

Theoretische Physik II: Klassische Mechanik

Dirk H. Rischke

Sommersemester 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Der starre Körper	1
1.1	Definition des starren Körpers	1
1.2	Mehrfachintegrale	3
1.3	Rotation um eine Achse	7
1.3.1	Trägheitsmoment	7
1.3.2	Energiesatz	9
1.3.3	Drehimpulssatz	10
1.3.4	Physikalisches Pendel	12
1.3.5	Der Satz von Steiner	14
1.3.6	Rollbewegung	15
1.4	Trägheitstensor	17
1.4.1	Kinematik des starren Körpers	17
1.4.2	Kinetische Energie des starren Körpers	18
1.4.3	Eigenschaften des Trägheitstensors	20
1.4.4	Drehimpuls des starren Körpers	26
1.5	Kreiseltheorie	30
1.5.1	Eulersche Gleichungen	30
1.5.2	Eulersche Winkel	31
1.5.3	Kräftefreier Kreisel	34
1.5.4	Kräftefreier symmetrischer Kreisel	35
2	Lagrange-Mechanik	43
2.1	Zwangskräfte, Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten	43
2.1.1	Zwangskräfte	43
2.1.2	Zwangsbedingungen	44
2.1.3	Klassifizierung von Zwangsbedingungen	45
2.1.4	Generalisierte Koordinaten	48
2.2	Das d'Alembertsche Prinzip	50
2.2.1	Das Prinzip der virtuellen Arbeit	50
2.2.2	Holonome Systeme: Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art	53
2.2.3	Anwendungen der Lagrange-Gleichungen zweiter Art	58
2.2.4	Generalisierter Impuls und zyklische Koordinaten	63
2.2.5	Nicht-holonome Systeme: Die Lagrange-Gleichungen erster Art	66
2.2.6	Anwendungen der Lagrange-Gleichungen erster Art	68
2.3	Das Hamiltonsche Prinzip	73
2.3.1	Das Wirkungsfunktional	73
2.3.2	Das Hamiltonsche Prinzip	75
2.3.3	Äquivalenz des Hamiltonschen Prinzips zum d'Alembertschen Prinzip	76

2.3.4	Variationsrechnung	77
2.3.5	Euler-Lagrange-Gleichungen	83
2.3.6	Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf nicht-konservative Systeme	87
2.4	Erhaltungssätze	87
2.4.1	Integrale der Bewegung	87
2.4.2	Das Noethersche Theorem	89
2.4.3	Homogenität in der Zeit	92
2.4.4	Homogenität im Raum	94
2.4.5	Isotropie des Raumes	96
3	Hamilton-Mechanik	99
3.1	Legendre-Transformation	99
3.2	Kanonische Gleichungen	103
3.2.1	Herleitung der kanonischen Gleichungen	103
3.2.2	Der Phasenraum	105
3.2.3	Einfache Beispiele	107
3.3	Modifiziertes Hamiltonsches Prinzip	112
3.4	Poisson-Klammern	114
3.4.1	Definition der Poisson-Klammer	114
3.4.2	Fundamentale Poisson-Klammern	115
3.4.3	Formale Eigenschaften	118
3.4.4	Integrale der Bewegung	120
3.4.5	Der Bezug zur Quantenmechanik	121
3.5	Kanonische Transformationen	122
3.5.1	Definition	122
3.5.2	Die erzeugende Funktion	124
3.5.3	Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion	128
4	Hamilton-Jacobi-Theorie	131
4.1	Motivation	131
4.2	Die Hamilton-Jacobi-Gleichung	132
4.3	Lösungsmethode	133
4.4	Hamiltonsche charakteristische Funktion	136
5	Lagrange-Mechanik für Felder	139
5.1	Der Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen System	139
5.2	Lagrange-Formalismus für kontinuierliche Systeme	141
6	Spezielle Relativitätstheorie	145
6.1	Die Einsteinschen Postulate	145
6.1.1	Ätherhypothese	145
6.1.2	Das Michelson-Morley-Experiment	146
6.1.3	Die Einsteinschen Postulate	149
6.2	Lorentz-Transformationen	150
6.2.1	Der Minkowski-Raum	150

6.2.2	Die Lorentz-Transformation	155
6.2.3	Zeitdilatation	162
6.2.4	Längenkontraktion	162
6.2.5	Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten	163
6.2.6	Das Raum-Zeit-Diagramm (Minkowski-Diagramm)	165
6.3	Kovariante Formulierung der klassischen Mechanik	171
6.3.1	Lorentz-Tensoren	172
6.3.2	Kovariante Formulierung von Naturgesetzen	174
6.3.3	Rechenregeln	174
6.3.4	Differentialoperatoren:	175
6.3.5	Kinematische Grundgrößen	176
6.3.6	Die Newtonsche Grundgleichung in kovarianter Formulierung	177
6.3.7	Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung	178
6.3.8	Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie	180
6.3.9	Kovariante Formulierung der Lagrange-Mechanik für Felder	182

1 Der starre Körper

18.4.2017

Im ersten Teil der Vorlesungsreihe “Theoretische Physik” haben wir die Mechanik eines **einzelnen** Massenpunktes, sowie die Mechanik eines Systems von N Massenpunkten diskutiert. Der erste und – für $N = 2$ – der zweite Fall haben sich als analytisch lösbar herausgestellt. Im Fall $N > 2$ ist i.a. keine analytische Lösung angebar. Es gibt aber eine Ausnahme, den sog. **starren Körper**, den wir in diesem Kapitel besprechen.

1.1 Definition des starren Körpers

Ein sog. starrer Körper ist ein System von N Massenpunkten, deren Abstände untereinander stets konstant bleiben,

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \equiv |\vec{r}_{ij}| = r_{ij} = \text{const.} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.1)$$

vgl. Abb. 1.1. Der starre Körper ist also per Definition **nicht** deformierbar.

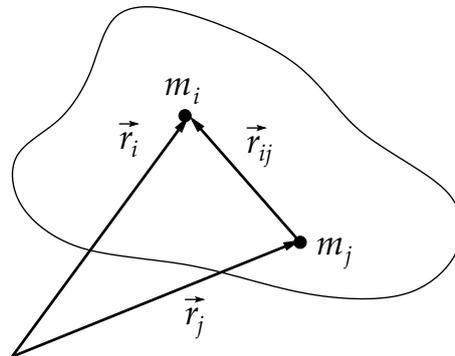


Abbildung 1.1: Der starre Körper.

Wieviele **Freiheitsgrade** hat ein starrer Körper? Ein **einzelner** Massenpunkt hat **drei** Freiheitsgrade, nämlich die drei kartesischen Koordinaten seines Ortsvektors, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$. **Zwei** Massenpunkte haben demnach **sechs** Freiheitsgrade, nämlich jeweils die drei kartesischen Koordinaten ihrer Ortsvektoren, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ und $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$. Falls diese zwei Massenpunkte jedoch einen **starren Körper** bilden, so gibt es die **Zwangsbedingung** (1.1), also $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \equiv r_{12} = \text{const.}$, d.h. der Abstand der beiden Massenpunkte voneinander bleibt stets konstant. Damit kann man einen der sechs Freiheitsgrade eliminieren, indem man die Zwangsbedingung nach einer der kartesischen Koordinaten auflöst, also diese durch den vorgegebenen Wert von r_{12} und die anderen

1 Der starre Körper

fünf ausdrückt, z.B.

$$z_1 = z_2 \pm \sqrt{r_{12}^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}.$$

Es bleiben also **fünf** Freiheitsgrade.

Ein starrer Körper aus **drei** Massenpunkten hätte demnach $5 + 3 = 8$ Freiheitsgrade, die fünf für zwei der Massenpunkte plus die drei Freiheitsgrade $\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)^T$ für den dritten. Es gibt aber **zwei zusätzliche** Zwangsbedingungen der Form (1.1), nämlich $|\vec{r}_1 - \vec{r}_3| \equiv r_{13} = \text{const.}$ und $|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| \equiv r_{23} = \text{const.}$, mit denen man zwei der acht Freiheitsgrade eliminieren kann. Damit verbleiben **sechs** Freiheitsgrade.

Jeder weitere Massenpunkt j würde mit den kartesischen Koordinaten seines Ortsvektors $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)^T$ drei zusätzliche Freiheitsgrade beitragen, aber im starren Körper gäbe es auch drei weitere Zwangsbedingungen der Form (1.1), nämlich dass die Abstände zwischen dem neuen Massenpunkt und den drei schon vorhandenen stets konstant bleiben müssen,

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_1| \equiv r_{j1} = \text{const.}, \quad |\vec{r}_j - \vec{r}_2| \equiv r_{j2} = \text{const.}, \quad |\vec{r}_j - \vec{r}_3| \equiv r_{j3} = \text{const.}.$$

Mit diesen Zwangsbedingungen kann man die zusätzlichen Freiheitsgrade x_j, y_j, z_j durch die schon vorhandenen ausdrücken. Damit erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade des starren Körpers nicht weiter; ein **starrer Körper** hat also genau **sechs Freiheitsgrade**.

Dies bringt eine enorme Vereinfachung mit sich: man kann also auch makroskopische Körper, die aus $N \sim 10^{23}$ Atomen bestehen, beschreiben, wenn man die Modellvorstellung des starren Körpers zu Hilfe nimmt. Allerdings sei an dieser Stelle gleich gesagt, dass **alle** makroskopischen Körper deformierbar sind, wenn man genügend Kraft aufwendet. Und selbst in einem als hinreichend starr erscheinenden Körper wie ein Tisch oder ein Stuhl führen die Atome Schwingungen aus, ändern also ihre Abstände. Auf makroskopischen Längenskalen spielt diese mikroskopische Bewegung aber keine Rolle, man darf also in guter Näherung die Modellvorstellung des starren Körpers anwenden.

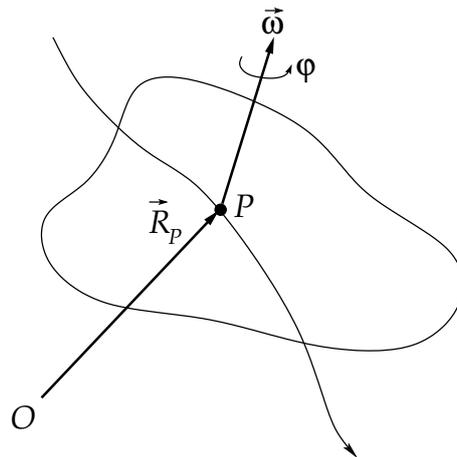


Abbildung 1.2: Die sechs Freiheitsgrade des starren Körpers.

Die sechs Freiheitsgrade des starren Körpers kann man wie folgt festlegen:

1. Drei Freiheitsgrade der **Translation** eines fest vorgegebenen Punktes P . Es spielt keine Rolle, ob er im oder außerhalb des starren Körpers gelegen ist, solange er relativ zu ihm durch Bedingungen der Form (1.1) fixiert ist. Dieser Punkt P ist i.a. **nicht** identisch mit dem Schwerpunkt S des Körpers. Er wird durch seinen Ortsvektor $\vec{R}_P = (X_P, Y_P, Z_P)^T$ festgelegt und seine Translationsbewegung durch die Trajektorie $\vec{R}_P(t)$.
2. Drei Freiheitsgrade der **Rotation** des starren Körpers **um** diesen Punkt, vgl. Abb. 1.2. Hierbei ist $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ der **Drehvektor**, der diese Rotation beschreibt. Er hat drei Komponenten, also ebenfalls drei Freiheitsgrade. Diese sind Funktionen der Zeit, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

Spezialfälle:

1. **Kreisel:** Hierbei findet keine Translationsbewegung des Punktes P statt. Es verbleiben also nur noch die **drei Freiheitsgrade der Rotation** um diesen Punkt.
2. **Physikalisches Pendel:** Hierbei wird nicht nur der Punkt P , sondern auch noch die Drehachse durch diesen Punkt in ihrer **Richtung** (aber nicht notwendigerweise in ihrem Betrag) fixiert, $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega = \overrightarrow{const.}$, $\dot{\omega} = 0$. Es verbleibt lediglich **ein** Freiheitsgrad, nämlich der **Drehwinkel** φ um diese Achse. Die Winkelgeschwindigkeit ist gerade gleich dem Betrag des Drehvektors, $\dot{\varphi} = \omega$. Diese muss nicht zeitlich konstant sein.

1.2 Mehrfachintegrale

Wichtige Größen für N -Teilchensysteme sind

1. die **Gesamtmasse** $M = \sum_{i=1}^N m_i$,
2. der **Schwerpunkt** $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$,
3. der **Gesamtimpuls** $\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$,
4. der **Gesamtdrehimpuls** $\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$.

Für $N \sim 10^{23}$, wie bei typischen makroskopischen Körpern, ist es zweckmäßig, zum **Kontinuums** $N \rightarrow \infty$ überzugehen. Dazu zerlegen wir den Körper in kleine Teilvolumina $\Delta V_i(\vec{r}_i)$ mit Masse $\Delta m_i(\vec{r}_i)$ an der Position \vec{r}_i , vgl. Abb. 1.3.

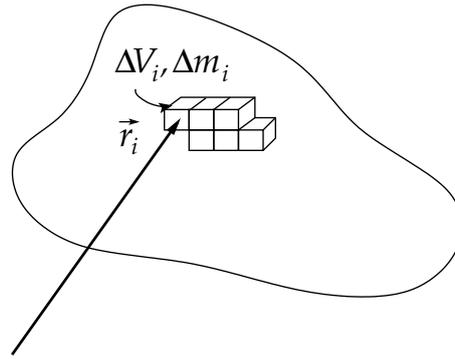


Abbildung 1.3: Zerlegung des starren Körpers in Teilvolumina.

Die Gesamtmasse schreiben wir als

$$M = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \Delta V_i(\vec{r}_i) \frac{\Delta m_i(\vec{r}_i)}{\Delta V_i(\vec{r}_i)}.$$

Nun gehen wir zum Kontinuumsmites $N \rightarrow \infty$ über. Dabei bleibt das Gesamtvolumen V und die Gesamtmasse des Körpers natürlich unverändert, also muss $\forall i \quad \Delta V_i, \Delta m_i \rightarrow 0$ gehen. Wir definieren die **Massendichte**

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V(\vec{r})}. \quad (1.2)$$

Da wir zum Kontinuumsmites übergehen, brauchen wir die einzelnen Teilvolumina und Teilmassen nicht mehr mit i kennzeichnen: sie werden alle verschwindend klein und ihre Position ist durch den Vektor \vec{r} festgelegt, der **kontinuierliche** Werte annimmt.

Die im **infinitesimalen** Volumenelement $dV \equiv d^3\vec{r} \equiv dx dy dz$ an der Position \vec{r} befindliche Masse ist dann $\rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$. Die Gesamtmasse des Körpers erhalten wir, wenn wir über das Volumen integrieren,

$$M = \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}). \quad (1.3)$$

Ganz analog erhalten wir für den Schwerpunkt und den Gesamtimpuls

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{r}, \quad (1.4)$$

$$\vec{P} = \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}). \quad (1.5)$$

Die hier auftretenden Integrale sind sog. **Mehrfachintegrale**, mit deren Berechnung wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Der einfachste Typ von Mehrfachintegrale ist der, bei dem **alle** Integrationsgrenzen

konstant sind. Dann kann man die Integrale einfach nacheinander ausführen, z.B.:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} dx \rho(x, y, z) \\
 &= \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{b_1}^{b_2} dy F(y, z; a_1, a_2) \\
 &= \int_{c_1}^{c_2} dz G(z; a_1, a_2, b_1, b_2) \\
 &= M(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) .
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Hierbei haben wir die funktionalen Abhängigkeiten (y, z) von den parametrischen Abhängigkeiten (Integrationsgrenzen a_1, a_2, \dots) durch ein Semikolon getrennt. Falls der Integrand stetig ist und die Integrationsgrenzen konstant sind, spielt die Reihenfolge der Integrationen keine Rolle, man darf sie auch vertauschen.

Beispiel: Masse einer rechteckigen Luftsäule der Grundfläche $F = ab$ und Höhe h über der Erdoberfläche, vgl. Abb. 1.4.

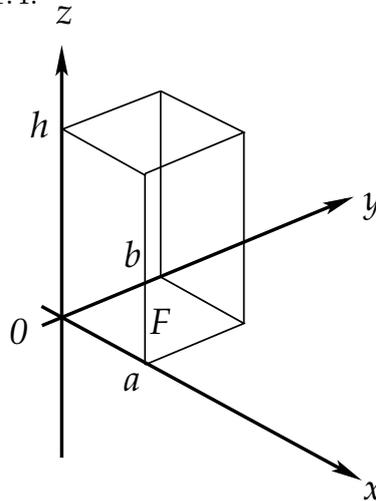


Abbildung 1.4: Rechteckige Luftsäule der Grundfläche $F = ab$ und Höhe h .

Aufgrund der Schwerkraft nimmt die Massendichte der Luft **exponentiell** mit der Höhe ab,

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/h_e} ,$$

wobei ρ_0 die Massendichte an der Erdoberfläche (bei $z = 0$) ist und h_e die Höhe über der Erdoberfläche, bei der die Massendichte $1/e$ -tel ihres Wertes an der Erdoberfläche annimmt. Dann folgt aus Gl. (1.6)

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^h dz \int_0^b dy \int_0^a dx \rho_0 e^{-z/h_e} = \int_0^h dz \int_0^b dy a \rho_0 e^{-z/h_e} = \int_0^h dz a b \rho_0 e^{-z/h_e} \\
 &= \rho_0 F \int_0^h dz e^{-z/h_e} = -\rho_0 F h_e (e^{-h/h_e} - 1) = M_\infty (1 - e^{-h/h_e}) ,
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

wobei wir die Masse einer **unendlich** hohen Luftsäule ($h \rightarrow \infty$) mit $M_\infty \equiv \rho_0 F h_e$ bezeichnet haben. Die Masse einer unendlich hohen Luftsäule mit **realistischer**, exponentiell abklingender Massendichte ist also gleich der einer Luftsäule der Höhe h_e mit **konstanter** Massendichte ρ_0 . Die Masse (1.7) ist als Funktion der Höhe h in Abb. 1.5 dargestellt.

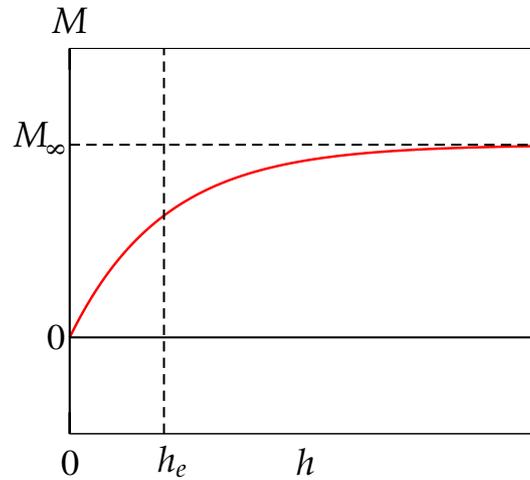


Abbildung 1.5: Masse einer Luftsäule als Funktion der Höhe h .

Beim zweiten Typ von Mehrfachintegralen, der von uns von Bedeutung ist, sind die Integrationsgrenzen nicht alle konstant, z.B.

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} dy \int_{f_1(y,z)}^{f_2(y,z)} dx \rho(x, y, z) \\
 &= \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} dy F(y, z; f_1(y, z), f_2(y, z)) \\
 &= \int_{c_1}^{c_2} dz G(z; g_1(z), g_2(z)) \\
 &= M(c_1, c_2) .
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Man integriert zunächst über die Variable, die in keiner anderen Integralgrenze vorkommt, in der obigen Gleichung also x . Dann integriert man über die Variable, die als nächstes in keiner anderen Integralgrenze vorkommt, etc. Zum Schluß sollte wenigstens ein Integral mit festen Grenzen übrig bleiben, das man direkt ausführen kann.

Die funktionalen und parametrischen Abhängigkeiten lassen sich nicht exakt trennen, da die Integrationsgrenzen nun Funktionen der Integrationsvariablen sind. Nichtsdestotrotz haben wir die entsprechenden Argumente der Funktionen F und G wieder mit Semikola voneinander getrennt.

Als Beispiel für diesen Typ von Integral verweisen wir auf die Berechnung des Flächeninhalts des Kreises in Abschnitt 1.5.2 der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”. Berechnet man diesen in kartesischen Koordinaten, so hängt die erste (innere) Integration von der Integrationsvariablen der zweiten (äußeren) Integration ab. Berechnet man den Flächeninhalt dagegen in Polarkoordinaten, so entfällt diese Abhängigkeit und man erhält wieder ein Mehrfachintegral vom ersten Typ.

