t)] \\ &= A_0\,\sin(\omega t + \delta)\;.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen ist eine harmonische Schwingung mit **derselben** Schwingungsfrequenz, aber mit einer **Phasenverschiebung** δ, vgl. Abb. 2.15.

9.5.2013 (1)

2.3.5 Komplexe Zahlen

Bewegungsgleichungen, die harmonische Schwingungen beschreiben, lassen sich sehr einfach mit Hilfe von **komplexen Zahlen** lösen. Dazu führen wir zunächst das Konzept der sog. **imaginären Zahlen** ein.

Imaginäre Zahlen

Quadratische Gleichungen vom Typ $x^2 - \beta^2 = 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, lassen sich sehr einfach lösen: $x = \pm\beta$. Was aber passiert, wenn man das Vorzeichen von β^2 umdreht? Wie kann man eine Gleichung vom Typ $x^2 + \beta^2 = 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ lösen? Es gibt sicherlich keine Lösung im Raum der reellen Zahlen, da man die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen müßte, $x^2 = -\beta^2 < 0$. Man kann sie aber dennoch lösen, wenn man den reellen Zahlenraum zum **Raum der komplexen Zahlen** erweitert.

Definition: Eine Zahl α heißt **imaginäre Zahl**, falls $\alpha^2 < 0$.

Definition: Die **Einheit** i der imaginären Zahlen erfüllt die Gleichung $i^2 = -1$, d.h.

$$i = \sqrt{-1}\ . \tag{2.84}$$

Diese Gleichung ist symbolisch zu verstehen, denn eigentlich kann man keine Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen.

Mit Hilfe der Einheit der imaginären Zahlen läßt sich **jede** imaginäre Zahl wie folgt schreiben:

$$\alpha = i\,y\ ,\quad y \in \mathbb{R}\ .$$

Beispiel: $\alpha^2 = -4 = i^2 \cdot 4 \Longrightarrow \alpha = \pm\sqrt{-4} = \pm\, i \cdot 2$, d.h. $y = \pm 2$.

Bemerkung:

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i\ ,\quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1\ . \tag{2.85}$$

Komplexe Zahlen

Definition: Eine **komplexe Zahl** z ist die Summe aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl,

$$z = x + i\,y\ ,\quad x, y \in \mathbb{R}\ . \tag{2.86}$$

Man bezeichnet x als den **Realteil** von z und y als den **Imaginärteil** von z,

$$x = \mathrm{Re}\, z\ ,\quad y = \mathrm{Im}\, z\ . \tag{2.87}$$

Für die Zahl $z = 0$ verschwindet sowohl der Realteil wie auch der Imaginärteil,

$$z = 0 \iff x = 0 \ \wedge\ y = 0\ .$$

Definition: Die zu z **komplex konjugierte Zahl** ist

$$z^* = x - i\,y\ . \tag{2.88}$$

Offenbar gilt

$$\mathrm{Re}\,z = x = \frac{1}{2}\,(z + z^*)\ ,\ \ \mathrm{Im}\,z = y = \frac{1}{2\,i}(z - z^*)\ . \tag{2.89}$$

Definition: Der **Absolutbetrag** einer komplexen Zahl ist

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2}\ . \tag{2.90}$$

Wir bezeichnen die **Menge der komplexen Zahlen** mit $\mathbb{C}$. Die Menge der reellen (imaginären) Zahlen bilden eine Untermenge der komplexen Zahlen, nämlich die mit verschwindendem Imaginärteil (Realteil),

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\ \ &,\ \ \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C},\, \mathrm{Im}\,z = 0\}\ , \\ \mathbb{I} \subset \mathbb{C}\ \ &,\ \ \mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re}\,z = 0\}\ , \end{aligned}$$

Rechenregeln

Seien $z = x + i\,y$, $z_1 = x_1 + i\,y_1$ und $z_2 = x_2 + i\,y_2$ komplexe Zahlen.

1. **Addition:**
$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i\,(y_1 \pm y_2)\ .$$

2. **Multiplikation:**
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) \\ &= x_1 x_2 + i\,x_1 y_2 + i\,x_2 y_1 + i^2\,y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\ . \end{aligned}$$
Das Produkt verschwindet, wenn eine der beiden komplexen Zahlen null ist,
$$z_1 z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \ \vee\ z_2 = 0\ .$$
Spezialfall:
$$z\,z^* = x^2 + y^2 + i\,(-xy + xy) = x^2 + y^2 \implies |z| = \sqrt{z\,z^*}\ .$$

3. **Division:** $\forall\ z_2 \neq 0$ gilt
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + i\,y_1)(x_2 - i\,y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}\ .$$
Beispiel:
$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i\ .$$

Komplexe Zahlenebene

Man kann Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl als Komponenten eines **zweidimensionalen Vektors** auffassen,

$$z = x + i\,y = (x, y)\ .$$

Die Basisvektoren sind

$$1 = (1, 0)\ , \quad i = (0, 1)\ .$$

Diese spannen die sog. **komplexe Zahlenebene** auf, vgl. Abb. 2.16.

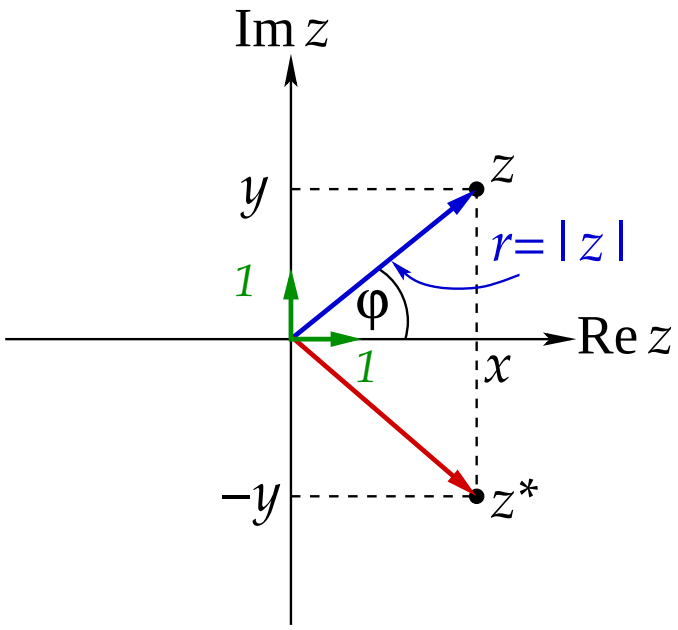


Abbildung 2.16: Die Darstellung einer komplexen Zahl in der komplexen Zahlenebene.

Der Basisvektor $(1, 0)$ zeigt in Richtung der **reellen Achse**, der Basisvektor $(0, 1)$ in Richtung der **imaginären Achse**. Die komplex konjugierte Zahl z^* ergibt sich aus z durch **Spiegelung** an der reellen Achse.

Aus der Darstellung von komplexen Zahlen in der komplexen Ebene ergibt sich auch deren **Polardarstellung**:

$$\begin{array}{l} x = r\,\cos\varphi\ , \\ y = r\,\sin\varphi\ , \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \\ \varphi = \arg(z) = \arctan\dfrac{y}{x}\ . \end{array} \tag{2.91}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} z &= r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\ , \\ z^* &= r\,(\cos\varphi - i\,\sin\varphi)\ . \end{aligned} \tag{2.92}$$

Es sei noch auf eine Zweideutigkeit in der Polardarstellung (2.91) hingewiesen. Wir erhalten zwar stets $\tan\varphi$ durch Division von y durch x, aber es erhebt sich die Frage, welchem

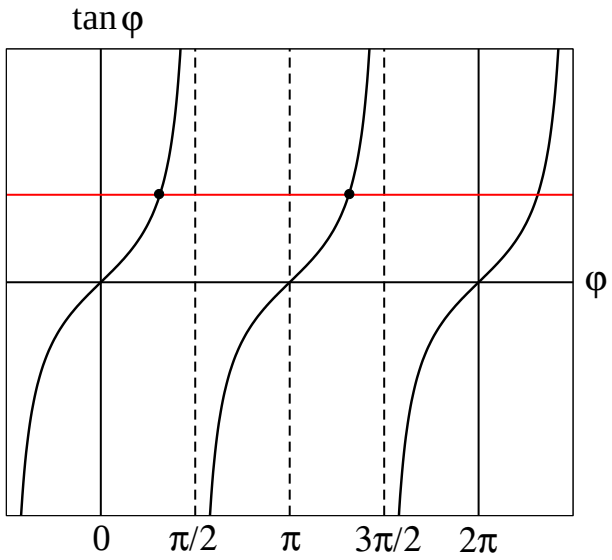


Abbildung 2.17: Der Tangens.

Wert von φ dies entspricht. Für $\tan\varphi = y/x \in (-\infty, \infty)$ gibt es stets **zwei** Werte von $\varphi \in [0, 2\pi]$, vgl. Abb. 2.17.

Dies liegt daran, dass $\tan\varphi = y/x = (-y)/(-x)$, so dass neben φ auch $\varphi + \pi$ den gleichen Wert für $\tan\varphi$ liefert. Die Lösung besteht darin, den Wert für φ zu wählen, der in Gl. (2.92) eingesetzt die richtigen Werte für x und y liefert.

Exponentialdarstellung von komplexen Zahlen

Die **Reihenentwicklung der Exponentialfunktion** lautet

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,. \tag{2.93}$$

Die **Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen** lauten

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,, \tag{2.94}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,. \tag{2.95}$$

Daraus leitet man die **Eulersche Formel** ab:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i \, \sin x \; . \end{aligned} \tag{2.96}$$

Offenbar gilt

$$\mathrm{Re}\, e^{ix} = \cos x \; , \quad \mathrm{Im}\, e^{ix} = \sin x \; , \quad |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 \; . \tag{2.97}$$

Spezielle Werte: $\qquad e^{i\pi/2} = i \; , \quad e^{i\pi} = -1 \; , \quad e^{3i\pi/2} = -i \; .$

Aufgrund von Gl. (2.92) und der Eulerschen Formel (2.96) kann man komplexe Zahlen auch als

$$z = r \, e^{i\varphi} = |z| \, e^{i\varphi} \tag{2.98}$$

darstellen. Dies ist die sog. **Exponentialdarstellung** einer komplexen Zahl z. Man bezeichnet $\varphi = \arg(z)$ auch als **Phase** einer komplexen Zahl und $e^{i\varphi}$ als **komplexen Phasenfaktor**. Wegen $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ gilt

$$z^* = |z| \, e^{-i\varphi} \; , \tag{2.99}$$

vgl. Gl. (2.92).

Die **Umkehrformeln** zur Eulerschen Formel lauten mit den Glgen. (2.89) und (2.97)

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \right) \; , \quad \sin\varphi = \frac{1}{2\,i} \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right) \; , \tag{2.100}$$

Die **Periodizität** der trigonometrischen Funktionen überträgt sich aufgrund der Eulerschen Formel auch auf den komplexen Phasenfaktor:

$$e^{2\pi n i} = \cos(2\pi n) + i \, \sin(2\pi n) = 1 + i \cdot 0 = 1 \; , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{2.101}$$

Daraus folgt, dass komplexe Zahlen **periodisch** in φ sind mit der Periode 2π,

$$z = |z| \, e^{i\varphi} = |z| \, e^{i\varphi} \, e^{2\pi n i} = |z| \, e^{i(\varphi + 2\pi n)} \; . \tag{2.102}$$

Rechenregeln für die Exponentialdarstellung

1. **Multiplikation:**

$$z \equiv z_1 z_2 = |z_1| \, |z_2| \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \equiv |z| \, e^{i\varphi} \quad \Longrightarrow \quad |z| = |z_1| \, |z_2| \; , \quad \varphi = \arg(z) = \varphi_1 + \varphi_2 \; .$$

2. **Division:**

$$z \equiv \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \equiv |z|\, e^{i\varphi} \quad \Longrightarrow \quad |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2\,.$$

3. **Potenzieren:**

$$z \equiv z_1^n = |z_1|^n\, e^{in\varphi_1} \equiv |z|\, e^{i\varphi} \quad \Longrightarrow \quad |z| = |z_1|^n\,, \quad \varphi = n\varphi_1\,.$$

4. **Radizieren ("Wurzelziehen"):**

$$z \equiv \sqrt[n]{z_1} = |z_1|^{1/n}\, e^{i\varphi_1/n} \equiv |z|\, e^{i\varphi} \quad \Longrightarrow \quad |z| = |z_1|^{1/n}\,, \quad \varphi = \varphi_1/n\,.$$

5. **Komplexer Logarithmus:**

$$\ln z = \ln\left[|z| e^{i(\varphi+2\pi n)}\right] = \ln|z| + \ln e^{i(\varphi+2\pi n)} = \ln|z| + i\,(\varphi + 2\pi n)\,.$$

   Für $n = 0$ erhalten wir den sog. **Hauptwert**, für $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ die sog. **Nebenwerte**.

   Beispiel: Mit $e^{i\pi} = -1$ ist $z = -5 = 5\, e^{i\pi}$, also $\ln(-5) = \ln 5 + i\,(2n+1)\pi$.

2.3.6 Der lineare harmonische Ozillator

Der lineare harmonische Oszillator ist das wichtigste Modellsystem der Theoretischen Physik. Er wird uns immer wieder begegnen. Seine angenehmste Eigenschaft ist, dass seine Bewegungsgleichung **exakt lösbar** ist. Diese lautet

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0\,. \tag{2.103}$$

Hierbei ist ω_0 die sog. **Eigenfrequenz** des Oszillators.

Im folgenden sind drei Beispiele genannt, deren Bewegungsgleichung der des linearen harmonischen Oszillators entsprechen.

1. Die Bewegungsgleichung für das **Fadenpendel** in der **Näherung kleiner Ausschläge** $\varphi \equiv x$. Die Eigenfrequenz ist $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

2. Eine Masse zwischen zwei Federn mit Federkonstanten $k/2$, vgl. Abb. 2.18.

   Die **Rückstellkraft** der beiden Federn ist jeweils durch das sog. **Hookesche Gesetz** gegeben,

$$F_H = -\frac{k}{2}\, x\,. \tag{2.104}$$

   Es besagt, dass die Feder bei einer Auslenkung x der Masse m eine Kraft ausübt, die dem Betrag $|x|$ der Auslenkung proportional und ihr entgegengesetzt ist. Betrachten wir dies einmal im Detail: für positive Auslenkungen $x > 0$ der Masse m wird die rechte Feder **komprimiert** und versucht, die Masse wieder in die Ausgangslage, $x = 0$, zu **drücken**. Dies erklärt das negative Vorzeichen von F_R. Für $x > 0$ wird außerdem die linke Feder **gedehnt** und versucht daher, die Masse wieder in die

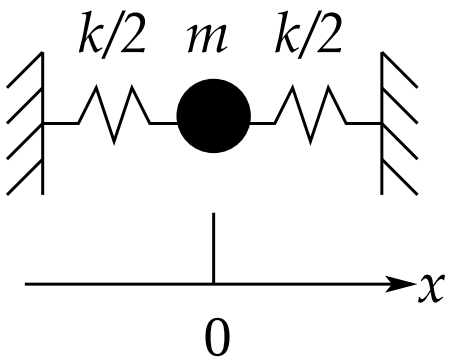


Abbildung 2.18: Eine Masse zwischen zwei Federn.

Ausgangslage zu **ziehen**. Dies ergibt das gleiche Kraftgesetz für beide Federn. Für $x < 0$ wird zwar die linke Feder komprimiert und die rechte gedehnt, aber die Kräfte sind wieder jeweils durch Gl. (2.104) gegeben, wie man sich leicht klar macht. Die Gesamtkraft, die auf die Masse wirkt, ist daher in allen Fällen $F = 2\,F_H = -k\,x$ und die Bewegungsgleichung lautet

$$m\,\ddot{x} = F = -k\,x \iff m\,\ddot{x} + k\,x = 0\;.$$

Division durch m ergibt Gl. (2.103), mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

3. Ein **elektrischer Schwingkreis** wird durch das in Abb. 2.19 dargestellte Schaltbild symbolisiert.

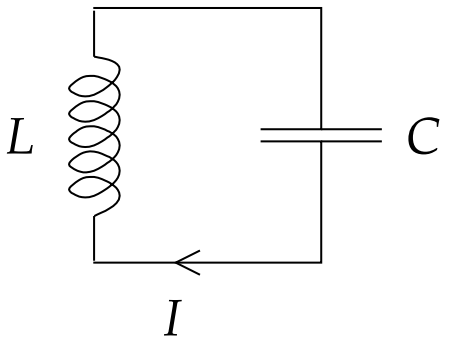


Abbildung 2.19: Ein elektrischer Schwingkreis.

Hierbei steht L für die **Induktivität** einer **Spule** und C für die **Kapazität** eines **Kondensators**. Der **Strom** I in diesem Schwingkreis erfüllt die Bewegungsgleichung

$$L\,\ddot{I} + \frac{1}{C}\,I = 0\;.$$

Division durch L ergibt mit $x \equiv I$ und $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ wiederum die Bewegungsgleichung (2.103) des harmonischen Oszillators.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung (2.103) des harmonischen Oszillators mit Hilfe der **komplexen Zahlen** lösen. Wir wissen natürlich schon, dass die allgemeine Lösung die Gestalt (2.79) oder (2.83) haben wird. Wir machen den **Lösungsansatz**

$$x(t) = e^{\alpha t} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = \alpha\, e^{\alpha t} \;, \quad \ddot{x}(t) = \alpha^2\, e^{\alpha t} \;. \tag{2.105}$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung (2.103) ergibt

$$(\alpha^2 + \omega_0^2)\, e^{\alpha t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 = -\omega_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \pm\, i\, \omega_0 \;.$$

Es gibt also **zwei linear unabhängige Lösungen** der Form

$$x_\pm(t) = e^{\pm i\omega_0 t} \;.$$

Die **allgemeine Lösung** der homogenen linearen Differentialgleichung (2.103) lautet dementsprechend

$$x(t) = A_+\, e^{i\omega_0 t} + A_-\, e^{-i\omega_0 t} \;. \tag{2.106}$$

Man muss an dieser Stelle beachten, dass $x(t) \in \mathbb{R}$, aber dass $e^{\pm i\omega_0 t} \in \mathbb{C}$. Mit Hilfe der Eulerschen Formel (2.96) führt dies zu einer zusätzlichen Bedingung für die Konstanten A_+ und A_-:

$$x(t) = (A_+ + A_-)\, \cos(\omega_0 t) + i(A_+ - A_-)\, \sin(\omega_0 t) \;.$$

Um $x(t)$ reell zu machen, müssen wir also fordern, dass $A_+ = A_-$. Dann hat die allgemeine Lösung aber nur **einen** freien Parameter anstatt zwei, wie es für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung sein muss. Der korrekte Ansatz ist, auch die Konstanten $A_\pm$ als **komplex** anzusehen. A priori gibt es dann vier unabhängige Parameter, von denen man zwei mittels der Bedingung, dass $x(t) \in \mathbb{R}$, eliminieren kann:

$$\begin{aligned} x(t) &= (A_+ + A_-)\, \cos(\omega_0 t) + i(A_+ - A_-)\, \sin(\omega_0 t) \\ &= [(\mathrm{Re}\, A_+ + \mathrm{Re}\, A_-)\, \cos(\omega_0 t) - (\mathrm{Im}\, A_+ - \mathrm{Im}\, A_-)\, \sin(\omega_0 t)] \\ &+ \; i\, [(\mathrm{Im}\, A_+ + \mathrm{Im}\, A_-)\, \cos(\omega_0 t) + (\mathrm{Re}\, A_+ - \mathrm{Re}\, A_-)\, \sin(\omega_0 t)] \;. \end{aligned}$$

Da die Sinus und Cosinus linear unabhängig sind, verschwindet der Imaginärteil dieses Ausdrucks nur, wenn

$$\mathrm{Im}\, A_+ = -\mathrm{Im}\, A_- \quad \wedge \quad \mathrm{Re}\, A_+ = \mathrm{Re}\, A_- \;. \tag{2.107}$$

Dies bedeutet, dass

$$A_+ = A_-^* \;, \quad A_- = A_+^* \;.$$

Mit den Bedingungen (2.107) erhalten wir als Lösung

$$x(t) = 2\, \mathrm{Re}\, A_+\, \cos(\omega_0 t) + 2\, \mathrm{Im}\, A_-\, \sin(\omega_0 t) \;.$$

Mit den Definitionen $B \equiv 2\, \mathrm{Re}\, A_+$, $A \equiv 2\, \mathrm{Im}\, A_-$, $\omega \equiv \omega_0$, $\varphi \equiv x$ haben wir also die wohlbekannte allgemeine Lösung (2.79) reproduziert:

$$x(t) = A\, \sin(\omega_0 t) + B\, \cos(\omega_0 t) \;. \tag{2.108}$$

Die Konstanten A, B werden durch die Anfangsbedingungen für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ festgelegt. Dazu berechnen wir noch

$$\dot{x}(t) = \omega_0 \, [A \cos(\omega_0 t) - B \sin(\omega_0 t)] \ . \tag{2.109}$$

Damit gilt $x(0) \equiv x_0 = B$ und $\dot{x}(0) \equiv v_0 = A\,\omega_0$, d.h. $A = v_0/\omega_0$. Wir erhalten also

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \ . \tag{2.110}$$

Beispiele:

1. $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0 = 0$. Der Oszillator wird also anfänglich aus der Ruhelage ausgelenkt, aber nicht zusätzlich angestoßen, sondern einfach nur losgelassen. Die spezielle Lösung für diese Anfangsbedingungen lautet gemäß Gl. (2.110)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \ .$$

2. $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Der Oszillator wird also anfänglich nicht ausgelenkt, sondern nur angestoßen. Die spezielle Lösung für diese Anfangsbedingungen lautet gemäß Gl. (2.110)

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \ .$$

2.3.7 Linearer harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Jedes reale System, welches der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators genügt, wird aufgrund von Reibungskräften zur Ruhe kommen. Mit Stokesscher Reibung lautet die Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = 0 \ . \tag{2.111}$$

Dies läßt sich für das im letzten Abschnitt diskutierte mechanische System der zwischen zwei Federn eingespannten Masse realisieren, indem man die Masse in ein Bad mit einer viskosen Flüssigkeit eintaucht, vgl. Abb. 2.20.

Der elektrische Schwingkreis kann ebenfalls gedämpft werden, indem man einen elektrischen Widerstand einfügt, vgl. Abb. 2.21. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$L\,\ddot{I} + R\,\dot{I} + \frac{1}{C}\,I = 0 \ . \tag{2.112}$$

Wir wollen im folgenden Gleichungen vom Typ (2.111) oder (2.112) lösen. Wir dividieren Gl. (2.111) durch m,

$$\ddot{x} + 2\,\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \ , \tag{2.113}$$

mit $\beta = \alpha/(2m)$ und $\omega_0^2 = k/m$. Dies ist wiederum eine **homogene lineare Differentialgleichung** für die Funktion $x(t)$. Ein vielversprechender **Lösungsansatz** ist wieder die Exponentialfunktion,

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = \lambda\, e^{\lambda t} \ , \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2\, e^{\lambda t} \ . \tag{2.114}$$

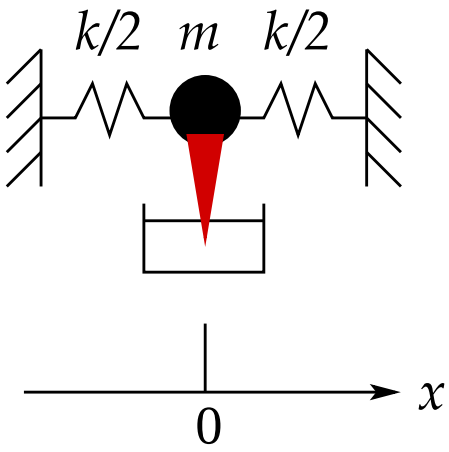


Abbildung 2.20: Eine zwischen zwei Federn eingespannte Masse, deren Bewegung durch eine viskose Flüssigkeit gedämpft wird.

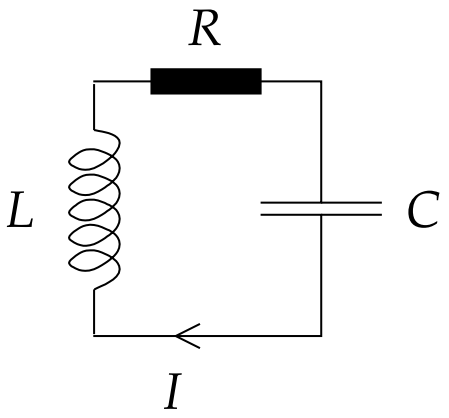


Abbildung 2.21: Der gedämpfte elektrische Schwingkreis.

Eingesetzt in Gl. (2.113) ergibt die Bedingung

$$\lambda^2 + 2\,\beta\,\lambda + \omega_0^2 \;= 0\;.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$\lambda_\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\;. \tag{2.115}$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen sind

$$x_\pm(t) = e^{\lambda_\pm t}$$

und die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (2.113) lautet

$$x(t) = A_+\,e^{\lambda_+ t} + A_-\,e^{\lambda_- t}\;. \tag{2.116}$$

Zur Diskussion der Lösung unterscheiden wir drei Fälle.

1. **Schwache Dämpfung (Schwingfall): $\beta < \omega_0$.**
   In diesem Fall ist das Argument der Wurzel in Gl. (2.115) negativ, d.h. mit Hilfe der imaginären Einheit gilt

$$\lambda_\pm = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \equiv -\beta \pm i\,\omega \;, \tag{2.117}$$

   mit der gegenüber ω_0 **verringerten** Eigenfrequenz $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$. Eingesetzt in die allgemeine Lösung (2.116) erhalten wir

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_+\, e^{i\omega t} + A_-\, e^{-i\omega t}\right) \;. \tag{2.118}$$

   Der Term in Klammern ist von der Form identisch mit der allgemeinen Lösung (2.106) eines **ungedämpften** harmonischen Oszillators, allerdings mit der Eigenfrequenz $\omega < \omega_0$. Der Vorfaktor $e^{-\beta t}$ sorgt dafür, dass die Amplitude der Schwingung mit der Zeit exponentiell abklingt. Mit den gleichen Überlegungen wie im vorangegangenen Abschnitt bringen wir den Imaginärteil von Gl. (2.118) zum Verschwinden und erhalten die rein reelle Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t)\right] \;, \tag{2.119}$$

   mit $A \equiv 2\,\mathrm{Im}\,A_-$, $B \equiv 2\,\mathrm{Re}\,A_+$.

   Die Konstanten lassen sich an die Anfangsbedingungen anpassen. Da

$$\dot{x}(t) = -e^{-\beta t}\left[(A\,\beta + B\,\omega)\,\sin(\omega t) - (A\,\omega - B\,\beta)\,\cos(\omega t)\right]$$

   erhalten wir

$$x(0) \equiv x_0 = B \;,\;\; \dot{x}_0 \equiv v_0 = A\,\omega - B\,\beta \;\;\Longrightarrow\;\; A = \frac{v_0 + \beta\, x_0}{\omega} \;.$$

   Wir erhalten damit aus Gl. (2.119)

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[x_0\,\cos(\omega t) + \frac{v_0 + \beta\, x_0}{\omega}\,\sin(\omega t)\right] \;. \tag{2.120}$$

   Dies geht für verschwindende Reibung, $\beta = 0$, in Gl. (2.110) über.

   Die Lösung (2.119) läßt sich auch wieder in Form einer phasenverschobenen Sinusschwingung schreiben, vgl. Gl. (2.83),

$$x(t) = A_0\, e^{-\beta t}\,\sin(\omega t + \delta) \equiv A(t)\,\sin(\omega t + \delta) \;, \tag{2.121}$$

   mit $A_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A(t) = A_0\, e^{-\beta t}$ und $\cos\delta = A/A_0$. In dieser Form ist die exponentiell abklingende Amplitude der Schwingung besonders offensichtlich. Die Form der Lösung (2.121) ist in Abb. 2.22 graphisch dargestellt.

   Für die Periode der Schwingung gilt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 \;,$$

   d.h. die Dämpfung verlängert die Schwingungsdauer.

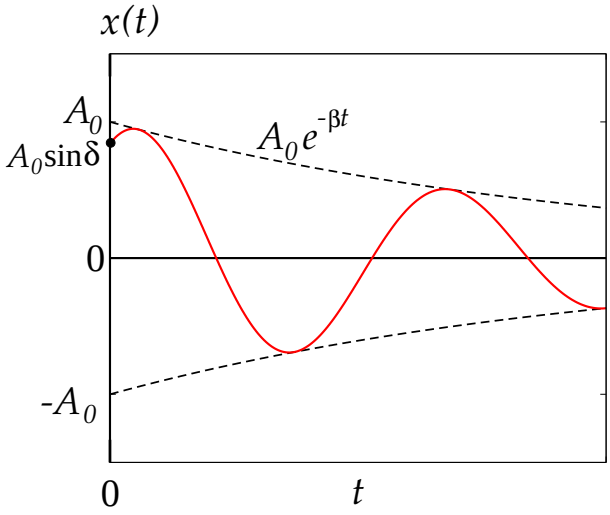


Abbildung 2.22: Die Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators für den Schwingfall.

18.6.2013

2. **Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall): $\beta = \omega_0$.**
   In diesem Fall ist $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0$. Der Lösungsansatz (2.114) liefert nur **eine** spezielle Lösung,

$$x(t) = e^{-\beta t} \, .$$

   Wir benötigen aber eine zweite, linear unabhängige Lösung. Wir erweitern daher den Lösungsansatz wie folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t)\, e^{-\beta t} \, , \\ \dot{x}(t) &= \dot{\varphi}(t)\, e^{-\beta t} - \beta\, \varphi(t)\, e^{-\beta t} = \left[\dot{\varphi}(t) - \beta\, \varphi(t)\right]\, e^{-\beta t} \, , \\ \ddot{x}(t) &= \left[\ddot{\varphi}(t) - \beta\, \dot{\varphi}(t)\right]\, e^{-\beta t} - \beta\, \left[\dot{\varphi}(t) - \beta\, \varphi(t)\right]\, e^{-\beta t} \\ &= \left[\ddot{\varphi}(t) - 2\,\beta\, \dot{\varphi}(t) + \beta^2\, \varphi(t)\right]\, e^{-\beta t} \, . \end{aligned}$$

   Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) - 2\,\beta\, \dot{\varphi}(t) + \beta^2\, \varphi(t) + 2\,\beta\, \left[\dot{\varphi}(t) - \beta\, \varphi(t)\right] + \omega_0^2\, \varphi(t) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \ddot{\varphi}(t) + (\omega_0^2 - \beta^2)\, \varphi(t) &= 0 \, . \end{aligned}$$

   Für den aperiodischen Grenzfall ist der zweite Term auf der linken Seite null, also gilt

$$\ddot{\varphi}(t) = 0 \implies \dot{\varphi}(t) = const. \equiv a_2 \implies \varphi(t) = a_1 + a_2\, t \, .$$

   Damit lautet die **allgemeine Lösung** in diesem Fall

$$x(t) = (a_1 + a_2\, t)\, e^{-\beta t} \, . \tag{2.122}$$

   Es findet keine Schwingung mehr statt. Dennoch hängt der Lösungsverlauf stark von den Anfangsbedingungen ab. Wir bestimmen die Konstanten a_1, a_2 aus den

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &\equiv x_0 = a_1 \ , \\ \dot{x}(0) &\equiv v_0 = a_2 - \beta\, a_1 = a_2 - \beta\, x_0 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = v_0 + \beta\, x_0 \ . \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$x(t) = \left[x_0 + (v_0 + \beta\, x_0)\, t\right]\, e^{-\beta t} \ . \tag{2.123}$$

Wir betrachten eine gegebene Anfangsauslenkung $x_0 > 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit mag null sein, $v_0 = 0$, oder aber auch von null verschieden sein. Im letzteren Fall kann sie in Richtung der Auslenkung zeigen, $v_0 > 0$, oder auch ihr entgegengesetzt, also in Richtung der Ruhelage zeigen, $v_0 < 0$. Solange $v_0 > -\beta\, x_0$, ist $x(t) > 0 \ \ \forall\, t \geq 0$. Falls jedoch $v_0 < -\beta\, x_0 < 0$, so gibt es einen Nulldurchgang bei der Zeit $t_N = x_0/(|v_0| - \beta\, x_0)$. Dies bedeutet, dass man den Oszillator stark genug in Richtung der Ruhelage angestossen hat, so dass er in der Lage ist, durch die Ruhelage durchzuschwingen, bevor er ihr sich wieder von der anderen Seite annähert. Die beiden verschiedenen Lösungstypen sind in Abb. 2.23 veranschaulicht.

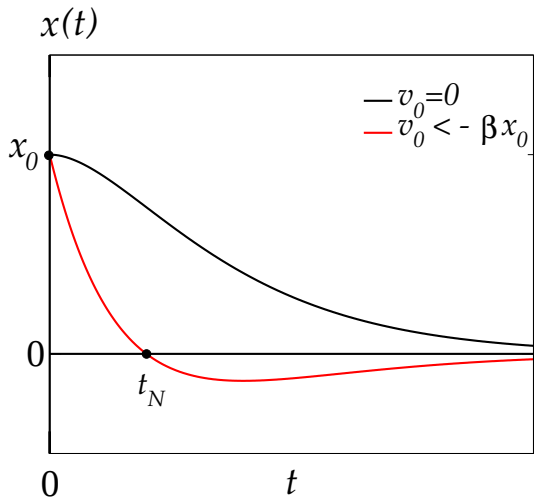


Abbildung 2.23: Die Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators für den aperiodischen Grenzfall.