1.3 Rotation um eine Achse

Wir untersuchen im folgenden zunächst die einfachste Bewegungsform des starren Körpers, nämlich die **Rotation** um eine **in ihrer Richtung festgelegte** Drehachse. Dann gibt es lediglich einen **einzigen** Freiheitsgrad, nämlich den **Drehwinkel** φ um diese Achse. Dieses System hatten wir oben als **physikalisches Pendel** bezeichnet.

1.3.1 Trägheitsmoment

Als N -Teilchensystem hat der starre Körper die **kinetische Energie**

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2.$$

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $\vec{\omega}$ durch den Ursprung geht. Für die Geschwindigkeit eines Massenpunktes bei einer Drehbewegung um eine Achse durch den Ursprung gilt Gl. (2.15) der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden", nun allerdings für **jeden** Massenpunkt i im starren Körper, vgl. Abb. 1.6,

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (1.9)$$

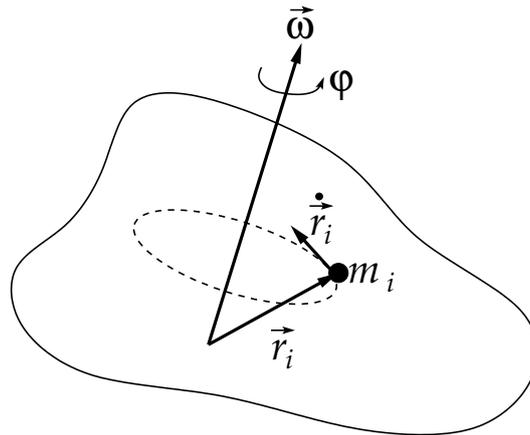


Abbildung 1.6: Drehbewegung des starren Körpers um eine feste Achse, die durch den Ursprung geht.

Daraus folgt für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \omega^2 (\hat{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \equiv \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (1.10)$$

wobei wir das sog. **Trägheitsmoment**

$$J = \sum_{i=1}^N m_i (\hat{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \quad (1.11)$$

um die durch $\hat{\omega}$ definierte Achse eingeführt haben. Das Trägheitsmoment ist **zeitlich konstant**, da sich weder m_i noch $\hat{\omega}$ ändern (die Richtung der Drehachse ist fest vorgegeben). Es ist damit, für eine vorgegebene Drehachse, eine **körperspezifische** Eigenschaft, wie auch die Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$ des Körpers.

Im Kontinuumsmlimes lautet das Trägheitsmoment für eine Drehung um die durch $\hat{\omega}$ vorgegebene Achse

$$J = \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\hat{\omega} \times \vec{r})^2 . \quad (1.12)$$

Auch hier sieht man, dass J eine ‘‘Materialkonstante’’ darstellt, genau wie die Masse, da $\hat{\omega} = \overrightarrow{const.}$, das Integral J also einfach eine skalare Größe mit konstanter Maßzahl darstellt.

Für eine Drehung um die z -Achse gilt $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)^T$ und

$$\hat{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

also $(\hat{\omega} \times \vec{r})^2 = x^2 + y^2$. Dies ist gerade das Quadrat des transversalen Abstands von der Drehachse.

Als **Beispiele** berechnen wir die Trägheitsmomente einiger Körper um feste Achsen:

1. **Kugel mit homogener Massenverteilung.** Es empfiehlt sich, aufgrund der Symmetrie des Problems in Kugelkoordinaten zu rechnen. Wir nehmen die z -Achse als Drehachse, aber aufgrund der Kugelsymmetrie ist das Trägheitsmoment um **alle** Achsen dasselbe. Die Massendichte ist

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 , & r \leq R , \\ 0 , & r > R . \end{cases}$$

Der transversale Abstand von der z -Achse ist

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi = r^2 \sin^2 \vartheta .$$

Mit dem infinitesimalen Volumenelement in Kugelkoordinaten, Gl. (1.169) der Vorlesung ‘‘Theoretische Physik I: Mathematische Methoden’’, erhalten wir ($x \equiv \cos \vartheta$, $dx = -\sin \vartheta d\vartheta$)

$$\begin{aligned} J &= \int_V d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (x^2 + y^2) \\ &= \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho_0 r^2 \sin^2 \vartheta \\ &= \rho_0 \int_0^R dr r^4 \int_{-1}^1 dx (1 - x^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \rho_0 \frac{R^5}{5} \left(x - \frac{x^3}{3} \right)_{-1}^1 = \frac{8\pi}{15} \rho_0 R^5 \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \frac{2}{5} R^2 \equiv \frac{2}{5} M R^2 , \end{aligned} \quad (1.13)$$

wobei wir die Gesamtmasse der Kugel, $M = \rho_0 V = \rho_0(4\pi R^3/3)$, benutzt haben.

2. **Zylinder mit homogener Massenverteilung.** Der Zylinder habe die Länge L und den Radius R . Nicht alle Drehachsen haben das gleiche Trägheitsmoment. Wir berechnen dasjenige für die Drehung um die Längsachse des Zylinders, vgl. Abb. 1.7.

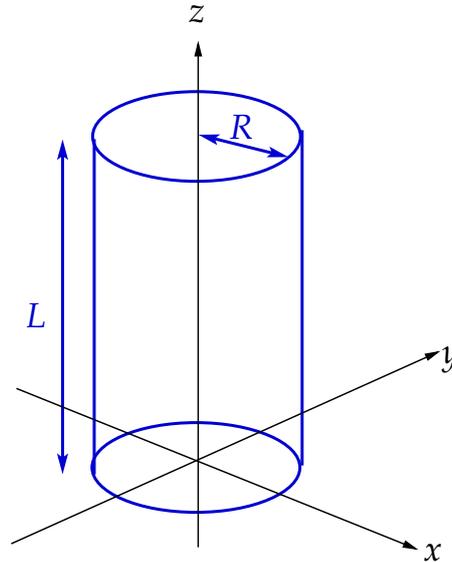


Abbildung 1.7: Koordinatensystem zur Berechnung des Trägheitsmoments des Zylinders bei Drehung um seine Längsachse.

Wir rechnen zweckmäßigerweise in Zylinderkoordinaten, vgl. Gl. (1.148) der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”,

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz \rho_0 \rho^2 \\
 &= 2\pi L \rho_0 \int_0^R d\rho \rho^3 = 2\pi L \rho_0 \frac{R^4}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \pi R^2 L \rho_0 R^2 = \frac{1}{2} M R^2, \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

wobei wir die Gesamtmasse des Zylinders, $M = \rho_0 V = \rho_0 \pi R^2 L$, benutzt haben.

1.3.2 Energiesatz

Wir nehmen an, dass alle äußeren Kräfte konservativ sind, also ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ existiert, aus dem diese Kräfte berechnet werden können. Da das System aber nur einen einzigen Freiheitsgrad, den Drehwinkel φ , besitzt, kann das Potential auch nur von diesem Freiheitsgrad abhängen, $V(\varphi)$. Es gilt der **Energieerhaltungssatz**

$$E = T + V = \frac{1}{2} J \omega^2 + V(\varphi) = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = \text{const.} \quad (1.15)$$

Mit der Ersetzung $\varphi \rightarrow x$, $J \rightarrow m$ entspricht dies der Gesamtenergie bei der **eindimensionalen** Bewegung eines Massenpunktes. Für eindimensionale Systeme lassen sich

die Trajektorien direkt aus dem Energieerhaltungssatz ableiten, ohne die Newtonschen Bewegungsgleichungen benutzen zu müssen. Wir haben davon schon beim Keplerproblem Gebrauch gemacht, um die Bewegung der Planeten in Radialrichtung zu bestimmen. Nach **Variablentrennung**, vgl. Gl. (2.177) der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”, lautet der Energieerhaltungssatz (1.15)

$$dt = \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J} [E - V(\varphi)]}},$$

wobei wir gegenüber besagter Gl. (2.177) die Ersetzungen $r \rightarrow \varphi$, $m \rightarrow J$ und $U(r) \rightarrow V(\varphi)$ machen müssen. Die Lösung $t(\varphi)$ ist damit durch Integration sofort erhältlich,

$$t - t_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{J} [E - V(\varphi')]}}.$$

Für $t > t_0$ ist die linke Seite dieser Gleichung stets positiv, deswegen ist das positive Vorzeichen zu wählen, wenn φ mit der Zeit anwächst, $\varphi > \varphi_0$, bzw. das negative, wenn φ mit der Zeit kleiner wird, $\varphi < \varphi_0$. Durch Invertieren erhält man dann den Drehwinkel als Funktion der Zeit, $\varphi(t)$.

1.3.3 Drehimpulssatz

Im allgemeinen ist der Drehimpuls \vec{L} nicht parallel zur Drehachse $\vec{\omega}$. Wir betrachten im folgenden jedoch die Komponente von \vec{L} parallel zu $\vec{\omega}$, vgl. Abb. 1.8,

$$\vec{L}_\omega = \vec{L} \cdot \hat{\omega} \hat{\omega}. \quad (1.16)$$

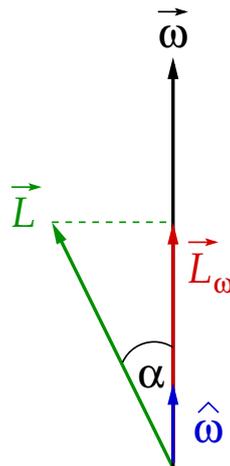


Abbildung 1.8: Relative Orientierung von \vec{L} und $\vec{\omega}$ und der Vektor \vec{L}_ω .

Es gilt mit der zyklischen Vertauschbarkeit des Spatprodukts und mit Gl. (1.9)

$$\begin{aligned}
 L_\omega &= \vec{L} \cdot \hat{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) \cdot \hat{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i (\hat{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i (\hat{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\hat{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \omega \\
 &\equiv J \omega = J \dot{\varphi},
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

wobei wir die Definition (1.11) des Trägheitsmoments benutzt haben.

Wir können daraus eine Bewegungsgleichung für den Drehwinkel φ ableiten, wenn wir den allgemeinen Drehimpulssatz für ein beliebiges N -Teilchensystem, Gl. (3.7) der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden", und die Tatsache, dass die Richtung der Drehachse konstant ist, $\dot{\hat{\omega}} = 0$, zu Hilfe nehmen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\hat{\omega} \cdot \vec{L}) &= \dot{L}_\omega = J \ddot{\varphi} \\
 &= \hat{\omega} \cdot \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\text{ex})}) \cdot \hat{\omega} \equiv M_\omega^{(\text{ex})} \\
 &= \sum_{i=1}^N (\hat{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_i^{(\text{ex})}.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Den letzten Ausdruck können wir unter Beachtung von Abb. 1.9 noch vereinfachen, wenn

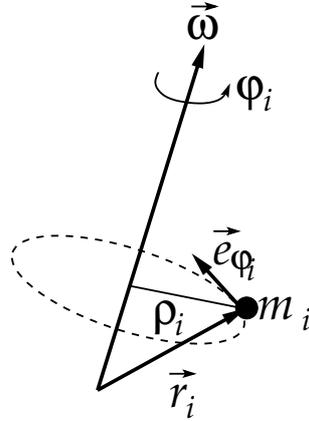


Abbildung 1.9: Zum Drehimpulssatz.

wir die Drehachse in z -Richtung legen und Zylinderkoordinaten verwenden. Dann gilt

$$\hat{\omega} \times \vec{r}_i = (-y_i, x_i, 0)^T = \rho_i (-\sin \varphi_i, \cos \varphi_i, 0)^T \equiv \rho_i \vec{e}_{\varphi_i},$$

und wir erhalten

$$J \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^N (\hat{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_i^{(\text{ex})} = \sum_{i=1}^N \rho_i \vec{F}_i^{(\text{ex})} \cdot \vec{e}_{\varphi_i}. \tag{1.19}$$

1 Der starre Körper

Falls das äußere Drehmoment verschwindet, gilt

$$J \ddot{\varphi} = 0 \implies J \dot{\varphi} = J \omega = L_\omega = \text{const.}, \quad (1.20)$$

die Drehimpulskomponente in Richtung der Drehachse ist **erhalten**. Ebenso ist

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}, \quad (1.21)$$

also ist nicht nur (nach Voraussetzung) die Drehrichtung $\hat{\omega}$ sondern auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ **erhalten**. Damit ist auch $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{const.}}$ und $T = J \omega^2 / 2$; die **kinetische Energie** der Rotation bleibt ebenfalls **erhalten**.

Offenbar gibt es eine enge Analogie zwischen der **Translation** und der **Rotation**, die wir in Tabelle 1.1 noch einmal zusammenfassen.

Translation	Rotation
Ort x	Drehwinkel φ
Masse m	Trägheitsmoment J
Geschwindigkeit $v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
Impuls $p = m v$	Drehimpuls $L_\omega = J \omega$
Kraft F	Drehmoment $M_\omega^{(\text{ex})}$
kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m v^2$	kinetische Energie $T = \frac{1}{2} J \omega^2$
Bewegungsgleichung $F = m \ddot{x}$	Bewegungsgleichung $M_\omega^{(\text{ex})} = J \ddot{\varphi}$

Tabelle 1.1: “Übersetzungsregeln” zwischen Translation und Rotation.

1.3.4 Physikalisches Pendel

Das **physikalische Pendel** ist ein starrer Körper, der sich im Schwerfeld der Erde befindet und um eine feste Achse dreht, vgl. Abb. 1.10.

Die Drehachse sei mit der z -Achse identisch. Die auf das i -te Teilchen wirkende Schwerkraft ist

$$\vec{F}_i^{(\text{ex})} = (m_i g, 0, 0)^T,$$

so dass $\vec{F}_i^{(\text{ex})} \cdot \vec{e}_{\varphi_i} = -m_i g \sin \varphi_i$. Der **Drehimpulssatz** (1.19) liefert

$$\begin{aligned} J \ddot{\varphi} &= -g \sum_{i=1}^N \rho_i m_i \sin \varphi_i = -g \sum_{i=1}^N m_i y_i \\ &= -g M Y = -g M R \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.22)$$

wobei wir $\rho_i \sin \varphi_i = y_i$ und die Definition des Schwerpunkts, $M \vec{R} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$, also für die y -Komponente $Y = R \sin \varphi$ von \vec{R} entsprechend $M Y = \sum_{i=1}^N m_i y_i$, benutzt haben. Durch Vergleich mit der Bewegungsgleichung des Fadenpendels oder sog. **mathematischen Pendels**, Gl. (2.75) der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”, schließen wir, dass sich das physikalische Pendel wie ein mathematisches Pendel der Fadenlänge $\ell = J/M R$ verhält.

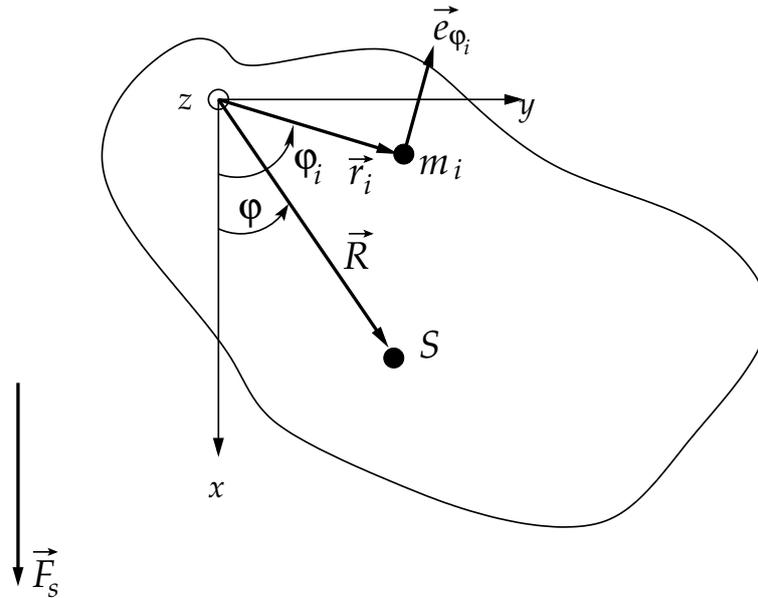


Abbildung 1.10: Das physikalische Pendel.

Für kleine Pendelausschläge, $\sin \varphi \simeq \varphi$, erhalten wir wieder die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator und können die Lösung sofort angeben,

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{g M R}{J}}. \quad (1.23)$$

25.4.2017

Die Bewegungsgleichung (1.22) läßt sich auch über den **Energieerhaltungssatz** (1.15) herleiten. Die potentielle Energie des i -ten Teilchens im Schwerfeld der Erde lautet $V_i^{(\text{ex})} = -m_i g x_i$, so dass das gesamte Potential die Form

$$V = \sum_{i=1}^N V_i^{(\text{ex})} = - \sum_{i=1}^N m_i g x_i = -g M X = -g M R \cos \varphi$$

annimmt, mit der x -Komponente des Schwerpunkts $X = R \cos \varphi$. In der Tat ist das Potential lediglich eine Funktion des Winkels, $V(\varphi)$, wie in Abschnitt 1.3.2 diskutiert. Der Energieerhaltungssatz (1.15) lautet also

$$E = T + V = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - g M R \cos \varphi = \text{const.} .$$

Ableiten nach der Zeit ergibt

$$0 = J \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + g M R \dot{\varphi} \sin \varphi = \dot{\varphi} (J \ddot{\varphi} + g M R \sin \varphi), \quad (1.24)$$

wobei wir für die Pendelbewegung $R = \text{const.}$ ausgenutzt haben. I.a. ist $\dot{\varphi} \neq 0$, so dass wir aus Gl. (1.24) wieder die Bewegungsgleichung (1.22) erhalten.

1.3.5 Der Satz von Steiner

Der **Satz von Steiner** erlaubt die Bestimmung des Trägheitsmoments J um eine beliebige Achse, wenn das Trägheitsmoment J_S um eine dazu parallele Achse durch den Schwerpunkt bekannt ist,

$$J = J_S + M S^2, \quad (1.25)$$

wobei S der senkrechte Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse ist, vgl. Abb. 1.11.

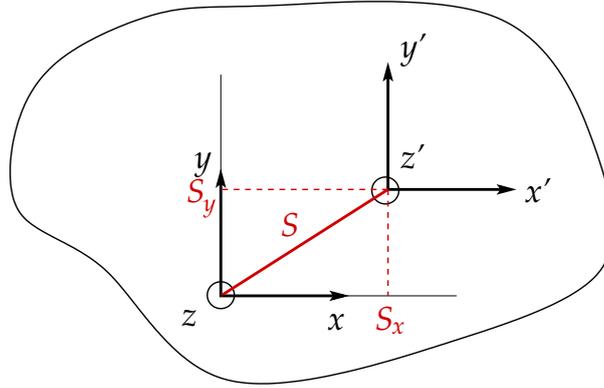


Abbildung 1.11: Zum Satz von Steiner.

Beweis: Die Drehachse, um die das Trägheitsmoment J bestimmt werden soll, zeige in Richtung der z -Achse. Die Drehachse durch den Schwerpunkt, um die das Trägheitsmoment des Körpers gleich J_S ist, ist identisch mit der z' -Achse eines um S in der (x, y) -Ebene verschobenen Koordinatensystems mit Koordinaten x', y', z' , vgl. Abb. 1.11. Es gilt

$$J = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_S = \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2).$$

Die Koordinaten \vec{r}_i' des i -ten Massenpunktes im verschobenen Koordinatensystem hängen mit den Koordinaten \vec{r}_i im ursprünglichen System wie folgt zusammen:

$$x_i = x_i' + S_x, \quad y_i = y_i' + S_y, \quad z_i = z_i'.$$

Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + 2x_i' S_x + S_x^2 + y_i'^2 + 2y_i' S_y + S_y^2) \\ &= J_S + \sum_{i=1}^N m_i (S_x^2 + S_y^2) + 2 \left(S_x \sum_{i=1}^N m_i x_i' + S_y \sum_{i=1}^N m_i y_i' \right) \\ &= J_S + M S^2 + 2 (S_x M X' + S_y M Y') \\ &= J_S + M S^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass der Schwerpunkt $\vec{R}' \equiv (X', Y', Z')^T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i'$ im verschobenen System mit dem Ursprung identisch ist, $\vec{R}' \equiv 0$, q.e.d.

Korollar: Man betrachte die Trägheitsmomente eines Körpers um einen Satz von parallelen Achsen. Dann ist das kleinste Trägheitsmoment dasjenige, für das die Achse durch den Schwerpunkt geht oder ihm am nächsten kommt.

1.3.6 Rollbewegung

Wir betrachten einen auf einer **schiefen Ebene abrollenden Zylinder**, vgl. Abb. 1.12. Da der Zylinder sowohl eine (eindimensionale) **Translationsbewegung** wie eine **Rotationsbewegung** (um eine im System des Zylinders feste Drehachse) ausführt, könnte man zunächst denken, dass das System **zwei** Freiheitsgrade besitzt. Dies ist aber nicht richtig, da der Zylinder **abrollt** und nicht gleitet. Die Translationsbewegung ist **eindeutig** mit der Rotationsbewegung verknüpft. Das System besitzt also nach wie vor nur einen einzigen Freiheitsgrad.

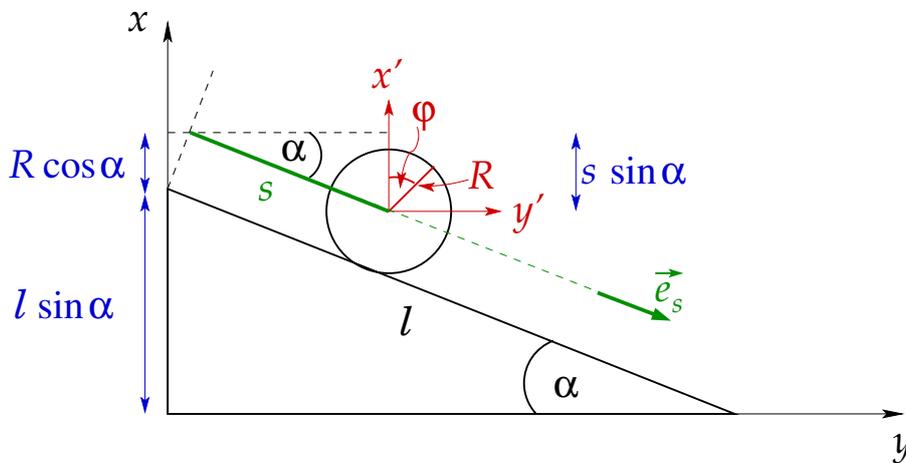


Abbildung 1.12: Der auf einer schiefen Ebene abrollende Zylinder. Die z - und z' -Achsen zeigen in die Zeichenebene hinein.

Im ungestrichenen Koordinatensystem setzt sich die Bewegung jedes einzelnen Massenpunktes aus einem **Rotationsbeitrag** infolge der Drehung um die Zylinderachse und einem **Translationsbeitrag**, der für alle Punkte gleich ist und in Richtung von \vec{e}_s zeigt, zusammen:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_{iR} + \dot{\vec{r}}_{iT} .$$

Für die Drehbewegung gilt Gl. (1.9):

$$\dot{\vec{r}}_{iR} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i .$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Ortsvektor im gestrichenen Koordinatensystem zu nehmen ist. Für die Translation müssen wir die **Abrollbedingung** betrachten. Jedes zurückgelegte infinitesimale Wegstreckenelement ds ist mit einer infinitesimalen Drehwinkeländerung verknüpft:

$$ds = R d\varphi .$$

1 Der starre Körper

Also gilt

$$|\dot{\vec{r}}_{iT}| = \dot{s} = R \dot{\varphi} = R \omega .$$

Die **kinetische Energie** ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[(\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 + \dot{s}^2 + 2 \dot{s} \vec{e}_s \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + R \omega \vec{e}_s \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) . \end{aligned}$$

Der erste Term ist identisch mit der kinetischen Energie der Drehbewegung, $J \omega^2/2$, wie wir sie schon in Abschnitt 1.3.1, Gl. (1.10), kennengelernt haben. Der zweite Term ist die kinetische Energie der Translationsbewegung des Schwerpunkts. Der dritte Term verschwindet, da der Schwerpunkt $\vec{R}' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i$ im gestrichenen Koordinatensystem mit dem Ursprung übereinstimmt, $\vec{R}' = 0$. Wir erhalten also

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 . \quad (1.26)$$

Für den Fall eines **homogenen** Zylinders ist das Trägheitsmoment um seine Längsachse durch Gl. (1.14) gegeben, $J = M R^2/2$, so dass

$$T = \frac{1}{4} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{3}{4} M R^2 \omega^2 \equiv \frac{3}{4} M \dot{s}^2 .$$

Die **potentielle Energie** ergibt sich aus der Tatsache, dass auf jeden Massenpunkt des Zylinders die Schwerkraft wirkt,

$$V = \sum_{i=1}^N V_i^{(\text{ex})} = \sum_{i=1}^N m_i g x_i = g M X ,$$

wobei X die x -Komponente des Schwerpunkts im ungestrichenen System darstellt. Aus Abb. 1.12 ist ersichtlich, dass

$$X = \ell \sin \alpha + R \cos \alpha - s \sin \alpha = (\ell - s) \sin \alpha + R \cos \alpha .$$

Also haben wir für die potentielle Energie

$$V = g M (\ell - s) \sin \alpha + g M R \cos \alpha . \quad (1.27)$$

Der **Energieerhaltungssatz** lautet

$$E = T + V = \frac{3}{4} M \dot{s}^2 + g M (\ell - s) \sin \alpha + g M R \cos \alpha = \text{const.} . \quad (1.28)$$

Die **Bewegungsgleichung** läßt sich durch Ableiten der Energieerhaltung nach der Zeit herleiten,

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{E} = \frac{3}{2} M \dot{s} \ddot{s} - g M \dot{s} \sin \alpha \\ &= \frac{3}{2} M \dot{s} \left(\ddot{s} - \frac{2}{3} g \sin \alpha \right) . \end{aligned}$$

Da i.a. $\dot{s} \neq 0$, lautet die Bewegungsgleichung also

$$\ddot{s} = \frac{2}{3} g \sin \alpha . \quad (1.29)$$

Für einen unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei **gleitenden** Körper lautet die Bewegungsgleichung dagegen

$$\ddot{s} = g \sin \alpha .$$

Dies folgt aus der Newtonschen Bewegungsgleichung mit der **Hangabtriebskraft** $\vec{F}_H \equiv F_H \vec{e}_s$, $F_H = m g \sin \alpha$. Der rollende homogene Zylinder wird also um ein Drittel **weniger** stark beschleunigt als ein reibungsfrei gleitender Körper.

1.4 Trägheitstensor

Bislang haben wir den Fall betrachtet, bei dem **Drehachse festgehalten** wurde, also die **Richtung** des Drehvektors **konstant** blieb, $\hat{\omega} = \overrightarrow{const.}$, und sich lediglich sein Betrag änderte, $\dot{\omega} \neq 0$. In diesem Fall gibt es nur einen **einzigen** Freiheitsgrad, den Drehwinkel.

Nun wollen wir auf **allgemeine** Drehbewegungen zu sprechen kommen, bei denen also auch $\dot{\hat{\omega}} \neq 0$. Es ist klar, dass zur Festlegung der Richtung von $\vec{\omega}$, d.h. von $\hat{\omega}$, **zwei weitere** Freiheitsgrade benötigt werden, so dass das System insgesamt **drei** Freiheitsgrade besitzt (z.B. die kartesischen Komponenten von $\vec{\omega}$). Dieses System haben wir vormals als **Kreisel** bezeichnet.

Da sich die Richtung der Drehachse mit der Zeit **ändert**, reicht die Angabe des Trägheitsmoments bezüglich einer **festen** Drehachse nicht aus. Wir werden somit auf den Begriff des **Trägheitstensors** geführt.

1.4.1 Kinematik des starren Körpers

Wir hatten gesehen, dass die allgemeine Bewegung des starren Körpers sich aus einer **Translation** eines bestimmten, relativ zum Körper fixierten Punktes P und einer **Rotation** um eine Achse durch diesen Punkt zusammensetzt. Wir führen zwei kartesische Bezugssysteme ein:

1. **Raumfestes** Bezugssystem Σ . Hierbei handele es sich um ein Inertialsystem. Der Punkt P habe in diesem System den Ortsvektor $\vec{r}_0(t)$, vgl. Abb. 1.13.
2. **Körperfestes** Bezugssystem Σ' . Der Ursprung von Σ' liege im Punkt P und der Körper rotiere von Σ aus gesehen um eine Achse durch P , vgl. Abb. 1.13.

Für die Ortsvektoren von m_i in Σ und Σ' gilt die Relation

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'_i(t) . \quad (1.30)$$

Für die Geschwindigkeit wenden wir Gl. (2.48) der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden" an,

$$\left. \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt} \right|_{\Sigma} + \left. \frac{d\vec{r}'_i(t)}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'_i(t) .$$

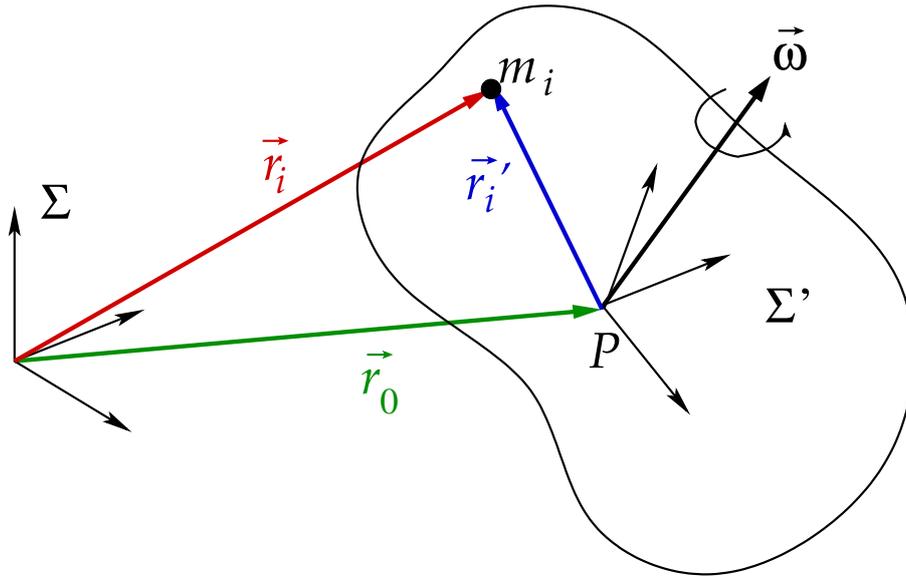


Abbildung 1.13: Definition der beiden Bezugssysteme für die kinematische Beschreibung des starren Körpers.

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet, da $\vec{r}'_i = \overline{\text{const.}}$ vom körperfesten System Σ' aus betrachtet. Wir erhalten also

$$\dot{\vec{r}}_i(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'_i(t) . \quad (1.31)$$

Da Mißverständnisse ausgeschlossen sind, haben wir die Zeitableitung in Σ wieder mit einem Punkt über der abzuleitenden Funktion gekennzeichnet.

Die Bewegung des starren Körpers läßt sich also in eine **Translationsbewegung** des Ursprungs des körperfesten Systems und eine **Drehung** um die **momentane** Drehachse $\vec{\omega}(t)$ durch den Ursprung des körperfesten Systems zerlegen.

1.4.2 Kinetische Energie des starren Körpers

Die **kinetische Energie** lautet mit Gl. (1.31):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 + \dot{\vec{r}}_0 \cdot \left[\vec{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \right] . \end{aligned} \quad (1.32)$$

Wir können zwei typische Spezialfälle unterscheiden:

1. Für den Fall, dass der Körper ausschließlich **rotiert**, aber keine Translationsbewegung ausführt, ist $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ und die kinetische Energie besteht nur aus dem Rotationsanteil

$$T \equiv T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 . \quad (1.33)$$

2. Für den Fall, dass der Körper **translatiert** und um eine Achse **rotiert**, die **durch den Schwerpunkt geht**, ist $\vec{r}_0 \equiv \vec{R}$ und $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \equiv M \vec{R}' \equiv 0$. Dann verschwindet der dritte Term in Gl. (1.32), und die kinetische Energie besteht aus einem Translations- und einem Rotationsanteil,

$$T \equiv T_T + T_R = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 . \quad (1.34)$$

Wir betrachten den Rotationsanteil (1.33) genauer:

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{n=1}^3 \left(\sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{nlm} \omega_l x'_{im} \right) \left(\sum_{r,s=1}^3 \epsilon_{nrs} \omega_r x'_{is} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{l,m,r,s=1}^3 \left(\sum_{n=1}^3 \epsilon_{nlm} \epsilon_{nrs} \right) \omega_l \omega_r x'_{im} x'_{is} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{l,m,r,s=1}^3 (\delta_{lr} \delta_{ms} - \delta_{ls} \delta_{rm}) \omega_l \omega_r x'_{im} x'_{is} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{l,m=1}^3 [\omega_l^2 (x'_{im})^2 - \omega_l \omega_m x'_{il} x'_{im}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{l=1}^3 \omega_l^2 \vec{r}'_i{}^2 - \sum_{l,m=1}^3 \omega_l \omega_m x'_{il} x'_{im} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{l,m=1}^3 \omega_l \omega_m \delta_{lm} \vec{r}'_i{}^2 - \sum_{l,m=1}^3 \omega_l \omega_m x'_{il} x'_{im} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{l,m=1}^3 \omega_l \omega_m (\delta_{lm} \vec{r}'_i{}^2 - x'_{il} x'_{im}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 \omega_l \left[\sum_{i=1}^N m_i (\delta_{lm} \vec{r}'_i{}^2 - x'_{il} x'_{im}) \right] \omega_m \equiv \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 \omega_l J_{lm} \omega_m , \quad (1.35) \end{aligned}$$

wobei wir den sog. **Trägheitstensor**

$$J_{lm} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{lm} \vec{r}'_i{}^2 - x'_{il} x'_{im}) \quad (1.36)$$

eingeführt haben. Der Trägheitstensor ist ein **Tensor zweiter Stufe** und läßt sich als (3×3) -Matrix darstellen. Diese lautet explizit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_i m_i x_i' y_i' & -\sum_i m_i x_i' z_i' \\ -\sum_i m_i y_i' x_i' & \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & -\sum_i m_i y_i' z_i' \\ -\sum_i m_i z_i' x_i' & -\sum_i m_i z_i' y_i' & \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Offenbar handelt es sich um eine **symmetrische** Matrix. Für eine **kontinuierliche Massenverteilung** lautet Gl. (1.36)

$$J_{lm} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\delta_{lm} \vec{r}^2 - x_l x_m), \quad (1.38)$$

wobei wir im Kontinuumsimes die Positionen \vec{r}'_i der Massenpunkte durch die Integrationsvariable \vec{r} ersetzt haben. In Matrixschreibweise lautet die Rotationsenergie (1.35)

$$T_R \equiv \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{J} \vec{\omega}. \quad (1.39)$$

28.4.2017

1.4.3 Eigenschaften des Trägheitstensors

Tensorbegriff

Der Tensorbegriff ist eine Erweiterung des Vektorbegriffes. Unter einem **Tensor k -ter Stufe in einem n -dimensionalen Raum** versteht man ein **Zahlentupel** von n^k Zahlen

$$F \equiv (F_{i_1, i_2, \dots, i_k}), \quad i_j = 1, \dots, n.$$

Die Zahlen F_{i_1, i_2, \dots, i_k} heißen **Komponenten** des Tensors F . Sie tragen k Indizes, von denen jeder von 1 bis n läuft. Es gilt

1. **Tensor nullter Stufe:** (eindimensionale) Zahl, also ein **Skalar**.
2. **Tensor erster Stufe:** n -dimensionaler **Vektor**.
3. **Tensor zweiter Stufe:** $(n \times n)$ -**Matrix**.

Ein Tensor zeichnet sich durch sein **Transformationsverhalten** aus. Ein Tensor k -ter Stufe muss sich bezüglich **jedes** seiner k Indizes wie ein Vektor transformieren. Z.B. gilt bei **Koordinatendrehungen** für einen

$$1. \text{ Tensor erster Stufe: } \bar{x}_j = \sum_{k=1}^3 d_{jk} x_k,$$

$$2. \text{ Tensor zweiter Stufe: } \bar{F}_{jk} = \sum_{l,m=1}^3 d_{jl} d_{km} F_{lm},$$

wobei d_{jk} die **Komponenten** der **Drehmatrix** D sind, die die Koordinaten \vec{r} in die Koordinaten \vec{r}' überführen. In Matrixschreibweise lautet das Transformationsgesetz für einen

1. **Tensor erster Stufe:** $\vec{r}' = D \vec{r}$,

2. **Tensor zweiter Stufe:** $\bar{F} = D F D^T$,

wobei wir $d_{km} \equiv d_{mk}^T$ und die Gesetze der Matrixmultiplikation benutzt haben.

Obwohl man alle Tensoren zweiter Stufe als $(n \times n)$ -Matrizen darstellen kann, sind nicht automatisch alle $(n \times n)$ -Matrizen Tensoren zweiter Stufe, denn das Transformationsverhalten einer beliebigen $(n \times n)$ -Matrix ist nicht festgelegt. Die Frage ist nun, warum \mathbf{J} ein Tensor sein muss (und nicht eine beliebige $(n \times n)$ -Matrix). Die Komponenten (1.36) des Trägheitstensors hängen offenbar von der Wahl des Koordinatensystems Σ' ab. Dreht man das Koordinatensystem, $\Sigma' \rightarrow \bar{\Sigma}$, so ändert sich \mathbf{J} , $\mathbf{J} \rightarrow \bar{\mathbf{J}}$. Wir berechnen den Zusammenhang zwischen \mathbf{J} und $\bar{\mathbf{J}}$. Von der Form her kann sich $\bar{\mathbf{J}}$ nicht von \mathbf{J} unterscheiden, wir müssen aber die Komponenten x'_{ij} durch die gedrehten Komponenten $\bar{x}_{il} \equiv \sum_{r=1}^3 d_{lr} x'_{ir}$ ersetzen:

$$\bar{J}_{lm} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{lm} \bar{r}_i'^2 - \bar{x}_{il} \bar{x}_{im}) = \sum_{i=1}^N m_i \left(\delta_{lm} \bar{r}_i'^2 - \sum_{r,s=1}^3 d_{lr} d_{ms} x'_{ir} x'_{is} \right),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass sich der Betrag von Vektoren unter Drehungen nicht ändert, $\bar{r}_i'^2 \equiv \bar{r}_i'^2$. Nun sind Drehmatrizen **orthogonal**,

$$\delta_{lm} = \sum_{r=1}^3 d_{lr} d_{mr} = \sum_{r,s=1}^3 d_{lr} d_{ms} \delta_{rs},$$

vgl. Gl. (1.95) der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden". Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{J}_{lm} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{r,s=1}^3 d_{lr} d_{ms} \delta_{rs} \bar{r}_i'^2 - \sum_{r,s=1}^3 d_{lr} d_{ms} x'_{ir} x'_{is} \right) \\ &= \sum_{r,s=1}^3 d_{lr} d_{ms} \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{rs} \bar{r}_i'^2 - x'_{ir} x'_{is}) \equiv \sum_{r,s=1}^3 d_{lr} d_{ms} J_{rs}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dies ist das korrekte Transformationsverhalten für einen Tensor zweiter Stufe. In Matrixschreibweise lautet dies

$$\bar{\mathbf{J}} = D \mathbf{J} D^T. \quad (1.41)$$

Eine Drehung des Koordinatensystems darf die kinetische Energie natürlich nicht ändern. Dies ist auch nicht der Fall, wie wir uns sofort überzeugen können, wenn wir berücksichtigen, dass sich auch der Drehvektor unter einer Koordinatendrehung ändert, $\bar{\omega}_j = \sum_{l=1}^3 d_{jl} \omega_l$:

$$\begin{aligned} \bar{T}_R &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \bar{\omega}_j \bar{J}_{jk} \bar{\omega}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m,r,s=1}^3 d_{jl} \omega_l d_{jr} d_{ks} J_{rs} d_{km} \omega_m \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l,m,r,s=1}^3 \omega_l \delta_{lr} J_{rs} \delta_{sm} \omega_m = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 \omega_l J_{lm} \omega_m \equiv T_R, \end{aligned}$$

1 Der starre Körper

wobei wir zweimal die Spaltenorthonormalität der Drehmatrix ausgenutzt haben. Dies läßt sich in Matrixschreibweise viel einfacher zeigen:

$$\bar{T}_R = \frac{1}{2} \bar{\vec{\omega}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\vec{\omega}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T D^T D \mathbf{J} D^T D \vec{\omega} \equiv \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{J} \vec{\omega} ,$$

wobei wir $(D \vec{\omega})^T = \vec{\omega}^T D^T$, $D^T D = \mathbf{1}$ und Gl. (1.41) benutzt haben.

Zusammenhang zwischen Trägheitsmoment und Trägheitstensor

Für Drehungen um eine feste Achse, $\hat{\omega} = \overrightarrow{const.}$, gilt Gl. (1.10),

$$T_R = \frac{1}{2} J \omega^2 .$$

Andererseits gilt auch Gl. (1.39), welche wir mit $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{\omega}$ wie folgt schreiben:

$$T_R = \frac{1}{2} (\hat{\omega}^T \mathbf{J} \hat{\omega}) \omega^2 .$$

Durch Vergleich der beiden Gleichungen ergibt sich

$$J = \hat{\omega}^T \mathbf{J} \hat{\omega} \equiv \sum_{l,m=1}^3 \hat{\omega}_l J_{lm} \hat{\omega}_m . \quad (1.42)$$

Das **Trägheitsmoment** J bezüglich einer **beliebigen Drehachse** $\hat{\omega}$ läßt sich also aus dem **Trägheitstensor** \mathbf{J} berechnen.