3. **Starke Dämpfung (Kriechfall): $\beta > \omega_0$.**
Wir definieren $\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$ und schreiben Gl. (2.115) als

$$\lambda_\pm = -\beta \pm \gamma \ .$$

Offenbar gilt $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ und $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung lautet, vgl. Gl. (2.116),

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_+\, e^{\gamma t} + A_-\, e^{-\gamma t}\right) \ . \tag{2.124}$$

Die Geschwindigkeit ist dann

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta t}\left[A_+\,(-\beta + \gamma)\, e^{\gamma t} + A_-\,(-\beta - \gamma)\, e^{-\gamma t}\right] \ .$$

Die Konstanten $A_\pm$ sind nun rein reell und können wieder mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) \equiv x_0 = A_+ + A_- \\ \dot{x}(0) \equiv v_0 = -A_+(\beta-\gamma) - A_-(\beta+\gamma) \end{array}\right\} \iff A_\pm = \frac{1}{2}\left(x_0 \pm \frac{v_0+\beta\,x_0}{\gamma}\right) .$$

Eingesetzt in die Lösung (2.124) erhalten wir mit $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[x_0\,\cosh(\gamma t) + \frac{v_0+\beta\,x_0}{\gamma}\,\sinh(\gamma t)\right] . \tag{2.125}$$

Beachte, dass man mit der Ersetzung $\gamma \to i\,\omega$ und den Identitäten $\cosh(ix) = (e^{ix}+e^{-ix})/2 \equiv \cos x$ und $\sinh(ix) = (e^{ix}-e^{-ix})/2 = i\,\sin x$ die Lösung (2.120) des Schwingfalls erhält.

Die Form der Lösung ist ganz ähnlich der des aperiodischen Grenzfalls, vgl. Abb. 2.23. Sie besitzt allerdings keinen Term $\sim t\,e^{-\beta t}$ sondern ist stets rein exponentiell abklingend. Interessanterweise ist dieser exponentielle Abfall für große Zeiten $\sim e^{-(\beta-\gamma)t}$ (die zweite Exponentialfunktion $\sim e^{-(\beta+\gamma)t}$ klingt schneller auf null ab). Damit ist der Rückgang der Auslenkung in die Ruhelage **langsamer** als beim aperiodischen Grenzfall, wo er $\sim e^{-\beta t} < e^{-(\beta-\gamma)t}$ ist. Wenn man also einen Oszillator haben möchte, der **möglichst rasch** ohne zu schwingen in die Ruhelage zurückkehrt, muss man den aperiodischen Grenzfall $\beta \to \omega_0$ anstreben, d.h. die Reibung so einstellen, dass sie mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Oszillators möglichst gut übereinstimmt (sie aber nicht unterschreitet).

Auch im Kriechfall kann es, wie beim aperiodischen Grenzfall, vgl. Abb. 2.23, einen Nulldurchgang geben, nämlich wenn man den Oszillator nach Auslenkung aus der Ruhelage um x_0 genügend stark in Richtung der Ruhelage anstößt. Dies geschieht zu einer Zeit t_N, die durch die Gleichung

$$\gamma\,x_0\,\cosh(\gamma t_N) = -(v_0+\beta\,x_0)\,\sinh(\gamma t_N) \iff \tanh(\gamma t_N) = \frac{\gamma\,x_0}{-v_0-\beta\,x_0}$$

gegeben ist. Damit die Zeit t_N im physikalischen Bereich $0 \le t_N < \infty$ liegt, für den $0 \le \tanh(\gamma t_N) < 1$, muss also gelten

$$0 \le \frac{\gamma\,x_0}{-v_0-\beta\,x_0} < 1 .$$

Damit die linke Seite der Ungleichung gilt, muss $-v_0 - \beta\,x_0 > 0$ sein, also $v_0 < -\beta\,x_0 \le 0$. Damit auch die rechte Seite gilt, muss (nach Multiplikation mit der *positiven* Zahl $-v_0-\beta\,x_0$) gelten

$$-v_0 - \beta\,x_0 > \gamma\,x_0 \iff v_0 < -(\beta+\gamma)x_0 .$$

Dies setzt eine obere Grenze für die Anfangsgeschwindigkeit (bzw. eine untere Grenze für ihren Betrag $|v_0|$), für die ein Nulldurchgang erreicht wird. Dann dauert es gerade unendlich lange, bis ein Nulldurchgang geschieht, $t_N \to \infty$. Für kleinere Werte von v_0 (bzw. betragsmäßig größere Werte) wird die Zeit t_N immer kleiner und geht für $|v_0| \to \infty$ gegen null.

2.3.8 Der gedämpfte lineare Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren Kraft

Reibung ist in realen physikalischen Systemen unvermeidlich. Daher ist jeder Schwingungsvorgang exponentiell gedämpft, es sei denn, eine **äußere Kraft** kompensiert die Reibung. Der gedämpfte harmonische Oszillator unter dem Einfluß einer **zeitabhängigen** äußeren Kraft $F_{\text{ext}}(t)$ folgt der Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = F_{\text{ext}} \ .$$

Wir nehmen an, dass die äußere Kraft periodisch ist,

$$F_{\text{ext}}(t) \equiv m\,f\,\cos(\bar{\omega}t) \ ,$$

und dividieren durch m. Wir erhalten mit $\beta = \alpha/(2m)$, $\omega_0^2 = k/m$:

$$\ddot{x} + 2\,\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = f\,\cos(\bar{\omega}t) \ . \tag{2.126}$$

Für das in den beiden vorangegangenen Abschnitten diskutierte mechanische System der zwischen zwei Federn eingespannten Masse ist in Abb. 2.24 eine mögliche Realisierung dargestellt.

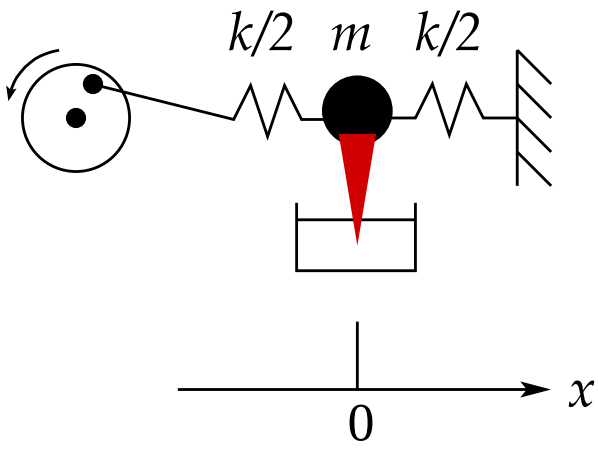


Abbildung 2.24: Realisierung einer periodischen äußeren Kraft für die zwischen zwei Federn eingespannte Masse.

Eine der beiden Federn ist nicht an einer festen Wand befestigt, sondern wird durch eine mit einem Schwungrad verbundene Pleuelstange angetrieben. Die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrads beträgt $\bar{\omega}$.

Für den elektrischen Schwingkreis ist die Realisierung durch Anlegen einer Wechselspannung $U_{\text{ext}}(t) = U_0\,\sin(\bar{\omega}t)$ gegeben, vgl. Abb. 2.25. Die Bewegungsgleichung für den elektrischen Strom lautet wegen $I_{\text{ext}} = \dot{U}_{\text{ext}}$

$$L\,\ddot{I} + R\,\dot{I} + \frac{1}{C}\,I = U_0\,\bar{\omega}\,\cos(\bar{\omega}t) \ .$$

Mit $I \equiv x$, $\beta = R/(2L)$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $f = U_0\bar{\omega}/L$ ergibt dies genau Gl. (2.126).

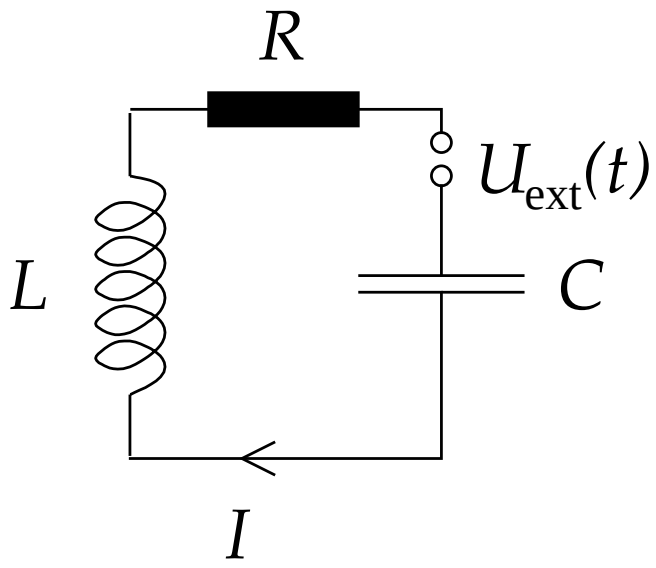


Abbildung 2.25: Realisierung einer periodischen äußeren Kraft für den elektrischen Schwingkreis.

Die zu lösende Differentialgleichung (2.126) ist eine **inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**. Bekanntlich ist die allgemeine Lösung die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, vgl. Gl. (2.57). Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist schon bekannt; dies ist Gl. (2.116). Wir benötigen also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Diese beschaffen wir uns wie folgt. Wir erweitern zunächst die Differentialgleichung (2.126) ins Komplexe,

$$\ddot{z} + 2\,\beta\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = f\,e^{i\bar{\omega}t}\;. \tag{2.127}$$

Natürlich sind physikalische Kräfte, Auslenkungen einer Masse aus der Ruhelage oder Ströme reellwertige Größen. Es läßt sich jedoch bei periodischen Bewegungen wegen der einfachen Differentiationsregeln besser mit der (komplexen) Exponentialfunnktion rechnen als mit den trigonometrischen Funktionen. Am Schluß der Rechnung muss man den Realteil der Lösung nehmen, um das physikalisch relevante Resultat zu erhalten. Wegen der Linearität der Differentialgleichung mischen Real- und Imaginärteile der Lösung nicht miteinander.

Um die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.127) zu erhalten, argumentieren wir, dass der Oszillator nach einer gewissen **Einschwingzeit** der periodischen äußeren Kraft $F_{\text{ext}}(t)$ folgen und mit der gleichen Frequenz $\bar{\omega}$ schwingen wird. Wir machen daher den **Lösungsansatz**:

$$z(t) = A\,e^{i\bar{\omega}t}\;. \tag{2.128}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (2.127) ergibt

$$\begin{aligned}
&\left[(-\bar{\omega}^2 + 2\,i\,\beta\,\bar{\omega} + \omega_0^2)\,A - f\right]\,e^{i\bar{\omega}t} = 0\\
\Longrightarrow\quad A \;&=\; -\frac{f}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 - 2\,i\,\beta\,\bar{\omega}} = -f\,\frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2\,i\,\beta\,\bar{\omega}}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\beta^2\,\bar{\omega}^2}\;,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, A &= -f\,\frac{\bar\omega^2-\omega_0^2}{(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2+4\,\beta^2\,\bar\omega^2}\;,\\
\mathrm{Im}\, A &= -\frac{2\,f\,\beta\,\bar\omega}{(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2+4\,\beta^2\,\bar\omega^2} < 0\;,\\
|A| &= \sqrt{f^2\,\frac{(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2}{\left[(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2+4\,\beta^2\,\bar\omega^2\right]^2}+\frac{4\,f^2\,\beta^2\,\bar\omega^2}{\left[(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2+4\,\beta^2\,\bar\omega^2\right]^2}}\\
&= f\,\frac{\sqrt{(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2+4\,\beta^2\,\bar\omega^2}}{(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2+4\,\beta^2\,\bar\omega^2} = \frac{f}{\sqrt{(\bar\omega^2-\omega_0^2)^2+4\,\beta^2\,\bar\omega^2}}\;.
\end{aligned}
\tag{2.129}
$$

Der Betrag $|A|$ der komplexen Amplitude A ist in Abb. 2.26 als Funktion von $\bar\omega$ für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten β dargestellt.

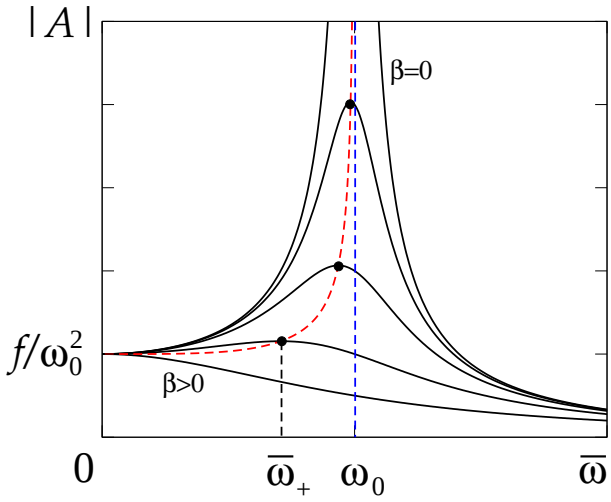


Abbildung 2.26: Der Betrag $|A|$ der komplexen Amplitude A der speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten β.

Wir diskutieren die Lösung für $|A|$.

1. Zunächst ist zu bemerken, dass wir nur den Bereich $\bar\omega \geq 0$ betrachten müssen, da die Funktion $|A|$ symmetrisch in $\bar\omega$ ist, d.h. $|A|(\bar\omega) = |A|(-\bar\omega)$.

2. Für $\bar\omega \to 0$ ist der Wert von $|A|$ von β unabhängig,

$$\bar\omega \to 0 \;:\quad |A| \to \frac{f}{\omega_0^2}\;.$$

   Für verschwindende Kreisfrequenz der antreibenden Kraft (stillstehendes Schwungrad) ist die Auslenkung des Oszillators konstant.

3. Für $\bar{\omega} \to \infty$ wird $|A|$ ebenfalls unabhängig von β:

$$\bar{\omega} \to \infty \; : \quad |A| \to \frac{f}{\bar{\omega}^2} \to 0 \; .$$

Der Oszillator schwingt nicht; die äußere Kraft ändert sich so schnell, dass er ihr nicht mehr folgen kann und weder in die eine noch in die andere Richtung ausgelenkt wird.

4. Die Extremwerte der Funktion $|A|(\bar{\omega})$ berechnen sich aus der Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}|A|}{\mathrm{d}\bar{\omega}} = -\frac{f}{2\sqrt{(\bar{\omega}^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\bar{\omega}^2}^{\,3}} \left[4(\bar{\omega}^2-\omega_0^2)\bar{\omega} + 8\,\beta^2\,\bar{\omega}\right] \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= \bar{\omega}\left(\bar{\omega}^2-\omega_0^2+2\,\beta^2\right) \; . \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser Gleichung, d.h. die Extrema der Funktion $|A|(\bar{\omega})$, sind also

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= 0 \; , \\ \bar{\omega}_\pm &= \pm\,\bar{\omega}_* \; , \quad \bar{\omega}_* \equiv \sqrt{\omega_0^2-2\,\beta^2} \leq \omega_0 \; . \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

(i) $\omega_0 < \sqrt{2}\,\beta$: $\bar{\omega}_*$ ist imaginär und $\bar{\omega}_\pm$ entfallen als mögliche Extrema der reellwertigen Funktion $|A|(\bar{\omega})$. Die verbleibende Lösung ist $\bar{\omega}_0 = 0$. Dies ist ein **Maximum**, da $|A| \geq 0$ für $\bar{\omega} \to \pm\infty$ gegen null strebt.

(ii) $\omega_0 > \sqrt{2}\,\beta$: Da $\bar{\omega}_- = -\bar{\omega}_* < \bar{\omega}_0 = 0 < \bar{\omega}_+ = \bar{\omega}_*$ und die Funktion $|A|$ für $\bar{\omega} \to \pm\infty$ gegen null geht, ist $\bar{\omega}_0$ ein **Minimum** und $\bar{\omega}_\pm$ sind zwei symmetrisch zum Ursprung angeordnete **Maxima**.

Die Maxima im zweiten Fall bedeuten, dass das System eine **Resonanz** aufweist: es gibt eine Anregungsfrequenz $\bar{\omega}_* \leq \omega_0$, bei der die Schwingungsamplitude besonders groß wird. Für kleiner werdendes β nähert sich $\bar{\omega}_*$ der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften harmonischen Oszillators an und die zugehörigen Maxima werden immer höher. Die Höhe der Maxima ist durch die rot gestrichelte Kurve in Abb. 2.26 gegeben. Für verschwindende Reibung geht $\bar{\omega}_* \to \omega_0$ und die Funktion $|A|$ hat einen Pol bei ω_0 (blau gestrichelte Kurve in Abb. 2.26):

$$\beta \to 0 \; : \quad |A| \to \frac{f}{|\bar{\omega}^2-\omega_0^2|} \; .$$

Für $\bar{\omega} = \omega_0$, also für eine Antriebsfrequenz, die mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators übereinstimmt, kommt es zur sog. **Resonanzkatastrophe**: die Amplitude der Schwingung geht gegen unendlich (was nichts anderes bedeutet, als dass die Federn reißen, oder der Schwingkreis verschmort).

Mittels der Exponentialdarstellung der komplexen Amplitude, $A = |A|\,e^{i\bar{\varphi}}$ definiert man ihre Phase,

$$\bar{\varphi} \equiv \arg A = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,A}{\mathrm{Re}\,A}\right) = \arctan\left(\frac{2\,\beta\,\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2-\omega_0^2}\right) \; . \tag{2.130}$$

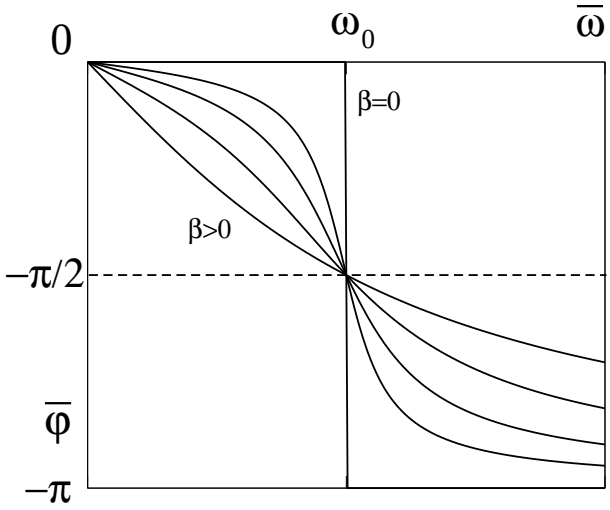


Abbildung 2.27: Die Phase $\bar{\varphi}$ der komplexen Amplitude A der speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten β.

Da $\mathrm{Im}\, A < 0$, liegt die Phase $\bar{\varphi}$ zwischen π und 2π, bzw. wegen der Periodizität der komplexen Zahlen zwischen $-\pi$ und 0. Die Phase ist in Abb. 2.27 für verschiedene Werte von β als Funktion von $\bar{\omega}$ dargestellt.

Die spezielle Lösung des Oszillators lautet

$$z^{(\mathrm{s})}(t) = A\, e^{i\bar{\omega}t} = |A|\, e^{i\bar{\varphi}}\, e^{i\bar{\omega}t} = |A|\, e^{i(\bar{\omega}t+\bar{\varphi})} \; . \tag{2.131}$$

Ihre Phase $\bar{\omega}t + \bar{\varphi}$ "hinkt" wegen $-\pi \leq \bar{\varphi} \leq 0$ der Phase $\bar{\omega}t$ der treibenden Kraft hinterher. Das Maximum der Auslenkung wird erst **nach** dem Maximum der treibenden Kraft erreicht.

Der physikalisch relevante Anteil der Lösung (2.131) ist der Realteil dieser Gleichung,

$$x^{(\mathrm{s})}(t) = |A|\, \cos(\bar{\omega}t + \bar{\varphi}) \; .$$

Die **allgemeine** Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.126) lautet nun

$$\begin{aligned} x(t) &= x^{(\mathrm{a})}(t) + x^{(\mathrm{s})}(t) \; , \\ x^{(\mathrm{a})}(t) &= \mathrm{Re}\left(A_+\, e^{\lambda_+ t} + A_-\, e^{\lambda_- t}\right) \sim e^{-\beta t} \; . \end{aligned} \tag{2.132}$$

Da die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung **immer** exponentiell gedämpft ist, unabhängig davon, ob der Schwingfall, der aperiodische Grenzfall oder der Kriechfall vorliegt, wird nach einer gewissen **Einschwingzeit** $t \gg 1/\beta$ diese Lösung ausgedämpft sein und die allgemeine Lösung folgt der speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung,

$$x(t) \simeq x^{(\mathrm{s})}(t) \; , \quad t \gg 1/\beta \; .$$

Die homogene Lösung spielt also lediglich während des **Einschwingvorgangs** eine Rolle. Sie wird nur benötigt, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen. Für große Zeiten $t \gg 1/\beta$ schwingt das System mit der Kreisfrequenz $\bar{\omega}$ der äußeren treibenden Kraft und ist von den Anfangsbedingungen unabhängig.

2.4 Fundamentale Begriffe und Erhaltungssätze

2.4.1 Arbeit

Gegeben sei ein beliebiges **Kraftfeld** $\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$. Um einen Körper beim Punkt $\vec{r}$ um eine **infinitesimale** Wegstrecke $\mathrm{d}\vec{r}$ zu verschieben, ist die infinitesimale **Arbeit**

$$\delta W = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{2.133}$$

aufzuwenden.

Bemerkungen:

1. δW ist nicht notwendigerweise ein totales Differential, daher benutzen wir das Symbol δW anstelle von $\mathrm{d}W$.

2. Zum Vorzeichen in Gl. (2.133):
   (i) Geschieht die Verschiebung $\mathrm{d}\vec{r}$ **entgegen** der Richtung der Kraft, d.h. $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} < 0$, so muss Arbeit von **außen** am Körper verrichtet werden. Diese wird **positiv** gezählt, $\delta W > 0$.
   (ii) Geschieht die Verschiebung **in** Richtung der Kraft, $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} > 0$, so verrichtet der Körper **selbst** Arbeit. Diese wird **negativ** gezählt, $\delta W < 0$.

3. Falls $\vec{F}\perp\mathrm{d}\vec{r}$, also wenn die Verrückung **senkrecht** zum Kraftfeld geschieht, so wird **keine** Arbeit verrichtet, $\delta W = 0$.

4. Die **Einheit** der Arbeit ist **Joule**, $[W] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} \equiv \mathrm{J}$.

Falls die Wegstrecke nicht infinitesimal klein, sondern endlich groß ist, gilt

$$W_{21}(\mathcal{C}) = -\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\ . \tag{2.134}$$

Hierbei ist $\mathcal{C}$ eine Kurve, die vom Punkt $\vec{r}_1$ zum Punkt $\vec{r}_2$ verläuft, vgl. Abb. 2.28. Das in Gl. (2.134) auftretende Integral ist ein sog. **Weg-**, **Kurven-** oder **Linienintegral**. Es hängt ab von

1. der **Form** des Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$.

2. dem **zeitlichen Bewegungsablauf**. Diese Abhängigkeit entfällt, falls $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, also nur vom Ort, nicht aber von Geschwindigkeit und Zeit abhängt.

3. dem **Anfangs-** und **Endpunkt** $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$ der Kurve $\mathcal{C}$.

4. der **Form** der Kurve $\mathcal{C}$, auf der man von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ gelangt. I.a. ist die Arbeit auf **unterschiedlichen** Wegen **verschieden**, selbst wenn Anfangs- und Endpunkt der Wege übereinstimmen,

$$W_{21}(\mathcal{C}_1) = -\int_{\mathcal{C}_1}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \neq -\int_{\mathcal{C}_2}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = W_{21}(\mathcal{C}_2)\ ,$$

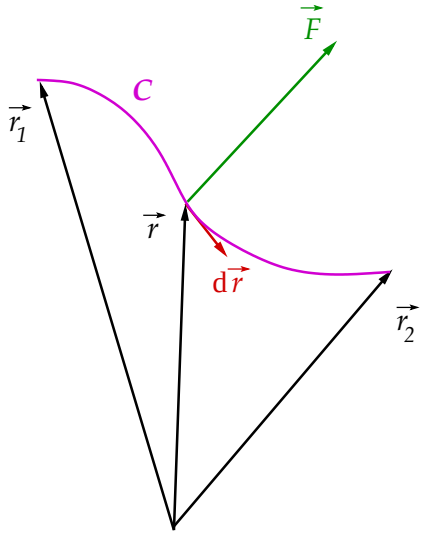


Abbildung 2.28: Zur Definition des Wegintegrals (2.134).

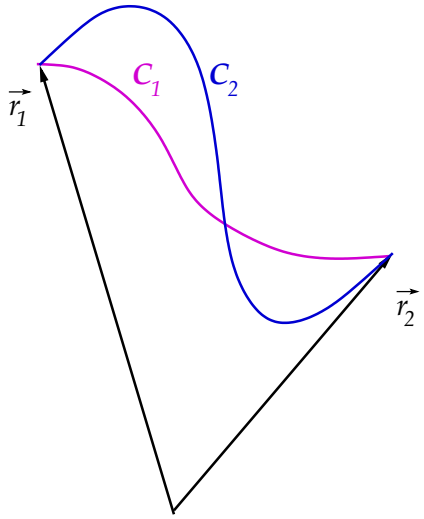


Abbildung 2.29: Zwei unterschiedliche Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ führen.

wobei $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ unterschiedliche Wege sind, um von $\vec{r}_1$ zu $\vec{r}_2$ zu gelangen, vgl. Abb. 2.29.

Wir haben solche Linienintegrale schon berechnet, und zwar im Zusammenhang mit der **Bogenlänge** in Abschnitt 1.2.3. Zur Berechnung benötigt man lediglich eine geeignete **Parametrisierung** der Kurve $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} = \{\vec{r}(\alpha),\, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}\ .$$

Beispielsweise kann man die **natürliche Parametrisierung** der Kurve wählen, $\alpha - \alpha_1 = s$, wobei s die Bogenlänge der Kurve vom Anfangswert α_1 bis zu einem gegebenen $\alpha >$

α_1 ist. Die gesamte Bogenlänge der Kurve $\mathcal{C}$ ist $s_\mathcal{C} \equiv \alpha_2 - \alpha_1$. Eine weitere sinnvolle Parametrisierung ist durch die Zeit gegeben, $\alpha = t$.

Nach Anwendung der Kettenregel

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

wird aus Gl. (2.134)

$$W_{21}(\mathcal{C}) = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{d}\alpha\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\alpha), \dot{\vec{r}}(\alpha), t(\alpha)) \,. \tag{2.135}$$

Dies ist ein **gewöhnliches Integral** über eine **skalare Funktion** der Integrationsvariablen α. Die Form des gewählten Weges $\mathcal{C}$ manifestiert sich im Term $\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)/\mathrm{d}\alpha$. Man beachte, dass man neben der Parametrisierung der Kurve $\vec{r}(\alpha)$ auch den Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Parameter α kennen muss, $t(\alpha)$, also welche Position der Körper auf der Kurve zu welchem Zeitpunkt innehat. Diese zusätzliche Information wird nicht benötigt, wenn die Zeit selbst der Kurvenparameter ist, oder wenn die Kraft nicht explizit von der Zeit abhängt.

Als Anwendung und um die Wegabhängigkeit des Arbeitsintegrals zu demonstrieren, betrachten wir das folgende einfache

20.6.2013

Beispiel: Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = c\,(y^2, 0, 0)^T \,, \tag{2.136}$$

wobei die Konstante c dafür sorgt, dass die Kraft $\vec{F}$ die korrekte Dimension besitzt, und y die kartesische $y-$Koordinate ist. Das Kraftfeld hat die in Abb. 2.30 dargestellte Form: es zeigt ausschließlich in $x-$Richtung und sein Betrag wächst quadratisch mit y an. Wir berechnen die Arbeit auf den in Abb. 2.30 dargestellten Wegen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, um vom Ursprung $(0,0,0)^T$ zum Punkt $(1,1,0)^T$ zu gelangen.

Eine geeignete Parametrisierung für $\mathcal{C}_1$ ist:

$$\mathcal{C}_1 = \{\vec{r}(\alpha) = (\alpha, \alpha, 0)^T,\, 0 \le \alpha \le 1\} \,,$$

woraus wir sofort

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = (1,1,0)^T \,, \quad \vec{F}(\vec{r}(\alpha)) = c\,(\alpha^2, 0, 0)^T \,, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{F} = c\,\alpha^2$$

berechnen. Damit ist das Arbeitsintegral auf dem Weg $\mathcal{C}_1$:

$$W(\mathcal{C}_1) = -\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\, c\,\alpha^2 = -\frac{c}{3} \,.$$

Eine geeignete Parametrisierung für $\mathcal{C}_2$ ist:

$$\mathcal{C}_2 = \{\vec{r}(\alpha) = (\alpha, 0, 0)^T,\, 0 \le \alpha \le 1\} \,\cup\, \{\vec{r}(\alpha) = (1, \alpha - 1, 0)^T,\, 1 < \alpha \le 2\} \,.$$

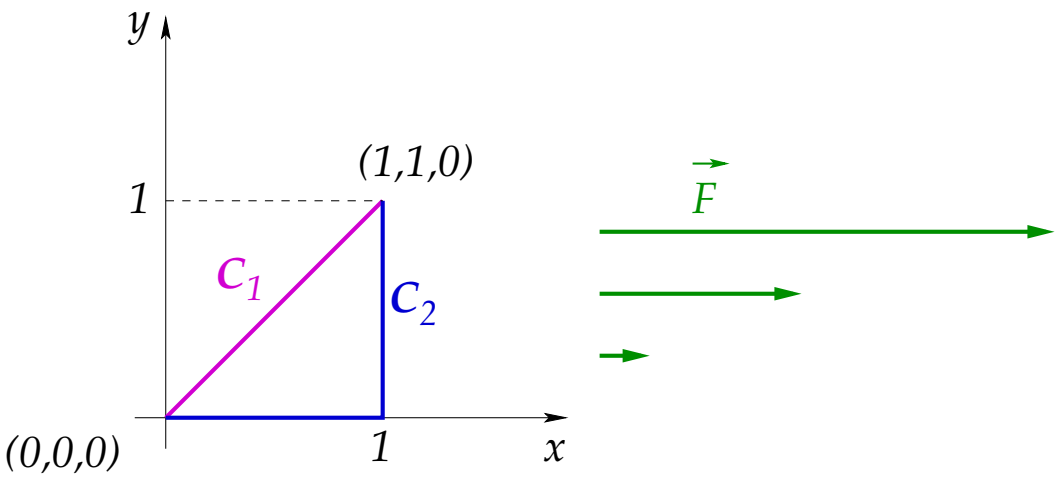


Abbildung 2.30: Zur Wegabhängigkeit des Arbeitsintegrals.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} &= \begin{cases} (1,0,0)^T, & 0 \le \alpha \le 1 \\ (0,1,0)^T, & 1 < \alpha \le 2 \end{cases}, \\
\vec{F}(\vec{r}(\alpha)) &= c \begin{cases} (0,0,0)^T, & 0 \le \alpha \le 1 \\ ((\alpha-1)^2,0,0)^T, & 1 < \alpha \le 2 \end{cases}, \\
\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{F} &= c \begin{cases} 0, & 0 \le \alpha \le 1 \\ 0, & 1 < \alpha \le 2 \end{cases},
\end{aligned}$$

woraus wir

$$W(\mathcal{C}_2) = 0$$

erhalten. Dieses Resultat wird sofort klar, wenn wir bedenken, dass die Kraft auf dem ersten Teilstück des Weges $\mathcal{C}_2$, für $0 \le \alpha \le 1$, verschwindet, während sie auf dem zweiten Teilstück stets senkrecht zum Weg steht, also das Skalarprodukt zwischen $\mathrm{d}\vec{r}$ und $\vec{F}$ verschwindet. Offensichtlich erhalten wir für das Kraftfeld (2.136) zwei unterschiedliche Werte für das Arbeitsintegral, je nachdem welchen Weg wir wählen.

2.4.2 Leistung

Die **Leistung** ist die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit,

$$P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} \,. \tag{2.137}$$

Wenn wir die infinitesimale Arbeit (2.133) einsetzen, erhalten wir

$$P = -\vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv -\vec{F} \cdot \vec{v} \,. \tag{2.138}$$

Abgesehen vom Vorzeichen ist die Leistung also das Skalarprodukt aus Geschwindigkeit und Kraft. Damit ist die Leistung unabhängig vom Kraftfeld, also für **alle** Kraftfelder, vom zeitlichen Ablauf der Bewegung abhängig.

Die **Einheit** der Leistung ist **Watt**, $[P] = \mathrm{J/s} = \mathrm{N\,m/s} = \mathrm{kg\,m^2/s^3} = \mathrm{W}$.

2.4.3 Kinetische Energie

Wir multiplizieren die Newtonsche Bewegungsgleichung skalar mit der Geschwindigkeit,

$$m\,\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2}\right) = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -P\;. \tag{2.139}$$

Die Größe

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2} \tag{2.140}$$

bezeichnet man als **kinetische Energie**. Gleichung (2.139) schreibt sich dann kompakt als

$$P = -\dot{T}\;, \tag{2.141}$$

d.h. Leistung ist mit einer Änderung der kinetischen Energie als Funktion der Zeit verknüpft. **Positive** Leistung entspricht dabei einer **Abnahme** der kinetischen Energie und **negative** Leistung einer **Zunahme**. Nach der Definition (2.137) der Leistung gilt aber auch

$$-\dot{T} = +\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}\;, \tag{2.142}$$

d.h. die **Ab-** bzw. **Zunahme** der kinetischen Energie ist mit einer **Zu-** bzw. **Abnahme** von Arbeit verknüpft. Integrieren wir Gl. (2.142) nach der Zeit, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\delta W}{\mathrm{d}t} &= -\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\vec{F}(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv W_{21}\\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -T_2 + T_1 = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{r}}(t_1)^2 - \dot{\vec{r}}(t_2)^2\right]\;.\end{aligned}$$

Hier haben wir in der ersten Zeile die Parameterdarstellung (2.135) des Arbeitsintegrals verwendet, mit der Zeit t als Parameter. Geleistete Arbeit $W_{21} \neq 0$ ist damit mit einer **Änderung** des Bewegungszustandes verknüpft, $\dot{\vec{r}}(t_1) \neq \dot{\vec{r}}(t_2)$.

Aus der letzten Gleichung wird außerdem sofort ersichtlich, dass kinetische Energie und Arbeit dieselbe **Einheit** besitzen, $[T] = [W] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{J}$.