Für $\hat{\omega} = (0, 0, 1)^T$ gilt dann

$$J = J_{33} = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) ,$$

wie schon früher gefunden. Die **Diagonalelemente** des Trägheitstensors J_{lm} geben also die **Trägheitsmomente** für Drehungen um die **kartesischen Koordinatenachsen** an. Für beliebige Drehungen ordnet der Trägheitstensor \mathbf{J} über Gl. (1.42) einer Drehung um die durch $\hat{\omega}$ gegebene Achse ein Trägheitsmoment J zu.

Hauptträgheitsachsen

Der Trägheitstensor ist eine symmetrische (3×3) -Matrix. Solche Matrizen lassen sich aufgrund des folgenden Satzes in Diagonalform bringen.

Satz: Sei A eine **symmetrische** $(n \times n)$ -**Matrix**, $A = A^T$, bzw. $a_{lm} = a_{ml}$. Dann existiert eine **orthogonale Matrix** O , $O^T = O^{-1}$, mit der Eigenschaft

$$O A O^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) ,$$

wobei λ_i , $i = 1, \dots, n$, die **Eigenwerte** der Matrix A sind. Für symmetrische Matrizen sind die Eigenwerte reell, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Da orthogonale Matrizen in drei Raumdimensionen synonym für **Drehmatrizen** stehen, gibt es also eine Drehmatrix D mit der Eigenschaft

$$\bar{\mathbf{J}} = D \mathbf{J} D^T = \text{diag}(A, B, C) \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Eine solche orthogonale Transformation bzw. Drehung bezeichnet man als **Hauptachsen-transformation**. Die Eigenwerte A, B, C von \mathbf{J} heißen **Hauptträgheitsmomente**. Die Koordinatenachsen \vec{e}_i , die sich aus den ursprünglichen Koordinatenachsen \vec{e}_i durch Drehung mit der Drehmatrix D ergeben, heißen **Hauptträgheitsachsen**. In diesem Koordinatensystem, dem sog. **Hauptachsensystem**, ist der Trägheitstensor durch die Diagonalmatrix (1.43) gegeben, mit den Eigenwerten von \mathbf{J} , also den Hauptträgheitsmomenten, auf der Hauptdiagonalen.

Trägheitsellipsoid

Man kann sich den Trägheitstensor mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion graphisch veranschaulichen. Man ordnet dazu \mathbf{J} eine **Fläche** im dreidimensionalen Raum zu. Die Bedingung

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \vec{r}^T \mathbf{J} \vec{r} = \sum_{l,m=1}^3 J_{lm} x_l x_m \\ &= J_{11} x_1^2 + J_{22} x_2^2 + J_{33} x_3^2 + 2 J_{12} x_1 x_2 + 2 J_{13} x_1 x_3 + 2 J_{23} x_2 x_3 \end{aligned} \quad (1.44)$$

definiert mathematisch ein sog. **Ellipsoid** und in unserem speziellen Fall das sog. **Trägheitsellipsoid**, vgl. Abb. 1.14.

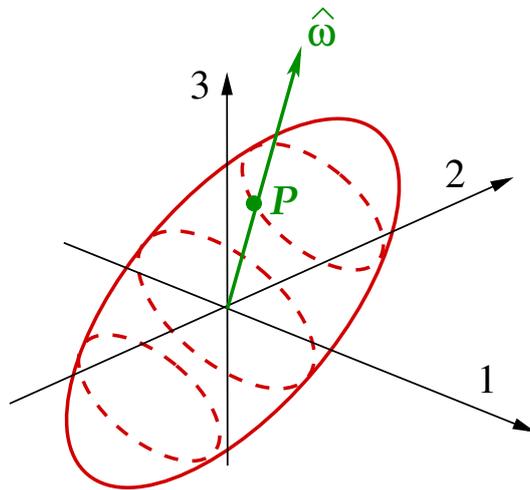


Abbildung 1.14: Das Trägheitsellipsoid.

Der normierte Drehvektor $\hat{\omega}$ durchstößt das Trägheitsellipsoid am Punkt P . Dieser liegt auf der durch Gl. (1.44) definierten Fläche, also erfüllen seine Koordinaten $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$

1 Der starre Körper

die Bedingung

$$1 = \vec{p}^T \mathbf{J} \vec{p}.$$

Andererseits gilt wegen Gl. (1.42)

$$1 = \frac{\hat{\omega}^T}{\sqrt{J}} \mathbf{J} \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{J}}.$$

Der Vergleich beider Gleichungen ergibt für die Koordinaten des Durchstoßungspunktes

$$\vec{p} = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{J}}. \quad (1.45)$$

Der Abstand des Durchstoßungspunktes P vom Ursprung ist gleich dem Betrag des Vektors \vec{p} ,

$$p \equiv |\vec{p}| = \frac{1}{\sqrt{J}}. \quad (1.46)$$

Durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems, $\vec{r} = D \vec{r}$, kann man das Trägheitsellipsoid in die sog. **Normalform** bringen,

$$1 = \bar{J}_{11} \bar{x}_1^2 + \bar{J}_{22} \bar{x}_2^2 + \bar{J}_{33} \bar{x}_3^2, \quad (1.47)$$

d.h. man bringt die Nichtdiagonalelemente von \mathbf{J} zum Verschwinden. Dies entspricht einer **Diagonalisierung** von \mathbf{J} , also genau der oben besprochenen **Hauptachsentransformation**:

$$1 = \vec{r}^T \mathbf{J} \vec{r} = \vec{r}^T D^T D \mathbf{J} D^T D \vec{r} = \vec{r}^T \bar{\mathbf{J}} \vec{r} \equiv A \bar{x}_1^2 + B \bar{x}_2^2 + C \bar{x}_3^2, \quad (1.48)$$

wobei wir $D^T D = \mathbf{1}$ und Gl. (1.43) ausgenutzt haben. Mit der Identifizierung $A \equiv \bar{J}_{11}$, $B \equiv \bar{J}_{22}$, $C \equiv \bar{J}_{33}$ erhalten wir in der Tat die Normalform (1.47).

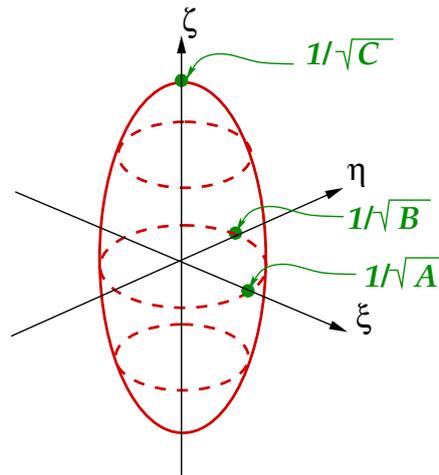


Abbildung 1.15: Das Trägheitsellipsoid im Hauptachsensystem.

Die Koordinatenachsen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ des Koordinatensystems, in welchem das Trägheitsellipsoid die Normalform annimmt, sind die schon oben eingeführten **Hauptträgheitsachsen**. Im folgenden bezeichnen wir diese mit $\bar{x}_1 \equiv \xi$, $\bar{x}_2 \equiv \eta$ und $\bar{x}_3 \equiv \zeta$. Im Hauptachsensystem lautet die Bedingungsgleichung (1.47) für das Trägheitsellipsoid also

$$1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2. \quad (1.49)$$

Abbildung 1.15 veranschaulicht das Trägheitsellipsoid im Hauptachsensystem.

Die Länge der Achsen des Trägheitsellipsoids lassen sich aus dieser Abbildung unter Zuhilfenahme von Gl. (1.49) sofort ablesen. Die Länge in ξ -Richtung ist $1/\sqrt{A}$, in η -Richtung $1/\sqrt{B}$ und in ζ -Richtung beträgt sie $1/\sqrt{C}$.

Diesen Zusammenhang kann man auch aus Gl. (1.46) erhalten. Diese Gleichung besagt, dass der Abstand des Durchstoßungspunkt der Drehachse durch die Oberfläche des Trägheitsellipsoids vom Ursprung gerade $1/\sqrt{J}$ beträgt, wobei J das Trägheitsmoment um diese Drehachse ist. Wir betrachten nun den Spezialfall einer Drehung um eine der Hauptträgheitsachsen. Dann muss man in Gl. (1.46) lediglich das entsprechende Hauptträgheitsmoment einsetzen und erhält sofort den Zusammenhang zwischen den Längen der Achsen des Trägheitsellipsoids und den Hauptträgheitsmomenten.

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. **unsymmetrischer Kreisel:** alle Achsen sind verschieden lang, $A \neq B \neq C \neq A$.
2. **symmetrischer Kreisel:** zwei Achsen sind gleich lang, $A = B \neq C$ (oder $A = C \neq B$ oder $B = C \neq A$). Hier wiederum unterscheidet man
 - (i) **oblater Kreisel:** $C > A = B$, vgl. Abb. 1.16(a).
 - (ii) **prolater Kreisel:** $C < A = B$, vgl. Abb. 1.16(b).

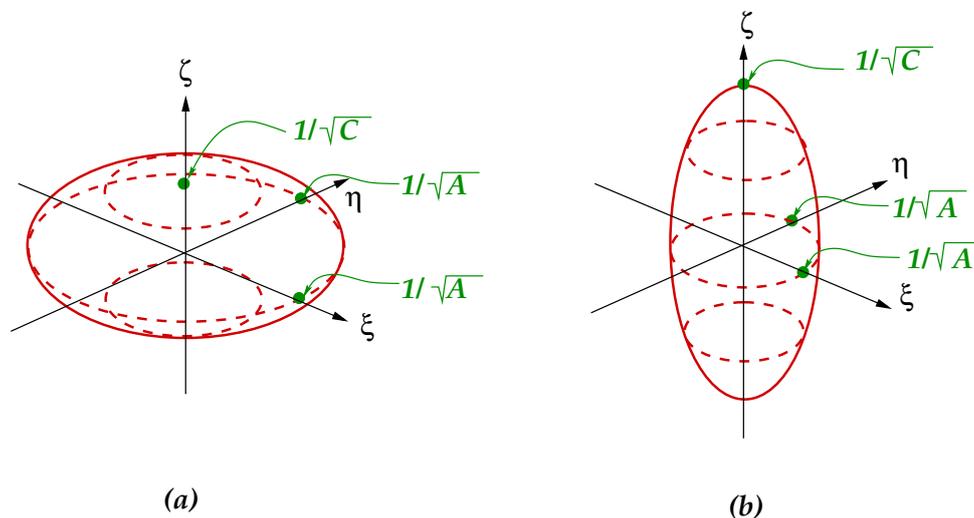


Abbildung 1.16: Trägheitsellipsoide für (a) den oblaten Kreisel und (b) den prolaten Kreisel.

3. **Kugelkreisel:** $A = B = C$. Das Trägheitsellipsoid ist eine Kugel.

Die Rotationsenergie (1.39) nimmt im Hauptachsensystem eine besonders einfache Form an:

$$\bar{T}_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \bar{\mathbf{J}} \vec{\omega} = \frac{1}{2} (A \omega_\xi^2 + B \omega_\eta^2 + C \omega_\zeta^2) , \quad (1.50)$$

wobei für die Komponenten des Drehvektors im Hauptachsensystem die Bezeichnungen $\vec{\omega} \equiv (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)^T$ eingeführt wurden.

2.5.2017

1.4.4 Drehimpuls des starren Körpers

Der Drehimpuls ist definiert durch Gl. (3.4) der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i .$$

Wir transformieren nun ins körperfeste Koordinatensystem gemäß Glgen. (1.30) und (1.31),

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i , \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}'_i) \times (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &= M \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) . \end{aligned} \quad (1.51)$$

Der erste Term ist der Drehimpuls aufgrund der Translationsbewegung. Nehmen wir an, dass der Körper ausschließlich rotiert, so ist $\dot{\vec{r}}_0 = 0$ und der erste und der dritte Term verschwinden. Da angenommen wurde, dass der Körper keine Translationsbewegung vollzieht, können wir zudem den Ursprung des raumfesten ungestrichenen Koordinatensystems in den des körperfesten gestrichenen Systems legen, so dass auch $\vec{r}_0 = 0$. Dann verschwindet auch der zweite Term. Damit bleibt lediglich der vierte Term übrig, der den Drehimpuls des starren Körpers aufgrund der Rotationsbewegung um die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ darstellt,

$$\vec{L}_R \equiv \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) . \quad (1.52)$$

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes für das doppelte Kreuzprodukt läßt sich dies umformen in

$$\vec{L}_R = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} r_i'^2 - \vec{r}'_i \vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i) . \quad (1.53)$$

Man erkennt daraus, dass \vec{L}_R nicht notwendigerweise parallel zum Drehvektor $\vec{\omega}$ steht. In

Komponenten geschrieben lautet Gl. (1.53)

$$\begin{aligned}
L_{R,l} &= \sum_{i=1}^N m_i (\omega_l \bar{r}_i'^2 - x_{il}' \vec{\omega} \cdot \bar{r}_i') \\
&= \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{m=1}^3 \omega_m \delta_{lm} \bar{r}_i'^2 - x_{il}' \sum_{m=1}^3 \omega_m x_{im}' \right) \\
&= \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{lm} \bar{r}_i'^2 - x_{il}' x_{im}') \omega_m \\
&\equiv \sum_{m=1}^3 J_{lm} \omega_m , \tag{1.54}
\end{aligned}$$

wobei wir die Definition (1.36) des Trägheitstensors benutzt haben. In Matrixschreibweise lautet Gl. (1.54)

$$\vec{L}_R = \mathbf{J} \vec{\omega} . \tag{1.55}$$

Damit folgt für die Rotationsenergie (1.39)

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{J} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{L}_R \equiv \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_R . \tag{1.56}$$

Obwohl \vec{L}_R und $\vec{\omega}$ nicht parallel zueinander stehen müssen, muss die Rotationsenergie stets positiv semi-definit sein, $T_R \geq 0$. Also muss $\cos(\vec{\omega}, \vec{L}_R) \geq 0$ sein, d.h. der Betrag des Winkels zwischen \vec{L}_R und $\vec{\omega}$ darf nicht größer als $\pi/2$ sein.

Im Hauptachsensystem lautet der Drehimpuls der Rotationsbewegung

$$\vec{L}_R = D \vec{L}_R = D \mathbf{J} D^T D \vec{\omega} = \bar{\mathbf{J}} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} A \omega_\xi \\ B \omega_\eta \\ C \omega_\zeta \end{pmatrix} , \tag{1.57}$$

wobei wir Gl. (1.43), $D^T D = \mathbf{1}$ und $\vec{\omega} = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)^T$ benutzt haben.

Wir können nun einen Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls \vec{L}_R im Hauptachsensystem und dem Trägheitsellipsoid herleiten. Wir betrachten zunächst die Definitionsgleichung (1.49) des Trägheitsellipsoids im Hauptachsensystem,

$$1 = A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 \equiv F(\xi, \eta, \zeta) .$$

Der **Gradient** (im Hauptachsensystem, also bezüglich der Koordinaten ξ , η und ζ) der Funktion $F(\xi, \eta, \zeta)$ lautet

$$\vec{\nabla} F = \begin{pmatrix} 2 A \xi \\ 2 B \eta \\ 2 C \zeta \end{pmatrix} ;$$

er steht per Definition **senkrecht** auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoids. Am Punkt P der Oberfläche, der durch den Ortsvektor (1.45) gegeben ist (also am Schnittpunkt

1 Der starre Körper

des Drehvektors $\vec{\omega}$ mit der Oberfläche des Trägheitsellipsoids), $\vec{p} = \hat{\omega}/\sqrt{J} = \vec{\omega}/(\bar{\omega}\sqrt{J})$, beträgt der Gradient von F dann mit Gl. (1.57)

$$\vec{\nabla}F|_P = \frac{2}{\bar{\omega}\sqrt{J}} \begin{pmatrix} A\omega_\xi \\ B\omega_\eta \\ C\omega_\zeta \end{pmatrix} \equiv \frac{2}{\bar{\omega}\sqrt{J}} \vec{\bar{L}}_R.$$

Der Drehimpuls $\vec{\bar{L}}_R$ im Hauptachsensystem steht also im Punkt P **senkrecht** auf dem Trägheitsellipsoid, vgl. Abb. 1.17. Der Drehimpulsvektor $\vec{\bar{L}}_R$ kann natürlich auch in den Ursprung des Hauptachsensystems verschoben werden, s. Abb. 1.17. Aus Abb. 1.17 wird

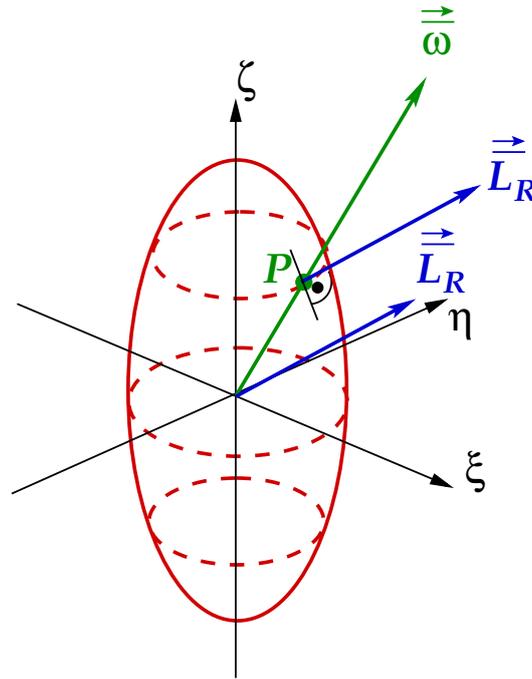


Abbildung 1.17: Zur Orientierung des Drehimpulses im Hauptachsensystem.

ersichtlich, dass $\vec{\omega}$ und $\vec{\bar{L}}_R$ **nur dann** parallel zueinander stehen, wenn $\vec{\omega}$ parallel zu einer der drei Hauptträgheitsachsen ausgerichtet ist, denn nur dort steht auch $\vec{\omega}$ senkrecht auf der Oberfläche des Trägheitsellipsoids. Sei z.B. $\vec{\omega} = (0, 0, \bar{\omega})^T$. Dann ist $\vec{\bar{L}}_R = (0, 0, C\bar{\omega})^T = C\vec{\omega}$, also $\vec{\bar{L}}_R \parallel \vec{\omega}$.

Dies gilt übrigens nicht nur im Hauptachsensystem, sondern in jedem beliebigen Koordinatensystem. Wir können nämlich die Drehung des Koordinatensystems, die ins Hauptachsensystem geführt hatte, rückgängig machen, indem wir beide Seiten der Gleichung $\vec{\bar{L}}_R = \text{const.} \vec{\omega}$ mit dem Inversen D^{-1} der Drehmatrix multiplizieren,

$$\vec{\bar{L}}_R = D^{-1} \vec{\bar{L}}_R = \text{const.} D^{-1} \vec{\omega} = \text{const.} \vec{\omega},$$

also auch in diesem System gilt $\vec{\bar{L}}_R \parallel \vec{\omega}$.

Die Tatsache, dass $\vec{L}_R \parallel \vec{\omega}$, falls $\vec{\omega}$ in die Richtung einer Hauptträgheitsachse zeigt, läßt sich ausnutzen, um die Hauptträgheitsmomente, A, B, C , und die Hauptträgheitsachsen, $\vec{\omega}_A, \vec{\omega}_B, \vec{\omega}_C$, zu bestimmen. Es muss dann nämlich gelten

$$\vec{L}_R = \mathbf{J} \vec{\omega} \equiv J \vec{\omega}, \quad (1.58)$$

wobei J das Trägheitsmoment um die Drehachse $\vec{\omega}$ ist. J steht dabei stellvertretend für A, B oder C und $\vec{\omega}$ entsprechend für $\vec{\omega}_A, \vec{\omega}_B$ oder $\vec{\omega}_C$.