2.4.4 Potentielle Energie und konservative Kräfte

In den letzten beiden Abschnitten haben wir besondere Sorgfalt darauf verwendet, die infinitesimale Arbeit δW nicht als totales Differential $\mathrm{d}W$ zu schreiben. Dies ist in der Tat nur unter bestimmten Bedingungen möglich, die in diesem Abschnitt erläutert werden.

Falls eine Funktion $V(\vec{r})$ existiert, die

$$\frac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}t} \equiv -\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = P \tag{2.143}$$

erfüllt, so nennt man diese Funktion das **Potential** oder die **potentielle Energie** der Kraft $\vec{F}$. Multiplikation von Gl. (2.143) mit dt und Vergleich mit Gl. (2.133) ergibt, dass $\delta W \equiv \mathrm{d}V$, d.h. in diesem Fall gibt es ein totales Differential der Arbeit W, welches identisch ist mit dem totalen Differential der potentiellen Energie, $\mathrm{d}W \equiv \mathrm{d}V$. Kräfte, für die dies zutrifft, nennt man **konservative Kräfte**. Die **Einheit** des Potentials bzw. der potentiellen Energie ist mit der Einheit der Arbeit bzw. der kinetischen Energie identisch, $[V] = [W] = [T] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{J}$.

Konservative Kräfte lassen sich direkt aus der potentiellen Energie berechnen. Das totale Differential der potentiellen Energie lautet

$$\mathrm{d}V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{2.144}$$

Division durch dt ergibt

$$\dot{V}(\vec{r}) \equiv \frac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i}\,\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}\,. \tag{2.145}$$

Der Vergleich mit Gleichung (2.143) ergibt den gesuchten Zusammenhang zwischen Kraft und Potential

$$\vec{F}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} V(\vec{r})\,. \tag{2.146}$$

Da $V(\vec{r})$ lediglich eine Funktion des Ortes $\vec{r}$ ist, kann auch die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ nur vom Ort, nicht aber von der Geschwindigkeit oder explizit von der Zeit abhängen. Eine implizite Zeitabhängigkeit besteht dagegen schon, denn wenn wir die Kraft entlang der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Körpers berechnen, so taucht die Zeitabhängigkeit der Bahnkurve implizit in der Kraft auf, $\vec{F}(\vec{r}(t))$. Aus der Tatsache, dass konservative Kräfte nicht von der Geschwindigkeit abhängen dürfen, folgern wir, dass **Reibungskräfte nicht konservativ** sind. I.a. gibt es für nicht-konservative Kräfte kein Potential, aus dem man sie ableiten könnte.

Die Bedingung, dass die Kraft nur vom Ort abhängt, ist eine **notwendige Bedingung** dafür, dass sie konservativ ist, d.h. dass ein Potential existiert. Sie ist aber nicht **hinreichend**, denn nicht alle Felder, die nur vom Ort abhängen, lassen sich automatisch auch als Gradient einer skalaren Funktion darstellen. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials und damit dafür, dass die Kraft konservativ ist, ergibt sich aus folgender Überlegung. I.a. ist das Potential $V(\vec{r})$ wenigstens (fast) überall zweimal stetig differenzierbar, d.h.

$$\frac{\partial^2 V(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V(\vec{r})}{\partial x_j \partial x_i}\,, \quad i,j = 1,2,3\,.$$

Dies bedeutet aber mit $F_i = -\partial V/\partial x_i$, dass

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \iff \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0\,, \quad i,j = 1,2,3\,.$$

Daraus ergibt sich der folgende

Satz: Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist **genau dann konservativ, falls**

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \; . \tag{2.147}$$

Beweis: "Genau dann" bedeutet, dass man die Behauptung in beide Richtungen beweisen muss, d.h.

1. Wir nehmen an, dass $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist. Zu zeigen ist, dass $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$. Für konservative Kraftfelder existiert per Definition ein Potential $V(\vec{r})$ mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet aber immer gemäß Gl. (1.85).

2. Wir nehmen an, dass die Rotation von $\vec{F}(\vec{r})$ verschwindet. Es ist zu zeigen, dass die Kraft dann konservativ ist, d.h., dass ein Potential $V(\vec{r})$ existiert mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. Der Beweis stützt sich auf den sog. **Helmholtzschen Zerlegungssatz**, den wir hier aber nicht beweisen werden, sondern erst in der Vorlesung "Theoretische Physik III: Elektrodynamik". Der Zerlegungssatz besagt, dass man jedes Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ als Summe eines Gradientenfeldes und eines Wirbelfeldes schreiben kann,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) \; , \tag{2.148}$$

   wobei das skalare Feld $\varphi(\vec{r})$ und das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r})$ eindeutig aus $\vec{F}(\vec{r})$ berechenbar sind (die entsprechenden Formeln sind aber hier nicht weiter von Bedeutung, weshalb wir sie nicht explizit angeben). Die Bedingung $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$ führt wegen $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = 0$ auf

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) \right] = \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \right] - \Delta \, \vec{f}(\vec{r}) = 0 \; ,$$

   wobei wir Gl. (1.89) benutzt haben. Diese Gleichung ist i.a. nur für konstantes $\vec{f}$ erfüllbar. Konstante Vektorfelder haben aber ein verschwindendes Wirbelfeld, $\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$, und der Zerlegungssatz (2.148) liefert

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \; .$$

   Mit $\varphi(\vec{r}) \equiv -V(\vec{r})$ folgt die Behauptung, q.e.d.

Wir leiten nun einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Arbeit und der potentiellen Energie her. Wir formen das Arbeitsintegral (2.135) für konservative Kräfte $\vec{F}(\vec{r}(t))$ mit der Zeit als Parameter und unter Zuhilfenahme von Glgen. (2.145) und (2.146) in folgender Weise um:

$$\begin{aligned} W_{21} &= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \vec{\nabla} V(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}V(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} = \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V \equiv V_2 - V_1 \; , \end{aligned} \tag{2.149}$$

wobei wir $V_i = V(\vec{r}(t_i))$, $i = 1, 2$, definiert haben. Gleichung (2.149) besagt, dass die bei Verschiebung eines Körpers von $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$ geleistete Arbeit identisch mit

der **Potentialdifferenz** $V_2 - V_1$ ist. Da dieses Ergebnis nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges der Verschiebung abhängt, nicht aber von der Form des Weges selbst, ist für **konservative Kräfte die Arbeit vom gewählten Weg unabhängig**. Wir wollen diese Tatsache im folgenden genauer untersuchen.

Wir integrieren den Gradienten des Potentials über einen **geschlossenen Weg**, vgl. Abb. 2.31. Dann gilt:

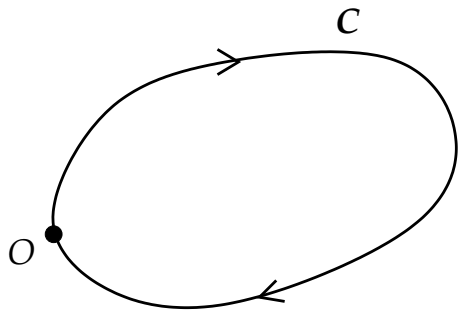


Abbildung 2.31: Zum Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) &= \int_{s_a}^{s_e} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}(s)) = \int_{s_a}^{s_e} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}V(\vec{r}(s))}{\mathrm{d}s} \\ &= \int_{V_0}^{V_0} \mathrm{d}V = V_0 - V_0 = 0 \, , \end{aligned} \tag{2.150}$$

wobei wir Gl. (2.144) für das totale Differential und $V_0 \equiv V(\vec{r}(s_a)) = V(\vec{r}(s_e))$ benutzt haben. Auf dieser Tatsache beruht der folgende

Satz: Eine Kraft ist **genau dann konservativ, wenn** das Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \, . \tag{2.151}$$

Beweis: Es gilt wieder, Hin- und Rückrichtung getrennt zu beweisen.

1. Falls die Kraft konservativ ist, gilt $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$, und damit folgt die Behauptung sofort aus Gl. (2.150).

2. Wir nehmen an, dass Gl. (2.151) gilt. Nun gilt für jedes beliebige, hinreichend oft differenzierbare Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ das sog. **Stokessche Theorem**, welches wir erst in der Vorlesung "Theoretische Physik III: Elektrodynamik" beweisen werden:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) \, , \tag{2.152}$$

wobei das Integral auf der rechten Seite über die von der Kurve $\mathcal{C}$ eingeschlossene Fläche zu führen ist und $\mathrm{d}\vec{S}$ der Normalenvektor auf dieser Fläche ist. Angewendet

auf Gl. (2.151) folgern wir, dass

$$0 = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \ .$$

Da die geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ beliebig war, können wir sie auch zu einem Punkt zusammenziehen, woraus

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

folgt. Dies war aber gerade das vormals bewiesene Kriterium dafür, dass die Kraft konservativ ist, q.e.d.

Mit Gl. (2.134) bedeutet der gerade bewiesene Satz, dass eine **konservative Kraft** auf einem **geschlossenen Weg keine Arbeit leistet**. Die schon oben diskutierte **Wegunabhängigkeit** des Arbeitsintegral für konservative Kräfte läßt sich ebenfalls leicht aus diesem Satz ableiten. Dazu betrachten wir zwei Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die die zwei Punkte P_1 und P_2 verbinden, vgl. Abb. 2.32.

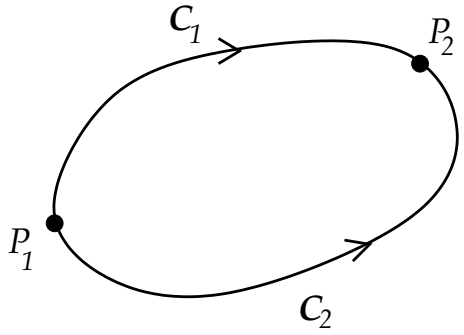


Abbildung 2.32: Zur Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals für konservative Kräfte.

Die Parametrisierung für den Weg $\mathcal{C}_1$ laute:

$$\mathcal{C}_1 = \{\vec{r}(s),\, 0 \leq s \leq 1\} \ ,$$

wobei $\vec{r}_1 = \vec{r}(0)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(1)$ die Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2 darstellen. Für den Weg $\mathcal{C}_2$ schreiben wir

$$\mathcal{C}_2 = \{\vec{r}(t),\, -1 \leq t \leq 0\} \ ,$$

wobei $\vec{r}_1 = \vec{r}(-1)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(0)$ die Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2 darstellen.

Nun betrachten wir den **geschlossenen Weg** $\mathcal{C}$, der sich dadurch ergibt, dass wir $\mathcal{C}_1$ von P_1 nach P_2 und $\mathcal{C}_2$ in **umgekehrter Richtung**, also von P_2 nach P_1 durchlaufen. Wir parametrisieren diesen Weg wie folgt:

$$\mathcal{C} = \{\vec{r}(s),\, 0 \leq s \leq 1\} \cup \{\vec{r}(s),\, 1 \leq s \leq 2\} \ ,$$

wobei $\vec{r}_1 = \vec{r}(0)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(1)$ und $\vec{r}_1 = \vec{r}(2)$ ist. Auf dem zweiten Teilstück ersetzen wir nun den Parameter s durch $t = 1 - s$. Der Parameter t läuft von 0 bis -1, wenn s von 1 bis 2

läuft, also entlang des umgekehrten Weges $\mathcal{C}_2$. Für konservative Kräfte gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_0^1 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{F}(\vec{r}(s)) + \int_1^2 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{F}(\vec{r}(s)) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{F}(\vec{r}(s)) + \int_0^{-1} \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{F}(\vec{r}(t)) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{F}(\vec{r}(s)) - \int_{-1}^0 \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{F}(\vec{r}(t)) \\ \Longleftrightarrow\quad & \int_0^1 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{F}(\vec{r}(s)) = \int_{-1}^0 \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{F}(\vec{r}(t)) \\ \Longleftrightarrow\quad & \int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r})\ . \end{aligned} \tag{2.153}$$

Für konservative Kräfte hat das Arbeitsintegral zwischen den Punkten P_1 und P_2 also immer den gleichen Wert, unabhängig vom durchlaufenen Weg.

Die Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals liefert ein **konstruktives Kriterium** zur Berechnung des Potentials $V(\vec{r})$ bei vorgegebener konservativer Kraft $\vec{F}(\vec{r})$. Gleichung (2.149) besagt, dass das Potential im Punkt P (charakterisiert durch den Ortsvektor $\vec{r}$) den Wert

$$V(\vec{r}) = -\int_{P_0}^{P} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) \tag{2.154}$$

annimmt, falls der Punkt P_0 (charakterisiert durch den Ortsvektor $\vec{r}_0$) so gewählt wird, dass $V(\vec{r}_0) = 0$.

Beispiel: Eindimensionaler harmonischer Oszillator

In einer Dimension gibt es nur einen möglichen Weg, um von $P_0 \equiv x_0$ zu $P \equiv x$ zu gelangen. Wir wählen $x_0 = 0$ und erhalten mit dem Hookeschen Kraftgesetz $F(x) = -kx$

$$V(x) = -\int_0^x \mathrm{d}x'\,F(x') = k\int_0^x \mathrm{d}x'\,x' = \frac{1}{2}\,kx^2\ . \tag{2.155}$$

In der Tat ist $V(0) = 0$, so dass keine weitere Integrationskonstante im Potential auftritt.

Zur Berechnung von $V(\vec{r})$ bei mehrdimensionalen Problemen kann man den **rechnerisch günstigsten** Weg wählen, da das Wegintegral für konservative Kräfte unabhängig vom Weg immer denselben Wert annimmt.

2.4.5 Energieerhaltungssatz

Wir zerlegen die Gesamtkraft in einen **konservativen** und in einen **nicht-konservativen**, d.h. einen sog. **dissipativen** Anteil,

$$\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{kons}} + \vec{F}_{\mathrm{diss}}\ .$$

Mit den Glgen. (2.139), (2.141), (2.145) und (2.146) für den konservativen Anteil der Kraft gilt dann

$$\begin{aligned} & \dot{T} &=& -P = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = \dot{\vec{r}} \cdot \left(-\vec{\nabla} V + \vec{F}_{\text{diss}} \right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \dot{T} + \vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{r}} &=& \dot{T} + \dot{V} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}} \\ \Longleftrightarrow \quad & \dot{E} &\equiv& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}} \, . \end{aligned} \tag{2.156}$$

Dies ist der sog. **Energiesatz**. Hier haben wir die **totale mechanische Energie** als

$$E \equiv T + V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} + V(\vec{r}) \tag{2.157}$$

eingeführt.

Da dissipative Kräfte der Bewegung eines Körpers entgegenwirken, ist $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}} < 0$. Dissipative Kräfte sorgen damit gemäß dem Energiesatz (2.156) für einen **Verlust** an **mechanischer Energie**, $\dot{E} < 0$. Falls alle Kräfte **konservativ** sind, d.h. falls der dissipative Anteil der Kraft verschwindet, $\vec{F}_{\text{diss}} = 0$, so folgt aus Gl. (2.156) der **Energieerhaltungssatz**

$$\dot{E} = 0 \iff E = T + V = const. \tag{2.158}$$

Dissipative Kräfte wie z.B. Reibungskräfte führen mechanische Energie in eine andere Energieform, z.B. Wärme, über. Erweitert man die Definition der Energie um diese Energieformen, dann bleibt die **Gesamtenergie** (d.h. inklusive der Wärmeenergie bzw. anderer Energieformen) wieder erhalten. Wir werden uns damit in der Vorlesung "Theoretische Physik V: Statistische Mechanik und Thermodynamik" näher beschäftigen.

2.4.6 Drehimpuls, Drehmoment

Wir definieren den sog. **Drehimpuls** als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{2.159}$$

und das sog. **Drehmoment** als

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \, . \tag{2.160}$$

Wir können einen Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Drehmoment herleiten, indem wir die Newtonsche Bewegungsgleichung vektoriell (von links) mit dem Ortsvektor multiplizieren,

$$m \, \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} \, . \tag{2.161}$$

Nun ist die linke Seite dieser Gleichung identisch mit der Zeitableitung des Drehimpulses,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = m \left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \right) = m \, \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \, ,$$

da das Kreuzprodukt identischer Vektoren verschwindet. Die rechte Seite von Gl. (2.161) ist dagegen identisch mit dem Drehmoment (2.160), so dass wir den sog. **Drehimpulssatz** erhalten,

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} \, . \tag{2.162}$$

Falls das Drehmoment verschwindet, $\vec{M} = 0$, ist der Drehimpuls erhalten,

$$\vec{M} = 0 \implies \dot{\vec{L}} = 0 \implies \vec{L} = \overrightarrow{const.} \,. \tag{2.163}$$

Dies ist der **Drehimpulserhaltungssatz**.

Ein verschwindendes Drehmoment erreicht man nach Gl. (2.160) entweder durch verschwindende Kräfte, $\vec{F} = 0$, oder aber durch Kräfte, die **parallel** zum Ortsvektor gerichtet sind, $\vec{F} \parallel \vec{r}$. Dies sind aber die schon in Gl. (2.25) eingeführten **Zentralkraftfelder**. Wir schließen daraus, dass der **Drehimpuls** in **Zentralkraftfeldern** eine **Erhaltungsgröße** ist.

Die kräftefreie Bewegung ist geradlinig gleichförmig, vgl. Abb. 2.33. Der dieser Bewegung zugeordnete Drehimpuls hat den Betrag $L = |\vec{L}| = mvd$. Wie kann es sein, dass einer **gerad**linigen Bewegung überhaupt ein **Dreh**impuls zugeordnet werden kann?

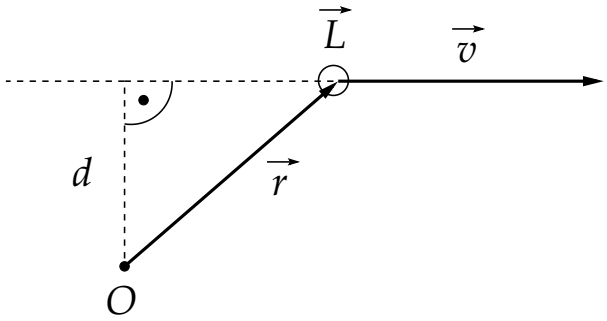


Abbildung 2.33: Geradlinig gleichförmige Bewegung. Der dieser Bewegung zugeordnete Drehimpuls zeigt in die Papierebene hinein.

Offenbar ist $\vec{L} = 0$, falls $\vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$, also wenn die Bewegung entlang einer Geraden erfolgt, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht. Es wird damit offensichtlich, dass der Drehimpuls von der **Wahl des Bezugssystems** abhängt. Verschiebt man den Ursprung um einen **konstanten** Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$, so dass

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a} \,, \quad \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}} \,,$$

so ändert sich auch der Drehimpuls,

$$\vec{L}\,' = m\,\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}\,' = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m\,\vec{a} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{p} \,.$$

Aus dem Verschwinden des Drehimpulses in einem bestimmten Bezugssystem, $\vec{L} = 0$, folgt also i.a. nicht das Verschwinden des Drehimpulses in einem anderen System, $\vec{L}\,' \neq 0$. Die **Drehimpulserhaltung** folgt **nur**, wenn auch der **Impuls** erhalten ist, da

$$\dot{\vec{L}}\,' = \dot{\vec{L}} + \dot{\vec{a}} \times \vec{p} + \vec{a} \times \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{L}} + \vec{a} \times \dot{\vec{p}} \implies \dot{\vec{L}}\,' = \dot{\vec{L}} = 0 \text{ nur, falls } \dot{\vec{p}} = 0 \,, \text{ d.h. } \vec{p} = \overrightarrow{const.} \,. \tag{2.164}$$

25.6.2013

Die Drehimpulserhaltung schränkt die Bewegung eines Massenpunktes stark ein. Offenbar gilt allgemein

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = m\,\vec{r} \cdot \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0 \,, \tag{2.165}$$

da das Spatprodukt mit zwei identischen Vektoren verschwindet. Dies bedeutet, dass der Drehimpuls immer **senkrecht** auf dem Ortsvektor steht, $\vec{r} \perp \vec{L}$. Falls nun $\vec{L} = \overrightarrow{const.}$, dann muss die Bewegung **stets** in einer **Ebene** stattfinden, auf der $\vec{L}$ senkrecht steht. Z.B. ist für $\vec{L} = L\,\vec{e}_z$ die Bewegung auf die $(x, y)-$Ebene beschränkt, vgl. Abb. 2.34.

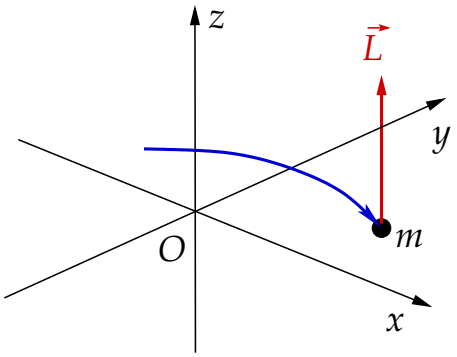


Abbildung 2.34: Im Fall der Drehimpulserhaltung findet die Bewegung eines Körpers stets in einer Ebene statt, auf der der Drehimpuls senkrecht steht.

Es gilt außerdem der sog.

Flächensatz: Der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Beweis:

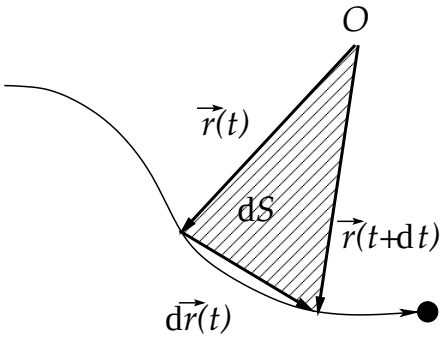


Abbildung 2.35: Zum Flächensatz.

Wir betrachten Abb. 2.35. Es gilt $\vec{r}(t + \mathrm{d}t) = \vec{r}(t) + \mathrm{d}\vec{r}(t)$ und $\mathrm{d}\vec{r}(t) = [\mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t]\,\mathrm{d}t = \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t$. Die Fläche $\mathrm{d}S$ ist gerade gleich der Hälfte der Fläche des durch die Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}(t + \mathrm{d}t)$ aufgespannten Parallelogramms, d.h.

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\,|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \mathrm{d}t)| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \left(\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{2m}\,|\vec{L}|\,\mathrm{d}t\,,$$

also

$$\dot{S} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m}\,. \tag{2.166}$$

Falls $\vec{L} = \overrightarrow{const.}$, so ist $\dot{S} = const.$, also ist die zeitliche Änderung der vom Ortsvektor überstrichenen Fläche konstant. Dies ist gerade die Behauptung.

2.4.7 Zentralkraftfelder

Zentralkraftfelder zeigen an jedem Punkt des Raumes in Richtung des Ortsvektors, vgl. Gl. (2.25)

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\,\vec{e}_r\ . \tag{2.167}$$

Für Zentralkraftfelder gilt, wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, **Drehimpulserhaltung**. Es gilt der folgende

Satz: Ein Zentralkraftfeld $\vec{F}$ ist **genau dann konservativ, falls**

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r\ , \tag{2.168}$$

also wenn die Funktion f in Gl. (2.167) lediglich vom **Betrag** r des Ortsvektors abhängt.

Beweis:

1. Wir nehmen an, dass die Zentralkraft $\vec{F} = f\,\vec{e}_r$ konservativ ist. Dann kann sie nicht von der Geschwindigkeit und explizit von der Zeit abhängen kann, d.h. $f = f(\vec{r})$. Die Funktion $f(\vec{r})$ kann im Prinzip von Betrag **und** Richtung des Ortsvektors abhängen. Es bleibt zu zeigen, dass **keine** solche Richtungsabhängigkeit besteht, also $f(\vec{r}) = f(r)$. Dies geht wie folgt. Aus der Tatsache, dass $\vec{F}$ konservativ ist, folgt

   $$0 = \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times[f(\vec{r})\,\vec{e}_r] = \vec{\nabla}\times\left[f(\vec{r})\,\frac{\vec{r}}{r}\right] = \frac{f(\vec{r})}{r}\,\vec{\nabla}\times\vec{r} + \left[\vec{\nabla}\frac{f(\vec{r})}{r}\right]\times\vec{r}\,.$$

   Der erste Term verschwindet wegen Gl. (1.88) (man setze die Funktion $f(r)$ in dieser Gleichung gleich r). Damit müssen die Vektoren $\vec{\nabla}(f(\vec{r})/r)$ und $\vec{r}$ **parallel** zueinander stehen. Das Gradientenfeld $\vec{\nabla}(f(\vec{r})/r)$ steht aber per Definition überall **senkrecht** zu den Flächen $f(\vec{r})/r = const.$. Damit stehen diese Flächen **überall senkrecht** zum Ortsvektor $\vec{r}$ (da dieser parallel zum Gradientenfeld $\vec{\nabla}(f(\vec{r})/r)$ steht). Damit dies erfüllt ist, müssen die Flächen $f(\vec{r})/r$ **Kugelflächen** mit konstantem Radius r um den Ursprung sein. Aufgrund der Symmetrie der Kugelfläche kann aber $f(\vec{r})$ nicht von der Richtung von $\vec{r}$ abhängen, sondern nur vom Betrag, $f(\vec{r}) = f(r)$.

2. Wir nehmen an, dass $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r$. Nach Gl. (1.88) gilt dann $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = 0$, d.h. $\vec{F}(\vec{r})$ ist konservativ.

Es gilt außerdem der folgende

Satz: Eine konservative Kraft $\vec{F}$ ist **genau dann eine Zentralkraft, wenn** $V(\vec{r}) = V(r)$.

Beweis:

1. Wir nehmen an, dass $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist, und dass $V(\vec{r}) = V(r)$. Es ist zu zeigen, dass $\vec{F}(\vec{r})$ eine Zentralkraft ist. Es gilt

   $$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\vec{\nabla}r = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r\ ,$$

   wobei wir Gl. (1.81) benutzt haben. Damit zeigt $\vec{F}(\vec{r})$ in Richtung des Ortsvektors, ist also eine Zentralkraft.

2. Wir nehmen an, dass die konservative Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ eine Zentralkraft ist. Es ist zu zeigen, dass $V(\vec{r}) = V(r)$. Es gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r = -\vec{\nabla} V(\vec{r})\ ,$$

d.h.

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i} = -\frac{f(r)}{r}\,x_i = -f(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\ ,$$

wobei wir Gl. (1.73) ausgenutzt haben. Sei nun $\tilde{f}(r)$ so, dass $f(r) = \mathrm{d}\tilde{f}(r)/\mathrm{d}r$, dann ist

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i} = -\frac{\partial \tilde{f}(r)}{\partial x_i}\ .$$

Da dies für alle Richtungen $i = 1, 2, 3$ gilt, kann V nicht auch noch von der Richtung des Ortsvektors abhängen, sondern wie auch die Funktion $\tilde{f}(r)$ lediglich vom Betrag r, also $V(\vec{r}) = V(r)$, q.e.d.

2.5 Das Keplerproblem

2.5.1 Bewegung in konservativen Zentralkraftfeldern

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass für **konservative** Kräfte die **Energieerhaltung** gilt,

$$E = T + V = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(\vec{r}) = const.\ .$$

Außerdem gilt für **Zentralkraftfelder** die **Drehimpulserhaltung**,

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{const.}\ . \tag{2.169}$$

Man spricht bei E und $\vec{L}$ von den sog. **ersten Integralen der Bewegung**, da sie aus einmaliger Integration der Bewegungsgleichungen folgen. Die Erhaltungsgrößen enthalten nur noch die ersten Zeitableitungen des Ortsvektors, im Gegensatz zur Bewegungsgleichung, die die zweite Zeitableitung enthält. Mit den Erhaltungsgrößen läßt sich ein allgemeines Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen formulieren. Dies wollen wir im folgenden besprechen.

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass konservative Zentralkraftfelder die Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) \tag{2.170}$$

haben. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass

$$\vec{L} = L\,\vec{e}_z\ , \tag{2.171}$$

d.h. aufgrund der Drehimpulserhaltung (2.169) findet die Bewegung zu **allen Zeiten** in der $(x, y)-$Ebene statt. Wir wählen zur Beschreibung dieser Bewegung **ebene Polarkoordinaten**,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\,\vec{e}_r\ , \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\ , \end{aligned}$$

vgl. Glgen. (1.164) und (1.165). Der Drehimpuls berechnet sich dann zu

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\,r\,\vec{e}_r \times (\dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \ , \tag{2.172}$$

wobei wir $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ benutzt haben. Die Gleichungen (2.169) und (2.171) liefern nun

$$L = m\,r^2\,\dot{\varphi} = const. \ . \tag{2.173}$$

Dies liefert die Relation $mr^2\dot{\varphi}^2 = L^2/(m\,r^2)$, die wir gleich benutzen werden. Es gilt nämlich für die Energie (2.170)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) = \frac{1}{2}\,m\,\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) \equiv \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + U(r) = const. \ , \end{aligned} \tag{2.174}$$

wobei wir das **effektive Potential**

$$U(r) = \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) \tag{2.175}$$

für die **eindimensionale** Bewegung in **Radialrichtung** eingeführt haben.

Die Lösung der Bewegungsgleichung ist die Bahnkurve $\vec{r}(t) = r(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t), 0)^T$. Zur Bestimmung der Bahnkurve müssen wir also die Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$ berechnen. Dies geht direkt aus den Erhaltungssätzen (2.173) und (2.174), ohne Zuhilfenahme der Newtonschen Gleichung.

Aus Gl. (2.174) leiten wir die folgende Differentialgleichung erster Ordnung für r ab:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\,\dot{r}^2 &= E - U(r) \\ \Longleftrightarrow \quad \dot{r}^2 &= \frac{2}{m}\,[E - U(r)] \\ \Longleftrightarrow \quad \dot{r} &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,[E - U(r)]}\,. \end{aligned} \tag{2.176}$$

Diese Differentialgleichung löst man mit Hilfe der Methode der **Variablentrennung**. Wir schreiben $\dot{r} \equiv \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ und schreiben den $t-$ und den $r-$abhängigen Anteil auf getrennte Seiten der Gleichung,

$$\mathrm{d}t = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\,[E - U(r)]}}\,. \tag{2.177}$$

Integration von t_0 bis t, bzw. von $r_0 = r(t_0)$ bis $r = r(t)$ ergibt

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \equiv t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r'\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\,[E - U(r')]}}\,. \tag{2.178}$$

Für $t > t_0$ ist die linke Seite dieser Gleichung stets positiv, deswegen ist das positive Vorzeichen zu wählen, wenn r mit der Zeit anwächst, $r > r_0$, bzw. das negative, wenn r mit der Zeit kleiner wird, $r < r_0$. Gleichung (2.178) bestimmt die Funktion $t(r)$ und die

Umkehrung dieser Funktion liefert die gesuchte Funktion $r(t)$. Damit ist die Bewegung in **Radialrichtung** bekannt.

Für die Bewegung in $\varphi-$Richtung wenden wir die Methode der Variablentrennung auf Gl. (2.173) an,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &\equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{m\,r^2} \\ \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}\varphi &= \frac{L}{m\,r^2}\,\mathrm{d}t = \pm\frac{L}{m\,r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\,[E-U(r)]}} = \pm\frac{L}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\,[E-U(r)]}}\,, \end{aligned} \tag{2.179}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (2.177) benutzt haben. Integration von φ_0 bis φ bzw. von $r_0 \equiv r(\varphi_0)$ bis $r = r(\varphi)$ liefert

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{d}\varphi' \equiv \varphi - \varphi_0 = \pm L \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2}\,\frac{1}{\sqrt{2m\,[E-U(r')]}}\,. \tag{2.180}$$

Dies bestimmt die Funktion $\varphi(r)$ und mit der Funktion $r(t)$ erhält man durch Einsetzen die Funktion $\varphi(r(t)) \equiv \varphi(t)$. Damit ist auch die Bewegung in $\varphi-$Richtung bestimmt und das Problem gelöst.

Bemerkungen:

1. Man beachte, dass wir zur Lösung des Problems die Newtonschen Bewegungsgleichungen nicht benötigt haben, sondern ausschließlich die Energie- und Drehimpulserhaltung. Letztere folgen jedoch auch aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen. Um dies zu sehen, betrachten wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen in ebenen Polarkoordinaten, vgl. Gl. (1.166),

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\vec{r}} &= m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + m\,(r\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi \\ &= \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\vec{\nabla}r = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r\,. \\ \Longleftrightarrow \quad m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2\right) &= -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,, \qquad (2.181) \\ r\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} &= 0\,. \qquad (2.182) \end{aligned}$$

   Gleichung (2.181) schreibt sich mit $\dot{\varphi} = L/(m\,r^2)$ und Gl. (2.175) in

$$\begin{aligned} m\,\ddot{r} &= m\,r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = m\,r\,\frac{L^2}{m^2r^4} - \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{L^2}{m\,r^3} - \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r)\right] \equiv -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \end{aligned} \tag{2.183}$$

   um. Die Bewegung in Radialrichtung entspricht also einer **eindimensionalen** Bewegung im **effektiven Potential** $U(r)$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\dot{r}$, so ergibt sich mit Gl. (2.174)

$$\begin{aligned} m\,\dot{r}\,\ddot{r} &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\,\dot{r}^2}{2} = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \equiv -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\,\dot{r}^2}{2} + U\right) &\equiv \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0\,, \end{aligned}$$

d.h. die **Energieerhaltung**.

Wir multiplizieren Gl. (2.182) mit $m\,r$ und erhalten mit Gl. (2.173)

$$0 = m\,r^2\ddot{\varphi} + 2\,m\,r\,\dot{r}\,\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,r^2\dot{\varphi}\right) = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\,,$$

d.h. die **Drehimpulserhaltung**.

2. Offenbar muss stets $E \geq U(r)$ gelten, ansonsten ist die Radialgeschwindigkeit (2.176) nicht reell. Wir definieren
   (i) **Klassisch erlaubte Bereiche:** alle r, für die $E \geq U(r)$.
   (ii) **Klassisch verbotene Bereiche:** alle r, für die $E < U(r)$.
   (iii) **Umkehrpunkte der Bewegung:** alle r, für die $\dot{r} = 0$, also $E = U(r)$.

   Dies wird in Abb. 2.36 an einem Beispiel verdeutlicht.