Vom mathematischen Gesichtspunkt betrachtet ist Gl. (1.58) eine sog. **Eigenwertgleichung**. Sie legt die **Eigenwerte** J der Matrix \mathbf{J} und die dazugehörigen **Eigenvektoren** $\vec{\omega}$ fest. Wie geht man dabei praktisch vor? Zunächst bringen wir die rechte Seite auf die linke,

$$(\mathbf{J} - J \mathbf{1}) \vec{\omega} = 0,$$

und schreiben dieses Gleichungssystem in Komponenten,

$$\begin{aligned} (J_{11} - J) \omega_1 + J_{12} \omega_2 + J_{13} \omega_3 &= 0, \\ J_{21} \omega_1 + (J_{22} - J) \omega_2 + J_{23} \omega_3 &= 0, \\ J_{31} \omega_1 + J_{32} \omega_2 + (J_{33} - J) \omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Nichttriviale Lösungen $\vec{\omega} \neq 0$ existieren nur, falls die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet, s. Abschnitt 1.4.6, Punkt 6., der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”,

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{J} - J \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} J_{11} - J & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} - J & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} - J \end{vmatrix} \\ &= (J_{11} - J) [(J_{22} - J)(J_{33} - J) - J_{23}^2] - J_{12} [J_{12}(J_{33} - J) - J_{13} J_{23}] \\ &\quad + J_{13} [J_{12} J_{23} - J_{13}(J_{22} - J)], \end{aligned} \quad (1.60)$$

wobei wir die Symmetrie des Trägheitstensors ausgenutzt haben, $J_{lm} = J_{ml}$. Gleichung (1.60) ist die sog. **charakteristische Gleichung**. In unserem Fall ist dies ein Polynom dritten Grades in J , welches i.a. drei Lösungen hat, die **Eigenwerte** J_1, J_2 und J_3 der Matrix \mathbf{J} .

Aus dem oben Diskutierten ist klar, dass es sich bei den Eigenwerten um die Hauptträgheitsmomente handelt, also $J_1 = A, J_2 = B$ und $J_3 = C$. Man kann dies aber auch direkt sehen, indem man benutzt, dass für orthogonale Matrizen $\det D = \det D^T = 1$ gilt und dass $\det A \det B = \det(AB)$. Wir nehmen an, dass die im folgenden auftretende Drehmatrix D diejenige ist, die den Trägheitstensor \mathbf{J} diagonalisiert, $D \mathbf{J} D^T = \bar{\mathbf{J}} = \text{diag}(A, B, C)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{J} - J \mathbf{1}) = \det D \det(\mathbf{J} - J \mathbf{1}) \det D^T = \det [D(\mathbf{J} - J \mathbf{1})D^T] \\ &= \det(D \mathbf{J} D^T - J D D^T) = \det(\bar{\mathbf{J}} - J \mathbf{1}) \\ &= \begin{vmatrix} A - J & 0 & 0 \\ 0 & B - J & 0 \\ 0 & 0 & C - J \end{vmatrix} = (A - J)(B - J)(C - J). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Diese Gleichung hat ganz offensichtlich die Lösungen $J_1 = A, J_2 = B$ und $J_3 = C$, q.e.d.

Die **Eigenvektoren** $\vec{\omega}_A$, $\vec{\omega}_B$ und $\vec{\omega}_C$ bestimmt man nun, indem man nacheinander die Lösungen $J_1 = A$, $J_2 = B$ und $J_3 = C$ in die Eigenwertgleichung (1.58) einsetzt. Es ergibt sich jeweils ein Gleichungssystem von drei Gleichungen für die drei Komponenten der Eigenvektoren, vgl. Gl. (1.59). Allerdings sind wegen $\det(\mathbf{J} - J \mathbf{1}) = 0$ nicht alle Zeilen bzw. Spalten der Koeffizientenmatrix $\mathbf{J} - J \mathbf{1}$ **linear unabhängig**, vgl. Abschnitt 1.4.6, Punkt 6., der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”. Dies bedeutet, dass die Eigenvektoren $\vec{\omega}_A$, $\vec{\omega}_B$ und $\vec{\omega}_C$ nicht **eindeutig** festgelegt werden können. Allerdings sind ihre **Richtungen** eindeutig festgelegt und stimmen wegen $\mathbf{J} \vec{\omega}_A = A \vec{\omega}_A$, etc. mit den Hauptträgheitsachsen überein.

1.5 Kreiseltheorie

1.5.1 Eulersche Gleichungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, Bewegungsgleichungen für den Kreisel abzuleiten. Wir gehen dabei vom Drehimpulssatz, Gl. (3.7) der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”, aus,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(\text{ex})} .$$

Wir sind am Drehimpuls \vec{L}_R der Rotationsbewegung interessiert, also an einem Vektor, der bezüglich des Ursprungs des körperfesten Systems Σ' definiert ist. Die Zeitableitung solcher Vektoren läßt sich mit Hilfe von Gl. (2.47) der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden” vom Inertialsystem Σ , in dem der Drehimpulssatz gilt, in das körperfeste System Σ' umschreiben:

$$\vec{M} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L} .$$

Die Indizes “ R ” (am Drehimpuls) und “(ex)” (am äußeren Drehmoment) haben wir der Übersicht halber weggelassen. Da Mißverständnisse ausgeschlossen sind, bezeichnen wir die Zeitableitung in Σ' im folgenden mit einem Punkt über der abzuleitenden Größe,

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} . \quad (1.62)$$

Für das körperfeste Koordinatensystem wählen wir nun das **Hauptachsensystem** $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$. Traditionell bezeichnet man die Komponenten des Drehvektors in diesem System mit p, q und r ,

$$\vec{\omega} = p \vec{e}_\xi + q \vec{e}_\eta + r \vec{e}_\zeta .$$

(Hier und im folgenden lassen wir der Übersicht halber den Querstrich, der Größen im Hauptachsensystem kennzeichnet, weg.) Im Hauptachsensystem ist der Trägheitstensor **diagonal** und vor allem **zeitunabhängig**, da die Hauptträgheitsmomente körperspezifische Eigenschaften sind,

$$\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C) = \text{const.} .$$

Für den Drehimpuls ergibt sich damit

$$\vec{L} = \mathbf{J} \vec{\omega} = A p \vec{e}_\xi + B q \vec{e}_\eta + C r \vec{e}_\zeta . \quad (1.63)$$

Da sowohl A , B , C wie auch \vec{e}_ξ , \vec{e}_η , \vec{e}_ζ (letztere zumindest im System Σ') zeitunabhängig sind, folgt

$$\dot{\vec{L}} = A \dot{p} \vec{e}_\xi + B \dot{q} \vec{e}_\eta + C \dot{r} \vec{e}_\zeta .$$

Für das Kreuzprodukt aus $\vec{\omega}$ und \vec{L} errechnen wir

$$\vec{\omega} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\xi & \vec{e}_\eta & \vec{e}_\zeta \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = \vec{e}_\xi (C - B) q r + \vec{e}_\eta (A - C) p r + \vec{e}_\zeta (B - A) p q .$$

Setzt man all dies in den Drehimpulssatz (1.62) ein, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen des starren Körpers, die sog. **Eulerschen Gleichungen**:

$$\begin{aligned} M_\xi &= A \dot{p} + (C - B) q r , \\ M_\eta &= B \dot{q} + (A - C) p r , \\ M_\zeta &= C \dot{r} + (B - A) p q . \end{aligned} \quad (1.64)$$

Um diese Bewegungsgleichungen zu lösen, müssen wir das äußere Drehmoment im Hauptachsensystem kennen. Üblicherweise wird dieses Drehmoment aber durch Kräfte verursacht, die im Inertialsystem Σ gegeben sind. Man benötigt also auch eine Beziehung zwischen dem raumfesten System Σ und dem körperfesten Hauptachsensystem Σ' , die die Umrechnung dieser Kräfte bzw. des Drehmoments erlauben. Diese Beziehung erlaubt dann auch, von der Lösung p, q, r des Systems gekoppelter Differentialgleichungen (1.64) auf die Position des Körpers in Σ zu schließen. Dies wird im folgenden Abschnitt genauer ausgeführt.

5.5.2017

1.5.2 Eulersche Winkel

Die sog. **Eulerschen Winkel** geben an, wie ein körperfestes System Σ' gegen ein raumfestes System Σ gedreht ist. Das raumfeste System sei durch die Koordinaten x, y, z definiert, das körperfeste durch die Koordinaten x', y', z' , vgl. Abb. 1.18.

Die **Knotenlinie** K bildet die Schnittlinie der (x, y) - mit der (x', y') -Ebene. Die **Eulerschen Winkel** sind wie folgt definiert:

- (i) φ : Winkel zwischen der x -Achse und der Knotenlinie K .
- (ii) ϑ : Winkel zwischen der z - und der z' -Achse.
- (iii) ψ : Winkel zwischen der Knotenlinie K und der x' -Achse.

Die Definition der Eulerschen Winkel motiviert sich aus der Tatsache, dass man die Systeme Σ und Σ' durch die folgenden drei Einzeldrehungen (in nicht vertauschbarer Reihenfolge!) zur Deckung bringen kann:

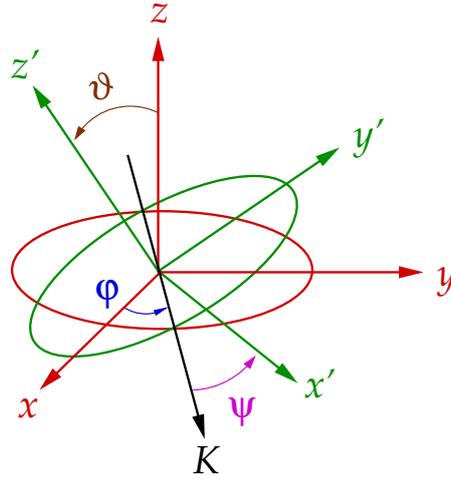


Abbildung 1.18: Zur Definition der Eulerschen Winkel.

- (i) Man drehe das System Σ um den Winkel φ um die z -Achse, bis die x -Achse mit der Knotenlinie K zur Deckung kommt.
- (ii) Man drehe nun das so erhaltene System um den Winkel ϑ um die Knotenlinie K , bis die z -Achse mit der z' -Achse zur Deckung kommt. Die Lage der im ersten Schritt gedrehten x -Achse verändert sich dadurch nicht, allerdings wird die (durch den ersten Schritt gedrehte) y -Achse nun in die (x', y') -Ebene "gekippt".
- (iii) Man drehe letztlich das so erhaltene System um den Winkel ψ um die z' -Achse, bis die Knotenlinie (die durch den ersten Schritt gedrehte x -Achse) mit der x' -Achse zur Deckung kommt. Da sowohl Σ wie Σ' kartesische Koordinatensysteme sind, bringt dies automatisch die (durch den ersten und zweiten Schritt gedrehte) y -Achse mit der y' -Achse zur Deckung.

Bezeichnen wir den Einheitsvektor in Richtung der Knotenlinie mit \vec{e}_K , so gilt:

$$\cos \varphi = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_K \quad , \quad \cos \vartheta = \vec{e}_z \cdot \vec{e}'_z \quad , \quad \cos \psi = \vec{e}_K \cdot \vec{e}'_x \quad . \quad (1.65)$$

Die Knotenlinie liegt sowohl in der (x, y) - wie auch in der (x', y') -Ebene. Daher kann man \vec{e}_K durch die entsprechenden kartesischen Einheitsvektoren \vec{e}_x, \vec{e}_y bzw. \vec{e}'_x, \vec{e}'_y ausdrücken. Wir benötigen im folgenden nur den Zusammenhang mit den letztgenannten,

$$\vec{e}_K = \cos \psi \vec{e}'_x - \sin \psi \vec{e}'_y \quad , \quad (1.66)$$

wie man sich anhand von Abb. 1.18 leicht klarmacht.

Wir benötigen ferner den Zusammenhang zwischen \vec{e}_z und \vec{e}'_x, \vec{e}'_y und \vec{e}'_z . Dieser wird ebenfalls aus Abb. 1.18 ersichtlich:

$$\vec{e}_z = \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}'_x + \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}'_y + \cos \vartheta \vec{e}'_z \quad . \quad (1.67)$$

Die z' -Komponente von \vec{e}_z ergibt sich aus Gl. (1.65). Also müssen die anderen beiden Komponenten proportional zu $\sin \vartheta$ sein. Die Abhängigkeit der letztgenannten vom Euler-Winkel ψ versteht man am einfachsten, indem man sich klarmacht, dass \vec{e}_z für $\psi = 0$ in der (y', z') -Ebene liegt, also keine Komponente in x' -Richtung besitzt.

Wir suchen nun den Zusammenhang zwischen den Eulerschen Winkeln und den Komponenten des Drehvektors. Drehungen des starren Körpers im raumfesten System Σ entsprechen Drehungen des im starren Körper verankerten, körperfesten Systems Σ' relativ zu Σ . Dies bedeutet aber auch, dass sich die Eulerschen Winkel, die den Zusammenhang zwischen Σ und Σ' vermitteln, **zeitlich ändern**. Aus den entsprechenden **Winkelgeschwindigkeiten** $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$ und $\dot{\psi}$ lassen sich durch Multiplikation mit den entsprechenden Einheitsvektoren \vec{e}_z , \vec{e}_K und \vec{e}'_z Drehvektoren konstruieren:

(i) Drehung um die z -Achse:

$$\dot{\varphi} \vec{e}_z = \dot{\varphi} (\sin \vartheta \sin \psi \vec{e}'_x + \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}'_y + \cos \vartheta \vec{e}'_z) ,$$

wobei wir Gl. (1.67) benutzt haben.

(ii) Drehung um die Knotenlinie:

$$\dot{\vartheta} \vec{e}_K = \dot{\vartheta} (\cos \psi \vec{e}'_x - \sin \psi \vec{e}'_y) ,$$

wobei wir Gl. (1.66) benutzt haben.

(iii) Drehung um die z' -Achse:

$$\dot{\psi} \vec{e}'_z .$$

Der gesamte Drehvektor $\vec{\omega}$ läßt sich als Summe der aufgeführten Einzeldrehungen darstellen,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\vartheta} \vec{e}_K + \dot{\psi} \vec{e}'_z \\ &= (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi) \vec{e}'_x + (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi) \vec{e}'_y + (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{e}'_z . \end{aligned} \quad (1.68)$$

Zum Schluss identifizieren wir das körperfeste System Σ' mit dem **Hauptachsensystem**, $\vec{e}'_x \equiv \vec{e}_\xi$, $\vec{e}'_y \equiv \vec{e}_\eta$, $\vec{e}'_z \equiv \vec{e}_\zeta$, in dem $\vec{\omega} = p \vec{e}_\xi + q \vec{e}_\eta + r \vec{e}_\zeta$ ist. Dies liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen den Komponenten des Drehvektors und den Eulerschen Winkeln:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi , \\ q &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi , \\ r &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} . \end{aligned} \quad (1.69)$$

Falls man p, q, r aus den Eulerschen Gleichungen bestimmt hat, kann man mit Hilfe dieses Gleichungssystems die Eulerschen Winkel bestimmen. Damit ist die Lage des starren Körpers in Σ festgelegt.

1.5.3 Kräftefreier Kreisel

Wir nehmen an, dass das äußere Drehmoment verschwindet, $\vec{M} = 0$. Dann werden aus den Eulerschen Gleichungen (1.64) die Bewegungsgleichungen für den **kräftefreien Kreisel**,

$$\begin{aligned} 0 &= A\dot{p} + (C - B)qr, \\ 0 &= B\dot{q} + (A - C)pr, \\ 0 &= C\dot{r} + (B - A)pq. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit p , die zweite mit q und die dritte mit r und addieren alle Gleichungen, so erhalten wir mit Gl. (1.50) und $\omega_\xi \equiv p$, $\omega_\eta \equiv q$, $\omega_\zeta \equiv r$ den **Energieerhaltungssatz**,

$$0 = Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{dT_R}{dt}.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit Ap , die zweite mit Bq und die dritte mit Cr und addieren alle Gleichungen, so erhalten wir mit Gl. (1.57)

$$0 = A^2p\dot{p} + B^2q\dot{q} + C^2r\dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = \frac{1}{2} \frac{d\vec{L}_R^2}{dt},$$

d.h. der **Betrag des Drehimpulses** der Rotationsbewegung ist erhalten.

Da keine äußeren Kräfte wirken, ist aber darüberhinaus zu fordern, dass auch die **Richtung** des Drehimpulses erhalten bleibt, d.h.

$$0 = \dot{\vec{L}}_R = A\dot{p}\vec{e}_\xi + B\dot{q}\vec{e}_\eta + C\dot{r}\vec{e}_\zeta,$$

was auf $A\dot{p} = B\dot{q} = C\dot{r} = 0$ führt. Damit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (1.70) zu

$$(C - B)qr = (A - C)pr = (B - A)pq = 0. \quad (1.71)$$

Im allgemeinen, also ohne speziellere Bedingungen an die Hauptträgheitsmomente zu stellen, ist $A \neq B \neq C \neq A$ und dies kann nur erfüllt werden, wenn entweder $q = r = 0$ oder $p = r = 0$ oder $p = q = 0$ ist. Dies bedeutet aber, dass entweder $\vec{\omega} = p\vec{e}_\xi$ oder $\vec{\omega} = q\vec{e}_\eta$ oder $\vec{\omega} = r\vec{e}_\zeta$, d.h. der Drehvektor zeigt in Richtung einer der drei Hauptträgheitsachsen. Damit zeigt auch der Drehimpulsvektor in eine der drei Hauptträgheitsachsen. Da der Drehimpuls konstant ist, ist auch der Drehvektor konstant. Dies gilt nicht nur im Hauptachsensystem, sondern auch im raumfesten System. Man nennt diesen Zustand eine **Rotation um eine freie Achse**.

Rotationen um freie Achsen können **stabile** oder **instabile** Bewegungszustände sein. Um dies zu untersuchen, führen wir eine **Stabilitätsanalyse** durch. O.B.d.A. nehmen wir an, der Körper rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die ξ -Achse, $\vec{\omega}_0 = p_0\vec{e}_\xi$, $p_0 = \text{const.}$, und wird nun so gestört, dass die neue Drehachse ein wenig von der ursprünglichen Achse abweicht,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \Delta\vec{\omega} = (p_0 + \Delta p)\vec{e}_\xi + \Delta q\vec{e}_\eta + \Delta r\vec{e}_\zeta,$$

mit $|\Delta p|, |\Delta q|, |\Delta r| \ll |p_0|$. Wir setzen dies in das Gleichungssystem (1.70) ein und vernachlässigen Terme von quadratischer Ordnung in den kleinen Größen,

$$\begin{aligned} A \Delta \dot{p} &= 0, \\ B \Delta \dot{q} + (A - C) \Delta r p_0 &= 0, \\ C \Delta \dot{r} + (B - A) \Delta q p_0 &= 0. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Die erste Gleichung besagt, dass $\Delta p = \text{const.}$. Wir leiten die letzten beiden Gleichungen nach der Zeit ab und setzen die unabgeleiteten Gleichungen ein, um die Variablen zu trennen

$$\begin{aligned} B \Delta \ddot{q} + (A - C) p_0 \Delta \dot{r} &= B \Delta \ddot{q} - (A - C) p_0^2 \frac{B - A}{C} \Delta q = 0, \\ C \Delta \ddot{r} + (B - A) p_0 \Delta \dot{q} &= C \Delta \ddot{r} - (B - A) p_0^2 \frac{A - C}{B} \Delta r = 0. \end{aligned}$$

Definieren wir

$$D^2 \equiv \frac{p_0^2}{BC} (A - B) (A - C),$$

so vereinfachen sich diese Gleichungen:

$$\Delta \ddot{q} + D^2 \Delta q = 0, \quad \Delta \ddot{r} + D^2 \Delta r = 0.$$

Für $D^2 > 0$ ist dies die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators: der Drehvektor oszilliert um die ursprüngliche Drehachse, aber die Störampplituden $|\Delta p|, |\Delta q|, |\Delta r|$ bleiben klein, wenn sie anfangs klein waren. Dies ist ein **stabiler** Rotationszustand. $D^2 > 0$ bedeutet, dass $(A > B \wedge A > C) \vee (A < B \wedge A < C)$ sein muss. Die Rotation um die Achse mit dem **größten oder mit dem kleinsten Hauptträgheitsmoment** ist also **stabil**.

Für $D^2 < 0$ findet man exponentiell ansteigende oder abfallende Lösungen,

$$\Delta q_{\pm}(t) = \Delta q(0) e^{\pm|D|t}, \quad \Delta r_{\pm}(t) = \Delta r(0) e^{\pm|D|t}.$$

Dies liefert einen **instabilen** Rotationszustand, da die Störung exponentiell anwächst und aus der Richtung der ursprünglichen Drehachse herausführt. $D^2 < 0$ bedeutet, dass $(A > B \wedge A < C) \vee (A > C \wedge A < B)$ sein muss, also $(B < A < C) \vee (B > A > C)$. Damit ist die Rotation um die Achse mit dem **mittleren Hauptträgheitsmoment instabil**.

1.5.4 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Für den symmetrischen Kreisel sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, z.B. o.B.d.A.

$$A = B \neq C.$$

Die ζ -Achse ist damit ausgezeichnet, man bezeichnet sie als **Figurenachse**. Im Fall verschwindender äußerer Kräfte nehmen die Eulerschen Gleichungen (1.70) die folgende

1 Der starre Körper

Form an:

$$\begin{aligned} 0 &= A\dot{p} + (C - A)qr, \\ 0 &= A\dot{q} + (A - C)pr, \\ 0 &= C\dot{r}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass $r(t) = r(0) \equiv r_0 = \text{const.}$.