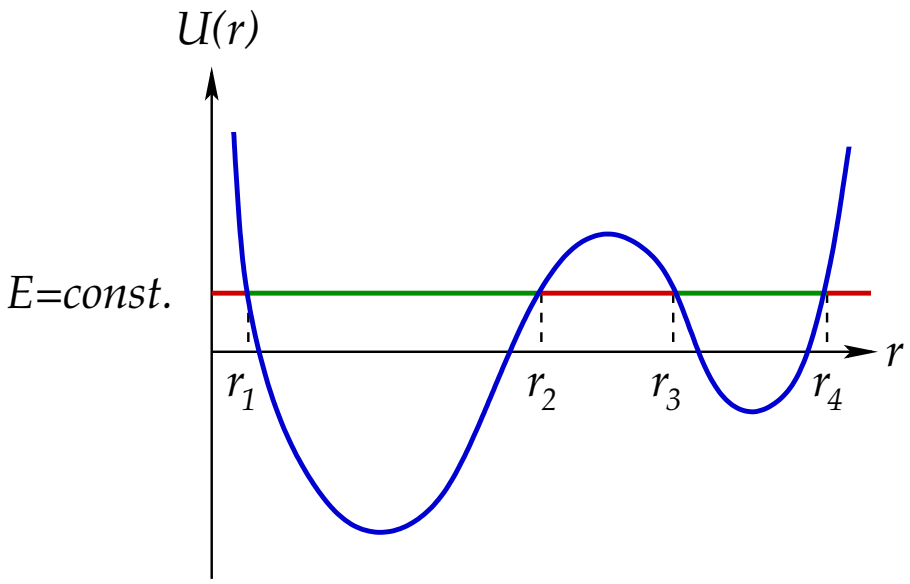


Abbildung 2.36: Ein Potential mit klassisch erlaubten und klassisch verbotenen Bereichen.

Für einen vorgegebenen Wert von $E = const.$ sind die klassisch erlaubten Bereiche die Intervalle $[r_1, r_2]$ und $[r_3, r_4]$. Die klassisch verbotenen Bereiche sind die Intervalle $[0, r_1)$, (r_2, r_3) und (r_4, ∞). Umkehrpunkte der Bewegung sind r_1, r_2, r_3 und r_4. An den Minima und Maxima von $U(r)$, also wo $\mathrm{d}U(r)/\mathrm{d}r = 0$, verschwindet die Kraft in Radialrichtung.

2.5.2 Planetenbewegung

Ein Planet der Masse m bewegt sich im **Gravitationspotential**

$$V(r) = -\gamma\,\frac{m\,M}{r} \tag{2.184}$$

der Sonne, welche die Masse M habe. Das Zentrum der Sonne liegt hierbei im Ursprung des Koordinatensystems und das Zentrum des Planeten bei $\vec{r}$, hat also den Abstand r vom Koordinatenursprung. Die Newtonsche Gravitationskonstante $\gamma \simeq 6,674 \cdot 10^{-11}$ N $(\mathrm{m/kg})^2$ hatten wir schon nach Gl. (2.26) eingeführt. In der Tat liefert dieses Potential die Gravitationskraft aus Gl. (2.26),

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\vec{\nabla} r = -\gamma \frac{m\,M}{r^2}\,\vec{e}_r\ .$$

Da es sich um eine Zentralkraft handelt, ist der Drehimpuls erhalten und die Bewegung des Planeten um die Sonne findet ausschließlich in einer Ebene, der sog. **Ekliptik**, statt. Wir können die Diskussion aus dem vorangegangenen Abschnitt direkt übernehmen.

Das im vorangegangenen Abschnitt eingeführte **effektive Potential** für die Bewegung in Radialrichtung hat die Form

$$U(r) = \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - \gamma\,\frac{m\,M}{r}\ . \tag{2.185}$$

Es besitzt also einen negativen, **attraktiven** Anteil, das Gravitationspotential (2.184), sowie einen positiven, **repulsiven** Anteil, die sog. **Drehimpulsbarriere** $L^2/(2\,m\,r^2)$. Beide Anteile sowie ihre Summe (2.185) sind in Abb. 2.37 dargestellt.

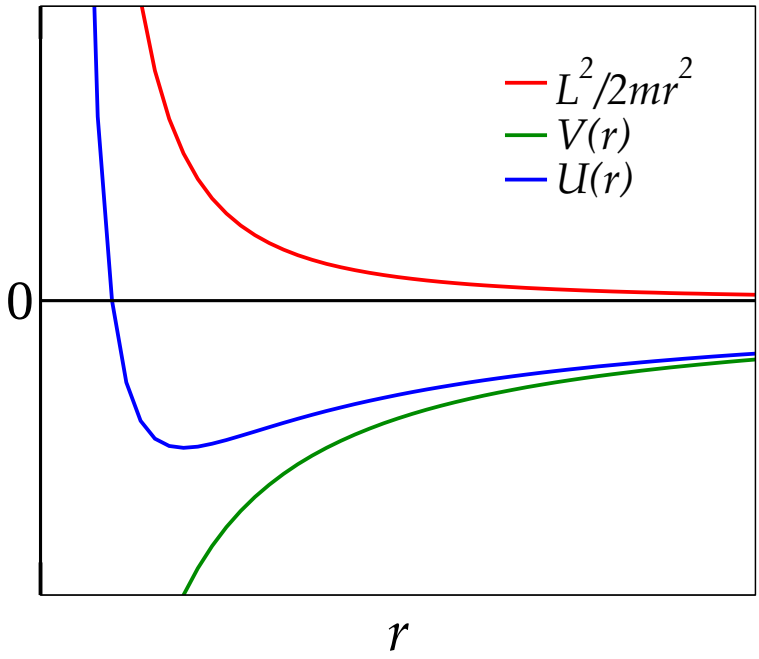


Abbildung 2.37: Das effektive Gravitationspotential für die Bewegung in Radialrichtung, welches sich aus dem eigentlichen Gravitationspotential und der Drehimpulsbarriere zusammensetzt.

Man beachte, dass sich die Form von $U(r)$ in Abhängigkeit des Wertes von L **quantitativ**, aber **nicht qualitativ** ändert. Für gegebenes L gibt es in Abhängigkeit von der Gesamtenergie E mehrere Möglichkeiten für die **Bahnformen** des Planeten um die Sonne. Die entsprechenden Werte bzw. Bereiche für die Gesamtenergie sind in Abb. 2.38 eingezeichnet.

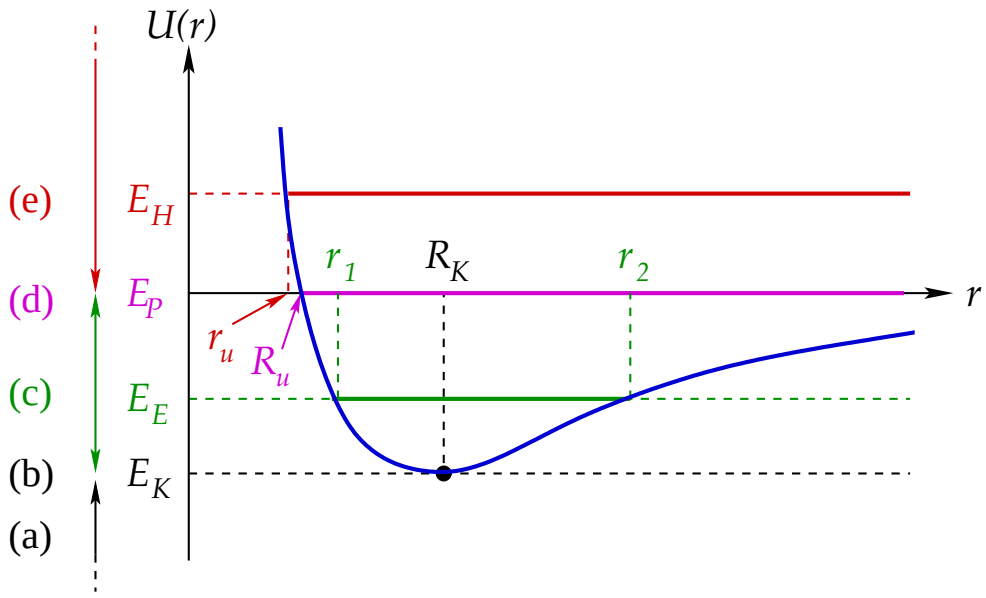


Abbildung 2.38: Das effektive Gravitationspotential und die Werte bzw. Bereiche der Gesamtenergie, die den möglichen Bahnformen entsprechen.

(a) $E < E_K$: Da $E_K = U(R_K)$ der Wert der Energie am Minimum des effektiven Potentials $U(r)$ ist, gilt $E < U(r)$ für alle r, d.h. wir befinden uns im klassisch verbotenen Bereich. Dort gibt es **keine** Bahnform, die klassisch realisiert werden kann.

(b) $E = E_K$: Man befindet sich am Minimum des effektiven Potentials. Der einzige klassisch erlaubte Wert für r ist $r = R_K$, den wir wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R_K} = -\frac{L^2}{m\,R_K^3} + \gamma\,\frac{m\,M}{R_K^2} \\ \Longleftrightarrow\quad \gamma\,m^2\,M\,R_K &= L^2 \quad\Longleftrightarrow\quad R_K = \frac{L^2}{\gamma\,m^2\,M}\,. \end{aligned} \tag{2.186}$$

Offensichtlich gibt es nur einen einzigen Wert für den radialen Abstand r des Planeten von der Sonne, nämlich R_K. Es handelt sich also um eine **geschlossene** Bahnkurve mit **festem** radialem Abstand, also um eine **Kreisbahn** mit Radius R_K.

(c) $E_K < E < E_P = 0$: Es handelt sich ebenfalls um **geschlossene** Bahnkurven, allerdings mit **variablem** radialen Abstand r, der zwischen r_1 und r_2 (den Umkehrpunkten der Radialbewegung) variiert. Wir vermuten (und werden diese Vermutung im

folgenden bestätigen), dass es sich hierbei um **Ellipsenbahnen** handelt, vgl. Abb. 2.39.

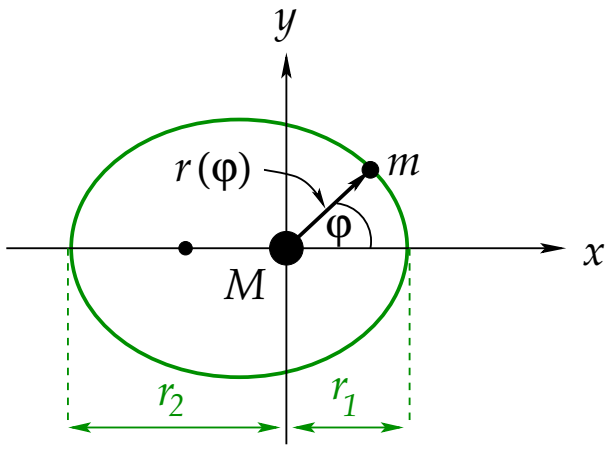


Abbildung 2.39: Ellipsenbahn.

Hierbei befindet sich die Sonne in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse. Die Ellipse läßt sich als Funktion $r(\varphi)$ darstellen, s. unten. Der sonnennächste Punkt ist bei $\varphi = 0$, $r(0) = r_1$, der sog. **Perihel**. Der sonnenfernste Punkt ist bei $\varphi = \pi$, $r(\pi) = r_2$, der sog. **Aphel**.

(d) $E = E_P = 0$: Es gibt nur einen Umkehrpunkt $r = R_u$, aber keinen zweiten. Dies bedeutet, dass es sich um eine **offene** Bahnkurve handelt. Wir werden im folgenden sehen, dass es sich um eine **Parabelbahn** handelt, vgl. Abb. 2.40.

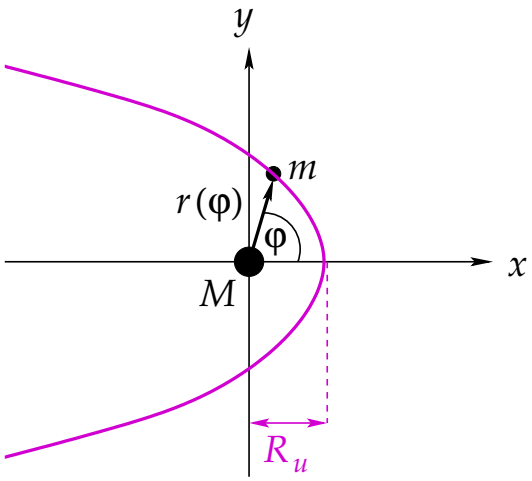
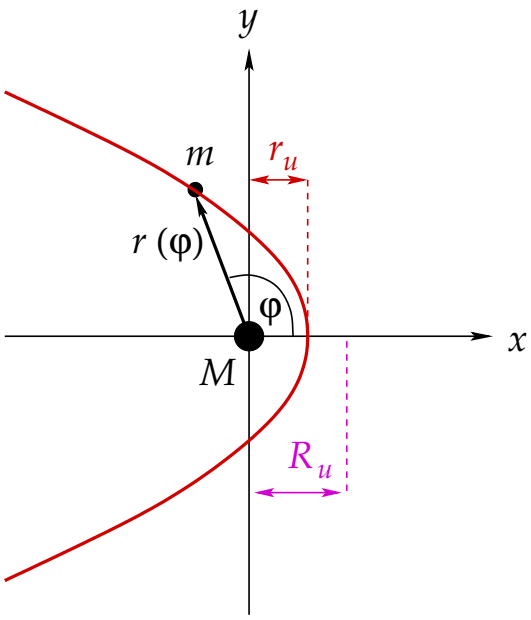


Abbildung 2.40: Parabelbahn.

Der Umkehrpunkt R_u bestimmt sich aus der Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= U(R_u) = \frac{L^2}{2\,m\,R_u^2} - \gamma\,\frac{m\,M}{R_u} \\ \Longleftrightarrow\quad 2\,\gamma\,m^2 M\,R_u &= L^2 \quad\Longleftrightarrow\quad R_u = \frac{L^2}{2\,\gamma\,m^2 M} \equiv \frac{R_K}{2}\;. \end{aligned} \tag{2.187}$$

(e) $E > E_P = 0$: Auch hier gibt es nur einen Umkehrpunkt $r_u < R_u$, d.h. es handelt sich wiederum um **offene** Bahnkurven. Wir werden sehen, dass es sich um **Hyperbelbahnen** handelt, s. Abb. 2.41.



27.6.2013

Abbildung 2.41: Hyperbelbahn.

Wir zeigen nun, dass die Bewegungsgleichungen tatsächlich diese Bahnkurven liefern. Dazu gehen wir von Gl. (2.180) aus, setzen das effektive Potential (2.185) ein und substituieren die Variable $s = 1/r'$, $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}r'/r'^2$,

$$\varphi - \varphi_0 = \pm L \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2}\,\frac{1}{\sqrt{2m\left[E - \frac{L^2}{2mr'^2} + \gamma\,\frac{m\,M}{r'}\right]}} = \mp L \int_{1/r_0}^{1/r} \mathrm{d}s\,\frac{1}{\sqrt{2mE - L^2 s^2 + 2\gamma m^2 M s}}\;. \tag{2.188}$$

Dieses Integral ist ein Standardintegral vom Typ

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\;,$$

mit $a = -L^2 < 0$, $b = 2\gamma m^2 M$, $c = 2mE$. Die Stammfunktion hängt ab vom Vorzeichen von a und dem der Größe

$$\Delta \equiv 4\,a\,c - b^2 = -8\,L^2 m\,E - (2\,\gamma\,m^2 M)^2 = -4\left[2\,L^2 m\,E + (\gamma\,m^2 M)^2\right]\;.$$

Dies ist nicht automatisch negativ, denn E kann ebenfalls negativ werden. Eine obere Grenze für Δ erhält man aber offensichtlich aus der unteren Grenze für E. Diese ergibt sich aus folgender Überlegung. Da die Kreisbahn als Bahnform für $E = E_K = U(R_K)$ gesichert erscheint und daher keiner weiteren Klärung bedarf, betrachten wir $E > E_K = U(R_K)$. Für klassisch erlaubte Bahnen muss $E \geq U(r)$ gelten,

$$E \geq U(r) > U(R_K) = \frac{L^2}{2\,m\,R_K^2} - \gamma\,\frac{m\,M}{R_K} = \frac{L^2}{2\,m}\,\frac{\gamma^2 m^4 M^2}{L^4} - \gamma\,m\,M\,\frac{\gamma\,m^2 M}{L^2} = -\frac{\gamma^2 m^3 M^2}{2\,L^2}\;,$$

wobei wir Gl. (2.186) für R_K benutzt haben. Für Δ erhalten wir daraus die obere Grenze

$$\Delta < -4\left[-2\,L^2 m\,\frac{\gamma^2 m^3 M^2}{2\,L^2} + (\gamma\,m^2 M)^2\right] = 0\;.$$

Für $\Delta < 0$ und $a < 0$ erhalten wir nach Konsultation einer gängigen Integraltafel (s. z.B. Ref. [7], Gl. 1.1.3.3.241)

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\,\arcsin\frac{2\,a\,x+b}{\sqrt{-\Delta}}\;. \tag{2.189}$$

Nun müssen wir noch die Integrationsgrenzen in Gl. (2.188) festlegen. Wir wählen $\varphi_0 = 0$, also $r_0 = r(0)$. Dies ist nach den vorangegangenen Überlegungen (vgl. Abbildungen 2.39, 2.40 und 2.41) stets der Punkt des **kleinsten Abstands** zwischen den Massen m und M, also der **Umkehrpunkt der Bewegung** bei kleinen r (r_u im Fall der Hyperbel, R_u im Fall der Parabel und r_1 im Fall der Ellipse). Er läßt sich aus folgender Gleichung bestimmen:

$$\begin{aligned} & E = U(r_0) = \frac{L^2}{2\,m\,r_0^2} - \gamma\,\frac{m\,M}{r_0} \\ \Longleftrightarrow \qquad & 2\,m\,E\,r_0^2 + 2\,\gamma\,m^2 M\,r_0 - L^2 = 0\;. \end{aligned}$$

Für $E = 0$ folgt daraus

$$r_0 = \frac{L^2}{2\,\gamma\,m^2 M} \equiv R_u\;,$$

wie es sein muss. Die Stammfunktion (2.189) an der unteren Integralgrenze $1/r_0$ ist dann

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-2\,L^2/r_0 + 2\,\gamma\,m^2 M}{\sqrt{-\Delta}} &= -\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-4\,\gamma\,m^2 M + 2\,\gamma\,m^2 M}{2\,\gamma\,m^2 M} \\ &= -\frac{1}{L}\,\arcsin(-1) \equiv \frac{\pi}{2\,L}\;. \end{aligned}$$

Für $E \neq 0$ erhalten wir durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$r_0^2 + \frac{\gamma\,m\,M}{E}\,r_0 - \frac{L^2}{2\,m\,E} = 0$$

das Resultat

$$\begin{aligned} r_0 &= -\frac{\gamma\,m\,M}{2\,E} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma\,m\,M}{2\,E}\right)^2 + \frac{L^2}{2\,m\,E}} \\ &= \frac{1}{4\,m\,E}\left(-2\,\gamma\,m^2 M \pm \sqrt{(2\,\gamma\,m^2 M)^2 + 8\,L^2 m\,E}\right) \\ &\equiv \frac{1}{4\,m\,E}\left(-2\,\gamma\,m^2 M \pm \sqrt{-\Delta}\right)\;. \end{aligned}$$

Für $E > 0$ ist das obere Vorzeichen zu wählen, um $r_0 > 0$ zu erhalten. Für $E < 0$ ist für r_0 als sonnennächster Punkt der Bahn ebenfalls das obere Vorzeichen zu wählen (das andere entspräche dem sonnenfernsten Punkt). Die Stammfunktion (2.189) an der unteren Integralgrenze ist

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-2\,L^2/r_0+2\,\gamma\,m^2M}{\sqrt{-\Delta}} &= -\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-2\,L^2+2\,\gamma\,m^2M\,r_0}{r_0\,\sqrt{-\Delta}}\\
&= -\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-8\,L^2m\,E+2\,\gamma\,m^2M\,(-2\,\gamma\,m^2M+\sqrt{-\Delta})}{4\,m\,E\,r_0\,\sqrt{-\Delta}}\\
&= -\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-(-\Delta)+2\,\gamma\,m^2M\,\sqrt{-\Delta}}{(-2\,\gamma\,m^2M+\sqrt{-\Delta})\sqrt{-\Delta}}\\
&= -\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-\sqrt{-\Delta}+2\,\gamma\,m^2M}{-2\,\gamma\,m^2M+\sqrt{-\Delta}} = -\frac{1}{L}\,\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2\,L}\;,
\end{aligned}$$

wie auch im Fall $E = 0$. Die Berechnung des Integrals in Gl. (2.188) führt also auf

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \mp L\left(-\frac{1}{L}\,\arcsin\frac{-2\,L^2/r+2\,\gamma\,m^2M}{2\sqrt{2\,L^2m\,E+(\gamma\,m^2M)^2}}-\frac{\pi}{2\,L}\right)\\
&= \pm\arcsin\frac{-L^2/r+\gamma\,m^2M}{\sqrt{2\,L^2m\,E+(\gamma\,m^2M)^2}}\pm\frac{\pi}{2}\\
&\equiv \pm\arccos\frac{L^2/r-\gamma\,m^2M}{\sqrt{2\,L^2m\,E+(\gamma\,m^2M)^2}}\;, \qquad (2.190)
\end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt $\arcsin(-x)+\pi/2 = \arccos x$ ausgenutzt haben. Nun müssen wir noch nach $r(\varphi)$ auflösen. Da $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{L^2}{r} &= \gamma\,m^2M+\cos\varphi\,\sqrt{2\,L^2m\,E+(\gamma\,m^2M)^2}\\
\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{r} &= \frac{\gamma\,m^2M}{L^2}+\cos\varphi\,\sqrt{\frac{2\,m\,E}{L^2}+\left(\frac{\gamma\,m^2M}{L^2}\right)^2}\\
\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{r} &= \frac{1}{k}\,(1+\epsilon\,\cos\varphi) \qquad (2.191)\\
\Longleftrightarrow\quad r(\varphi) &= \frac{k}{1+\epsilon\,\cos\varphi}\;, \qquad (2.192)
\end{aligned}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$k \equiv \frac{L^2}{\gamma\,m^2M}\;,\quad \epsilon \equiv \sqrt{1+\frac{2\,L^2m\,E}{(\gamma\,m^2M)^2}} \qquad (2.193)$$

eingeführt haben. Offensichtlich ist der sog. **Halbparameter** $k \equiv R_K$ gleich dem Radius der Kreisbahn. Man bezeichnet ϵ als **numerische Exzentrizität**. Gleichung (2.192) beschreibt **Kegelschnitte** in Polarkoordinaten, vgl. Abb. 2.42. Hier betrachtet man die (eindimensinale) Schnittmenge einer (zweidimensionalen) Ebene mit einer (zweidimensionalen) Kegelfläche. Diese Schnittmenge ergibt eine Kurve, die je nach Neigung der Ebene, die den Kegel schneidet, identisch mit einem Kreis, einer Ellipse, einer Parabel, bzw. einer Hyperbel ist.

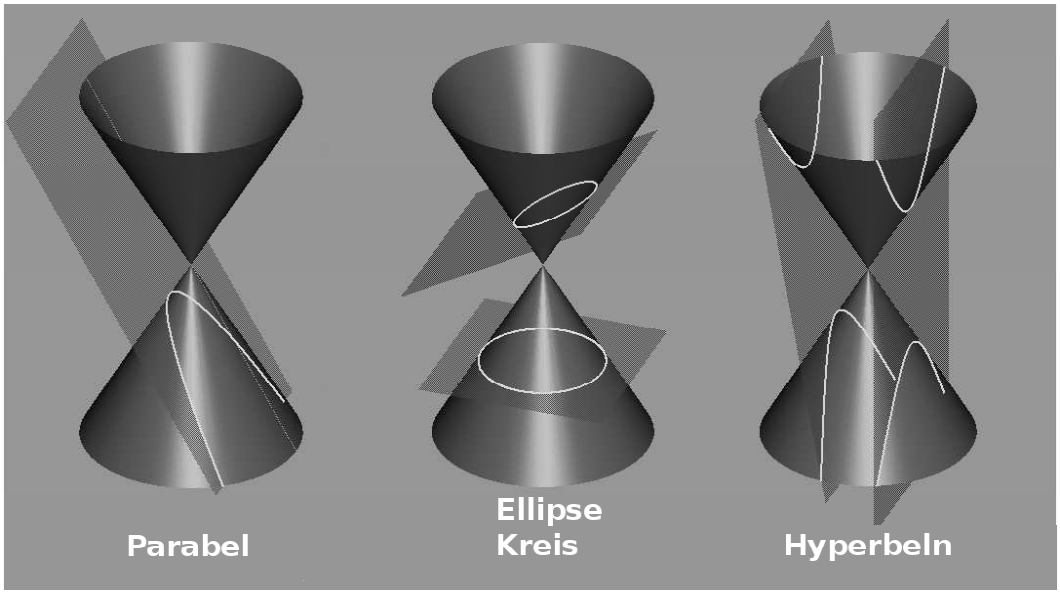


Abbildung 2.42: Kegelschnitte.

Wir unterscheiden vier Fälle:

1. $\epsilon = 0$: In diesem Fall ist $r(\varphi) = k = R_K$. Dies entspricht einer **Kreisbahn** mit Radius R_K. Der Abstand der Masse m (Planet) von der Zentralmasse M (Sonne) bleibt konstant, also gibt es keine $\varphi-$Abhängigkeit.

2. $0 < \epsilon < 1$: In diesem Fall handelt es sich um eine **Ellipse**, vgl. Abb. 2.43.

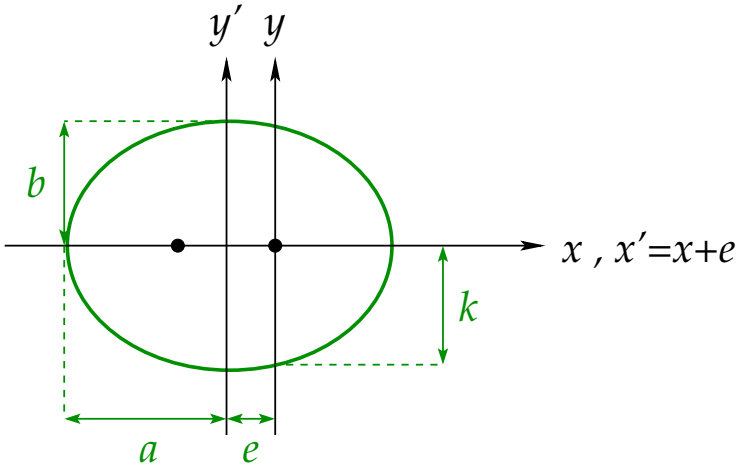


Abbildung 2.43: Ellipse.

Die **große Halbachse** der Ellipse ist a, die **kleine Halbachse** ist b, und die sog. **lineare Exzentrizität** ist e. Es gilt offensichtlich folgender Zusammenhang zwischen

a, e und k, ϵ:

$$r(0) = \frac{k}{1+\epsilon} = a - e \;, \quad r(\pi) = \frac{k}{1-\epsilon} = a + e \;.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(\frac{k}{1+\epsilon} + \frac{k}{1-\epsilon}\right) = \frac{k}{1-\epsilon^2} = -\frac{\gamma\, m\, M}{2\, E} \;, \\ e &= \frac{1}{2}\left(\frac{k}{1-\epsilon} - \frac{k}{1+\epsilon}\right) = \frac{k\,\epsilon}{1-\epsilon^2} = a\,\epsilon \\ &= -\frac{\gamma\, m\, M}{2\, E}\sqrt{1 + \frac{2\, L^2 m\, E}{(\gamma\, m^2 M)^2}} = -\frac{1}{2\, m\, E}\sqrt{2\, L^2 m\, E + (\gamma\, m^2 M)^2} \;. \end{aligned}$$

Die kleine Halbachse läßt sich aus der **Ellipsennormalform** berechnen,

$$1 = \frac{{x'}^2}{a^2} + \frac{{y'}^2}{b^2} \;.$$

Für den Punkt $x' = e$, $y' = k$ gilt dann

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{e^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = \epsilon^2 + \frac{k^2}{b^2} \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{k^2}{b^2} &= 1 - \epsilon^2 = \frac{k}{a} \\ \Longleftrightarrow \quad b^2 &= a\, k = -\frac{\gamma\, m\, M}{2\, E}\,\frac{L^2}{\gamma\, m^2 M} = -\frac{L^2}{2\, m\, E} \\ \Longrightarrow \quad b &= \frac{L}{\sqrt{-2\, m\, E}} \;. \end{aligned} \tag{2.194}$$

3. $\epsilon = 1$: Dies entspricht der **Parabel**. Wir sehen dies am schnellsten, indem wir die Darstellung (2.192) in ebenen Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten zurücktransformieren:

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi = \frac{k\,\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \;, \\ y &= r\,\sin\varphi = \frac{k\,\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{1+\cos\varphi} = k\,\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} \;. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$x = \frac{k}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} - \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right) = \frac{k}{2} - \frac{k}{2}\,\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{k}{2} - \frac{y^2}{2\,k} \equiv R_u - \frac{y^2}{2\,k} \;.$$

In der $(x, y)-$Ebene ist dies eine auf der Seite liegende, nach links geöffnete Parabel, vgl. Abb. 2.44.

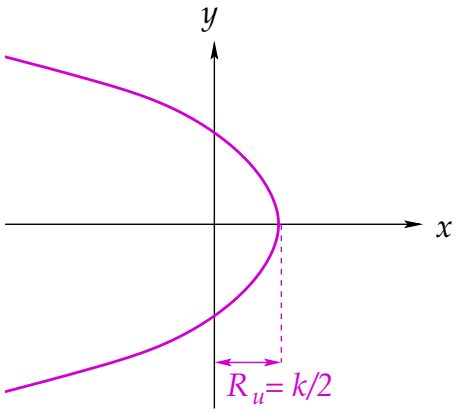


Abbildung 2.44: Parabel.

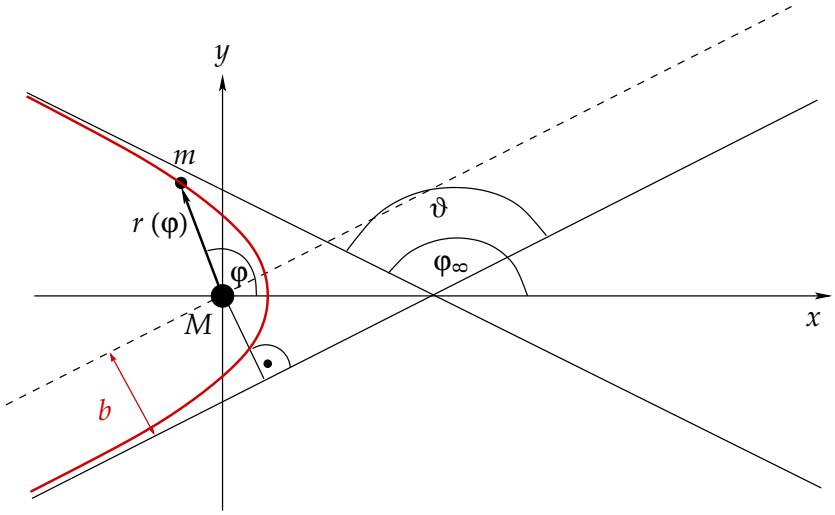


Abbildung 2.45: Hyperbel.

4. $\epsilon > 1$: Dieser Fall entspricht der **Hyperbel**. Die Hyperbel ist die typische Trajektorie für eine **Streuung** einer kleinen Masse m an einer großen Masse M, bzw. eines **Stoßes** einer kleinen Masse mit einer großen. Die kleine Masse kommt aus dem Unendlichen und wird durch das Potential der großen Masse von ihrer ursprünglichen Trajektorie abgelenkt. Wir betrachten dazu Abb. 2.45.

   Hier bezeichnet der Winkel ϑ den sog. **Streuwinkel** und b den sog. **Stoßparameter**. Nach Gl. (2.191) gilt für $r \to \infty$:

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon} \, .$$

   Außerdem gilt aufgrund von Abb. 2.45

$$\pi - \vartheta = 2\,(\pi - \varphi_\infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\vartheta}{2} = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2} \, .$$

Daraus folgt

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\left(\varphi_\infty - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi_\infty = \frac{1}{\epsilon}\,, \tag{2.195}$$

wobei wir $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$ und $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ benutzt haben. Sei $\dot{\vec{r}}_\infty$ die Geschwindigkeit der Masse m bei $r \to \infty$, wo das Potential verschwindet. Dann ist die Gesamtenergie durch die kinetische Energie gegeben,

$$E = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}_\infty^{\,2} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}_\infty^{\,2} \Longrightarrow \quad \dot{r}_\infty = \sqrt{\frac{2\,E}{m}}\,, \tag{2.196}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für gegebenes $L = const. < \infty$ der Drehimpulsterm $L^2/(2mr^2)$ in der kinetischen Energie für $r \to \infty$ verschwindet. Die Drehimpulserhaltung liefert

$$L = m\,|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}| = m\,|\vec{r}_\infty \times \dot{\vec{r}}_\infty| = m\,b\,\dot{r}_\infty = b\sqrt{2\,E\,m}\,. \tag{2.197}$$

wobei wir Gl. (2.196) benutzt haben und die Tatsache, dass die Projektion von $\vec{r}_\infty$ senkrecht zur Richtung von $\dot{\vec{r}}_\infty$ gerade der Stoßparameter ist. Gleichung (2.197) besagt, dass der Stoßparameter eindeutig durch L und E festgelegt ist,

$$b = \frac{L}{\sqrt{2\,E\,m}}\,. \tag{2.198}$$

Außerdem gilt mit den Glgen. (2.193), (2.195) und (2.198)

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 - 1 &= \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} - 1 = \frac{1-\sin^2(\vartheta/2)}{\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\cos^2(\vartheta/2)}{\sin^2(\vartheta/2)} = \cot^2\frac{\vartheta}{2} \\
&= \frac{2\,L^2 m\,E}{(\gamma\,m^2 M)^2} = \frac{4\,b^2 m^2 E^2}{(\gamma\,m^2 M)^2} = \frac{4\,b^2 E^2}{(\gamma\,m\,M)^2} \\
\Longleftrightarrow\quad \tan\frac{\vartheta}{2} &= \frac{\gamma\,m\,M}{2\,b\,E}\,.
\end{aligned} \tag{2.199}$$

Dies bedeutet, dass der Streuwinkel durch b und E festgelegt ist.