Wir wählen die ζ -Achse nun so, dass $r_0 > 0$ ist. Dann ist die Größe

$$\Omega \equiv \frac{A - C}{A} r_0 \begin{cases} > 0 & \text{für } A > C, \\ < 0 & \text{für } A < C. \end{cases} \quad (1.74)$$

Mit Ω lassen sich die verbleibenden Bewegungsgleichungen (1.73) wie folgt schreiben:

$$\dot{p} - \Omega q = 0, \quad \dot{q} + \Omega p = 0. \quad (1.75)$$

Differentiation nach t und Einsetzen der ursprünglichen Gleichungen liefert

$$\ddot{p} - \Omega \dot{q} = \ddot{p} + \Omega^2 p = 0, \quad \ddot{q} + \Omega \dot{p} = \ddot{q} + \Omega^2 q = 0.$$

Dies sind wieder die Bewegungsgleichungen für den harmonischen Oszillator. Die Lösungen, welche die Glgen. (1.75) erfüllen, lauten

9.5.2017

$$p(t) = \alpha \sin(\Omega t + \beta), \quad q(t) = \alpha \cos(\Omega t + \beta), \quad (1.76)$$

mit zwei Konstanten α, β , welche an die Anfangsbedingungen angepasst werden müssen. Wir ziehen die folgenden Schlüsse:

- (i) die ζ -Komponente des Drehvektors, r , d.h. die Projektion von $\vec{\omega}$ auf die Figuren-achse ζ , bleibt für alle Zeiten konstant.
- (ii) $\omega = |\vec{\omega}| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\alpha^2 + r_0^2} = \text{const.}$
- (iii) die Projektion von $\vec{\omega}$ auf die (ξ, η) -Ebene, also auf die Ebene, auf der die Figuren-achse senkrecht steht, beschreibt im Laufe der Zeit einen Kreis mit Radius α .

Die sich ergebende Situation ist in Abb. 1.19 dargestellt.

Der Drehvektor $\vec{\omega}$ beschreibt im Laufe der Zeit einen Kreiskegel, den sog. **Polkegel**, um die Figuren-achse. Der Polkegel hat einen Öffnungswinkel γ , der durch

$$\tan \gamma = \frac{\alpha}{r_0}$$

gegeben ist. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der $\vec{\omega}$ um die Figuren-achse läuft, ist Ω , Gl. (1.74).

Beispiel: Die Erde hat am Äquator einen größeren Durchmesser als am Pol, sie ist also ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Die Rotationsachse $\vec{\omega}$, die durch den **kinematischen Nordpol** geht, fällt nicht mit der Figuren-achse ζ , die durch den **geometrischen Nordpol** geht, zusammen. Der kinematische Nordpol beschreibt einen Kreis mit einem Radius

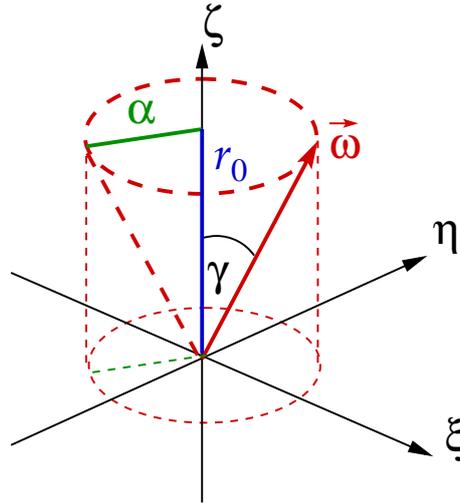


Abbildung 1.19: Lage des Drehvektors im Hauptachsensystem für den kräftefreien symmetrischen Kreisel.

von etwa 10 m um den geometrischen Nordpol. Die Umlaufzeit $T = 2\pi/\Omega \simeq 433$ Tage nennt man **Chandlersche Periode**.

Letztlich müssen wir noch vom körperfesten (Hauptachsen-)System Σ' ins raumfeste System Σ transformieren. Dazu benötigen wir die Eulerschen Winkel als Funktion der Zeit. Mit den Glgen. (1.69) und den Lösungen (1.76) sowie $r = r_0 = \text{const.}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= \alpha \sin(\Omega t + \beta) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ q &= \alpha \cos(\Omega t + \beta) = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ r &= r_0 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Wir müssen dieses gekoppelte System von Differentialgleichungen aber nicht in dieser Form lösen. Vielmehr lohnt es sich auszunutzen, dass der Drehimpuls für die kräftefreie Bewegung erhalten bleibt, $\vec{L} = \overline{\text{const.}}$. O.B.d.A. wählen wir die Orientierung des raumfesten Systems Σ so, dass $\vec{L} = L \vec{e}_z$. Der Einheitsvektor \vec{e}_z läßt sich mit Hilfe von Gl. (1.67) in das Hauptachsensystem Σ' transformieren. Wir erhalten also einerseits

$$\begin{aligned} L_\xi &= L \sin \vartheta \sin \psi, \\ L_\eta &= L \sin \vartheta \cos \psi, \\ L_\zeta &= L \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Andererseits hat \vec{L} im Hauptachsensystem die einfache Form ($A = B$ für den symmetrischen Kreisel)

$$\begin{aligned} L_\xi &= A p = A \left(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \right), \\ L_\eta &= A q = A \left(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \right), \\ L_\zeta &= C r = C \left(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \right), \end{aligned} \quad (1.79)$$

1 Der starre Körper

wobei wir Gl. (1.63) und die Glgen. (1.77) benutzt haben. Der Vergleich von Gl. (1.78) mit (1.79) ergibt

$$\begin{aligned} A \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + A \dot{\vartheta} \cos \psi &= L \sin \vartheta \sin \psi , \\ A \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - A \dot{\vartheta} \sin \psi &= L \sin \vartheta \cos \psi , \\ C \dot{\varphi} \cos \vartheta + C \dot{\psi} &= L \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (1.80)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos \psi$ und die zweite mit $\sin \psi$ und bilden die Differenz, so folgt

$$\dot{\vartheta} = 0 \implies \vartheta = \vartheta_0 = \text{const.} . \quad (1.81)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung dagegen mit $\sin \psi$ und die zweite mit $\cos \psi$ und addieren, so folgt

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{A} \implies \varphi(t) = \frac{L}{A} t + \varphi_0 , \quad \varphi_0 = \text{const.} . \quad (1.82)$$

Der Betrag des Drehimpulses ist $L = \sqrt{A^2 p^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2} = \sqrt{A^2 \alpha^2 + C^2 r_0^2}$, also durch die Konstanten α und r_0 ausdrückbar.

Setzen wir Gl. (1.82) in die letzte Gleichung (1.80) ein, ergibt sich mit der Definition (1.74) von Ω :

$$\dot{\psi} = \left(\frac{L}{C} - \frac{L}{A} \right) \cos \vartheta_0 = L \frac{A - C}{AC} \cos \vartheta_0 = \frac{L \Omega}{C r_0} \cos \vartheta_0 . \quad (1.83)$$

Andererseits erhalten wir aus der letzten Gl. (1.77)

$$\dot{\psi} = r_0 - \frac{L}{A} \cos \vartheta_0 = \left(\frac{L}{C} - \frac{L}{A} \right) \cos \vartheta_0 ,$$

also

$$r_0 = \frac{L}{C} \cos \vartheta_0 . \quad (1.84)$$

Eingesetzt in Gl. (1.83) ergibt sich

$$\dot{\psi} = \Omega , \implies \psi(t) = \Omega t + \psi_0 , \quad \psi_0 = \text{const.} . \quad (1.85)$$

Die Konstante ψ_0 läßt sich wie folgt bestimmen. Wir setzen Glgen. (1.81) und (1.82) in die Glgen. (1.77) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha \sin(\Omega t + \beta) &= \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \sin \psi , \\ \alpha \cos(\Omega t + \beta) &= \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \cos \psi . \end{aligned} \quad (1.86)$$

Nach Division der beiden Gleichungen folgt

$$\tan \psi = \tan(\Omega t + \beta) ,$$

also durch Vergleich mit Gl. (1.85) $\psi_0 \equiv \beta$.

Die Konstante ϑ_0 läßt sich durch α und r_0 ausdrücken. Einsetzen der Lösung (1.85) in die erste Gl. (1.86) liefert

$$\alpha \sin(\Omega t + \psi_0) \equiv \alpha \sin \psi = \frac{L}{A} \sin \vartheta_0 \sin \psi \implies \frac{A}{L} \alpha = \sin \vartheta_0 . \quad (1.87)$$

Dividieren wir dies durch Gl. (1.84), so erhalten wir

$$\tan \vartheta_0 = \frac{A}{C} \frac{\alpha}{r_0} .$$

Wir haben also vier unabhängige Integrationskonstanten, α , β , r_0 und φ_0 . Alternativ können wir wegen Gl. (1.87), $\beta \equiv \psi_0$ und Gl. (1.84) auch die Anfangswerte für die Eulerschen Winkel, φ_0 , ϑ_0 , ψ_0 und den Betrag des Drehimpulses, L , benutzen.

Diskussion der Kreiselbewegung:

- (i) ϑ ist der Winkel zwischen \vec{e}_z (d.h. der Richtung des Drehimpulses \vec{L}) und \vec{e}_ζ (der Richtung der Figurenachse). $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$ bedeutet, dass dieser Winkel für alle Zeiten konstant bleibt, vgl. Abb. 1.20. $\dot{\varphi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Figurenachse um \vec{e}_z (also um \vec{L}) dreht, vgl. Abb. 1.18 ($z' \equiv \zeta!$). Der dabei von der Figurenachse beschriebene Kegel heißt **Nutationskegel**, vgl. Abb. 1.20.

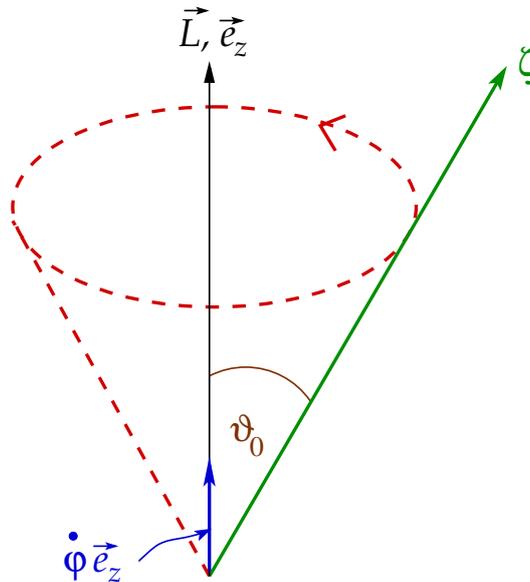


Abbildung 1.20: Lage der Figurenachse relativ zum Drehimpuls und Nutationskegel.

- (ii) $\dot{\psi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Körper um die Figurenachse dreht. Wir unterscheiden zwei Fälle, (a) $\dot{\psi} \equiv \Omega = r_0 (A - C)/A > 0$, also $A > C$, und (b) $\dot{\psi} < 0$, also $A < C$, vgl. Abb. 1.21.

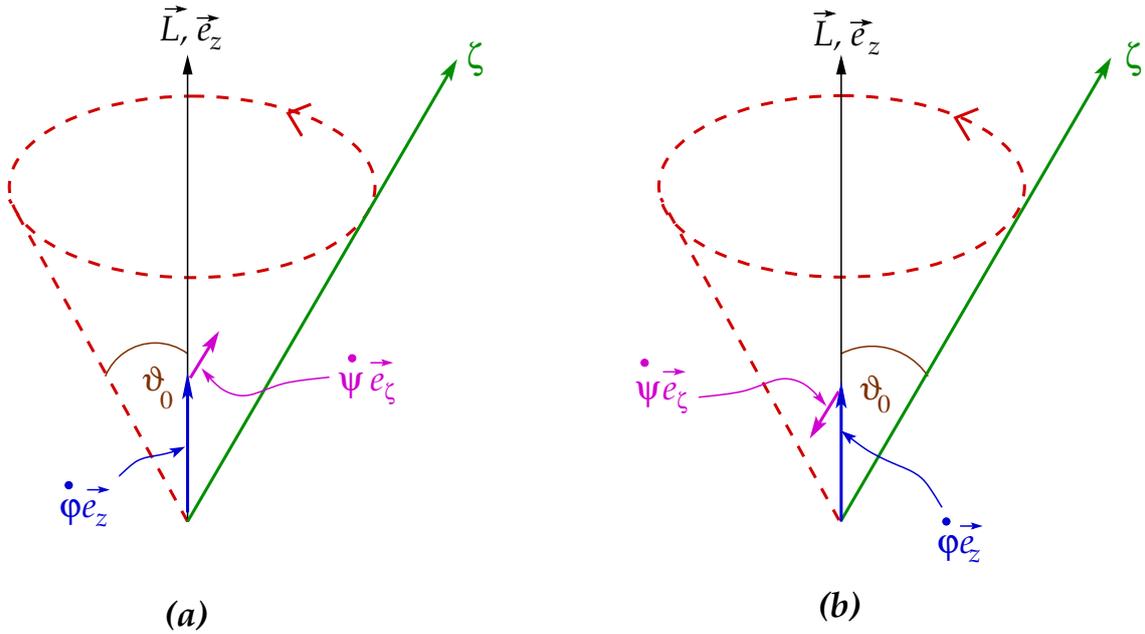


Abbildung 1.21: Lage des Drehvektors $\dot{\psi} \vec{e}_\zeta$ für (a) $A > C$ und (b) $A < C$.

- (iii) Die Winkelgeschwindigkeit ist gemäß den Gln. (1.68) und (1.81) $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{e}_\zeta$. Sie liegt also stets in der (z, ζ) -Ebene und rotiert mit der Figurenachse um die Richtung des Drehimpulses. Dabei durchläuft sie den sog. **Spurkegel**, vgl. Abb. 1.22. Gemäß Abb. 1.19 schließt $\vec{\omega}$ mit der Figurenachse den Winkel γ ein. Dies definiert den sog. **Polkegel**, vgl. Abb. 1.22. Für $A > C$ rollt dieser mit seiner **Außenfläche** auf der Außenfläche des Spurkegels ab, vgl. Abb. 1.22(a), für $A < C$ rollt er dagegen mit seiner **Innenfläche** auf der Außenfläche des Spurkegels ab, vgl. Abb. 1.22(b). Beim Abrollen führt der Polkegel die Figurenachse auf dem Nutationskegel mit.

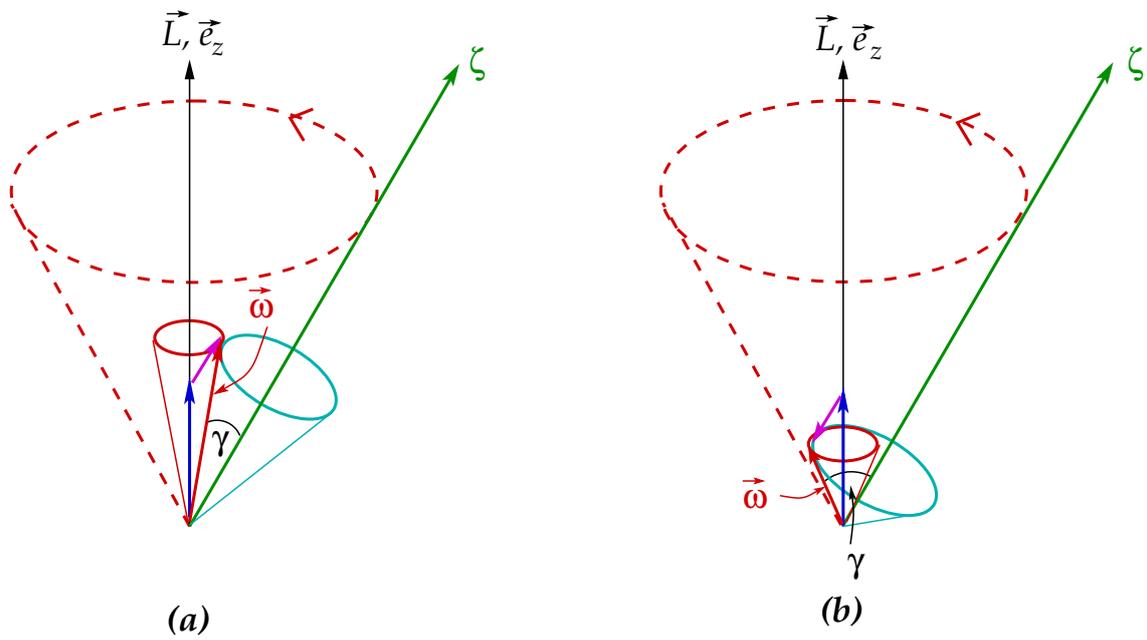


Abbildung 1.22: Lage des Spurkegels (rot) und des Polkegels (cyan) für (a) $A > C$ und (b) $A < C$.

2 Lagrange-Mechanik

2.1 Zwangskräfte, Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

In der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden” hatten wir gesehen, dass ein N -Teilchensystem i.a. durch $3N$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben wird,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(\text{ex})} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Oft ist es aber nicht nötig, alle $3N$ Bewegungsgleichungen zu lösen, da die freie Bewegung der N Teilchen **Einschränkungen** unterliegt. Man unterscheidet zwischen **Zwangskräften** und **Zwangsbedingungen**. Diese wollen wir im folgenden näher erläutern.

2.1.1 Zwangskräfte

Ein Beispiel für eine Zwangskraft ist beispielsweise die **Fadenspannung** beim Fadenpendel. Nehmen wir z.B. an, das Pendel schwinde in der (x, y) -Ebene, vgl. Abb. 2.1. Im Prinzip gäbe es damit die beiden Freiheitsgrade x, y , um die Bewegung des Pendels zu beschreiben. Da aber die **Fadenlänge** ℓ bei der Pendelbewegung stets konstant bleibt, wirkt eine Zwangskraft auf die Masse m , die **Fadenspannung** \vec{F}_F , die dafür sorgt, dass die Masse sich nicht frei in der (x, y) -Ebene bewegen kann, sondern ausschließlich auf einer Kreisbahn mit Radius ℓ . Zur Beschreibung der Bewegung genügt dann ein Freiheitsgrad, z.B. der Winkel φ der Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage.

Ein weiteres Beispiel für eine Zwangskraft ist die **Auflagekraft**, die ein sich auf einer Tischplatte bewegendes Teilchen erfährt. Diese kompensiert die Schwerkraft, so dass die Bewegung nicht im dreidimensionalen Raum, sondern lediglich in einer zweidimensionalen Ebene stattfindet. Anstelle der drei Koordinaten x, y, z für die freie Bewegung des Teilchens in drei Raumdimensionen genügen zwei, z.B. x, y (die Tischebene), falls die z -Achse senkrecht zur Tischoberfläche zeigt.

Zwangskräfte sind oft nicht in expliziter Form bekannt (s. z.B. die Fadenspannung beim Fadenpendel), sondern machen sich lediglich durch ihre Auswirkungen bemerkbar. Eine direkte Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen (unter Einbeziehung der Zwangskräfte) ist daher im Prinzip gar nicht möglich. Das **erste Ziel** der Analytischen Mechanik ist daher, die Bewegungsgleichung so **umzuformulieren**, dass die **Zwangskräfte nicht mehr auftreten**.

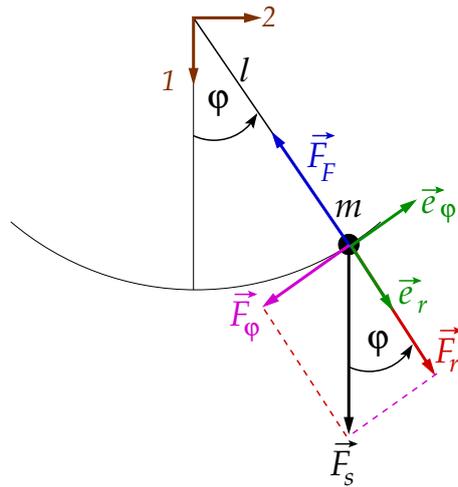


Abbildung 2.1: Das Fadenpendel.

2.1.2 Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen sind **geometrische Bindungen**, die in der Regel durch Zwangskräfte bewirkt werden und damit die freie Bewegung von Massenpunkten einschränken. Das Fadenpendel kann wieder als Beispiel herangezogen werden: anstelle die Fadenspannung als Zwangskraft einzuführen, kann man auch die konstante Fadenlänge, die die Masse m auf eine Kreisbahn zwingt, als geometrische Bindung betrachten.