2.5.3 Die kosmischen Geschwindigkeiten

Wir betrachten die Bewegung eines Satelliten der Masse $m_{\rm Sat}$ um die Erde mit Masse M_E. Der Satellit bewege sich auf einer elliptischen Bahn mit Gesamtenergie E und mit Drehimpuls L_0. Das dazugehörige effektive Potential ist in Abb. 2.46(a) dargestellt.

Offensichtlich gibt es bei der Satellitenbahn Werte für den radialen Abstand r, die innerhalb des Erdradius R_E liegen. Dies bedeutet nichts anderes, als dass der Satellit irgendwann auf der Erdoberfläche aufschlägt. Dies kann verhindert werden, indem man den Drehimpulsanteil der kinetischen Energie erhöht. Dies ist in Abb. 2.46(b) für einen ausreichend großen Drehimpuls L_3 dargestellt. Die Satellitenbahn hat zwar dieselbe Gesamtenergie E wie vorher, liegt aber nun vollständig außerhalb des Erdradius, d.h. oberhalb der Erdoberfläche, so dass ein Zerschellen des Satelliten ausgeschlossen ist.

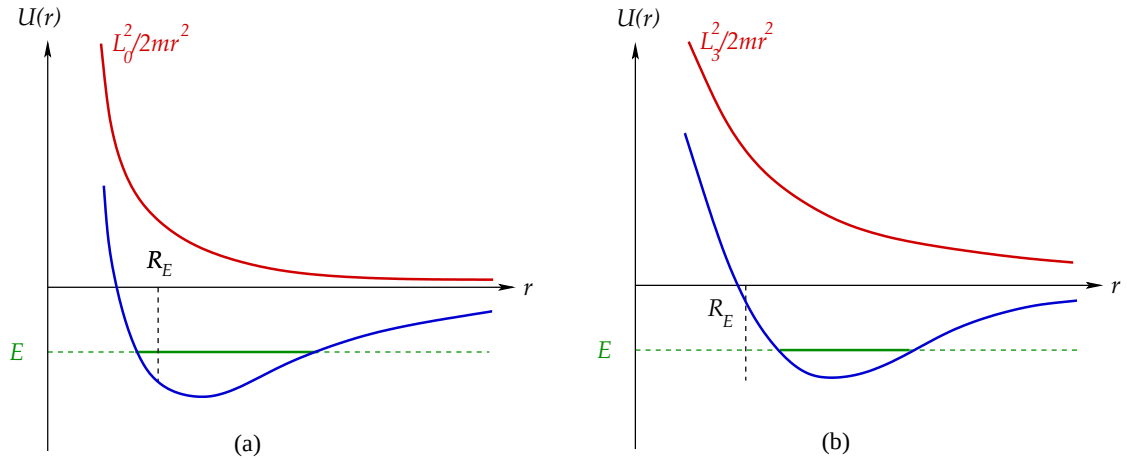


Abbildung 2.46: Das effektive Potential für (a) zu geringen Drehimpuls L_0, (b) für ausreichend großen Drehimpuls L_3.

Der minimal erforderliche Drehimpuls L_1 ist gerade derjenige, bei dem der erdnächste Punkt, das sog. **Perigäum** (in Analogie zum Perihel bei der Bewegung der Erde um die Sonne) $r_1 = r(\varphi = 0)$ mit dem Erdradius R_E übereinstimmt. Dann streift die Satellitenbahn gerade an ihrem erdnächsten Punkt die Erdoberfläche. Da am Perigäum $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ senkrecht aufeinanderstehen, gilt

$$L_1 = m_{\text{Sat}}\, R_E\, v_1 \ ,$$

wobei v_1 die zum Wert von L_1 passende Geschwindigkeit ist. Andererseits gilt mit Gl. (2.193)

$$\begin{aligned} R_E &= r_1 = \frac{k}{1+\epsilon} = \frac{L_1^2}{\gamma\, m_{\text{Sat}}^2 M_E}\,\frac{1}{1+\epsilon} = \frac{m_{\text{Sat}}^2 R_E^2 v_1^2}{\gamma\, m_{\text{Sat}}^2 M_E}\,\frac{1}{1+\epsilon} = \frac{R_E^2 v_1^2}{\gamma\, M_E}\,\frac{1}{1+\epsilon} \\ \Longleftrightarrow\quad v_1^2 &= \frac{\gamma\, M_E}{R_E}\,(1+\epsilon) \geq \frac{\gamma\, M_E}{R_E}\ . \end{aligned} \tag{2.200}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite bildet die untere Grenze für v_1 und entspricht dem Fall $\epsilon = 0$, also der Kreisbahn. Nun ist der Betrag der Gravitationskraft an der Erdoberfläche gegeben durch

$$F_G(R_E) = \frac{\gamma\, m_{\text{Sat}}\, M_E}{R_E^2} \equiv m_{\text{Sat}}\, g \ ,$$

was einen Ausdruck für die **Erdbeschleunigung** g liefert,

$$g = \frac{\gamma\, M_E}{R_E^2}\ . \tag{2.201}$$

Eingesetzt in Gl. (2.200) ergibt sich die sog. **erste kosmische Geschwindigkeit**

$$v_1 \geq \sqrt{g\, R_E} \simeq 7,91\,\frac{\text{km}}{\text{s}}\ . \tag{2.202}$$

Dies ist die **Mindestgeschwindigkeit**, die ein Objekt in einer Erdumlaufbahn haben muss.

Um den Bereich der Erdanziehung zu verlassen, ist eine größere Geschwindigkeit notwendig. Die nicht geschlossene Bahn geringster Energie ist die Parabel, mit $E = 0$. Wir nehmen an, dass der Umkehrpunkt der Parabelbahn des Satelliten gerade auf der Erdoberfläche liegt, $R_u \equiv R_E$. Dort stehen Geschwindigkeit und Ortsvektor senkrecht aufeinander, so dass

$$L_2 = m_{\rm Sat}\, R_u\, v_2 \equiv m_{\rm Sat}\, R_E\, v_2 \ .$$

Andererseits ist nach Gl. (2.187) mit Gl. (2.201)

$$\begin{aligned} R_u \ &\equiv \ R_E = \frac{L_2^2}{2\,\gamma\, m_{\rm Sat}^2 M_E} = \frac{m_{\rm Sat}^2 R_E^2 v_2^2}{2\,\gamma\, m_{\rm Sat}^2 M_E} = \frac{R_E^2 v_2^2}{2\,\gamma\, M_E} = \frac{v_2^2}{2\,g} \\ \Longleftrightarrow \quad v_2 \ &= \ \sqrt{2\,g\,R_E} \equiv \sqrt{2}\, v_1 \simeq 11,2\,\frac{\rm km}{\rm s} \ . \end{aligned} \tag{2.203}$$

Dies ist die sog. **zweite kosmische Geschwindigkeit**, die ein Objekt braucht, um den Bereich der Erdanziehung zu verlassen.

2.5.4 Die Keplerschen Gesetze

Zum Abschluss dieses Kapitels zitieren wir noch die **Keplerschen Gesetze**:

1. **Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.**

   Dies folgt aus der Energie- und Drehimpulserhaltung. Ellipsen (und, als Spezialfall, der Kreis) sind die einzig möglichen geschlossenen Bahnformen im Gravitationspotential.

2. **Der Fahrstrahl von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.**

   Dies ist der schon oben bewiesene **Flächensatz**, vgl. Gl. (2.166). Er folgt aus der Drehimpulserhaltung.

3. **Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Ellipsenhalbachsen.**

   Beweis: Die Fläche einer Ellipse ist

   $$S = \pi\, a\, b \equiv T\, \dot{S} = T\, \frac{L}{2\,m} \ ,$$

   wobei T die Umlaufzeit eines Planeten ist und wo wir den Flächensatz (2.166) benutzt haben, der besagt, dass die Flächengeschwindigkeit $\dot{S}$ den konstanten Wert $L/(2m)$ annimmt. Nun ist mit den Glgen. (2.193) und (2.194)

   $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2}{a}\frac{4\,m^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2}\, k = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2}\, \frac{L^2}{\gamma\, m^2 M} = \frac{4\pi^2}{\gamma\, M} = const. \ , \quad \text{q.e.d.}$$

2.6 Zwei-Teilchen-Systeme

2.7.2013

Das Zwei-Teilchen-System ist ein Spezialfall eines Mehrteilchensystems, in dem eine vollständig analytische Lösung möglich ist. Die Idee ist, die **Schwerpunkts-** und **Relativbewegung** der beiden Teilchen zu trennen. Wir werden sehen, dass – zumindest für abgeschlossene Systeme – die Relativbewegung der beiden Teilchen dann effektiv der Bewegung eines **einzelnen** Teilchens entspricht.

2.6.1 Relativbewegung

Die **Schwerpunktskoordinate** der beiden Teilchen ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{m_1}{M}\,\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\,\vec{r}_2\;, \tag{2.204}$$

wobei wir die **Gesamtmasse** $M = m_1 + m_2$ des Systems eingeführt haben.

Die **Relativkoordinate** der beiden Teilchen ist

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\;. \tag{2.205}$$

Die Umrechnung der Koordinaten $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinate lautet

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\,\vec{r}\,, \tag{2.206}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\,\vec{r}\,, \tag{2.207}$$

wie man sich leicht durch Einsetzen der Glgen. (2.204) und (2.205) überzeugt.

Wir transformieren nun die Bewegungsgleichungen für $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,

$$m_1\,\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_{12}\;, \tag{2.208}$$

$$m_2\,\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_{21}\;, \tag{2.209}$$

in solche für $\vec{R}$, $\vec{r}$. Unter Zuhilfenahme des dritten Newtonschen Axioms (2.20) lautet die Bewegungsgleichung für $\vec{R}$

$$M\,\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(\mathrm{ex})}\;,$$

wobei $\vec{F}^{(\mathrm{ex})} = \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}$ die Summe der auf die beiden Teilchen wirkenden externen Kräfte darstellt. Die Bewegungsgleichung für $\vec{r}$ erhalten wir aus folgender Rechnung, die auf den Glgen. (2.208), (2.209) basiert,

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_1^{(\mathrm{ex})}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \\ &= \frac{\vec{F}_1^{(\mathrm{ex})}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{\mu}\;,\end{aligned}$$

wobei wir $-\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$ benutzt haben und die sog. **reduzierte Masse**

$$\mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\,m_2}{M} \iff \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\;, \tag{2.210}$$

definiert haben.

Für **abgeschlossene Systeme** gilt $\vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} = 0$, und daher

$$M\,\ddot{\vec{R}} = 0\,, \tag{2.211}$$
$$\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}\,. \tag{2.212}$$

Die erste Gleichung besagt, dass der **Gesamtimpuls** erhalten ist, $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{2} m_i \dot{\vec{r}}_i = M\,\dot{\vec{R}} = \overrightarrow{const.}$. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom unterliegt die Schwerpunktsbewegung also keinen äußeren Kräften, ist daher **geradlinig gleichförmig**. Man kann daher immer in ein Inertialsystem transformieren, in dem der Schwerpunkt ruht, $\dot{\vec{R}} = 0$, ohne die Relativbewegung, die durch die Zweikörperkraft $\vec{F}_{12}$ bestimmt wird, zu ändern. O.B.d.A. kann man den Schwerpunkt auch in den Ursprung dieses Systems legen, $\vec{R} = 0$. Man spricht vom sog. **Schwerpunktsystem**. In diesem System braucht man lediglich die Relativbewegung zu bestimmen.

Wir betrachten diese nun genauer. Es ist $\vec{F}_{12} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{r}$. Gleichung (2.212) besagt also, dass die **Relativbewegung** der Bewegung eines Massenpunktes mit der **reduzierten Masse** μ in einem **Zentralkraftfeld** entspricht. Damit haben wir für **abgeschlossene Systeme** die **Zweiteilchenbewegung** auf die **Einteilchenbewegung in einem Zentralkraftfeld** zurückgeführt.

Wir zerlegen auch die **kinetische Energie** in einen Schwerpunkts- und einen Relativanteil, wobei wir die Glgen. (2.206), (2.207) und (2.210) benutzen:

$$T_1 = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\vec{r}}_1^{\,2} = \frac{1}{2}\,m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\,\dot{\vec{r}}\right)^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{m_2}{2\,M}\,\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} + \mu\,\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}\,,$$
$$T_2 = \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{1}{2}\,m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\,\dot{\vec{r}}\right)^2 = \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{m_1}{2\,M}\,\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - \mu\,\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}\,.$$

Daraus folgt

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\,M\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} \equiv T_S + T_r\,, \tag{2.213}$$

wobei $T_S = M\,\dot{\vec{R}}^{\,2}/2$ der Schwerpunkts- und $T_r = \mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2}/2$ der Relativanteil der kinetischen Energie sind.

Für **konservative Kräfte** gilt

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1}^{2} V_i^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}(r) \equiv V_1^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_1) + V_2^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_2) + V_{12}(r)\,,$$

wobei V_{ij} nur vom Betrag r der Relativkoordinate $\vec{r}$ abhängt, da die Zweikörperkraft konservativ ist. Wir ordnen die beiden externen Potentiale der Schwerpunktsbewegung zu und das Zweikörperpotential der Relativbewegung,

$$V_S = V_1^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_1) + V_2^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_2)\,, \quad V_r = V_{12}(r)\,.$$

Dann schreibt sich die **Gesamtenergie** als

$$E = T + V = E_S + E_r \;\text{ mit }\; E_S = T_S + V_S \;\text{ und }\; E_r = T_r + V_r\,. \tag{2.214}$$

Für **abgeschlossene Systeme** gilt $V_i^{(\mathrm{ex})} = 0$, so dass $E_S = T_S$, d.h. die Schwerpunktsbewegung hat lediglich kinetische, aber keine potentielle Energie. Im Schwerpunktsystem gilt $T_S = 0$.

Der **Drehimpuls** berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^{2} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{2} m_i \left(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum_{i=1}^{2} m_i \left[\left(\vec{R} + \Delta\vec{r}_i\right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \Delta\dot{\vec{r}}_i\right)\right] \\ &= M\left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\right) + \sum_{i=1}^{2} m_i \left(\Delta\vec{r}_i \times \Delta\dot{\vec{r}}_i\right) + \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^{2} m_i \Delta\dot{\vec{r}}_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{2} m_i \Delta\vec{r}_i\right) \times \dot{\vec{R}} \,.\end{aligned}$$

Der dritte Term verschwindet aufgrund der Definition des Gesamtimpulses,

$$\sum_{i=1}^{2} m_i \Delta\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{2} m_i \dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^{2} m_i \dot{\vec{R}} = \vec{P} - M\dot{\vec{R}} \equiv 0 \,,$$

und der vierte aufgrund der Definition des Schwerpunkts,

$$\sum_{i=1}^{2} m_i \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{2} m_i \vec{R} = M\vec{R} - M\vec{R} \equiv 0 \,.$$

Der Drehimpuls läßt sich daher in Schwerpunkts- und Relativanteil zerlegen,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_S + \vec{L}_r \,, \\ \vec{L}_S &= M\left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\right) = \vec{R} \times \vec{P} \,, \\ \vec{L}_r &= \sum_{i=1}^{2} m_i \left(\Delta\vec{r}_i \times \Delta\dot{\vec{r}}_i\right) = m_1 \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_2 \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \left(\frac{m_2}{M}\,\mu + \frac{m_1}{M}\,\mu\right) \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \,,\end{aligned}$$

wobei wir gemäß den Glgen. (2.206) und (2.207) ausgenutzt haben, dass $\Delta\vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = m_2\vec{r}/M$ und $\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = -m_1\vec{r}/M$ ist. In einem Inertialsystem, in dem $\vec{L}_S$ verschwindet (z.B. aufgrund von $\dot{\vec{R}} = 0$), also z.B. auch im Schwerpunktsystem, ist der gesamte Drehimpuls allein durch den **Relativanteil** $\vec{L}_r$ gegeben. Dieser entspricht dem Drehimpuls eines Teilchens mit der **reduzierten Masse** μ bei der Bewegung um den Ursprung des Systems der Relativkoordinate.

Beispiel: Planetenbewegung als Zweikörperproblem

Wir betrachten ein abgeschlossenes System zweier Massen m_1, m_2, die gravitativ miteinander wechselwirken,

$$V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \equiv -\gamma \frac{\mu M}{r} = V_{12}(r) \,, \tag{2.215}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_r V_{12}(r) = -\gamma \frac{\mu M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \,. \tag{2.216}$$

Hierbei haben wir die Definition (2.210) der reduzierten Masse ausgenutzt. In einem abgeschlossenen System können wir uns, wie gerade gezeigt, auf die Betrachtung der Relativbewegung beschränken, da der Schwerpunktsimpuls erhalten ist, mithin wir also das Schwerpunktsystem als Inertialsystem wählen können, ohne die Relativbewegung zu ändern. In diesem System ist $E_S = \vec{L}_S = 0$, also $E = E_r$ und $\vec{L} = \vec{L}_r$.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Relativbewegung (2.212) lautet mit der Kraft (2.216)

$$\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} = -\gamma\,\frac{\mu\,M}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{2.217}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für das Keplerproblem, bei dem sich ein Massenpunkt der Masse μ im Schwerefeld der im Ursprung befindlichen Masse M bewegt. Die Lösung können wir sofort hinschreiben, vgl. Gl. (2.192)

$$r(\varphi) = \frac{k_r}{1+\epsilon_r\,\cos\varphi}\,, \tag{2.218}$$

wobei

$$k_r = \frac{L_r^2}{\gamma\,\mu^2 M}\,,\quad \epsilon_r = \sqrt{1+\frac{2\,L_r^2\mu\,E_r}{(\gamma\,\mu^2 M)^2}}\,.$$

Hier treten der Betrag des relativen Drehimpulses L_r und die relative Gesamtenergie E_r auf,

$$L_r = \mu|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|\,,\quad E_r = \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{r}^2 + \frac{L_r^2}{2\,\mu\,r^2} - \gamma\,\frac{\mu\,M}{r}\,.$$

Die Relativbewegung ist damit eindeutig gelöst. Wie aber bewegen sich die ursprünglichen Massen m_1 und m_2? Wir bleiben im Schwerpunktsystem, $\vec{R} = 0$. Mit den Glgen. (2.206), (2.207) erhalten wir

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\,\vec{r} \equiv \frac{m_2}{M}\,\vec{r}\,,\quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\,\vec{r} \equiv -\frac{m_1}{M}\,\vec{r}\,.$$

Für eine Ellipsenbahn (mit $0 < \epsilon_r < 1$) ergibt sich also das folgende Bild: $\vec{r}_1$ beschreibt die mit dem Faktor m_2/M **gestauchte** Ellipse für die Bahnkurve $\vec{r}(\varphi)$ und $\vec{r}_2$ beschreibt die mit dem Faktor m_1/M **gestauchte** und gleichzeitig (wegen des umgekehrten Vorzeichens) **gespiegelte** Ellipse $\vec{r}(\varphi)$, vgl. Abb. 2.47.

Der Umlaufsinn aller Ellipsen ist der gleiche. Die gespiegelte Ellipse hat ihren anderen Brennpunkt im Ursprung (Schwerpunkt) des Koordinatensystems.

Falls eine Masse, sagen wir m_2, viel größer als die andere ist, $m_2 \gg m_1$, z.B. falls die Sonne die Masse m_2 und die Erde die Masse m_1 darstellt, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{m_2}{M} &= \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{1+m_1/m_2} = 1 - \frac{m_1}{m_2} + \ldots = 1 + O\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \simeq 1\,,\\
\frac{m_1}{M} &= \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{1}{1+m_1/m_2} = \frac{m_1}{m_2} - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \ldots = O\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \simeq 0\,.
\end{aligned}$$

Die Mitbewegung $\vec{r}_2 = -m_1\,\vec{r}/M$ der Sonne kann daher in "nullter Näherung", also unter Vernachlässigung von Termen, die von erster oder höherer Potenz in der kleinen Größe $m_1/m_2 \ll 1$ sind, vernachlässigt werden, $\vec{r}_2 \simeq 0$. In derselben Ordnung entspricht die Bewegung der Erde $\vec{r}_1 = m_2\,\vec{r}/M$ genau der Relativbewegung, $\vec{r}_1 \simeq \vec{r}$.

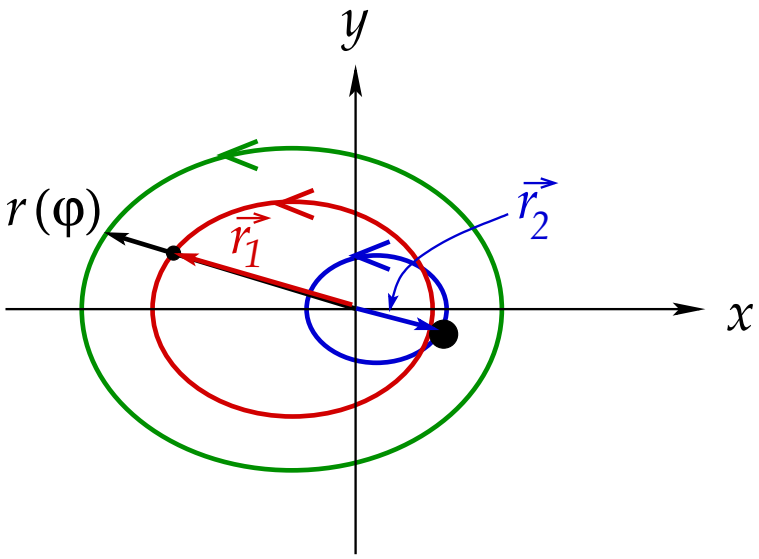


Abbildung 2.47: Die Relativbewegung und die tatsächliche Bewegung der Massen m_1 und m_2 für den Fall der Ellipsenbahn. Im gezeigten Fall ist $m_1 = m_2/2$ und entsprechend der Stauchungsfaktor für die erste Ellipse $m_2/M = 2/3$, während der für die zweite Ellipse $m_1/M = 1/3$ beträgt.

2.6.2 Zweikörperstoß

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von zwei Massenpunkten, die miteinander stoßen oder aneinander streuen. Das Wechselwirkungspotential V_{12} sei **hinreichend kurzreichweitig**, so dass die Bewegung der Massenpunkte **hinreichend lange vor und nach dem Stoß kräftefrei**, d.h. **geradlinig gleichförmig** erfolgt, vgl. Abb. 2.48.

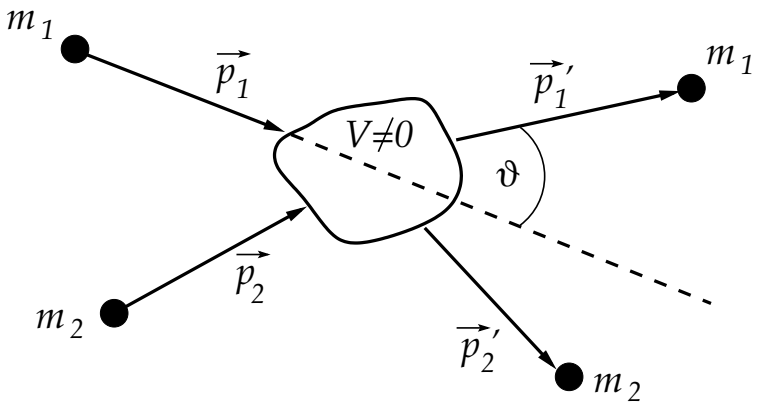


Abbildung 2.48: Der Stoß zweier Teilchen.

Die Anfangsimpulse $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ der beiden Teilchen seien bekannt, gesucht sind die Endimpulse $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$.

In der Betrachtung des Zweikörperstoßes finden zwei **Bezugssysteme** Anwendung:

1. Das **Laborsystem** Σ_L: Ein Stoßpartner, o.B.d.A. die Masse m_2, ruht vor dem Stoß, $\vec{p}_2^{\,(L)} = 0$, der andere Stoßpartner bewegt sich $\vec{p}_1^{\,(L)} \neq 0$.

2. Das **Schwerpunktsystem** Σ_S: Dieses haben wir schon im letzten Abschnitt kennengelernt. Der Massenmittelpunkt ruht, $\dot{\vec{R}}^{\,(S)} = 0$. O.B.d.A. kann man den Ursprung des Koordinatensystem in den Schwerpunkt legen, so dass auch $\vec{R}^{\,(S)} = 0$.

Da die Berechnung im Schwerpunktsystem einfacher ist, wählen wir im folgenden dieses Koordinatensystem und lassen den Index "(S)" weg. Offensichtlich gilt wegen $\dot{\vec{R}} = 0$ und damit $\vec{P} = 0$, dass der **Gesamtimpuls erhalten und für alle Zeiten gleich null ist**,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \iff \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \,, \;\; \vec{p}_1' = -\vec{p}_2' \,. \tag{2.219}$$

Die **Impulse** der beiden Stoßpartner sind also **vor** und **nach dem Stoß umgekehrt gleich groß**.

Es gilt auch der **Energieerhaltungssatz**, $E = const.$. Hinreichend lange **vor** dem Stoß kann die potentielle Energie vernachlässigt werden und die Gesamtenergie ist gleich der kinetischen Energie, $E \equiv T$. Hinreichend lange **nach** dem Stoß gilt dies auch, allerdings schreibt sie sich jetzt als $E = T' + Q$, wobei T' für die kinetische Energie nach dem Stoß und Q für die während des Stoßprozesses **dissipierte Energie** steht. Man unterscheidet

1. **elastischer Stoß:** $Q = 0$.

2. **inelastischer Stoß:** $Q \neq 0$. Hier wiederum unterscheidet man
   (i) **endothermer Stoß:** $Q > 0$. Es erfolgt eine **Anregung** der Stoßpartner auf Kosten der kinetischen Energie, $T' < T$.
   (ii) **exothermer Stoß:** $Q < 0$. Es erfolgt eine **Abregung** der Stoßpartner zugunsten der kinetischen Energie, $T' > T$.

Die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind (wir benutzen $v_i = p_i/m_i$, also $m_i\, v_i^2 = p_i^2/m_i$)

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \equiv T_r \,, \\ T' &= T_1' + T_2' = \frac{{p_1'}^2}{2m_1} + \frac{{p_2'}^2}{2m_2} \equiv T_r' \,, \end{aligned}$$

wobei sich die rechten Seiten aus der Tatsache ergeben, dass wir uns im Schwerpunktsystem befinden, wo $T_S \equiv 0$. Die Energieerhaltung lautet also

$$E = T = T_r = T' + Q = T_r' + Q \,. \tag{2.220}$$

Wegen der Impulserhaltung (2.219) gilt aber in diesem System auch $p_1^2 = p_2^2$, ${p_1'}^2 = {p_2'}^2$, also

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{p_1^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \equiv \frac{p_1^2}{2\mu} \,, \\ T_r' &= \frac{{p_1'}^2}{2\mu} \,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit der Energieerhaltung (2.220)

$$\begin{aligned} p_1'^{\,2} &= 2\,\mu\,T_r' = 2\,\mu\,(T_r - Q) = p_1^2 - 2\,\mu\,Q \\ \Longrightarrow \quad p_1' &= \sqrt{p_1^2 - 2\,\mu\,Q}\,. \end{aligned} \tag{2.221}$$

Damit ist der **Betrag** $p_1' = p_2'$ des Endimpulses durch den Anfangsimpulsbetrag $p_1 = p_2$ und die dissipierte Energie Q festgelegt. Die **Richtung** des Impulses $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$ ist dagegen **nicht** festgelegt, sie wird von den Details des Stoßpotentials V_{12} bestimmt. Zur Richtungsangabe benötigt man zwei Winkel, den **Streuwinkel** ϑ und den **Azimutalwinkel** φ. Den Streuwinkel hatten wir schon bei der Diskussion der Hyperbel kennengelernt. Er gibt an, wie stark das Teilchen der Masse m_1 (und aufgrund der Impulserhaltung auch das Teilchen der Masse m_2, vgl. Abb. 2.49) aus seiner Anfangsrichtung abgelenkt wurde. Der Azimutalwinkel gibt die Neigung der "Kreisscheibe" an, die durch die möglichen Richtungen von $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$ definiert ist, vgl. Abb. 2.49.

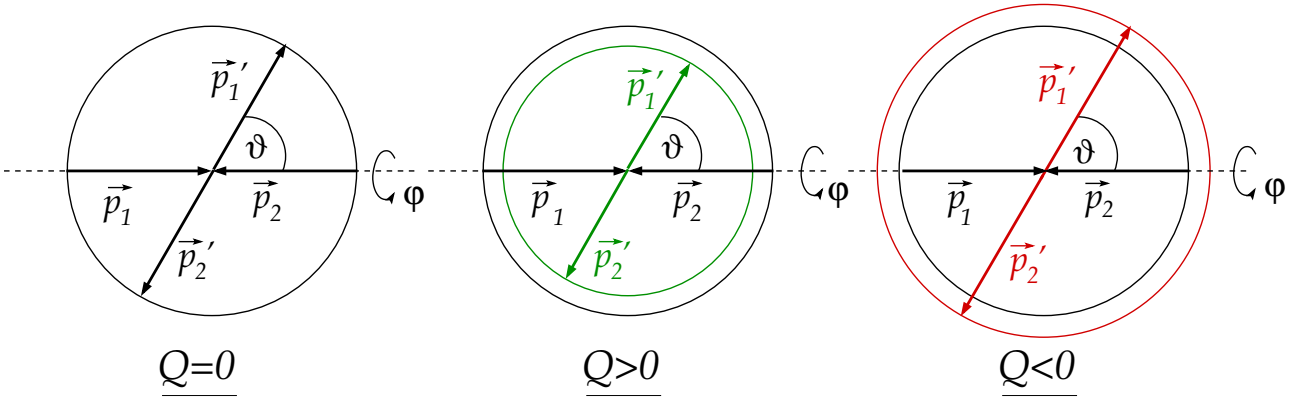


Abbildung 2.49: Der Stoß zweier Teilchen im Schwerpunktssystem.

3 Spezielle Relativitätstheorie

3.1 Die Einsteinschen Postulate

3.1.1 Ätherhypothese

In der klassischen Mechanik haben Zeit und Raum **absoluten** Charakter:

1. Der **absolute Raum** ist unbeweglich und unveränderlich. Er setzt Bewegungen materieller Körper keinen Widerstand entgegen. In ihm gelten die Grundgesetze der Mechanik. Man bezeichnet ihn auch als **Weltäther**.

2. Die **absolute Zeit** beschreibt den Verlauf der Zeit im absoluten Raum.

Aus Kapitel 2.2 wissen wir, dass die Grundgesetze der Mechanik nicht nur im absoluten Raum, sondern auch in allen gegenüber dem absoluten Raum **geradlinig gleichförmig** bewegten Systemen, den sog. **Inertialsystemen**, gelten. Sei Σ ein Inertialsystem, bezüglich dessen sich ein System Σ' geradlinig gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_z\,,\ v = const.$, bewege, vgl. Abb. 3.1.

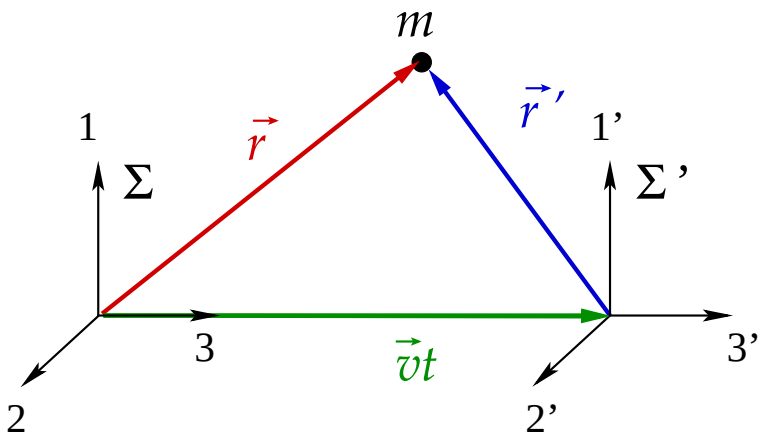


Abbildung 3.1: Zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme.

Der Koordinatenursprung von Σ' möge mit dem von Σ zum Zeitpunkt $t = 0$ übereinstimmen. Die sog. **Galilei-Transformation**

$$\begin{aligned} t' &= t\,, \\ \vec{r}\,' &= \vec{r} - \vec{v}\,t\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

vermittelt die Transformationen der Zeit und der Ortskoordinaten zwischen den beiden Systemen. Es gilt für die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}\,' \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} - \vec{v}\,t\right) = \dot{\vec{r}} - \vec{v}\,, \\ \ddot{\vec{r}}\,' \equiv \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t'^2} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\vec{r} - \vec{v}\,t\right) = \ddot{\vec{r}}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass $t = t'$, also auch $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$. Aufgrund von Gl. (3.2) ist die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Massenpunkt m im System Σ' **identisch** mit der in Σ,

$$\vec{F}\,' = m\,\ddot{\vec{r}}\,' = m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\,.$$

Also ist Σ' ebenfalls ein Inertialsystem. Dies gilt natürlich nicht mehr, wenn Σ' relativ zu Σ **rotiert**, denn dann treten **Scheinkräfte** auf, Kapitel 2.2.

Mit Hilfe von **mechanischen** Versuchen kann man also offenbar nicht entscheiden, ob man sich relativ zum Weltäther bewegt, denn die Gesetze der Mechanik sind in allen Inertialsystemen identisch. Es stellt sich jedoch die Frage, ob es andere Naturkräfte gibt, mit denen eine solche Unterscheidung möglich ist.

3.1.2 Das Michelson-Morley-Experiment

Falls die Ausbreitung von **Licht**, also von **elektromagnetischen Wellen** an den Weltäther geknüpft ist, so könnte ein **optisches Experiment** vielleicht entscheiden, ob man sich **relativ zum Weltäther bewegt**. Dies ist die Motivation für das berühmte **Michelson-Morley-Experiment**, vgl. Abb. 3.2.

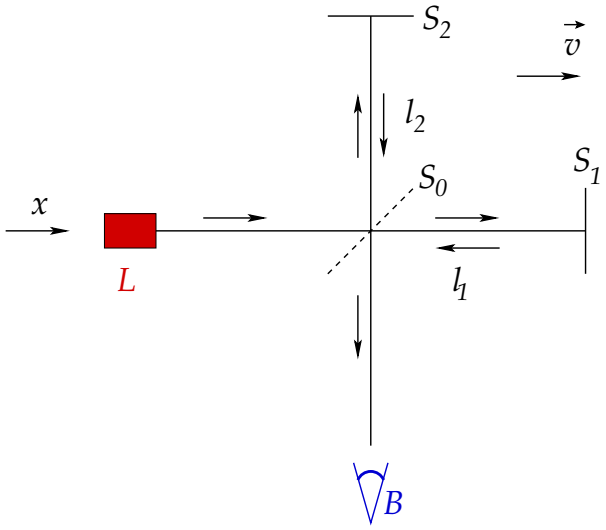


Abbildung 3.2: Michelson-Morley-Experiment.

Der Versuchsaufbau stehe im Inertialsystem Σ', welches sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ relativ zum System Σ des Weltäthers bewege. Im System Σ' sendet eine Lichtquelle

L monochromatisches Licht der Wellenlänge λ in $x-$Richtung aus. Dieses fällt auf einen **halbdurchlässigen Spiegel** S_0, welcher einen Teil des Lichtstrahls zum Spiegel S_2 reflektiert, einen anderen Teil dagegen zum Spiegel S_1 durchläßt. Der von S_2 reflektierte Strahl wiederum wird von S_0 teilweise durchgelassen und gelangt zum Beobachter B. Der von S_1 reflektierte Strahl wird von S_0 teilweise reflektiert und gelangt ebenfalls zum Beobachter.

Der Lichtstrahl, der die Strecke $\overline{S_0\,S_1\,S_0}$ durchläuft, **interferiert** dabei mit demjenigen, der die Strecke $\overline{S_0\,S_2\,S_0}$ durchläuft. Es tritt **konstruktive Interferenz** auf, wenn die Weglängendifferenz δ auf den beiden Wegen ein **ganzzahliges Vielfaches** der Wellenlänge des Lichtes beträgt.

$$\delta = m\,\lambda\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,.$$

Wir berechnen nun diese Weglängendifferenz unter der Annahme, dass sich das Licht mit **konstanter Geschwindigkeit** c, der **Lichtgeschwindigkeit**, **relativ zum Weltäther** bewegt und dass die **Galilei-Transformation** (3.1), (3.2) anwendbar ist.

Sei t_{01} die Zeit, die das Licht auf dem Hinweg von Spiegel S_0 zum Spiegel S_1 benötigt und t_{10} die Zeit, die es für den Rückweg braucht. Entsprechend sind die Zeiten t_{02} und t_{20} definiert. Da das Licht sich relativ zum Weltäther stets mit konstanter Geschwindigkeit c bewegt, gilt im System des Äthers für die Weglängendifferenz

4.7.2013

$$\delta = c\,[t_{02} + t_{20} - (t_{01} + t_{10})]\ . \tag{3.3}$$

Wir setzen nun die Laufzeiten t_{01} und t_{10} mit Strecken im System Σ' des Versuchsaufbaus in Verbindung. Dabei nehmen wir an, dass sich die Zeiten bei der Galilei-Transformation (3.1) nicht ändern, also das Konzept der absoluten Zeit Gültigkeit besitzt. Aufgrund der Galilei-Transformation (3.2) erscheint die Lichtgeschwindigkeit c' im System Σ' um die Geschwindigkeit v des Systems **verringert**, $c' = c - v$, wenn sich das System **in** Richtung des Lichtstrahls bewegt, und um die Geschwindigkeit v **vergrößert**, wenn es sich **gegen** die Richtung des Lichtstrahls bewegt. Für die Laufzeit t_{01} gilt daher

$$t_{01} = \frac{\ell_1}{c'} = \frac{\ell_1}{c-v} = \frac{\ell_1}{c}\,\frac{1}{1-v/c} > \frac{\ell_1}{c}\,, \tag{3.4}$$

da Lichtstrahl und System sich in die gleiche Richtung bewegen. Anschaulich gesprochen hat sich der Spiegel S_1 während der Laufzeit des Lichtes von S_0 ein Stück fortbewegt, und die Laufzeit verlängert sich relativ zur Situation, in der der Versuchsaufbau im System des Äthers ruhen würde. Für die Laufzeit t_{10} gilt entsprechend

$$t_{10} = \frac{\ell_1}{c'} = \frac{\ell_1}{c+v} = \frac{\ell_1}{c}\,\frac{1}{1+v/c} < \frac{\ell_1}{c}\,, \tag{3.5}$$

denn Lichtstrahl und System bewegen sich in entgegengesetzte Richtungen. Anschaulich gesprochen ist der Spiegel S_0 dem Lichtstrahl während der Laufzeit des Lichtes von S_1 ein Stück entgegengekommen, und die Laufzeit verkürzt sich relativ zur Situation, in der der Versuch in Σ ruht.

Wir berechnen nun die Laufzeiten von Spiegel S_0 zu S_2 und zurück, nun allerdings im System Σ. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass sich während dieser Laufzeiten der

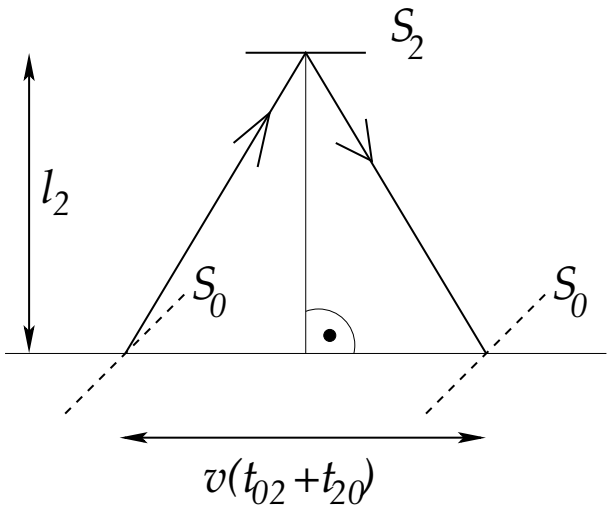


Abbildung 3.3: Zur Berechnung der Laufzeiten t_{02} und t_{20}.

Versuchsaufbau (das System Σ') in $x-$Richtung weiterbewegt hat, vgl. Abb. 3.3. Aus Symmetriegründen muss $t_{02} \equiv t_{20}$ sein. Für die während der Laufzeit t_{02} im System Σ zurückgelegte Strecke gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$c\,t_{02} \equiv c\,t_{20} = \sqrt{\ell_2^2 + v^2 \left(\frac{t_{02}+t_{20}}{2}\right)^2} \equiv \sqrt{\ell_2^2 + v^2\,t_{02}^2}\ .$$

Aufgelöst nach t_{02} ergibt sich

$$t_{02}^2 = \frac{\ell_2^2}{c^2 - v^2} \iff t_{02} = \frac{\ell_2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ . \tag{3.6}$$

Wir setzen nun die Glgen. (3.4), (3.5) und (3.6) in Gl. (3.3) ein,

$$\begin{aligned}
\delta &= c\,[2\,t_{02} - (t_{01} + t_{10})] \\
&= \frac{2\,\ell_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \ell_1 \left(\frac{1}{1 + v/c} + \frac{1}{1 - v/c}\right) \\
&= \frac{2\,\ell_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2\,\ell_1}{1 - v^2/c^2}\ .
\end{aligned}$$

Nun wird die gesamte Versuchsapparatur in Σ' um 90^0 gedreht, so dass die Strecke ℓ_1 senkrecht zur Bewegungsrichtung und die Strecke ℓ_2 in Bewegungsrichtung zu liegen kommt. Auch jetzt ergibt sich eine Weglängendifferenz δ' zwischen den Laufwegen, allerdings muss man in der obigen Formel die beiden Nenner vertauschen,

$$\delta' = \frac{2\,\ell_2}{1 - v^2/c^2} - \frac{2\,\ell_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ .$$

Falls der Beobachter im ersten Fall aufgrund der Weglängendifferenz konstruktive Interferenz beobachtet hat, $\delta = m\,\lambda$, so tut er dies nun nicht mehr, da sich die Weglängendifferenz verändert hat. Der Unterschied $\delta' - \delta$ beträgt unter der Annahme, dass $v \ll c$:

$$\begin{aligned}
\delta' - \delta &\simeq \frac{2\,\ell_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) - \frac{2\,\ell_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \\
&= \frac{2\,(\ell_1 + \ell_2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \\
&\simeq 2\,(\ell_1 + \ell_2) \left(1 + \frac{v^2}{2\,c^2} \right) \left(1 + \frac{v^2}{2\,c^2} - 1 \right) \simeq (\ell_1 + \ell_2) \frac{v^2}{c^2} \,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Wurzeln bis zur ersten Ordnung nach Taylor entwickelt und nur Terme bis zur Ordnung $O(v^2/c^2)$ berücksichtigt haben.

Im ersten Versuch von Michelson (1881) war $\ell_1 + \ell_2 = 2.4$ m. Der Versuch war stationär in einem Labor auf der Erde aufgebaut. Die Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne beträgt $v \simeq 3{\cdot}10^4$ m/s und, vorausgesetzt die Sonne ist stationär im System des Weltäther, so kann man diese Geschwindigkeit auch für die Geschwindigkeit v des Versuchsaufbaus Σ' in Σ ansetzen. Die Lichtgeschwindigkeit ist $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s. Also war

$$\delta' - \delta \simeq 2.4 \left(\frac{3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} \right)^2 \text{m} = 2.4 \cdot 10^{-8}\,\text{m} = 24\,\text{nm} \,.$$

Die Wellenlänge des für den Versuch benutzten monochromatischen Lichts betrug $\lambda \simeq 500$ nm, also wurde die konstruktive Interferenz um ca. 5% einer Wellenlänge aus der Phase gebracht. Dies war auch zum damaligen Zeitpunkt ein durchaus meßbarer Effekt. In einem zweiten Versuch (1887) hat Michelson gemeinsam mit Morley $\ell_1 + \ell_2$ durch Vielfachreflexion an mehreren Spiegeln um einen Faktor 10 vergrößert, so dass nun bei Drehung des Versuchsaufbaus die erwartete Phasenverschiebung 50%, d.h. eine halbe Wellenlänge betrug. Dies hätte dann zu **destruktiver** Interferenz führen müssen! Beobachtet wurde jedoch ein Effekt von 1%, also (im Rahmen der Meßgenauigkeit) **nichts**!

Der Michelson-Morley-Versuch widerlegt eindrucksvoll die Hypothese, dass die Lichtausbreitung an den Weltäther gekoppelt ist. Lichtwellen breiten sich offensichtlich in **allen** Inertialsystemen mit der **gleichen** Geschwindigkeit aus. Dann ist die Weglängendifferenz δ ganz einfach im System Σ' zu berechnen,

$$\delta = 2\,\ell_2 - 2\,\ell_1 \,,$$

und daran ändert sich auch bei Drehung des Versuchsaufbaus nichts. Diese Erkenntnis führt direkt auf die **Einsteinschen Postulate**, die wir im nächsten Abschnitt besprechen. Es sei noch angemerkt, dass Michelson 1907 den Nobelpreis für Physik für "seine optischen Präzisionsinstrumente und die damit ausgeführten spektroskopischen und metrologischen Experimente" erhielt.

3.1.3 Die Einsteinschen Postulate

Einstein schlug seine berühmt gewordenen Postulate zur Erklärung des experimentellen Befundes von Michelson und Morley vor:

Postulat 1. Alle physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.

Postulat 2. Die Lichtgeschwindigkeit hat im Vakuum in allen Inertialsystemen den konstanten Wert *c*.

Postulat 1 ist schon in der klassischen Mechanik bekannt. Einstein erweitert dies auf **alle** bekannten physikalischen Theorien, seinerzeit also noch auf den Elektromagnetismus.

Postulat 2 ist das bahnbrechend Neue: es besagt nämlich, dass die Geschwindigkeit des Lichtes **nicht** geringer wird, wenn man sich von der Lichtquelle wegbewegt ($c' = c - v$), oder größer wird, wenn man sich auf die Lichtquelle zubewegt ($c' = c + v$). Stattdessen nimmt sie **immer** den konstanten Wert c an. Damit ist die Galilei-Transformation **nicht** die korrekte Transformation zwischen Inertialsystemen. Wir werden im nächsten Abschnitt die richtige Transformation kennenlernen, die den Wert der Lichtgeschwindigkeit erhält.

3.2 Lorentz-Transformationen

3.2.1 Der Minkowski-Raum

Wir betrachten zwei sich relativ zueinander bewegende Inertialsysteme Σ, Σ'. O.B.d.A. sei Σ das ruhende System und Σ' bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$. Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ mögen die Ursprünge von Σ und Σ' zusammenfallen. Am Ursprung von Σ befinde sich eine Lichtquelle, die zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ ein Lichtsignal aussendet.

Im ruhenden System Σ breitet sich das Signal in Form einer **Kugelwelle** radial nach außen aus. Die Geschwindigkeit der Wellenfront ist

$$\dot{\vec{r}} = c\,\vec{e}_r \ .$$

Die Wellenfront selbst befindet sich also bei

$$\vec{r} = c\,t\,\vec{e}_r \ ,$$

d.h.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \equiv c^2\,t^2 \ .$$

Weil aber die Ursprünge von Σ und Σ' bei $t = t' = 0$ zusammenfallen, wird das Lichtsignal in Σ' auf die gleiche Weise wie in Σ ausgesendet. Das zweite Einsteinsche Postulat bedingt, dass die Wellenfront in Σ' gemessen die Gleichung

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \equiv c^2\,t'^2$$

erfüllt, also

$$c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2\,t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \ . \tag{3.7}$$

Wir führen die folgende Notation ein:

$$x^0 = c\,t \ , \quad x^1 = x \ , \quad x^2 = y \ , \quad x^3 = z \ . \tag{3.8}$$

Hierbei sind die Ziffern **Indizes** und keine Potenzen. Warum sie oben stehen, wird später klar werden. Gleichung (3.7) nimmt nun folgende kompakte Form an:

$$\left(x^0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2 = \left(x'^0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(x'^i\right)^2 = 0 \; . \tag{3.9}$$

Dies sieht fast so aus wie die Invarianz des Betrages eines **vierdimensionalen Vektors**

$$X_E \equiv (x_E^0, x_E^1, x_E^2, x_E^3)^T$$

unter **Drehungen** im **vierdimensionalen Euklidschen Raum**. Die Drehung des Vektors X_E wird durch eine Drehmatrix D bewirkt,

$$X'_E = D\, X_E \; , \quad x'^{\mu}_E = \sum_{\nu=0}^{3} d^{\mu\nu}\, x^{\nu}_E \; .$$

Die Drehmatrix D ist eine Darstellung eines Elements der Gruppe $SO(4)$, der **speziellen orthogonalen Transformationen in vier Dimensionen**. Etwas anschaulicher (in der Sprache der Physik ausgedrückt) bedeutet dies, dass D eine $(4 \times 4)-$Drehmatrix mit $\det D = +1$ ist. Die Orthogonalität der Drehmatrix, $D^T = D^{-1}$, bedingt, dass das Betragsquadrat des Vektors X_E sich unter Drehungen nicht ändert,

$$X'^2_E = X'^T_E\, X'_E = X^T_E\, D^T\, D\, X_E = X^T_E\, D^{-1}\, D\, X_E = X^T_E\, X_E = X^2_E \; .$$

In Komponenten ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$X^2_E \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \left(x^{\mu}_E\right)^2 \equiv \left(x^0_E\right)^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(x^i_E\right)^2 = \left(x'^0_E\right)^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(x'^i_E\right)^2 \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \left(x'^{\mu}_E\right)^2 \equiv X'^2_E \; . \tag{3.10}$$

Dies ist aber nicht ganz identisch mit Gl. (3.9), wo ein zusätzliches Minuszeichen vor den Raumkomponenten $x^i \, , \; i = 1, 2, 3$, auftritt. Bei Gl. (3.9) kann es sich also nicht um die Invarianz eines Vektors unter Drehungen mit orthogonalen Matrizen im vierdimensionalen Raum handeln. Aber um was handelt es sich dann?

Dazu machen wir folgende Zwischenüberlegung. Das Betragsquadrat des Euklidschen Vektors X_E läßt sich auch wie folgt schreiben,

$$X^2_E = X^T_E\, X_E = X^T_E\, \mathbf{1}\, X_E = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^{\mu}_E\, \delta^{\mu\nu}\, x^{\nu}_E \; , \tag{3.11}$$

wobei

$$\mathbf{1} = (\delta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die vierdimensionale Einheitsmatrix ist, deren Elemente gerade durch das Kronecker-Delta ausgedrückt werden können. Dies bringt uns auf die Idee, $(x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2$ wie folgt zu schreiben:

$$\left(x^0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^{\mu}\, g_{\mu\nu}\, x^{\nu} \; , \tag{3.12}$$

wobei

$$X \equiv (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T \equiv (ct,\, \vec{r})^T$$

der sog. **kontravariante 4-Ortsvektor** im sog. **Minkowski-Raum** ist. Die Matrix $(g_{\mu\nu})$ in Gl. (3.12) ist der sog. **metrische Tensor** des **Minkowski-Raumes**,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.13}$$

Der vierdimensionale Minkowski-Raum ist identisch mit der physikalischen **Raum-Zeit**. Wir merken an, dass der metrische Tensor des vierdimensionalen Euklidschen Raumes gerade die $(4 \times 4)-$Einheitsmatrix ist, vgl. Gl. (3.11).

Neben den kontravarianten 4-Vektoren gibt es auch sog. **kovariante 4-Vektoren**, bei denen der Vektorindex unten steht. Man erhält sie durch Multiplikation der kontravarianten 4-Vektoren mit dem metrischen Tensor, z.B. für den Ortsvektor

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, x^\nu \ . \tag{3.14}$$

Man überzeugt sich leicht, dass der kovariante 4-Ortsvektor die Komponenten

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -x, -y, -z) \equiv (ct, -\vec{r}) \tag{3.15}$$

hat. Multiplikation eines kontravarianten Vektors mit dem metrischen Tensor "zieht" also den Vektorindex "herunter" und macht den Vektor zum kovarianten Vektor. Dabei dreht sich aufgrund des metrischen Tensors (3.13) das Vorzeichen der räumlichen Komponenten um.

Man kann den metrischen Tensor auch nutzen, um Indizes "heraufzuziehen". Dazu definiert man zunächst den metrischen Tensor mit **gemischten** kontra- und kovarianten Indizes über die Relation

$$g_{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} g_\mu{}^\lambda\, g_{\lambda\nu} \ .$$

Als Matrixgleichung interpretiert, bedeutet dies, dass dieser gemischte metrische Tensor identisch mit der Einheitsmatrix sein muss,

$$\left(g_\mu{}^\lambda\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{3.16}$$

da der metrische Tensor, multipliziert mit dem gemischten metrischen Tensor, wieder den metrischen Tensor selbst ergibt. Da die Einheitsmatrix sich unter Transposition selbst reproduziert, gilt auch

$$g_\mu{}^\lambda = g^\lambda{}_\mu \ .$$

Mit dem gemischten metrischen Tensor können wir den metrischen Tensor mit ausschließlich kontravarianten Indizes über folgende Gleichung definieren,

$$g^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{\lambda=0}^{3} g^{\mu\lambda}\, g_{\lambda\nu} \; .$$

Da auf der linken Seite ein Element der Einheitsmatrix steht, vgl. Gl. (3.16), kann man diese Gleichung nach den Gesetzen der Matrixmultipikation so interpretieren, dass der metrische Tensor mit kontravarianten Indizes, $(g^{\mu\nu})$, das **Inverse** des metrischen Tensors mit kovarianten Indizes, $(g_{\mu\nu})$, ist. Das Inverse der durch Gl. (3.13) definierten Matrix ist aber leicht zu bestimmen; es ist die gleiche Matrix:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; .$$

Das "Heraufziehen" von Indizes erfolgt mit diesem metrischen Tensor, z.B. für den Ortsvektor

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}\, x_{\nu} \; .$$

Das **Skalarprodukt** zweier 4-Vektoren $A = (a^{\mu})$, $B = (b^{\mu})$ im Minkowski-Raum ist stets definiert als

$$A \cdot B \equiv \sum_{\mu,\nu=0}^{3} a^{\mu}\, g_{\mu\nu}\, b^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{3} a^{\mu} \left(\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, b^{\nu} \right) \equiv \sum_{\mu=0}^{3} a^{\mu}\, b_{\mu} \; , \tag{3.17}$$

wobei wir im letzten Schritt das "Herunterziehen" des kontravarianten Vektorindex von b^{ν} gemäß Gl. (3.14) ausgenutzt haben. Man kann den metrischen Tensor auch benutzen, um den Index von a^{μ} herunterzuziehen,

$$A \cdot B \equiv \sum_{\mu,\nu=0}^{3} a^{\mu}\, g_{\mu\nu}\, b^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{3} \left(\sum_{\mu=0}^{3} a^{\mu}\, g_{\mu\nu} \right) b^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{3} a_{\nu}\, b^{\nu} \; .$$

Das **Betragsquadrat** eines 4-Vektors $A = (a^{\mu})$ im Minkowski-Raum ist definiert als das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst,

$$A^2 \equiv A \cdot A = \sum_{\mu=0}^{3} a^{\mu}\, a_{\mu} \; .$$

Für den Ortsvektor gilt dann

$$\begin{aligned} X^2 \;&\equiv\; X \cdot X = \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu}\, x_{\mu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^{\mu}\, g_{\mu\nu}\, x^{\nu} \\ &=\; \left(x^0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2 = c^2\, t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2\, t^2 - \vec{r}^{\,2} \; . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Man beachte den Unterschied zum Betragsquadrat (3.10) des Euklidschen Vektors X_E im vierdimensionalen Euklidschen Raum. Bei der physikalischen Raum-Zeit, also dem Minkowski-Raum, handelt es sich eben **nicht** um den vierdimensionalen Euklidschen Raum. Gleichung (3.9) schreibt sich also kompakt wie folgt:

$$X^2 \equiv X \cdot X = X' \cdot X' \equiv X'^2 = 0 \; . \tag{3.19}$$

Diese Gleichung besagt, dass bei der Transformation vom System Σ zum System Σ' das Betragsquadrat des 4-Ortsvektors einer Lichtwellenfront erhalten bleibt. Da der 4-Ortsvektor einer Lichtwelle sich aber nicht von anderen 4-Vektoren auszeichnet, sollte auch das **Betragsquadrat beliebiger 4-Vektoren** $A \equiv (a^\mu)$ bei dieser Transformation erhalten bleiben,

$$A^2 \equiv A \cdot A = A' \cdot A' \equiv A'^2 \; . \tag{3.20}$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage zur Bestimmung der Transformation zwischen zwei Inertialsystemen Σ, Σ', die mit den Einsteinschen Postulaten in Einklang ist. Wir werden diese Transformation im folgenden Abschnitt diskutieren.

Zum Abschluss wollen wir noch für das Nachfolgende unsere Notation vereinfachen. Wir vereinbaren die sog. **Einsteinsche Summenkonvention**: über doppelt vorkommende kontra- und kovariante Indizes wird implizit immer summiert, z.B.

$$\sum_{\mu=0}^{3} a^\mu \, b_\mu \equiv a^\mu \, b_\mu \; .$$

Das Summenzeichen ist damit überflüssig, es wird stets impliziert.

3.2.2 Die Lorentz-Transformation

9.7.2013

Die Transformation zwischen Inertialsystemen, welche die Betragsquadrate von 4-Vektoren in der Raum-Zeit (im Minkowski-Raum) erhält, s. Gl. (3.20), und damit das Analogon zu Drehungen im vierdimensionalen Euklidschen Raum darstellt, ist die sog. **Lorentz-Transformation**,

$$X' = \Lambda \, X \; , \tag{3.21}$$

oder in Komponenten geschrieben,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} \, x^\nu \; , \quad \mu = 0, \ldots, 3 \; . \tag{3.22}$$

Man beachte, dass gemäß der Einsteinschen Summenkonvention über ν zu summieren ist. Die Matrix $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_{\ \nu})$ ist eine $(4 \times 4)-$Matrix, die die Transformation eines (kontravarianten) 4-Vektors $X \equiv (x^\nu)$ im System Σ in einen (kontravarianten) 4-Vektor $X' \equiv (x'^\mu)$ im System Σ' vermittelt. Sie soll im folgenden bestimmt werden. Wir machen zunächst jedoch einige

Vorbemerkungen:

(i) Die Menge der möglichen Lorentz-Transformationen zwischen zwei Bezugssystemen Σ, Σ' mit der Eigenschaft (3.20) bildet vom mathematischen Standpunkt eine **Gruppe**, die sog. **Lorentz-Gruppe** $\mathbb{L}$. Die $(4 \times 4)-$Matrix $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_{\ \nu})$ aus Gl. (3.22) ist eine Darstellung eines Elementes dieser Gruppe, $\Lambda \in \mathbb{L}$.

(ii) Die Lorentz-Gruppe enthält als **Untergruppe** die der **orthogonalen Transformationen in drei Dimensionen**, $O(3)$. Darstellungen dieser Gruppe sind **orthogonale $(3 \times 3)-$Matrizen** D, $D^T = D^{-1}$, welche **Drehungen in drei Raumdimensionen** vermitteln. Es genügt, orthogonale Matrizen mit $\det D = +1$ zu betrachten. Diese bilden wiederum eine Untergruppe der $O(3)$, die der **speziellen** orthogonalen Matrizen in drei Dimensionen, $SO(3)$. Der Unterschied zwischen $SO(3)$ und $O(3)$ ist eine zusätzliche **diskrete** Transformation, die der Raumspiegelung am Ursprung (oder einer der drei Koordinatenachsen). Aus Kapitel 1.1.3 wissen wir, dass eine solche Transformation aus einem rechtshändigen ein linkshändiges Koordinatensystem macht. Da wir uns stets auf rechtshändige Systeme beschränken, genügt es also, für Raumdrehungen spezielle orthogonale Matrizen $D \in SO(3)$ zu betrachten. Es gilt $SO(3) \subset \mathbb{L}$.

Um eine $(3 \times 3)-$Drehmatrix D als Lorentz-Transformation (3.22) zu schreiben, müssen wir sie passend zu einer $(4 \times 4)-$Matrix erweitern,

$$\Lambda_D \equiv (\Lambda^{\mu}_{D\,\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (d^i{}_j) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} , \tag{3.23}$$

wobei $D \equiv (d^i{}_j)$ eine orthogonale $(3\times3)-$Untermatrix ist. Die Lorentz-Transformation (3.22) lautet nun explizit in Komponenten geschrieben:

$$\begin{aligned} x'^0 &= c\,t' = x^0 = c\,t \ , \\ x'^i &= \sum_{j=1}^{3} d^i{}_j\, x^j \ , \quad i = 1,2,3 \ . \end{aligned}$$

Wegen

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = c^2\, t'^2 - \vec{r}\,'^2 = x^{\mu} x_{\mu} = c^2\, t^2 - \vec{r}^{\,2}$$

und $t' = t$ gilt auch

$$\vec{r}\,'^2 = \vec{r}^{\,2} \ .$$

Die Transformation Λ_D erhält also die Zeit und das Betragsquadrat von 3-Vektoren. Dies sind die Eigenschaften einer Drehung im Raum.

(iii) Eine weitere Klasse von Transformationen aus der Lorentz-Gruppe sind die sog. **Boosts**, die Transformationen zwischen relativ zueinander bewegten Bezugssystemen vermitteln. Diese bilden **keine** echte Untergruppe der Lorentz-Gruppe, d.h. eine Abfolge von Boosts kann unter geeigneten Bedingungen eine Drehung ergeben. Es gilt, dass die Darstellung **jedes** Elementes $\Lambda \in \mathbb{L}$ in der Form

$$\Lambda = \Lambda_{D_1}\, \Lambda_B\, \Lambda_{D_2} \tag{3.24}$$

geschrieben werden kann, wobei Λ_B eine Boost-Matrix und Λ_{D_1}, $\Lambda_{D_2} \in SO(3)$ Drehmatrizen sind.

Wir wollen nun die explizite Form der Darstellung Λ_B eines Boosts bestimmen. Wir gestalten die Situation so einfach wie möglich, indem wir annehmen, dass die Koordinatenachsen von Σ und Σ' stets in die gleiche Richtung zeigen, $\vec{e}_i = \vec{e}_i', i = 1, 2, 3$, und dass zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ die Ursprünge von Σ und Σ' übereinstimmen. Ferner bewege sich Σ' relativ zu Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$. Dies ist genau die in Abb. 3.1 dargestellte Situation. Man spricht von einem Boost in $z-$Richtung. Der allgemeine Fall eines Boosts in einer beliebigen Raumrichtung läßt sich dann gemäß Gl. (3.24) durch eine (vor- bzw. nachgeschaltete) Drehung aus diesem speziellen Fall ableiten. Der Einfachheit halber lassen wir im folgenden den Index "B" an der Boostmatrix Λ_B weg.

Bestimmung von Λ für einen Boost in $z-$Richtung:

(i) Da kein Punkt in der transversalen $(x, y)-$Ebene ausgezeichnet ist, dürfen x'^0 und x'^3 nicht von x^1 und x^2 abhängen. Umgekehrt dürfen x'^1 und x'^2 nicht von x^0 und x^3 abhängen:

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_{\ \nu}) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & 0 & 0 & \Lambda^0_{\ 3} \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & (a^i_{\ j}) & 0 \\ \Lambda^3_{\ 0} & 0 & 0 & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} .$$

Die $(2 \times 2)-$Untermatrix $A \equiv (a^i_{\ j})$ muss eine Diagonalmatrix sein, da die $(x, y)-$Ebene und die $(x', y')-$Ebene beim Boost nicht gegeneinander verdreht werden,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} .$$

(ii) Aus der Erhaltung der Betragsquadrate unter Lorentz-Transformationen, Gl. (3.20), erhalten wir, indem wir die Lorentz-Transformation (3.22) einsetzen:

$$x'^\mu\, x'_\mu = x'^\mu\, g_{\mu\nu}\, x'^\nu = \Lambda^\mu_{\ \lambda}\, x^\lambda\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu_{\ \sigma}\, x^\sigma = x^\lambda\, \Lambda^\mu_{\ \lambda}\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu_{\ \sigma}\, x^\sigma \equiv x^\lambda\, g_{\lambda\sigma}\, x^\sigma = x^\lambda\, x_\lambda \ ,$$

also

$$g_{\lambda\sigma} \equiv \Lambda^\mu_{\ \lambda}\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu_{\ \sigma} = \left(\Lambda^T\right)^{\ \mu}_{\lambda}\ g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu_{\ \sigma} \ ,$$

bzw. in Matrixnotation geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & 0 & 0 & \Lambda^3_{\ 0} \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \Lambda^0_{\ 3} & 0 & 0 & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & 0 & 0 & \Lambda^0_{\ 3} \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \Lambda^3_{\ 0} & 0 & 0 & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & 0 & 0 & -\Lambda^3_{\ 0} \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ \Lambda^0_{\ 3} & 0 & 0 & -\Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & 0 & 0 & \Lambda^0_{\ 3} \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \Lambda^3_{\ 0} & 0 & 0 & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\Lambda^0_{\ 0})^2 - (\Lambda^3_{\ 0})^2 & 0 & 0 & \Lambda^0_{\ 0}\Lambda^0_{\ 3} - \Lambda^3_{\ 0}\Lambda^3_{\ 3} \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ \Lambda^0_{\ 3}\Lambda^0_{\ 0} - \Lambda^3_{\ 3}\Lambda^3_{\ 0} & 0 & 0 & (\Lambda^0_{\ 3})^2 - (\Lambda^3_{\ 3})^2 \end{pmatrix} .$$

Durch Vergleich der Matrixelemente auf beiden Seiten erhalten wir die folgenden Bedingungen:

(a) $a^2 = 1$, also $a = \pm 1$. Dies bedeutet, dass die transversalen Koordinaten x, y bei einem Boost in $z-$Richtung weder gestaucht noch elongiert werden. Wir wählen das positive Vorzeichen, $a = +1$, da $a = -1$ eine Spiegelung (Inversion) der transversalen Koordinatenachsen bedeuten würde. Da zwei Achsen gleichzeitig gespiegelt würden, ändert sich die Händigkeit des Koordinatensystems nicht, aber diese Spiegelung ist nicht notwendig.

(b) Wir erhalten desweiteren drei Gleichungen für die verbleibenden vier Unbekannten Matrixelemente $\Lambda^0_{\ 0}, \Lambda^0_{\ 3}, \Lambda^3_{\ 0}, \Lambda^3_{\ 3}$:

$$\begin{aligned} 1 &= (\Lambda^0_{\ 0})^2 - (\Lambda^3_{\ 0})^2 \,, \\ -1 &= (\Lambda^0_{\ 3})^2 - (\Lambda^3_{\ 3})^2 \,, \\ 0 &= \Lambda^0_{\ 0}\Lambda^0_{\ 3} - \Lambda^3_{\ 0}\Lambda^3_{\ 3} \,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dies ist nicht eindeutig lösbar, die Lösung enthält noch einen freien Parameter.