Ein weiteres Beispiel für ein System mit geometrischen Bindungen ist der starre Körper. Dort gibt es die Abstandsbeziehungen

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \equiv |\vec{r}_{ij}| = r_{ij} = \text{const.} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.1)$$

zwischen den N Massenpunkten m_i des starren Körpers. Wie wir in Kapitel 1 dieser Vorlesung gesehen hatten, sorgen diese dafür, dass der starre Körper nicht $3N$ Freiheitsgrade wie bei der freien Bewegung von N Massenpunkten im dreidimensionalen Raum, sondern lediglich sechs Freiheitsgrade hat (drei der Translation und drei der Rotation).

Offenbar sorgen Zwangsbedingungen dafür, dass nicht alle Teilchenkoordinaten unabhängig voneinander sind. Das **zweite Ziel** der Analytischen Mechanik ist es, die **abhängigen** Freiheitsgrade **zu eliminieren**, d.h. das Problem so **umzuformulieren**, dass lediglich die **unabhängigen Freiheitsgrade** auftreten.

Wie wir sehen werden, geschieht dies durch die Einführung sog. **generalisierter Koordinaten**. Das **dritte** (und letzte) **Ziel** der Analytischen Mechanik ist es sodann, **Bewegungsgleichungen** für die generalisierten Koordinaten aufzustellen und zu lösen.

2.1.3 Klassifizierung von Zwangsbedingungen

Holonome Zwangsbedingungen

Die sog. **holonomen Zwangsbedingungen** (griech. ὅλος=ganz, νόμος=Gesetz) verknüpfen die Teilchenkoordinaten in Gestalt von p Gleichungen der Form

$$G_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad \nu = 1, \dots, p. \quad (2.2)$$

Wir unterscheiden ferner

- (i) **holonom-skleronome Zwangsbedingungen** (griech. σκληρός = hart, fest).

Diese hängen nicht explizit von der Zeit ab,

$$\frac{\partial G_\nu}{\partial t} = 0 \quad \forall \nu = 1, \dots, p.$$

Beispiel: die Zwangsbedingungen (2.1) für den starren Körper, die sich auch in der Form

$$G_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - r_{ij} = 0, \quad r_{ij} = \text{const.}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\},$$

schreiben lassen.

- (ii) **holonom-rheonome Zwangsbedingungen** (griech. ῥέω = ich fließe).

Bei dieser hängt wenigstens eine der p Bedingungen explizit von der Zeit ab,

$$\exists \nu \in \{1, \dots, p\} \text{ mit } \frac{\partial G_\nu}{\partial t} \neq 0.$$

Beispiel: Masse auf einer schiefen Ebene mit zeitlich veränderlicher Neigung, s. Abb. 2.2. Die Zwangsbedingung lautet

$$G(x, z, t) = \frac{z}{x} - \tan \varphi(t) = 0.$$

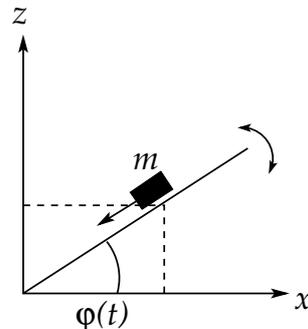


Abbildung 2.2: Schiefe Ebene mit zeitlich veränderlicher Neigung.

Holonome Zwangsbedingungen (2.2) sind dazu geeignet, abhängige Freiheitsgrade zu eliminieren, z.B. indem man sie nach diesen Freiheitsgraden auflöst und die Lösung in den Bewegungsgleichungen für die verbleibenden, unabhängigen Freiheitsgraden benutzt. Im Beispiel mit der zeitlich veränderlichen schiefen Ebene kann man z.B. z durch x ausdrücken, $z = x \tan \varphi(t)$.

Nicht-holonome Zwangsbedingungen

Nicht-holonome Zwangsbedingungen sind all die, die sich **nicht** in der Form (2.2) schreiben lassen. In diesem Fall ist das Eliminieren von abhängigen Koordinaten nicht möglich. Wir unterscheiden in dieser Klasse von Zwangsbedingungen

(i) **Ungleichungen.**

Beispiel: Teilchen, das auf einer Kugel vom Radius R abrollt und sich dann von der Oberfläche löst, vgl. Abb. 2.3. Die Zwangsbedingung lautet

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R \geq 0 ,$$

wobei das Gleichheitszeichen für die Bewegung an der Kugeloberfläche gilt und das Ungleichheitszeichen, sobald es sich von der Oberfläche löst.

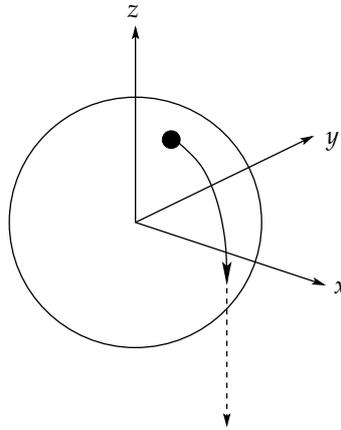


Abbildung 2.3: Teilchen auf einer Kugeloberfläche.

(ii) **Zwangsbedingungen in differentieller, nicht-integrierbarer Form.**

Wir numerieren die Teilchenkoordinaten fortlaufend durch,

$$(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}) .$$

Dann sind diese Zwangsbedingungen vom Typ

$$0 = \sum_{m=1}^{3N} g_{\nu m} dx_m + g_{\nu t} dt , \quad \nu = 1, \dots, p , \tag{2.3}$$

wobei die rechte Seite **kein** totales Differential darstellt, d.h.

$$\nexists G_\nu(x_1, \dots, x_{3N}, t) \text{ mit } g_{\nu m} \equiv \frac{\partial G_\nu}{\partial x_m} , \quad g_{\nu t} = \frac{\partial G_\nu}{\partial t} .$$

Ansonsten könnten wir die Zwangsbedingung integrieren,

$$0 = \sum_{m=1}^{3N} \frac{\partial G_\nu}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial G_\nu}{\partial t} dt \equiv dG_\nu ,$$

$$\iff G_\nu(x_1, \dots, x_{3N}, t) = \gamma_\nu = const. ,$$

$$\iff G'_\nu(x_1, \dots, x_{3N}, t) \equiv G_\nu(x_1, \dots, x_{3N}, t) - \gamma_\nu = 0 .$$

Dies ist aber gerade eine holonome Zwangsbedingung der Form (2.2) für die Funktion $G'_v(x_1, \dots, x_{3N}, t)$.

Beispiel: Rollen eines Rades auf einer rauhen Fläche, vgl. Abb. 2.4. Die Radnabe stehe stets parallel zur (x, y) -Ebene. Die rauhe Fläche verhindert ein Gleiten des Rades.

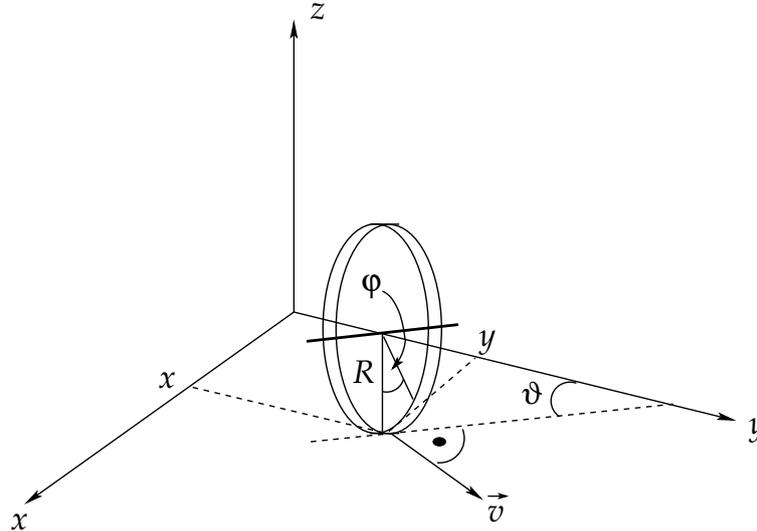


Abbildung 2.4: Rollendes Rad.

Die Bewegung ist vollständig beschrieben durch die Kenntnis des momentanen Auflagepunktes (x, y) des Rades und der Winkel φ, ϑ . Aus der Zwangsbedingung “Rollen” ergibt sich für den Betrag der Geschwindigkeit

$$v \equiv |\vec{v}| = R \dot{\varphi} .$$

Die Geschwindigkeit zeigt senkrecht zur Radachse, d.h.

$$\dot{x} \equiv v_x = v \cos \vartheta ,$$

$$\dot{y} \equiv v_y = v \sin \vartheta .$$

Kombiniert man beide Bedingungen, so erhält man

$$\dot{x} - R \dot{\varphi} \cos \vartheta = 0 ,$$

$$\dot{y} - R \dot{\varphi} \sin \vartheta = 0 ,$$

bzw. nach Multiplikation mit dt ,

$$dx - R \cos \vartheta d\varphi = 0 ,$$

$$dy - R \sin \vartheta d\varphi = 0 . \tag{2.4}$$

Diese Bedingungen sind nicht integrierbar, da man $\vartheta(t)$ kennen müsste. Diese Funktion ist aber erst nach vollständiger Lösung des Problems bekannt.

Nicht-holonome Zwangsbedingungen erlauben **nicht**, die abhängigen Koordinaten zu eliminieren. Es existieren also im eigentlichen Sinne **keine** generalisierten Koordinaten.

2.1.4 Generalisierte Koordinaten

Wir betrachten ein System von N Teilchen mit $3N$ Freiheitsgraden (z.B. den kartesischen Komponenten der N Ortsvektoren \vec{r}_i). Das System unterliege ferner p **holonomen** Zwangsbedingungen. Prinzipiell lassen sich mit den p Zwangsbedingungen p Koordinaten eliminieren. Es existieren also $S = 3N - p$ **unabhängige** Freiheitsgrade.

Man führt nun S **generalisierte Koordinaten**

$$q_1, q_2, \dots, q_S$$

ein. Diese erfüllen folgende Bedingungen:

- (a) Sie legen den Zustand des Systems **eindeutig** fest, d.h.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_S, t) \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.5)$$

- (b) Sie sind alle voneinander **unabhängig**, d.h.

$$\nexists G(q_1, \dots, q_S, t) = 0.$$

Mit anderen Worten, es gibt keine **weitere** holonome Zwangsbedingung, die die generalisierten Koordinaten miteinander verknüpft, alle p existierenden Zwangsbedingungen sind bereits ausgenutzt worden, um die generalisierten Koordinaten zu definieren.

Bemerkungen:

- (i) Der **Konfigurationsraum** ist ein S -dimensionaler Raum, der durch die generalisierten Koordinaten aufgespannt wird.
- (ii) Der **Konfigurationsvektor** $\vec{q} = (q_1, \dots, q_S)$ ist ein Punkt im Konfigurationsraum und entspricht einem möglichen Zustand des Systems.
- (iii) Die zur generalisierten Koordinate q_i gehörende **generalisierte Geschwindigkeit** ist \dot{q}_i , $i = 1, \dots, S$. Alle generalisierten Geschwindigkeiten lassen sich zum S -dimensionalen Vektor $\dot{\vec{q}} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S)$, der zum Konfigurationsvektor gehörenden Geschwindigkeit im Konfigurationsraum, zusammenfassen.
- (iv) Bei bekannten Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{q}(t_0) &= (q_1(t_0), \dots, q_S(t_0)) \equiv \vec{q}_0, \\ \dot{\vec{q}}(t_0) &= (\dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_S(t_0)) \equiv \dot{\vec{q}}_0, \end{aligned}$$

ist der Konfigurationsvektor $\vec{q}(t)$, d.h. der Zustand des Systems im Konfigurationsraum, für beliebige Zeiten $t > t_0$ aus noch zu bestimmenden Bewegungsgleichungen berechenbar.

- (v) Die generalisierten Koordinaten sind i.a. nicht eindeutig festgelegt, d.h. man besitzt eine gewisse Wahlfreiheit bei ihrer Definition. Ihre Anzahl S ist aber eindeutig festgelegt.
- (vi) Die generalisierten Koordinaten sind nicht unbedingt Größen mit der Dimension "Länge".

Beispiele:

- (a) Teilchen, das sich auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R bewegt. Im allgemeinen hat dieses Teilchen drei Freiheitsgrade, z.B. die kartesischen Komponenten seines Ortsvektors $\vec{r} = (x, y, z)$. Es gibt eine holonom-skleronome Zwangsbedingung,

$$r - R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R = 0, \quad (2.6)$$

die sicherstellt, dass der Ortsvektor zu allen Zeiten auf der Kugeloberfläche liegt.

Damit gibt es $S = 3 - 1 = 2$ unabhängige Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinaten bieten sich Polar- und Azimutwinkel der Kugelkoordinaten an,

$$q_1 = \vartheta, \quad q_2 = \varphi.$$

Daraus erhalten wir unter Berücksichtigung der Definition der Kugelkoordinaten (s. Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden") und der Zwangsbedingung (2.6) folgende Transformationsformeln zwischen kartesischen Koordinaten und generalisierten Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta = R \sin q_1 \cos q_2 \equiv x(q_1, q_2), \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta = R \sin q_1 \sin q_2 \equiv y(q_1, q_2), \\ z &= r \cos \vartheta = R \cos q_1 \equiv z(q_1). \end{aligned}$$

- (b) Ebenes Doppelpendel, vgl. Abb. 2.5.

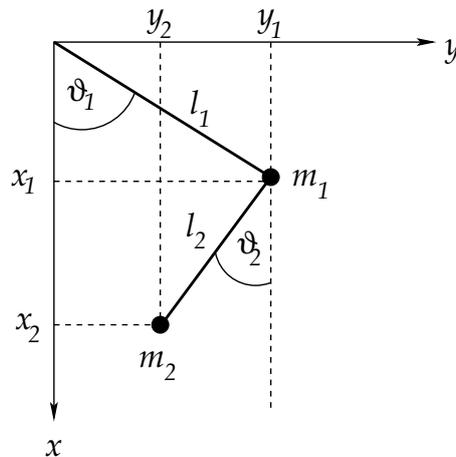


Abbildung 2.5: Doppelpendel.

Dieses System hat sechs Freiheitsgrade, die sechs kartesischen Komponenten der Ortsvektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 der beiden Massen m_1, m_2 . Es existieren vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen,

$$\begin{aligned} z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \\ x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Es existieren somit $S = 6 - 4 = 2$ unabhängige Freiheitsgrade, z.B. die beiden Winkel ϑ_1 und ϑ_2 , vgl. Abb. 2.5. Die generalisierten Koordinaten sind also

$$q_1 \equiv \vartheta_1, \quad q_2 \equiv \vartheta_2.$$

Die Transformationsformeln lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \cos q_1 \equiv x_1(q_1), & x_2 &= \ell_1 \cos q_1 + \ell_2 \cos q_2 \equiv x_2(q_1, q_2), \\ y_1 &= \ell_1 \sin q_1 \equiv y_1(q_1), & y_2 &= \ell_1 \sin q_1 - \ell_2 \sin q_2 \equiv y_2(q_1, q_2), \\ z_1 &= 0, & z_2 &= 0. \end{aligned}$$

2.2 Das d'Alembertsche Prinzip

Wir verfolgen in diesem Kapitel das Ziel, Bewegungsgleichungen aufzustellen, in denen die Zwangskräfte nicht mehr explizit auftreten.

2.2.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Definition: Eine **virtuelle Verrückung** $\delta\vec{r}_i$ ist eine gedachte (virtuelle), infinitesimale Änderung der Koordinaten \vec{r}_i des i -ten Teilchens, welche **mit den Zwangsbedingungen verträglich ist** und **instantan** durchgeführt wird, also während des Zeitintervalls $\delta t = 0$.

Bemerkung 1: "Mit den Zwangsbedingungen verträglich" bedeutet, dass die virtuelle Verrückung so geschieht, dass sie die Zwangsbedingungen nicht verletzt.

Beispiele:

- (i) Fadenpendel. Der Faden bleibt bei einer virtuellen Verrückung stets gespannt, reißt aber nicht. Die virtuelle Verrückung geschieht also entlang des Kreisbogens, auf der sich die Masse bewegt.
- (ii) Teilchen auf Tischplatte in der (x, y) -Ebene. Die virtuelle Verrückung darf ebenfalls nicht aus dieser Ebene herausführen, d.h. $\delta z = 0$.

Bemerkung 2: $\delta\vec{r}_i$ hat nichts mit dem Bewegungsablauf des i -ten Teilchens zu tun, also der **tatsächlichen** Änderung $d\vec{r}_i$ der Koordinaten \vec{r}_i im Zeitintervall dt . Daher benutzen wir die Notation "δ" anstelle von "d". Dennoch werden virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ mathematisch wie Differentiale $d\vec{r}_i$ behandelt, d.h. es gelten die gleichen Regeln der Differentialrechnung.

Beispiel: Teilchen im Aufzug, s. Abb. 2.6. Das Teilchen hat zwei Freiheitsgrade, x und z . Es gibt eine holonom-rheonome Zwangsbedingung,

$$z = z_0 + v_0(t - t_0) \iff z - z_0 - v_0(t - t_0) = 0. \quad (2.7)$$

Also gibt es $S = 2 - 1 = 1$ generalisierte Koordinate, z.B.

$$x = q_1 \equiv q.$$

Die Zwangsbedingung (2.7) liefert $dz = v_0 dt$, und eine tatsächliche Verrückung ist damit

$$d\vec{r} = (dx, dz) = (dq, v_0 dt) .$$

Für eine virtuelle Verrückung gilt jedoch $\delta t = 0$, also auch $\delta z = v_0 \delta t = 0$ und damit

$$\delta\vec{r} = (\delta x, \delta z) = (\delta q, 0) .$$

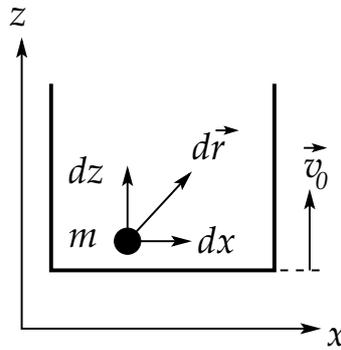


Abbildung 2.6: Teilchen im Aufzug.

Definition: Sei \vec{F}_i die auf das i -te Teilchen wirkende Kraft und $\delta\vec{r}_i$ eine virtuelle Verrückung der Koordinaten \vec{r}_i des i -ten Teilchens. Dann ist die **virtuelle Arbeit** definiert als

$$\delta W_i = -\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i . \quad (2.8)$$

Die Kraft \vec{F}_i kann gemäß

$$\vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i \quad (2.9)$$

zerlegt werden, wobei \vec{K}_i die **treibende Kraft** ist und \vec{Z}_i die **Zwangskraft** ist. Es gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$. Bringen wir die Kraft \vec{F}_i auf die linke Seite, multiplizieren skalar mit der virtuellen Verrückung $\delta\vec{r}_i$ und summieren über alle Teilchen, so erhalten wir mit Gl. (2.9)

$$\begin{aligned} \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i &= 0 \\ \iff (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i &= 0 \\ \iff \sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Das **Prinzip der virtuellen Arbeit** besagt nun, dass die Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen **keine** Arbeit leisten,

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 . \quad (2.11)$$

Man beachte, dass nicht notwendigerweise jeder Term in der Summe verschwinden muss, sondern nur die Summe als Ganzes.

Beispiele:

- (i) Teilchen der Masse m auf Tischplatte in der (x, y) -Ebene. Die Zwangskraft ist die Auflagekraft des Teilchens und kompensiert gerade die Schwerkraft, $\vec{Z} = (0, 0, Z) = (0, 0, mg)$. Die virtuelle Verrückung muss mit den Zwangsbedingungen verträglich sein (s.o.), also $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, 0)$. Daraus ergibt sich zwangsläufig, dass $\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0$, da die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.
- (ii) Atwoodsche Fallmaschine, vgl. Abb. 2.7.

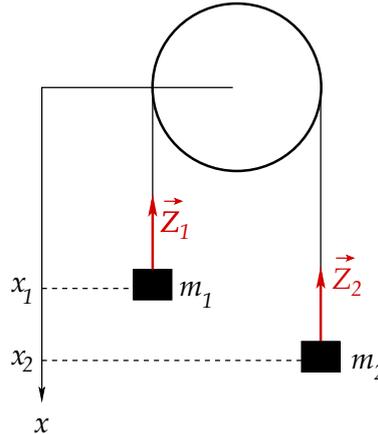


Abbildung 2.7: Atwoodsche Fallmaschine.