(iii) Wir machen den **Lösungsansatz**

$$\Lambda^0_{\ 0} = \Lambda^3_{\ 3} \equiv \cosh\chi \,, \quad \Lambda^0_{\ 3} = \Lambda^3_{\ 0} \equiv -\sinh\chi \,.$$

Dieser Ansatz erfüllt aufgrund der Eigenschaft $\cosh^2\chi - \sinh^2\chi = 1$ der hyperbolischen Funktionen ganz offensichtlich die Gleichungen (3.25). Der freie Parameter χ ist die sog. **Rapidität**. Wir werden bald sehen, wie dieser Parameter physikalisch zu interpretieren ist. Wir fassen aber zunächst das bislang Erhaltene zusammen. Für einen **Boost in $z-$Richtung**, also für eine Lorentz-Transformation vom System Σ ins System Σ', wobei sich Σ' relativ zu Σ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$ bewegt, lautet die Transformationsmatrix

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_{\ \nu}) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix} \,. \tag{3.26}$$

(iv) Es ist klar, dass die Rapidität χ mit der Relativgeschwindigkeit v zwischen Σ und Σ' zusammenhängen muss. Es gilt jetzt, diesen Zusammenhang zu ermitteln.

Der Ursprung von Σ' hat von Σ aus gesehen die $z-$Koordinate

$$x^3 = v\,t = \frac{v}{c}\,x^0 \,.$$

Mit der Lorentz-Transformation (3.22) für $\mu = 3$ gilt dann von Σ' aus gesehen für den Ursprung

$$0 = x'^3 = -\sinh\chi\,x^0 + \cosh\chi\,x^3 = x^0\left(-\sinh\chi + \frac{v}{c}\,\cosh\chi\right) \,,$$

also

$$\tanh\chi = \frac{v}{c} \equiv \beta \,, \tag{3.27}$$

wobei wir die neue Variable β eingeführt haben. Diese Gleichung stellt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Rapidität χ und der Relativgeschwindigkeit v der beiden Bezugssysteme her. Wegen $1 - \tanh^2\chi = 1/\cosh^2\chi$ gilt

$$\cosh\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\chi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma \,,$$

wobei wir die neue Variable γ, den sog. **Lorentz-Gamma-Faktor** eingeführt haben. Es gilt außerdem

$$\sinh\chi = \tanh\chi\,\cosh\chi \equiv \beta\gamma \,.$$

Da reelle 4-Vektoren X wiederum in reelle 4-Vektoren X' transformiert werden, ist zu fordern, dass die Lorentz-Transformationsmatrix (3.26) reell bleibt. Dies wiederum bedingt, dass $v < c$. Die Lichtgeschwindigkeit stellt also eine **Grenzgeschwindigkeit** für die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme Σ, Σ' dar. Der Zusammenhang zwischen dem Bereich der erlaubten Geschwindigkeiten und der zugehörigen Rapiditäten bzw. Lorentz-Gamma-Faktoren ist

$$0 \le v < c \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le \chi < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \le \gamma < \infty \,.$$

Die Geschwindigkeit v (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c), der Lorentz-Gamma-Faktor γ und $\sinh\chi \equiv \beta\gamma$ sind in Abb. 3.4 als Funktion der Rapidität χ dargestellt.

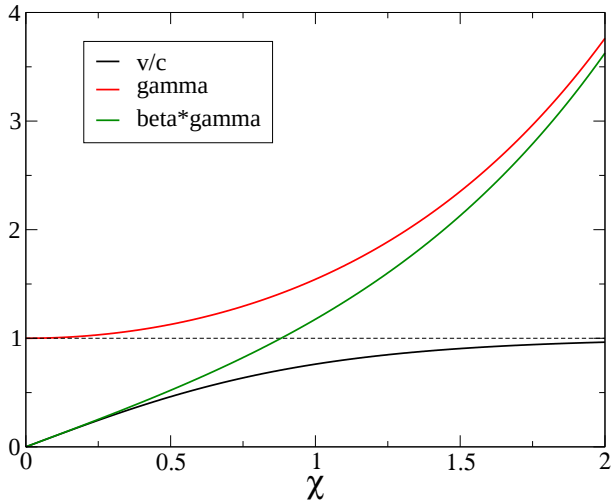


Abbildung 3.4: Geschwindigkeit (in Einheiten von c), Lorentz-Gamma-Faktor γ und $\beta\gamma$ als Funktion der Rapidität χ.

Eine alternative Darstellung der Boost-Matrix (3.26) ist

$$\Lambda \equiv (\Lambda^{\mu}_{\ \nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \tag{3.28}$$

Bemerkungen:

(i) Nach dem Determinantenentwicklungssatz berechnen wir

$$\det \Lambda_B = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \, ,$$

also genau wie $\det \Lambda_D = 1$. Während aber $\Lambda_D \in SO(3)$, also $\Lambda_D^T = \Lambda_D^{-1}$, so ist $\Lambda_B^T \equiv \Lambda_B \neq \Lambda_B^{-1}$, denn

$$\begin{aligned} \Lambda_B^T \Lambda_B \equiv \Lambda_B^2 &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(1+\beta^2) & 0 & 0 & -2\beta\gamma^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\beta\gamma^2 & 0 & 0 & \gamma^2(1+\beta^2) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \end{aligned}$$

die zu Boosts gehörenden Matrizen sind nicht orthogonal.

Es gilt aber

$$\begin{aligned} \Lambda_B(-v)\,\Lambda_B(v) &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2(1-\beta^2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

also

$$\Lambda_B^{-1}(v) \equiv \Lambda_B(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \neq \Lambda_B^T(v) \, ;$$

um einen Boost mit in ein mit v bewegtes System rückgängig zu machen, muss man noch einmal einen Boost mit Geschwindigkeit $-v$ ausführen, was physikalisch absolut plausibel ist.

(ii) Mit der Boost-Matrix (3.28) schreiben wir den Lorentz-Boost (3.22) des Ortsvektors explizit in den einzelnen Koordinaten aus:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{x'^0}{c} = \frac{1}{c}\left(\gamma\, x^0 - \beta\,\gamma\, x^3\right) = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\, z\right) \,, \\ x' &= x'^1 = x^1 = x \,, \\ y' &= x'^2 = x^2 = y \,, \\ z' &= x'^3 = -\beta\,\gamma\, x^0 + \gamma\, x^3 = \gamma(z - v\, t) \,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Im Spezialfall $v \ll c$ gilt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \,,$$

also

$$\begin{aligned} t' &= \left(t - \frac{v}{c^2}\, z\right)\left[1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = t + O\left(\frac{v}{c}\right) \simeq t \,, \\ x' &= x \,, \\ y' &= y \,, \\ z' &= (z - v\, t)\left[1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] \simeq z - v\, t \,. \end{aligned}$$

Dies ist genau die Galilei-Transformation (3.1) für den Fall, dass die Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$. Diese ergibt sich also als Grenzfall eines Lorentz-Boosts für **nichtrelativistische** Geschwindigkeiten $v \ll c$.

3.2.3 Zeitdilatation

Wir betrachten ein Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ zwischen zwei Ereignissen zu den Zeitpunkten t_1, t_2 am selben Ort $z = z_1 = z_2$, d.h. $\Delta z = z_2 - z_1 = 0$, im System Σ. Dies könnten z.B. zwei aufeinanderfolgende Ticks einer in Σ stationären Uhr sein. In diesem Fall ist $\Delta t = 1$ s. Dann gilt im mit $v > 0$ relativ zu Σ bewegten System Σ',

$$\Delta t' \equiv t'_2 - t'_1 = \gamma\left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}\,(z_2 - z_1)\right] \equiv \gamma\,\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta z\right) = \gamma\,\Delta t > \Delta t \,. \tag{3.30}$$

Offenbar ist das Zeitintervall $\Delta t'$ um einen Lorentz-Gamma-Faktor $\gamma > 1$ größer als Δt. Wenn man also von Σ' aus die beiden Ereignisse betrachtet, so erscheint das Zeitintervall zwischen diesen Ereignissen vergrößert. Das Zeitintervall 1 s im System Σ scheint also vom relativ zu Σ bewegten System Σ' aus betrachtet größer als 1 s zu sein. Dieser Effekt ist als **Zeitdilatation** bekannt: "in bewegten Systemen scheinen Uhren langsamer zu gehen".

Beispiel: Zerfall instabiler Teilchen. Ein sog. $\mu-$Lepton zerfällt gemäß der schwachen Wechselwirkung in ein Elektron und ein Neutrino-Antineutrino-Paar,

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu + \bar{\nu} \,.$$

Für ruhende $\mu-$Leptonen kennt man die mittlere Zerfallszeit, die sog. **Halbwertszeit** τ.

Nun führt man folgendes Experiment durch: man stelle einen Detektor D_1 auf einem Berg in Höhe L über dem Meeresspiegel und einen zweiten Detektor D_2 auf Meereshöhe auf. Beide Detektoren messen die Zahl der in der kosmischen Strahlung pro Zeiteinheit auftretenden $\mu-$Leptonen. Kennt man die Geschwindigkeit der $\mu-$Leptonen, so kennt man auch die Zeit, die die $\mu-$Leptonen benötigen, um bei Detektor D_2 anzukommen. Vergleicht man diese mit der Halbwertszeit τ, so kann man bei Kenntnis der Zahl der bei D_1 vorhandenen $\mu-$Leptonen die Zahl der noch bei D_2 vorhandenen voraussagen.

Das Ergebnis des Experiments ist jedoch, dass man viel mehr $\mu-$Leptonen als erwartet bei D_2 beobachtet. Der Grund ist, dass die Zeit im Ruhesystem schnell bewegter $\mu-$Leptonen viel langsamer vergeht als im System der beiden (relativ zueinander ruhenden) Detektoren. Dementsprechend zerfallen weniger $\mu-$Leptonen und es kommen mehr beim Detektor D_2 an.

3.2.4 Längenkontraktion

Wir führen im System Σ eine Längenmessung zur festen Zeit $t = t_1 = t_2$ aus, d.h. $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$. Das Ergebnis ist offenbar

$$\ell = z_2 - z_1 \; .$$

Nun führen wir die Längenmessung der Strecke ℓ vom relativ zu Σ mit v bewegten System Σ' durch. Die Längenmessung soll in Σ' ebenfalls zum gleichen Zeitpunkt $t' = t'_1 = t'_2$ stattfinden,

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}\, z_2\right) = t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\, z_1\right) \quad \Longleftrightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}\,(z_2 - z_1) \equiv \frac{v}{c^2}\,\ell \; .$$

Die Längenmessung zur festen Zeit t' im System Σ' entspricht offenbar einer **nicht gleichzeitigen** Längenmessung im System Σ. Der Beobachter in Σ' nimmt die Längenmessung zwischen den Punkten z'_1, z'_2 vor,

$$\begin{aligned} \ell' &= z'_2 - z'_1 = \gamma\,[z_2 - z_1 - v\,(t_2 - t_1)] \\ &= \gamma\left(\ell - \frac{v^2}{c^2}\,\ell\right) = \ell\,\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \equiv \frac{\ell}{\gamma} < \ell \; . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Länge ℓ erscheint vom bewegten System aus um einen Faktor $1/\gamma < 1$ verkürzt. Dieses Phänomen bezeichnet man als **Längenkontraktion**.

11.7.2013

3.2.5 Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Ein Massenpunkt m (Ruhesystem Σ_1) bewege sich mit Geschwindigkeit v_1 in $z-$Richtung eines Systems Σ_2, welches sich wiederum mit Geschwindigkeit v_2 relativ zu einem System Σ_3 in $z-$Richtung bewege, vgl. Abb. 3.5.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes von Σ_3 aus gesehen? Kann er sich u.U. schneller als das Licht bewegen? Man betrachtet dieses Problem am besten als

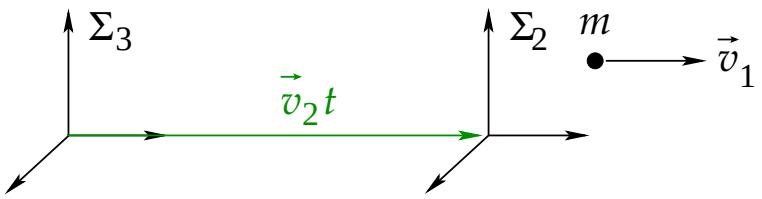


Abbildung 3.5: Zum Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

Abfolge von Lorentz-Boosts. Von Σ_2 gelangt man ins Ruhesystem Σ_1 des Massenpunktes mittels eines Boosts

$$(\Lambda^{\mu}_{1\,\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\beta_1\,\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1\,\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} .$$

Von Σ_3 wiederum gelangt man ins System Σ_2 mittels eines Boosts

$$(\Lambda^{\mu}_{2\,\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2\,\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2\,\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} .$$

Also gelangt man von Σ_3 ins Ruhesystem Σ_1 des Massenpunktes mittels

$$\begin{aligned} (\Lambda^{\mu}_{3\,\nu}) \;&\equiv\; \begin{pmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 & -\beta_3\,\gamma_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_3\,\gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2\,\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2\,\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\beta_1\,\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1\,\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) & 0 & 0 & -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \gamma_1\,\gamma_2\,(1+\beta_1\,\beta_2)\;, \\ \beta_3\,\gamma_3 &= \gamma_1\,\gamma_2\,(\beta_1+\beta_2)\;, \end{aligned}$$

also

$$v_3 = c\,\beta_3 = c\,\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\,\beta_2} = \frac{v_1+v_2}{1+v_1 v_2/c^2}\;. \tag{3.32}$$

v_3 ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes von Σ_3 aus gesehen. Offenbar gilt für $v_1, v_2 \leq c$ stets $v_3 \leq c$, d.h. man kann die Lichtgeschwindigkeit **nie überschreiten**, sie bildet eine **Grenzgeschwindigkeit**.

Den **nichtrelativistischen Grenzfall** des Additionstheorems (3.32) erhält man für $v_1, v_2 \ll c$. Dann kann man den Nenner entwickeln,

$$v_3 = (v_1 + v_2)\left[1 - \frac{v_1\, v_2}{c^2} + O\left(\frac{v_1^2\, v_2^2}{c^4}\right)\right] \simeq v_1 + v_2 \ ,$$

wobei wir Terme der Ordnung $O(v_1 v_2/c^2)$ vernachlässigt haben. Man erhält also wie erwartet im nichtrelativistischen Grenzfall die Galilei-Transformation (3.2) für Geschwindigkeiten.

Man darf diese aber **nicht** mehr anwenden, wenn entweder v_1 oder v_2 (oder beide) nicht mehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist. Z.B. erhalten wir für den Spezialfall einer Lichtwelle, die sich im System Σ_2 mit Lichtgeschwindigkeit $v_1 = c$ bewegt, aus Gl. (3.32):

$$v_3 = \frac{c + v_2}{1 + v_2/c} = c \ .$$

Also bewegt sich eine Lichtwelle auch von Σ_3 aus gesehen mit Lichtgeschwindigkeit fort, im Einklang mit dem zweiten Einsteinschen Postulat.

Mit Hilfe der zu den Lorentz-Transformationen Λ_1, Λ_2 gehörenden Rapiditäten χ_1, χ_2 lautet das Additionstheorem (3.32)

$$\tanh\chi_3 = \frac{\tanh\chi_1 + \tanh\chi_2}{1 + \tanh\chi_1\, \tanh\chi_2} \equiv \tanh(\chi_1 + \chi_2) \ , \tag{3.33}$$

wobei wir das Additionstheorem für den hyperbolischen Tangens, $(\tanh x + \tanh y)/(1 + \tanh x\, \tanh y) = \tanh(x+y)$, benutzt haben. Im Gegensatz zur Geschwindigkeit ist die Rapidität eine Variable, die sich **additiv** unter einer Abfolge von Lorentz-Transformationen verhält,

$$\chi_3 = \chi_1 + \chi_2 \ . \tag{3.34}$$

3.2.6 Das Raum-Zeit–Diagramm (Minkowski–Diagramm)

Wie lassen sich Ereignisse in der vierdimensionalen Raum-Zeit, d.h. im Minkowksi-Raum darstellen? Hierzu betrachtet man das sog. **Raum-Zeit**– oder **Minkowski-Diagramm**. Dies ist eine zweidimensionale Projektion der vierdimensionalen Raum-Zeit, mit der Zeitachse $x^0 = ct$ als $y-$ und mit einer Raumrichtung, z.B. der $z-$Richtung, als $x-$Achse, vgl. Abb. 3.6.

Ein Raum-Zeit-Ereignis P hat die Koordinaten $x^0_P = ct_P$, $x^3_P = z_P$. Der **Lichtkegel** ist durch die Relation

$$s_0^2 = x^\mu\, x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

gegeben. In der Projektion der Raum-Zeit auf die $(x^0, x^3)-$Ebene, Abb. 3.6, ist $x = y = 0$, also $(ct)^2 - z^2 = 0$, bzw. $ct = \pm z$; der Lichtkegel ist durch die beiden Winkelhalbierenden (rote Linien) gegeben. Vektoren x^μ, deren Betragsquadrat verschwindet, heißen auch **Nullvektoren**.

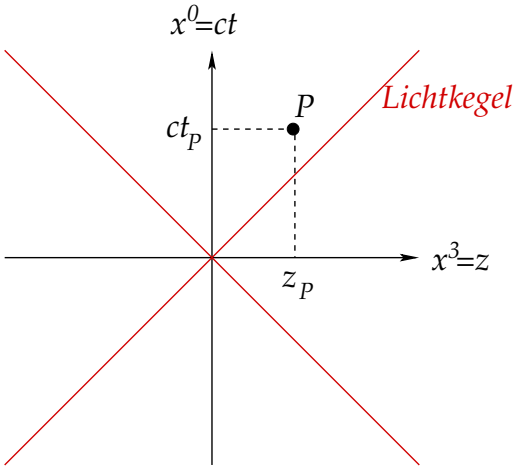


Abbildung 3.6: Das Raum-Zeit– (Minkowski-)Diagramm.

Wir betrachten nun eine Lorentz-Transformation in ein gegenüber Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$ bewegtes System Σ', dessen Ursprung mit dem von Σ bei $t = t' = 0$ übereinstimmt. Zu späteren Zeitpunkten bestimmt sich die $z-$Koordinate des Ursprungs von Σ' im System Σ aus

$$0 = z' = \gamma\,(z - vt)\ ,$$

also $z = vt$ oder

$$x^0 = c\,t = c\,\frac{z}{v} = \frac{z}{\beta} = \frac{x^3}{\beta}\ .$$

Also ist die x'^0-Achse, die durch die Bedingung $z' = 0$ definiert ist, in Abb. 3.6 durch eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $1/\beta > 1$ gegeben, vgl. Abb. 3.7. Ganz ähnlich ist die x'^3-Achse, also die Orte, an denen $ct' = 0$ ist, durch die Gleichung

$$0 = t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,z\right)\ ,$$

bzw.

$$x^0 = c\,t = \frac{v}{c}\,z = \beta\,z = \beta\,x^3$$

gegeben. Dies entspricht einer Geraden mit Steigung $\beta < 1$, vgl. Abb. 3.7. Die neue Zeitskala x'^0 im System Σ' liegt also im Minkowski-Diagramm zwischen der Zeitachse x^0 im System Σ und dem Lichtkegel, während die Raumachse x'^3 im System Σ' im Minkowski-Diagramm zwischen dem Lichtkegel und der Raumachse x^3 im System Σ liegt. Obwohl sich die Zeit- und Raumachsen beim Übergang von Σ nach Σ' verschieben (und zwar so, dass der Winkel zwischen x'^0-Achse und x'^3-Achse nicht mehr 90^o beträgt), bleibt der Lichtkegel stets der gleiche.

Bei der Lorentz-Transformation ändert sich auch die **Achsenskalierung**. Man muss die Achsen also neu **eichen**. Dies geschieht wie folgt. Das 4-Betragsquadrat

$$s^2 = x^\mu\,x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

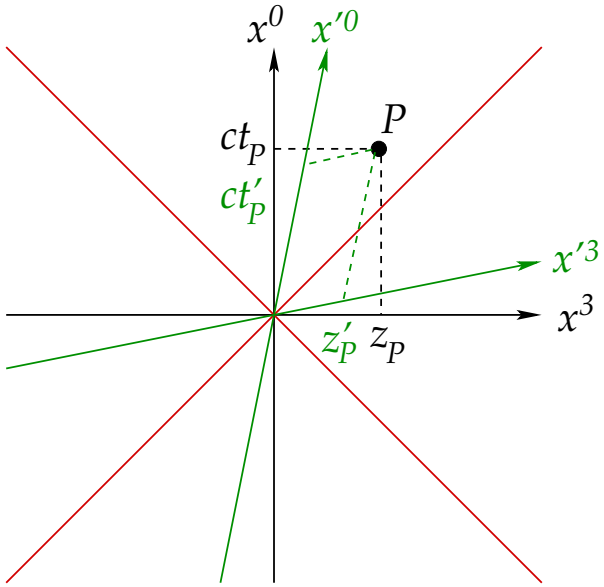


Abbildung 3.7: Verschiebung der Raum- und Zeitachsen bei einer Lorentz-Transformation im Minkowski-Diagramm.

ist eine sog. **Lorentz-Invariante**, d.h. es ist **invariant unter Lorentztransformationen**. Da sich beim Übergang vom System Σ ins System Σ', also einem Boost in $z-$Richtung, die $x-$ und $y-$Koordinaten nicht ändern, $x' = x$, $y' = y$, ist bei einem Boost in $z-$Richtung auch die Größe

$$s_z^2 = (ct)^2 - z^2$$

eine Lorentz-Invariante. Der Längeneinheit ℓ (z.B. $\ell = 1$ m) auf der $z-$Achse (also bei $t = 0$) entspricht $s_\ell^2 = -\ell^2$. Dies legt die **invariante Längeneinheit** fest. Alle Raum-Zeit-Punkte (ct, z), die $s_\ell^2 = -\ell^2$ entsprechen, sind durch die Gleichung $(ct)^2 - z^2 = s_\ell^2 = -\ell^2$ verknüpft, also

$$(ct)^2 = z^2 - \ell^2 \ .$$

Dies entspricht einer Hyperbel im Minkowski-Diagramm, vgl. Abb. 3.8. Die Hyperbel schneidet die $z'-$Achse in dem Punkt, der der gleichen Längeneinheit ℓ im bewegten System Σ' entspricht. Im auf das ruhende System Σ bezogene Minkowski-Diagramm ist diese Länge aber offenbar $\ell' > \ell$. Wir werden gleich sehen, dass diese Tatsache in natürlicher Weise auf die Lorentz-Kontraktion führt.

Auf die gleiche Weise läßt sich die Zeiteinheit festlegen. Wir betrachten die Zeiteinheit $c\vartheta$ (z.B. $\vartheta = 1$ s) auf der x^0-Achse. Bei $z = 0$ haben wir dann

$$s_\vartheta^2 = (c\,\vartheta)^2 \ ,$$

welches die **invariante Zeiteinheit** festlegt. Alle Raum-Zeit-Punkte (ct, z), welche $s_\vartheta^2 = (c\,\vartheta)^2$ entsprechen, sind durch die Gleichung $(c\,t)^2 - z^2 = s_\vartheta^2 = (c\,\vartheta)^2$ miteinander verknüpft, also

$$(c\,t)^2 = (c\,\vartheta)^2 + z^2 \ .$$

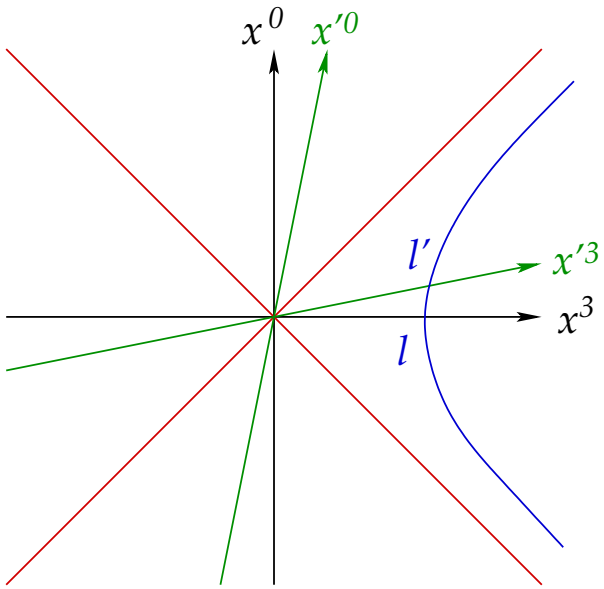


Abbildung 3.8: Invariante Längeneinheit im Minkowski-Diagramm.

Auch dies entspricht einer Hyperbel im Minkowski-Diagramm, vgl. Abb. 3.9. Die Hyperbel schneidet die x'^0-Achse in dem Punkt, der der gleichen Zeiteinheit ϑ im bewegten System Σ' entspricht. Im auf das ruhende System Σ bezogene Minkowski-Diagramm ist diese Länge aber offenbar $c\,\vartheta' > c\,\vartheta$. Wir werden gleich sehen, wie dies auf die Zeitdilatation führt.

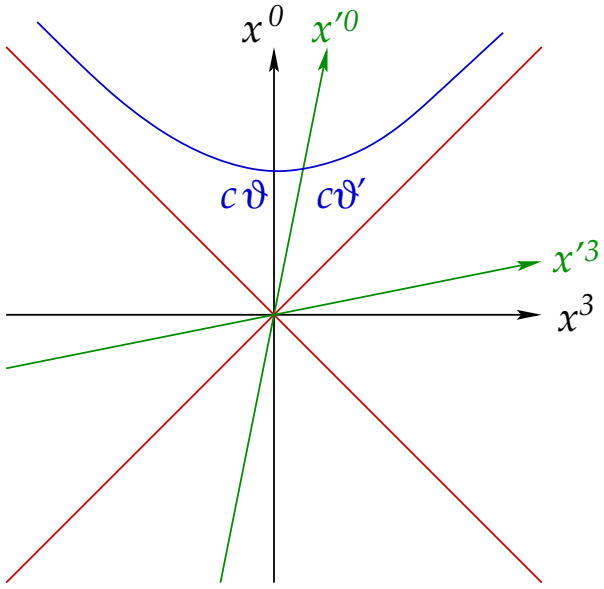


Abbildung 3.9: Invariante Zeiteinheit im Minkowski-Diagramm.

Das 4-Betragsquadrat eines 4-Vektors x^μ, $s^2 = (c\,t)^2 - x^2 - y^2 - z^2$, ist **nicht notwen-**

digerweise positiv definit. Man unterscheidet

(i) **Zeitartige** 4-Vektoren: $s^2 > 0 \iff |c\,t| > |\vec{r}|$.

(ii) **Lichtartige** 4-Vektoren oder **Nullvektoren**: $s_0^2 = 0 \iff |c\,t| = |\vec{r}|$.

(iii) **Raumartige** 4-Vektoren: $s^2 < 0 \iff |c\,t| < |\vec{r}|$.

Diese drei Möglichkeiten sind in Abb. 3.10 dargestellt.

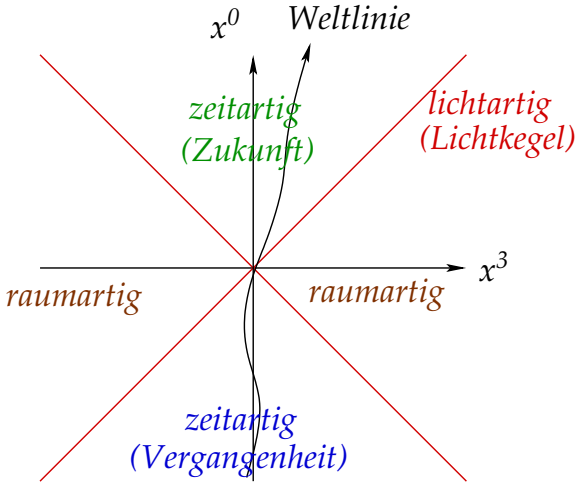


Abbildung 3.10: Unterteilung der zeitartigen und raumartigen Bereiche im Minkowski-Diagramm.

Die Bahnen physikalischer Objekte, die sog. **Weltlinien**, liegen wegen $v < c$ stets **innerhalb** des **zeitartigen** Lichtkegels (insofern die Weltlinie durch den Ursprung von Σ führt). Die **lokale Steigung** der Weltlinie entspricht dem Inversen der momentanen Geschwindigkeit (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit), $1/\beta$, und muss stets **größer als 1** sein, sonst wäre das Teilchen schneller als die Lichtgeschwindigkeit c. Die Weltlinien von Photonen (Lichtquanten) liegen stets auf dem Lichtkegel (falls sie bei $t = 0$ vom Ursprung ausgesandt werden). Sie besitzen die Steigung 1.

Da s^2 **lorentz-invariant** ist, bleibt der Charakter eines 4-Vektors, also ob er zeit-, licht-, oder raumartig ist, unter Lorentz-Transformationen erhalten. Das gleiche gilt auch für den **Abstand zweier Raum-Zeit-Ereignisse**. Seien X_1 und X_2 die zu zwei Raum-Zeit-Ereignissen P_1 und P_2 gehörenden 4-Vektoren. Das Betragsquadrat ihres Abstands im Minkowski-Raum,

$$\begin{aligned} s_{21}^2 &= (x_2 - x_1)^\mu\,(x_2 - x_1)_\mu = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 \\ &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2\ , \end{aligned}$$

ist ebenfalls **lorentz-invariant**. Wir betrachten zwei Ereignisse, für die $x_1 = y_1 = x_2 = y_2$, damit wir dies im Minkowski-Diagramm veranschaulichen können. O.B.d.A. sei auch $t_2 > t_1$ und $z_2 > z_1$. Wir unterscheiden

(i) **Raumartiger Abstand:** $s_{21}^2 < 0$, d.h. $z_2 - z_1 > c\,(t_2 - t_1)$. Es folgt, dass P_1 und P_2 **nicht** durch ein Lichtsignal verbunden werden können. Sei z.B. P_1 im Ursprung von Σ. Dann ereignet sich P_2 zu einem **früheren** Zeitpunkt t_2 als der Zeitpunkt t_0, zu dem das Lichtsignal (welches sich auf dem Lichtkegel bewegt) bei z_2 eintrifft, s. Abb. 3.11. Mit anderen Worten, ein Signal müßte mit einer Geschwindigkeit $v > c$ von P_1 nach P_2 gelangen, also auf einer Weltlinie mit Steigung < 1, um rechtzeitig bei P_2 einzutreffen. Dies wiederum bedeutet, dass es **keine kausale Verbindung** zwischen den Ereignissen P_1 und P_2 gibt.

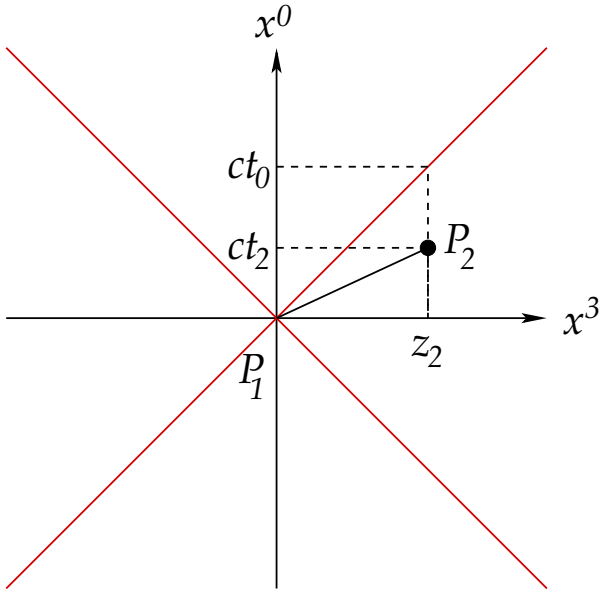


Abbildung 3.11: Veranschaulichung eines raumartigen Abstands im Minkowski-Diagramm.

Für Ereignisse mit raumartigem Abstand kann man stets eine Lorentz-Transformation in ein Inertialsystem Σ' finden, in dem die beiden Ereignisse **gleichzeitig** stattfinden. Dazu berechnen wir

$$0 = c\,(t_2' - t_1') = \gamma\,[c\,(t_2 - t_1) - \beta\,(z_2 - z_1)] \iff z_2 - z_1 = \frac{c}{\beta}\,(t_2 - t_1)\,.$$

Für raumartige Abstände gilt $z_2 - z_1 > c\,(t_2 - t_1)$, deshalb muss $1/\beta > 1$ sein, um diese Gleichung zu erfüllen. Dies ist natürlich immer möglich, da $\beta < 1$. Wir ziehen die Schlussfolgerung, dass die **zeitliche Reihenfolge** von raumartig verbundenen Ereignissen vom gewählten Bezugssystem abhängig ist. In unterschiedlichen Bezugssystemen kann sie verschieden sein.

(ii) **Zeitartiger Abstand:** $s_{21}^2 > 0$, d.h. $c\,(t_2 - t_1) > z_2 - z_1$. In diesem Fall kommt ein Lichtsignal von P_1 stets **vor** der Zeit t_2, zu dem sich P_2 ereignet, am Ort z_2 an, vgl. Abb. 3.12. Dies bedeutet, dass eine **kausale Verbindung** zwischen den Ereignissen möglich ist.

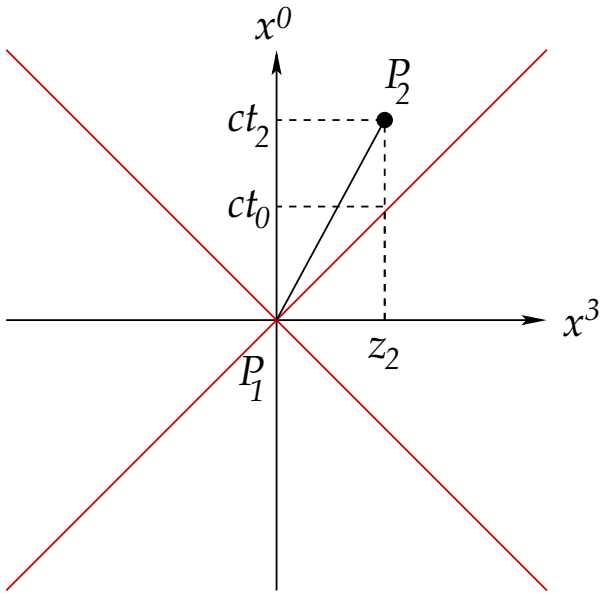


Abbildung 3.12: Veranschaulichung eines zeitartigen Abstands im Minkowski-Diagramm.

Es gibt zwar keine Lorentz-Transformation in ein System, in dem P_1 und P_2 gleichzeitig stattfinden, aber es gibt ein System, in dem $z_1' = z_2'$, also in dem die Ereignisse am **gleichen Ort** zu unterschiedlichen Zeiten stattfinden,

$$0 = z_2' - z_1' = \gamma\,[z_2 - z_1 - v\,(t_2 - t_1)] \quad \Longleftrightarrow \quad z_2 - z_1 = v\,(t_2 - t_1)\;.$$

Für zeitartige Abstände gilt $c\,(t_2 - t_1) > z_2 - z_1$, also ist diese Gleichung erfüllbar, da $v < c$.

Zum Schluss dieses Abschnitts kommen wir auf die Längenkontraktion und Zeitdilatation zurück, die wir im Minkowski-Diagramm verstehen wollen.

(i) Bei der **Längenkontraktion** wird eine Strecke ℓ, die im System Σ ruht, vom bewegten System Σ' aus gemessen. Da die Strecke in Σ ruht, verlaufen die Weltlinien des linken und rechten Endes von ℓ parallel zur x^0-Achse, vgl. Abb. 3.13. Die Messung in Σ' verläuft instantan, also bei $t' = 0$. Anhand von Abb. 3.13 erkennt man, dass die so gemessene Strecke **kürzer** ist als die Strecke ℓ', die gemäß den oben im Zusammenhang mit der Eichhyperbel gemachten Argumenten der Länge ℓ im bewegten System entspricht. Man beobachtet also von Σ' aus eine **Verkürzung** der Strecke ℓ. Dies ist gerade die Längenkontraktion.

(ii) Bei der **Zeitdilatation** wird ein Zeitintervall ϑ zwischen zwei Ereignissen im System Σ vom bewegten System Σ' aus gemessen, vgl. Abb. 3.14. Die beiden Ereignisse in Σ finden am selben Ort $z = 0$ statt. Der Beobachter befinde sich stets im Ursprung von Σ', also bei $z' = 0$. Das dem Zeitintervall ϑ im System Σ entsprechende Zeitintervall ϑ' in Σ' ist durch den Schnittpunkt der Eichhyperbel mit der x'^3-Achse gegeben. Das in Σ' **gemessene** Zeitintervall ist aber durch den Schnittpunkt der

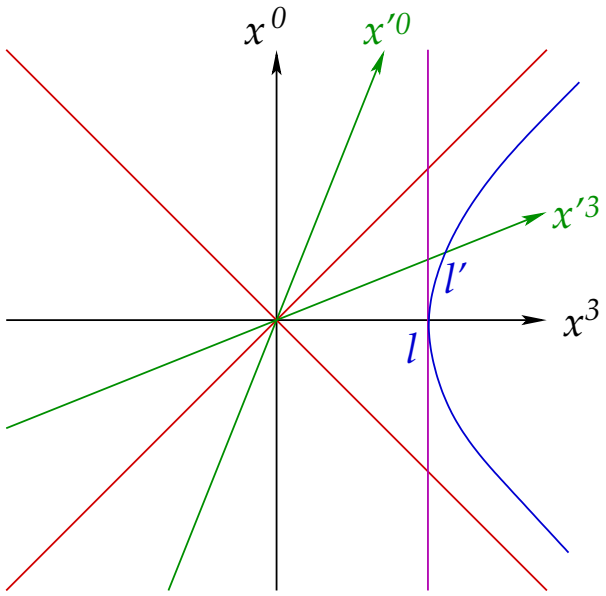


Abbildung 3.13: Veranschaulichung der Längenkontraktion im Minkowski-Diagramm.

(magentafarbenen) parallel zur x'^3–Achse verlaufenden Geraden mit der x'^0–Achse gegeben. Dieses ist **länger** als das dem Zeitintervall ϑ im bewegten System entsprechende Zeitintervall ϑ'. Also beobachtet man von Σ' aus eine **Verlängerung** von Zeitintervallen ϑ. Dies ist gerade die Zeitdilatation.

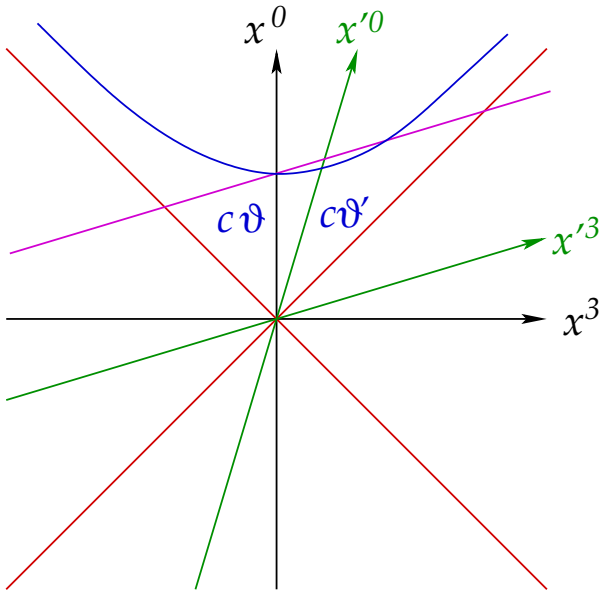


Abbildung 3.14: Veranschaulichung der Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm.

16.7.2013

3.3 Kovariante Formulierung der klassischen Mechanik

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, Naturgesetze wie z.B. das Newtonsche Gesetz der klassischen Mechanik in **kovarianter Form** zu schreiben. Dies bedeutet, dass sie unter Lorentz-Transformationen **forminvariant** bleiben, d.h. in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen, wie vom ersten Einsteinschen Postulat gefordert.

Wir wissen, dass das Newtonsche Gesetz invariant unter Galilei-Transformationen ist, welche den nichtrelativistischen Grenzfall ($v \ll c$) der Lorentz-Transformationen darstellen. Für physikalische Körper, deren Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit annähert, sollte man aber das Newtonsche Gesetz auch so schreiben können, dass es forminvariant unter Lorentz-Transformationen ist. Dies ist für die Naturbeschreibung nicht unbedingt von großer Konsequenz, da lediglich Objekte von der Größe von Elementarteilchen oder maximal von Atomkernen relativistische Geschwindigkeiten erreichen können. Solche Objekte unterliegen aber nicht den Gesetzen der klassischen Mechanik sondern der Quantenmechanik. Dennoch ist es zweckmäßig, sich anhand wohlbekannter Gesetze mit der kovarianten Formulierung vertraut zu machen.

Für die Ausbreitung von Licht, die durch die Gesetze der **Elektrodynamik** beschrieben werden, ist es jedoch wegen $v = c$ unabdingbar, von Anfang an eine relativistisch kovariante Formulierung finden zu können. Die Gesetze der Elektrodynamik müssen forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein, Galilei-Transformationen sind, wie wir am Beispiel des Michelson-Morley-Experimentes gesehen hatten, unbrauchbar.

3.3.1 Lorentz-Tensoren

Für eine forminvariante Formulierung von Naturgesetzen ist es zunächst erforderlich, alle physikalischen Größen in Form von sog. **Lorentz-Tensoren** zu schreiben. Man unterscheidet

(i) **Tensoren nullter Stufe**, bzw. **Lorentz-Skalare**, a. Dies sind Größen, die in **allen** Inertialsystemen den gleichen Wert annehmen, also **invariant** unter Lorentz-Transformationen sind. Man sagt, sie sind **lorentz-invariant**. Beispiele sind z.B. das 4-Betragsquadrat des Ortsvektors, $s^2 \equiv x^\mu \, x_\mu$.

(ii) **Tensoren erster Stufe**, bzw. (kontravariante) **4-Vektoren**,

$$A = (a^\mu) = (a^0, a^1, a^2, a^3)^T \; .$$

Diese Größen, die man als vierdimensionale Spaltenvektoren auffassen kann, sind **nicht** invariant unter Lorentz-Transformationen, ihr Transformationsgesetz ist durch die Gleichung

$$A' = \Lambda \, A \; , \quad a'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} \, a^\nu \; ,$$

gegeben. Weil dies auch für den Ortsvektor gilt,

$$X' = \Lambda \, X \; , \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} \, x^\nu \; ,$$

können wir die Komponenten $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ der Lorentz-Transformationsmatrix auch wie folgt schreiben:

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^{\nu}} \ , \tag{3.35}$$

bzw. nach Invertieren

$$x^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\ \mu}\, x'^{\,\mu} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\,\mu}} \equiv (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\ \mu} \ . \tag{3.36}$$

Man beachte, dass ein kontravarianter Index im **Nenner** einem **kovarianten** Index entspricht.

Neben kontravarianten 4-Vektoren gibt es auch kovariante 4-Vektoren. Formal gilt

$$a'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\,\mu}}\, a_{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\ \mu}\, a_{\nu} = a_{\nu}\, (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\ \mu} \ , \tag{3.37}$$

denn dann ist das 4-Betragsquadrat in der Tat lorentz-invariant,

$$a'_{\mu}\, a'^{\,\mu} = a_{\lambda}\, (\Lambda^{-1})^{\lambda}_{\ \mu}\, \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, a^{\nu} = a_{\lambda}\, g^{\lambda}_{\ \nu}\, a^{\nu} = a_{\nu}\, a^{\nu} \ .$$

Aus der Stellung der Indizes in Gl. (3.37) wird ersichtlich, dass es sich bei den kovarianten 4-Vektoren um **Zeilenvektoren** handelt.

Beispiel: 4-Gradient einer skalaren Funktion:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}}\right) \equiv (\partial_{\mu}\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right) \ .$$

Der 4-Gradient transformiert sich wie ein kovarianter 4-Vektor, denn es gilt gemäß der Kettenregel (man beachte die Einsteinsche Summenkonvention)

$$\partial'_{\mu}\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\,\mu}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}}\, \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\,\mu}} = \partial_{\nu}\varphi\, (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\ \mu} \ . \tag{3.38}$$

(iii) **Tensoren zweiter Stufe**. Hier gibt es wiederum drei verschiedene Klassen:

(a) **kontravariante 4-Tensoren**, $A^{\mu\nu}$. Ihr Transformationsgesetz lautet

$$A'^{\,\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\, \Lambda^{\nu}_{\ \beta}\, A^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, \frac{\partial x'^{\,\nu}}{\partial x^{\beta}}\, A^{\alpha\beta} \ . \tag{3.39}$$

Jeder Index eines kontravarianten 4-Tensors transformiert sich wie der eines kontravarianten 4-Vektors.

Beispiel: Die Komponenten des **Tensorproduktes** zweier 4-Vektoren $A = (a^{\mu})$, $B = (b^{\nu})$ lauten

$$A^{\mu\nu} \equiv a^{\mu}\, b^{\nu} \ .$$

Aus dem Transformationsgesetz (3.37) für 4-Vektoren wird das Transformationsgesetz (3.39) für das Tensorprodukt als kontravarianter 4-Tensor unmittelbar ersichtlich.

(b) **kovariante 4-Tensoren**, $A_{\mu\nu}$. Ihr Transformationsgesetz lautet

$$A'_{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}\,(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\ \mu}\,(\Lambda^{-1})^{\beta}_{\ \nu} = A_{\alpha\beta}\,\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\,\mu}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\,\nu}}\;, \tag{3.40}$$

jeder Index transformiert sich wie der eines kovarianten 4-Vektors.

(c) **gemischte 4-Tensoren**, $A^{\mu}_{\ \nu}$. Ihr Transformationsgesetz lautet

$$A'^{\,\mu}_{\ \ \nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,A^{\alpha}_{\ \beta}\,(\Lambda^{-1})^{\beta}_{\ \nu} = \frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,A^{\alpha}_{\ \beta}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\,\nu}}\;. \tag{3.41}$$

Kontravariante Indizes transformieren sich wie die von kontravarianten 4-Vektoren, kovariante Indizes wie die von kovarianten 4-Vektoren.

(iv) Ganz analog kann man **Tensoren höherer Stufe** und **verschiedener Art** (kontravariant, kovariant, gemischt) definieren.

3.3.2 Kovariante Formulierung von Naturgesetzen

Die **kovariante Formulierung von Naturgesetzen** bedeutet, dass linke und rechte Seiten einer Gleichung sich wie **Lorentz-Tensoren** der **gleichen Stufe** transformieren, also

$$\begin{aligned} a &= b \quad \text{Lorentz-Skalar}\;, \\ a^{\mu} &= b^{\mu} \quad \text{Lorentz-Vektor}\;, \\ A^{\mu\nu} &= B^{\mu\nu} \quad \text{Lorentz-Tensor zweiter Stufe}\;, \\ &\vdots \end{aligned}$$

3.3.3 Rechenregeln

(i) **Addition:** Tensoren gleicher Stufe werden komponentenweise addiert, z.B.

$$c^{\mu} = a^{\mu} + b^{\mu}\;, \quad C^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + B^{\mu\nu}\;, \ldots$$

(ii) **Multiplikation mit einer Zahl:** Das Produkt eines Tensors mit einer Zahl ergibt sich aus Multiplikation jeder Komponente des Tensors mit dieser Zahl, z.B.

$$b\,A = b\,(a^{\mu}) = (b\,a^{\mu})\;.$$

(iii) **Verjüngung eines Tensors:** Darunter versteht man die **Kontraktion** zweier Indizes mit Hilfe des metrischen Tensors, z.B.

$$A^{\mu}_{\ \ \mu\alpha\beta} \equiv A^{\mu\nu}_{\ \ \ \alpha\beta}\,g_{\nu\mu}\;. \tag{3.42}$$

Ein verjüngter Tensor $k-$ter Stufe transformiert sich wie ein Tensor $(k-2)-$ter Stufe, z.B.

$$\begin{aligned} A'^{\,\mu}_{\ \ \mu\alpha\beta} &= \frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^{\nu}}\,A^{\nu}_{\ \ \lambda\gamma\delta}\,\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\,\mu}}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\,\alpha}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\,\beta}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\,\mu}}\,\frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^{\nu}}\,A^{\nu}_{\ \ \lambda\gamma\delta}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\,\alpha}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\,\beta}} \\ &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}\,A^{\nu}_{\ \ \lambda\gamma\delta}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\,\alpha}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\,\beta}} = g^{\lambda}_{\ \nu}\,A^{\nu}_{\ \ \lambda\gamma\delta}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\,\alpha}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\,\beta}} = A^{\nu}_{\ \ \nu\gamma\delta}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\,\alpha}}\,\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\,\beta}}\;. \end{aligned}$$

Spezialfall 1: Die **Spur** eines gemischten Tensors zweiter Stufe,

$$A^{\mu}_{\ \mu} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu}_{\ \mu} \equiv \mathrm{Sp}(A^{\mu}_{\ \nu}) = \mathrm{Sp} \begin{pmatrix} A^0_{\ 0} & \dots & A^0_{\ 3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^3_{\ 0} & \dots & A^3_{\ 3} \end{pmatrix} ,$$

transformiert sich wie ein **Lorentz-Skalar**.

Spezialfall 2: Das **4-Skalarprodukt** zweier Vektoren $A = (a^\mu)$, $B = (b^\mu)$, $a^\mu\, b_\mu$, kann als **Spur** eines gemischten Tensors zweiter Stufe,

$$A^{\mu}_{\ \nu} \equiv a^\mu\, b_\nu$$

aufgefaßt werden. Dieses ist als Lorentz-Skalar invariant unter Lorentz-Transformationen.

3.3.4 Differentialoperatoren:

(i) **4-Gradient:**

$$(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) . \tag{3.43}$$

Wir hatten schon in Gl. (3.38) gesehen, dass sich der 4-Gradient wie ein kovarianter Vektor transformiert. Es gibt auch eine kontravariante Version des 4-Gradienten,

$$(\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)^T .$$

(ii) **4-Divergenz:** Die 4-Divergenz eines 4-Vektors A ist ein Lorentzskalar,

$$\partial_\mu\, a^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial a^0}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{a} \equiv \partial^\mu\, a_\mu . \tag{3.44}$$

(iii) **d'Alembert (Quabla-)Operator:** Der d'Alembert-Operator ist das 4-Betragsquadrat des 4-Gradienten,

$$\Box \equiv \partial_\mu\, \partial^\mu = \partial^\mu\, \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^{\,2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta , \tag{3.45}$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist. Auch der d'Alembert-Operator ist ein Lorentz-Skalar.

3.3.5 Kinematische Grundgrößen

Die **Weltlinie** eines physikalischen Körpers hatten wir im Zusammenhang mit Abb. 3.10 diskutiert. Ähnlich wie die Konfigurationsbahn im Konfigurationsraum stellt sie die Menge aller 4-Ortsvektoren $X = (x^\mu) = (ct, x, y, z)^T$ in einem vorgegebenen Zeitintervall dar. Das Problem ist aber, dass die Zeit selbst eine der Koordinaten des 4-Ortsvektors ist und sich

unter Lorentz-Transformationen ändern kann. Wir sollten also zur Parametrisierung der Weltlinie eine andere Größe wählen, die von der Wahl des Bezugssystems unabhängig ist. Daher muss es sich dabei um einen Lorentz-Skalar handeln.

Wir betrachten zunächst die **differentielle Änderung** des 4-Ortsvektors,

$$\mathrm{d}X = (\mathrm{d}x^\mu) = (c\,\mathrm{d}t,\, \mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, \mathrm{d}z)^T \ .$$

Das 4-Betragsquadrat dieser Größe,

$$\mathrm{d}s^2 \equiv \mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x_\mu = c^2\,\mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}\vec{r})^2 \ ,$$

ist ein Lorentz-Skalar. Wir definieren nun das sog. **differentielle Eigenzeitintervall**

$$\mathrm{d}\tau^2 = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}\,(\mathrm{d}\vec{r})^2 \ , \tag{3.46}$$

welches ebenfalls ein Lorentz-Skalar ist, da c nach dem zweiten Einsteinschen Postulat in allen Bezugssystemen den gleichen Wert annimmt.

Im System Σ' des Körpers, seinem sog. **Ruhesystem**, ist stets $\mathrm{d}\vec{r}\,' = 0$, also

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t'^2 \ .$$

Das Eigenzeitintervall $\mathrm{d}\tau$ ist also das Zeitintervall im Ruhesystem des Körpers. Die Größe

$$\tau = \int \mathrm{d}\tau \tag{3.47}$$

bezeichnet man als **Eigenzeit**. Diese eignet sich als Lorentz-Skalar zur Parametrisierung der Weltlinie,

$$X(\tau) = (x^\mu(\tau)) = (c\,t(\tau),\, x(\tau),\, y(\tau),\, z(\tau))^T \ . \tag{3.48}$$

Es gilt außerdem

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}\,(\mathrm{d}\vec{r})^2} = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} = \gamma^{-1}\,\mathrm{d}t < \mathrm{d}t \ ,$$

wobei wir die 3-Geschwindigkeit $\vec{v} \equiv \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ des Körpers im System Σ benutzt haben. Man sieht, dass das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ gegenüber dem Eigenzeitintervall $\mathrm{d}\tau$ gedehnt ist,

$$\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau > \mathrm{d}\tau \ .$$

Dies ist die **Zeitdilatation** in einem gegenüber dem Ruhesystem Σ' des Körpers bewegten System Σ.

Die **4-Geschwindigkeit** eines Körpers ist definiert als die Ableitung des 4-Ortsvektors nach der Eigenzeit,

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \ . \tag{3.49}$$

Sie transformiert sich wie der kontravariante 4-Vektor $\mathrm{d}x^\mu$, da $\mathrm{d}\tau$ ein Lorentz-Skalar ist. Es gilt mit der Kettenregel und $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau = \gamma$:

$$(u^\mu) = \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right) = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^T = \gamma(c, \vec{v})^T \ . \tag{3.50}$$

Das 4-Betragsquadrat der 4-Geschwindigkeit ist

$$u^\mu\,u_\mu = \gamma^2\,(c^2 - v^2) = c^2\,\gamma^2(1-\beta^2) = c^2 \ . \tag{3.51}$$

3.3.6 Die Newtonsche Grundgleichung in kovarianter Formulierung

Um das zweite Newtonsche Axiom in relativistisch kovarianter Form zu schreiben, benötigen wir zunächst den **4-Impuls**,

$$p^\mu = m\, u^\mu \; . \tag{3.52}$$

Dieser transformiert sich wie ein 4-Vektor, falls die Masse m des Körpers ein **Lorentz-Skalar**, also **lorentz-invariant** ist. Dies ist eine plausible Forderung, da die Masse eine Materialeigenschaft ist, die sich bei einem Wechsel des Bezugssystems nicht ändern sollte. Mit Gl. (3.50) lauten die Komponenten des 4-Impuls

$$p^0 = m\,\gamma\, c \; , \quad \vec{p} = m\,\gamma\,\vec{v} \; .$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist $\gamma = 1 + O(v^2/c^2) \simeq 1$, so dass der 3-Impuls

$$\vec{p} = m\,\gamma\,\vec{v} \simeq m\,\vec{v} \equiv \vec{p}_{\rm nr}$$

in die nichtrelativistische Definition des Impulses übergeht. Das 4-Betragsquadrat des 4-Impulses ist

$$p^\mu\, p_\mu = m^2\,\gamma^2\,(c^2 - v^2) = m^2\,\gamma^2\, c^2 (1 - \beta^2) = m^2\, c^2 \; . \tag{3.53}$$

Die Newtonsche Grundgleichung in nichtrelativistischer Form lautete

$$\vec{F}_{\rm nr} = \frac{{\rm d}\vec{p}_{\rm nr}}{{\rm d}t} = m\,\frac{{\rm d}\vec{v}}{{\rm d}t} \; .$$

Die naheliegende **relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Grundgleichung** ist

$$K^\mu = \frac{{\rm d}p^\mu}{{\rm d}\tau} = m\,\frac{{\rm d}u^\mu}{{\rm d}\tau} \; , \tag{3.54}$$

wobei auf der linken Seite die sog. **Minkowski-Kraft** oder **4-Kraft** auftritt. Die Komponenten der 4-Kraft lauten mit ${\rm d}t/{\rm d}\tau = \gamma$,

$$K^0 = \gamma\,\frac{{\rm d}p^0}{{\rm d}t} = m\,\gamma\, c\,\frac{{\rm d}\gamma}{{\rm d}t} \; , \quad \vec{K} = \gamma\,\frac{{\rm d}\vec{p}}{{\rm d}t} = m\,\gamma\,\frac{{\rm d}(\gamma\vec{v})}{{\rm d}t} \; .$$

Wir definieren die **3-Kraft** als Zeitableitung des 3-Impulses,

$$\vec{F} \equiv \frac{{\rm d}\vec{p}}{{\rm d}t} \; .$$

Diese hat den korrekten nichtrelativistischen Grenzfall

$$\vec{F} = \frac{{\rm d}\vec{p}}{{\rm d}t} = \frac{{\rm d}(\gamma\,\vec{p}_{\rm nr})}{{\rm d}t} \simeq \frac{{\rm d}\vec{p}_{\rm nr}}{{\rm d}t} = \vec{F}_{\rm nr} \; .$$

Dann schreiben sich die räumlichen Komponenten der Minkowski-Kraft als

$$\vec{K} = \gamma\,\vec{F} \; . \tag{3.55}$$

3.3.7 Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Wie ist die Zeitkomponente K^0 der 4-Kraft zu interpretieren? Zunächst ist

$$K^\mu\, u_\mu = m\,\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,u_\mu = \frac{m}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,(u^\mu\, u_\mu) = \frac{m}{2}\,\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}\tau} = 0\;,$$

wobei wir Gl. (3.51) benutzt haben. Diese Gleichung besagt, dass die 4-Kraft **4-orthogonal** zur 4-Geschwindigkeit ist. Andererseits ist mit Gl. (3.55)

$$0 = K^\mu\, u_\mu = K^0\,\gamma\, c - \vec{K}\cdot(\gamma\,\vec{v}) = \gamma\, c\left(K^0 - \vec{K}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right) = \gamma\, c\left(K^0 - \gamma\,\vec{F}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right)\;,$$

also

$$K^0 = \gamma\,\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}\;, \tag{3.56}$$

d.h.

$$K \equiv (K^\mu) = \gamma\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}\,,\ \vec{F}\right)^T\;. \tag{3.57}$$

In der nichtrelativistischen Mechanik war das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit (bis auf ein Vorzeichen) gerade die **Leistung**, also die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit. Mit den Glgen. (3.54) und (3.57) erhalten wir die Identität

$$-P = \vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{c}{\gamma}\,K^0 = \frac{c}{\gamma}\,m\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{\gamma}\,m\,\gamma\,\frac{\mathrm{d}(\gamma\, c)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\gamma\, c^2\right)\;.$$

Andererseits war die Leistung (bis auf ein Vorzeichen) identisch mit der **zeitlichen Änderung der kinetischen Energie**, $P \equiv -\dot{T}$. Es ist also naheliegend, die Größe

$$T \equiv m\,\gamma\, c^2 \tag{3.58}$$

als **relativistische Verallgemeinerung der kinetischen Energie** zu definieren, weil dann

$$-P = \vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{T}\;.$$

Die relativistische kinetische Energie T hat den nichtrelativistischen Grenzfall

$$T = m\, c^2\left[1 + \frac{v^2}{2\, c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right] \simeq m\, c^2 + \frac{1}{2}\,m\, v^2 = m\, c^2 + T_{\mathrm{nr}}\;, \tag{3.59}$$

wobei $T_{\mathrm{nr}} = \frac{1}{2}\,m\, v^2$ die **nichtrelativistische** kinetische Energie ist. Offenbar gibt es in der relativistischen Verallgemeinerung einen zusätzlichen konstanten Beitrag, die sog. **Ruheenergie** des Körpers

$$E_0 = m\, c^2\;. \tag{3.60}$$

Die 4-Kraft (3.57) schreibt sich nun als

$$(K^\mu) = \gamma\left(\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,,\ \vec{F}\right)^T = \gamma\left(\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,,\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)^T = \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T}{c}\,,\ \vec{p}\right)^T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{T}{c}\,,\ \vec{p}\right)^T\;. \tag{3.61}$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (3.54) schließen wir, dass

$$p^0 = m\,\gamma\,c \equiv \frac{T}{c}\;, \tag{3.62}$$

d.h. die Zeitkomponente des 4-Impulses ist (bis auf einen Faktor $1/c$) mit der **kinetischen Energie** identisch. Wegen Gl. (3.53) gilt nun

$$\frac{T^2}{c^2} = (p^0)^2 = p^\mu\,p_\mu + \vec{p}^{\,2} = m^2\,c^2 + p^2\;,$$

also

$$T^2 = p^2\,c^2 + m^2\,c^4 \quad \Longleftrightarrow \quad T = \pm\sqrt{p^2\,c^2 + m^2\,c^4}\;, \tag{3.63}$$

die sog. **relativistische Energie-Impuls-Beziehung**.

Bemerkungen:

(i) Das negative Vorzeichen in Gl. (3.63) deutet darauf hin, dass die spezielle Relativitätstheorie neben Teilchen mit positiver (kinetischer) Energie auch solche mit **negativer Energie** zuläßt. Es wird sich herausstellen, dass dies nicht nur mathematisch zulässig, sondern auch physikalisch sinnvoll ist: es ist das erste Indiz für die Existenz der sog. **Antiteilchen**.

(ii) Der 3-Impuls läßt sich schreiben als

$$\vec{p} = \gamma\,\vec{p}_{\rm nr} = m\,\gamma\,\vec{v} = m(v)\,\vec{v}\;,$$

wobei

$$m(v) \equiv m\,\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\;.$$

Dies sieht so aus, als ob die Masse eines Körpers in einem bewegten Bezugssystem zunähme, man spricht von der **relativistischen Massenzunahme**. Das ist aber streng genommen nicht korrekt, da die Masse als Lorentz-Skalar in allen Bezugssystemen denselben Wert annimmt. Was aber zunimmt, ist die **kinetische Energie**:

$$T(v=0) = E_0 = m\,c^2 \le T(v \neq 0) = m\,\gamma\,c^2\;.$$

(iii) Die **relativistische Impulserhaltung** bedingt die **relativistische Energieerhaltung**, denn aus $\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \overrightarrow{const.}$ folgt wegen

$$const. = m^2\,c^2 = p^\mu\,p_\mu = \frac{T^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \frac{T^2}{c^2} - \overrightarrow{const.}^2\;,$$

dass auch $T = const.$ sein muss. Dies sieht zunächst unschuldig aus, hat aber weitreichende Konsequenzen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

3.3.8 Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie

Betrachten wir z.B. eine explodierende Bombe. **Vor** der Explosion ist die **nichtrelativistische** kinetische Energie

$$T^a_{\rm nr} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,(v_i^a)^2 \equiv 0\ ,$$

weil $\vec{v}_i^{\,a} = 0\ \forall\ i$. **Nach** der Explosion gilt aber

$$T^e_{\rm nr} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,(v_i^e)^2 \neq 0\ ,$$

weil die Bestandteile der Bombe in alle Richtungen davonfliegen, $\vec{v}_i^{\,e} \neq 0$. Offenbar ist eine andere Energieform in kinetische Energie umgewandelt worden.

Da auch bei einer explodierenden Bombe die Impulserhaltung gilt, würden wir für die **relativistische** kinetische Energie nun nach dem im vorangegangenen Abschnitt Gesagten folgern, dass

$$T^a = T^e = const.\ .$$

Aus dieser Gleichung würden wir **naiv** schließen, dass

$$0 = T^e - T^a = \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\,\gamma_i^e\,c^2 - m_i\,\gamma_i^a\,c^2\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\,c^2\,(\gamma_i^e - 1)\ \ ,$$

da am Anfang $\vec{v}_i^{\,a} \equiv 0$, also $\gamma_i^a \equiv 1$. Nun erhalten wir einen Widerspruch, da diese Gleichung nur für $\gamma_i^e = 1\ \forall\ i$ erfüllbar ist, also auch $\vec{v}_i^{\,e} = 0$, d.h. die Bombe wäre gar nicht explodiert!

Bei dieser naiven Rechnung haben wir implizit davon Gebrauch gemacht, dass sich die Massen der einzelnen Bombenbestandteile nicht ändern. Diese Annahme ist aber zu restriktiv. Wir erlauben, dass $m_i^e \neq m_i^a$ und erhalten mit $\gamma_i^a = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= T^e - T^a \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(m_i^e\,\gamma_i^e\,c^2 - m_i^a\,\gamma_i^a\,c^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left[m_i^e\,c^2\,(\gamma_i^e - 1) - \left(m_i^a\,c^2 - m_i^e\,c^2\right)\right]\ \ , \end{aligned}$$

bzw., mit den Definitionen $\Delta m_i \equiv m_i^a - m_i^e$ und $\Delta E_i \equiv \Delta m_i\,c^2$,

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta E_i = \sum_{i=1}^{N} m_i^e\,c^2\,(\gamma_i^e - 1) \simeq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i^e\,(v_i^e)^2 + O\left(\frac{(v_i^e)^4}{c^4}\right) > 0\ .$$

Dies bedeutet, dass wenigstens für **ein** Teilchen, z.B. das j-te unter den Bombenbestandteilen

$$\Delta E_j = \Delta m_j\,c^2 = \left(m_j^a - m_j^e\right)c^2 > 0$$

gelten muss. Offenbar ist ein **Massenverlust** des Teilchens aufgrund der Explosion aufgetreten, **Masse ist in Bewegungsenergie umgewandelt worden**. Dies ist die berühmt gewordene Beziehung zwischen Masse und Energie,

$$E = m\,c^2 \ . \tag{3.64}$$

Aber wo kommt diese Energiedifferenz tatsächlich her? Natürlich hat sich die Masse der **elementaren** Konstituenten der Materie **nicht** verändert, wohl aber ihre **Bindungsenergie**, die angibt, wie stark die einzelnen Konstituenten aneinander gebunden sind. Diese ist im Grunde genommen eine Form der potentiellen Energie. Bei einer konventionellen Bombe wird **chemische** Bindungsenergie der Moleküle, bei einer Atombombe **nukleare** Bindungsenergie der Nukleonen im Atomkern freigesetzt. Dabei wird ein energetisch schwächer gebundener Zustand in einen energetisch stärker gebundenen überführt. Die **Differenz** in der Bindungsenergie, also in der potentiellen Energie, wird in kinetische Energie umgewandelt.

Es gibt jedoch auch einen Prozess, bei dem die **komplette** Masse der beteiligten Reaktionspartner in Energie umgewandelt wird. Dies ist die sog. **Vernichtung von Teilchen und Antiteilchen**. Betrachten wir z.B. die Reaktion

$$e^- + e^+ \to 2\,\gamma \ ,$$

d.h. ein Elektron und sein Antiteilchen, das Positron, vernichten sich und erzeugen zwei Lichtquanten (es müssen aufgrund der Impulserhaltung zwei sein, da ein einzelnes Lichtquant in Ruhe keine Energie trägt). Wenn wir annehmen, dass Elektron und Positron vor der Vernichtung in Ruhe waren, so lautet die Energiebilanz wie folgt:

$$E_{e^-e^+} = m_{e^-}\,c^2 + m_{e^+}\,c^2 = 2\,m_{e^-}\,c^2 = 2 \cdot 511\ \text{keV} = 1,022\ \text{MeV} \equiv E_{2\gamma} \ .$$

Da Lichtquanten keine Ruheenergie besitzen, $m_\gamma\,c^2 \equiv 0$, liegt die komplette Energie als kinetische Energie vor.

Literaturverzeichnis

[1] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik* (Springer, Berlin)

[2] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* (Springer, Berlin)

[3] W. Greiner, *Theoretische Physik Band 1: Mechanik I* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)

[4] R. Jelitto, *Theoretische Physik 1: Mechanik I* (AULA-Verlag, Wiesbaden)

[5] R. Dreizler, C. Lüdde, *Theoretische Physik 1: Theoretische Mechanik* (Springer, Berlin)

[6] J.M. Knudsen, P.G. Hjorth, *Elements of Newtonian Mechanics* (Springer, Berlin)

[7] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)