Die Fadenspannungen \vec{Z}_1 und \vec{Z}_2 sind identisch, $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2 \equiv \vec{Z} = -(Z, 0, 0)$, ansonsten würde der Faden reißen. Die virtuellen Verrückungen der Massen m_1 und m_2 müssen entlang der x -Achse geschehen, $\delta\vec{r}_1 = (\delta x_1, 0, 0)$ und $\delta\vec{r}_2 = (\delta x_2, 0, 0)$. Da die gesamte Fadenspannung stets konstant bleibt, gilt $\delta x_1 = -\delta x_2$. Damit ist das Prinzip der virtuellen Arbeit erfüllt,

$$\vec{Z}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = -Z(\delta x_1 + \delta x_2) = 0 .$$

Aus Gl. (2.10) und dem Prinzip der virtuellen Arbeit (2.11) folgt das sog. **d'Alembertsche Prinzip**,

$$\sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 . \tag{2.12}$$

Ein erstes Ziel ist erreicht: die **Zwangskräfte** tauchen aufgrund des Prinzips der virtuellen Arbeit nicht mehr auf, sind also aus der weiteren Betrachtung **eliminiert** worden. Allerdings sind aufgrund der **Zwangsbedingungen** nicht alle in Gl. (2.12) auftretenden virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ unabhängig, verschiedene Terme in der Summe beeinflussen sich gegenseitig. Dies lässt sich beheben, indem man die Teilchenkoordinaten \vec{r}_i durch **generalisierte Koordinaten** ersetzt. Dies wird im nächsten Abschnitt erläutert und führt dann letztlich auf die gesuchten Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten.

2.2.2 Holonome Systeme: Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Gemäß Gl. (2.5) sind die Teilchenkoordinaten \vec{r}_i Funktionen der generalisierten Koordinaten $\{q_1, \dots, q_S\}$ und der Zeit t . Das totale Differential lautet also

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt. \quad (2.13)$$

Für die Teilchengeschwindigkeit erhalten wir (nach Division durch dt)

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Die partiellen Ableitungen $\partial \vec{r}_i / \partial q_j$ und $\partial \vec{r}_i / \partial t$ sind, wie auch \vec{r}_i , vgl. Gl. (2.5), Funktionen von q_1, \dots, q_S und t , hängen aber nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j ab. Damit folgt aus Gl. (2.14) durch Ableiten nach \dot{q}_j

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \equiv \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.15)$$

16.5.2017

Virtuelle Verrückungen werden wie gewöhnliche Differentiale behandelt, geschehen jedoch instantan, $\delta t = 0$. Deshalb gilt analog zu Gl. (2.13)

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.16)$$

Die gesamte von den **treibenden Kräften** \vec{K}_i geleistete virtuelle Arbeit ist dann

$$-\delta W_K = \sum_i \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^S \left(\sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j, \quad (2.17)$$

wobei wir die sog. **generalisierten Kräfte**

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.18)$$

definiert haben.

Bemerkungen:

- (i) Da die generalisierte Koordinate q_j nicht unbedingt die Dimension einer Länge hat, muss die generalisierte Kraft auch nicht unbedingt die Dimension einer Kraft haben. Das Produkt $Q_j \delta q_j$ hat aber stets die Dimension Energie.

(ii) Wir betrachten den Spezialfall eines **konservativen Systems**. Es gilt

$$\vec{K}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) .$$

Dann lautet Gl. (2.18)

$$Q_j = -\sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_j} , \quad j = 1, \dots, S , \quad (2.19)$$

wobei wir die Kettenregel auf die Funktion $V(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_S, t), \dots, \vec{r}_N(q_1, \dots, q_S, t))$ angewendet haben. Man beachte, dass aufgrund des Zusammenhangs (2.5) bei Ersetzen der Teilchenkoordinaten durch die generalisierten Koordinaten die Funktion $V(q_1, \dots, q_S, t)$ auch explizit von der Zeit abhängen kann.

Wir betrachten jetzt den zweiten Term im d'Alembertschen Prinzip, $\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i$. Wir berechnen zunächst

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{l=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} , \quad (2.20)$$

wobei wir im ersten Schritt die Kettenregel für die Funktion $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_S, t)$, im zweiten die Unabhängigkeit der generalisierten Koordinaten und der generalisierten Geschwindigkeiten, $\partial \dot{q}_l / \partial q_j \equiv 0$, und im dritten Gl. (2.14) ausgenutzt haben. Es folgt mit den Gln. (2.15), (2.16) und (2.20)

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j , \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei wir die Definition der **kinetischen Energie**,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 , \quad (2.22)$$

benutzt haben. Setzen wir die Glgen. (2.17) und (2.21) in Gl. (2.12) ein, so erhalten wir das **d'Alembertsche Prinzip ausgedrückt durch generalisierte Koordinaten**:

$$\sum_{j=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (2.23)$$

Spezialfälle:

- (i) **Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen.** In diesem Fall sind die generalisierten Koordinaten q_j voneinander unabhängig, d.h. auch ihre virtuellen Verdrückungen δq_j sind **unabhängig**. Dann muss aber **jeder einzelne Term** in der Summe in Gl. (2.23) verschwinden,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, S. \quad (2.24)$$

- (ii) **Konservative Systeme.** Mit Gl. (2.19) und der Tatsache, dass das Potential V nicht von den Geschwindigkeiten \vec{r}_i , also auch nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j , abhängen kann,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0,$$

wird aus Gl. (2.23)

$$\sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right] \delta q_j = 0. \quad (2.25)$$

Wir definieren die sog. **Lagrange-Funktion**

$$L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) \equiv T(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) - V(q_1, \dots, q_S, t), \quad (2.26)$$

als **Differenz von kinetischer und potentieller Energie**. Sie hängt von den generalisierten Koordinaten, den generalisierten Geschwindigkeiten und der Zeit ab. Man beachte, dass die kinetische Energie (2.22) zwar lediglich eine Funktion der Teilchengeschwindigkeiten \vec{r}_i ist, aber aufgrund von Gl. (2.14) nicht nur von den generalisierten Geschwindigkeiten, sondern auch von den generalisierten Koordinaten und der Zeit abhängen kann, wenn man die Ersetzung (2.5) der Teilchenkoordinaten durch die generalisierten Koordinaten vornimmt. Wie oben schon erwähnt, hängt die potentielle Energie lediglich von den generalisierten Koordinaten und der Zeit ab. Mit der Lagrange-Funktion (2.26) wird aus Gl. (2.25)

$$\sum_{j=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (2.27)$$

- (iii) **Konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen.** In diesem Fall sind alle q_j unabhängig voneinander und Gl. (2.27) kann nur erfüllt werden, wenn jeder einzelne Term in der Summe verschwindet,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S. \quad (2.28)$$

Dies sind die sog. **Lagrange-Gleichungen zweiter Art.**

Die Lagrange-Gleichungen sind die gesuchten Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten q_j . Wir zeigen nun, dass es sich um Differentialgleichungen **zweiter Ordnung** in den generalisierten Koordinaten q_j handelt. Für die Lösung von S Lagrange-Gleichungen für die Koordinaten $\{q_1, \dots, q_S\}$ ist also die Kenntnis von $2S$ Anfangsbedingungen erforderlich.

Wir schreiben zunächst die kinetische Energie (2.22) mit Hilfe von Gl. (2.14) um,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{j=1}^S \alpha_j \dot{q}_j + \alpha, \end{aligned}$$

wobei wir die Größen

$$\begin{aligned} \mu_{jl}(q_1, \dots, q_S, t) &\equiv \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}, \\ \alpha_j(q_1, \dots, q_S, t) &\equiv \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \\ \alpha(q_1, \dots, q_S, t) &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \end{aligned}$$

definiert haben. Damit schreibt sich die Lagrange-Funktion (2.26) als

$$L = T - V \equiv L_2 + L_1 + L_0, \quad (2.29)$$

mit

$$\begin{aligned} L_2 &\equiv \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \\ L_1 &\equiv \sum_{j=1}^S \alpha_j \dot{q}_j, \\ L_0 &\equiv \alpha - V. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Definition: Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_m)$ heißt **homogen vom Grad n** , falls

$$f(ax_1, \dots, ax_m) = a^n f(x_1, \dots, x_m) \quad \forall a \in \mathbb{R} .$$

Damit sind die in Gl. (2.30) definierten Funktionen L_n homogene Funktionen der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j vom Grad n . Folglich ist der in den Lagrange-Gleichungen zweiter Art (2.28) auftretende Term $\partial L / \partial \dot{q}_j$ höchstens vom Grad 1 in den generalisierten Geschwindigkeiten. Die Zeitableitung dieses Terms sorgt dann dafür, dass die **generalisierten Beschleunigungen** \ddot{q}_j in den Lagrange-Gleichungen auftreten, diese also Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den generalisierten Koordinaten sind, q.e.d..

Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen gegenüber Punkttransformationen

Wir hatten oben erwähnt, dass die generalisierten Koordinaten nicht eindeutig festlegbar sind und dass lediglich ihre Anzahl S eindeutig ist. Wir zeigen nun, dass eine sog. **Punkttransformation**

$$(q_1, \dots, q_S) \longrightarrow (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S) \quad (2.31)$$

die Form der Lagrange-Gleichungen (2.28) nicht ändert. Mit anderen Worten, die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten \bar{q}_j haben die gleiche Form wie die für die generalisierten Koordinaten q_j . Es ist damit gleichgültig, welche Wahl wir für die generalisierten Koordinaten treffen, d.h. ob wir den Satz $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S)$ oder den Satz (q_1, \dots, q_S) wählen, die zu lösenden Bewegungsgleichungen sind immer die Lagrange-Gleichungen (2.28) für die entsprechenden generalisierten Koordinaten.

Die Punkttransformation (2.31) legt den funktionalen Zusammenhang zwischen den neuen und alten generalisierten Koordinaten fest,

$$\begin{aligned} \bar{q}_j &= \bar{q}_j(q_1, \dots, q_S, t), \quad j = 1, \dots, S, \\ q_l &= q_l(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S, t), \quad l = 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sei

$$\bar{L}(\vec{\bar{q}}, \dot{\vec{\bar{q}}}, t) = L(\vec{q}(\vec{\bar{q}}, t), \dot{\vec{q}}(\vec{\bar{q}}, \dot{\vec{\bar{q}}}, t), t) \quad (2.33)$$

die Lagrange-Funktion für die Variablen $\vec{\bar{q}}$, die aus der ursprünglichen Lagrange-Funktion L folgt, wenn man die alten generalisierten Koordinaten q_l gemäß Gl. (2.32) durch die neuen Koordinaten \bar{q}_j ersetzt. Wir zeigen nun, dass aus den Lagrange-Gleichungen für die Variablen q_l ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, \dots, S,$$

die Lagrange-Gleichungen für die Variablen \bar{q}_j folgen,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S.$$

Zunächst folgt aus Gl. (2.32)

$$\dot{q}_l = \sum_{j=1}^S \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j} \dot{\bar{q}}_j + \frac{\partial q_l}{\partial t} \implies \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j}. \quad (2.34)$$

Hier wurde ausgenutzt, dass, weil q_l nicht von \dot{q}_j abhängt, auch $\partial q_l / \partial t$ nicht von \dot{q}_j abhängen kann. Desweiteren gilt mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j} = \sum_{m=1}^S \frac{\partial^2 q_l}{\partial \bar{q}_m \partial \bar{q}_j} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 q_l}{\partial t \partial \bar{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{q}_j} \left(\sum_{m=1}^S \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_m} \dot{q}_m + \frac{\partial q_l}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \bar{q}_j}, \quad (2.35)$$

wobei wir die Unabhängigkeit von generalisierten Koordinaten und generalisierten Geschwindigkeiten, $\partial \dot{q}_m / \partial \bar{q}_l = 0$, und die Kettenregel angewendet auf die Funktion (2.32) benutzt haben.

Wir berechnen nun mit Hilfe der Kettenregel für die Funktion \bar{L} aus Gl. (2.33)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_j} &= \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \bar{q}_j} \right), \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} &= \sum_{l=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\bar{q}}_j}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Für die Zeitableitung des zweiten Terms gilt dann unter Zuhilfenahme der Gln. (2.34) und (2.35):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} &= \sum_{l=1}^S \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\bar{q}}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\bar{q}}_j} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^S \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^S \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \bar{q}_j} \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ziehen wir Gl. (2.37) von Gl. (2.36) ab, so heben sich die zweiten Terme unter der Summe jeweils gegeneinander weg und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_j} = \sum_{l=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial \bar{q}_j} = 0$$

also mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen für die generalisierten Koordinaten q_l gerade die Lagrange-Gleichungen für die generalisierten Koordinaten \bar{q}_j , q.e.d..

19.5.2017

2.2.3 Anwendungen der Lagrange-Gleichungen zweiter Art

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Anwendungen der Lagrange-Gleichungen zweiter Art studieren. Wir betrachten also ausschließlich **konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen**.

Allgemeines Lösungsschema

Das allgemeine Lösungsschema besteht aus fünf Schritten:

- (i) Zwangsbedingungen formulieren.
- (ii) Generalisierte Koordinaten \vec{q} festlegen, Teilchenkoordinaten durch diese ausdrücken, vgl. Gl. (2.5).
- (iii) Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t)$ aufstellen.
- (iv) Lagrange-Gleichungen ableiten und lösen.
- (v) Auf Teilchenkoordinaten zurücktransformieren, vgl. Gl. (2.5).

Atwoodsche Fallmaschine

Die Atwoodsche Fallmaschine hatten wir schon in Abb. 2.7 kennengelernt. Sie hat sechs Freiheitsgrade, z.B. die kartesischen Komponenten der Ortsvektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 der beiden Massen m_1 und m_2 .

- (i) Da die Fadlänge konstant bleibt und auch das über das Rad verlaufende Stück stets dieselbe Länge besitzt, lauten die (holonom-skleronomen) Zwangsbedingungen:

$$x_1 + x_2 \equiv \ell = \text{const.}, \quad y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0. \quad (2.38)$$

Wir haben damit ein System von $S = 6 - 5 = 1$ unabhängigen Variablen.

- (ii) Als (einzige) generalisierte Koordinate wählen wir

$$x_1 = q.$$

Aus der Zwangsbedingung (2.38) folgt dann $x_2 = \ell - q$.

- (iii) Die kinetische Energie lautet mit $\dot{x}_1 = \dot{q}$, $\dot{x}_2 = -\dot{q}$:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2.$$

Die potentielle Energie ist

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -g [m_1 q + m_2 (\ell - q)] = -g (m_1 - m_2) q - g m_2 \ell.$$

Damit ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2 + g (m_1 - m_2) q + g m_2 \ell.$$

Der letzte Term ist konstant und kann weggelassen werden, da in den Lagrange-Gleichungen lediglich Ableitungen von L auftreten.

- (iv) Es gibt eine einzige Lagrange-Gleichung für die generalisierte Koordinate q . Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{q}] = (m_1 + m_2) \ddot{q}, \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= g(m_1 - m_2).\end{aligned}$$

Die Lagrange-Gleichung (2.28) lautet

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (2.39)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für den **freien Fall** mit Beschleunigung

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g < g.$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung ist aus dem ersten Teil der Vorlesung wohlbekannt. Die Atwoodsche Fallmaschine simuliert also den freien Fall einer Masse mit verringerter Beschleunigung.

- (v) Wegen $x_1 \equiv q$, $x_2 = \ell - q$ ist die Rücktransformation auf physikalische Koordinaten trivial.

Bemerkung: Über die **Newtonschen Bewegungsgleichungen**

$$m_i \ddot{x}_i = m_i g - Z_i, \quad i = 1, 2,$$

lassen sich nun die **Zwangskräfte** Z_i bestimmen. (Wir haben hier berücksichtigt, dass \vec{Z}_i in $(-x)$ -Richtung zeigt.)

Subtrahieren wir die beiden Bewegungsgleichungen für $i = 1, 2$, so erhalten wir mit $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$

$$m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 \equiv (m_1 + m_2) \ddot{q} = (m_1 - m_2) g - Z_1 + Z_2.$$

Aus der Bewegungsgleichung (2.39) folgt daraus sofort $Z_1 = Z_2 \equiv Z$, wie wir schon vorher intuitiv mittels der Bedingung, dass der Faden nicht reissen soll, argumentiert hatten.

Addieren wir die beiden Bewegungsgleichungen, so folgt mit Gl. (2.39)

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 \equiv (m_1 - m_2) \ddot{q} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g = (m_1 + m_2) g - 2Z,$$

bzw.

$$Z = \frac{g}{2} \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.40)$$

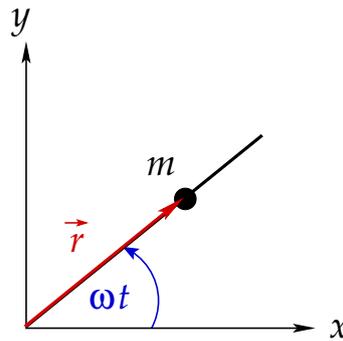


Abbildung 2.8: Gleitende Perle auf gleichförmig rotierendem Draht.

Gleitende Perle auf gleichförmig rotierendem Draht

Wir betrachten eine gleitende Perle der Masse m auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der (x, y) -Ebene rotierenden Draht, s. Abb. 2.8. Das System hat drei Freiheitsgrade, z.B. die kartesischen Komponenten des Ortsvektors \vec{r} der Perle.

- (i) Es gibt zwei Zwangsbedingungen, von denen eine holonom-rheonom ist:

$$z = 0, \quad y = x \tan(\omega t). \quad (2.41)$$

Damit hat das System $S = 3 - 2 = 1$ unabhängigen Freiheitsgrad.

- (ii) Als generalisierte Koordinate kann man z.B. den Abstand der Perle vom Ursprung wählen,

$$r = q.$$

Damit lauten die Transformationsformeln (2.5)

$$x = q \cos(\omega t), \quad y = q \sin(\omega t), \quad z = 0.$$

Der Ausdruck für y folgt entweder aus trigonometrischen Überlegungen oder aus dem Ausdruck für x unter Anwendung der Zwangsbedingung (2.41). Für die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeiten ergibt sich

$$\dot{x} = \dot{q} \cos(\omega t) - q \omega \sin(\omega t), \quad \dot{y} = \dot{q} \sin(\omega t) + q \omega \cos(\omega t), \quad \dot{z} = 0.$$

- (iii) Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{q}^2 \cos^2(\omega t) - 2 \dot{q} q \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) + q^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \\ &\quad + \dot{q}^2 \sin^2(\omega t) + 2 \dot{q} q \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) + q^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)] \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2). \end{aligned}$$

Die potentielle Energie verschwindet, $V = 0$, deshalb ist $L = T$.

(iv) Wir berechnen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \ddot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = m \omega^2 q,$$

also ergibt sich aus der Lagrange-Gleichung (2.28) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} - \omega^2 q = 0$$

für die generalisierte Koordinate q . Sie hat die allgemeine Lösung

$$q(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}, \quad \dot{q}(t) = A \omega e^{\omega t} - B \omega e^{-\omega t}.$$

Mit der Anfangsbedingung

$$q(0) = r_0 > 0, \quad \dot{q}(0) = 0,$$

bestimmen wir die Konstanten A, B zu

$$A + B = r_0, \quad A - B = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = B = \frac{r_0}{2}.$$

d.h.

$$q(t) = \frac{r_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = r_0 \cosh(\omega t), \quad \dot{q}(t) = \omega r_0 \sinh(\omega t).$$

(v) Die kartesischen Komponenten des Ortsvektors der Perle sind

$$x = r_0 \cosh(\omega t) \cos(\omega t), \quad y = r_0 \cosh(\omega t) \sin(\omega t), \quad z = 0.$$

Die Perle bewegt sich mit wachsender radialer Beschleunigung

$$\ddot{q} = \omega^2 r_0 \cosh(\omega t) = \omega^2 q(t) > 0$$

nach außen. Offenbar nimmt dabei auch die Gesamtenergie der Perle

$$\begin{aligned} E &= T = \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) = \frac{1}{2} m [\omega^2 r_0^2 \sinh^2(\omega t) + \omega^2 r_0^2 \cosh^2(\omega t)] \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 r_0^2 [1 + 2 \sinh^2(\omega t)] \end{aligned}$$

mit der Zeit ständig zu. Dies ist möglich, da Rotationsenergie aus der Drehbewegung des Drahtes in kinetische Energie der Perle übertragen wird. Dann muss allerdings an der Perle Arbeit verrichtet worden sein, d.h. es muss eine Kraft auf die Perle wirken, die für den Zuwachs an Energie sorgt.

Die auf die Perle wirkende Kraft ist die radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft \vec{K} und eine Zwangskraft \vec{Z} , die senkrecht zu \vec{K} steht und dafür sorgt, dass sich die Perle auf dem Draht entlangbewegt, vgl. Abb. 2.9.

Man beachte, dass die tatsächliche Verrückung $d\vec{r} \equiv \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$ nicht in dieselbe Richtung zeigt wie die virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}$. Erstere geschieht nämlich im infinitesimalen, aber nichtverschwindenden Zeitintervall dt , während dessen sich der Draht um ωdt

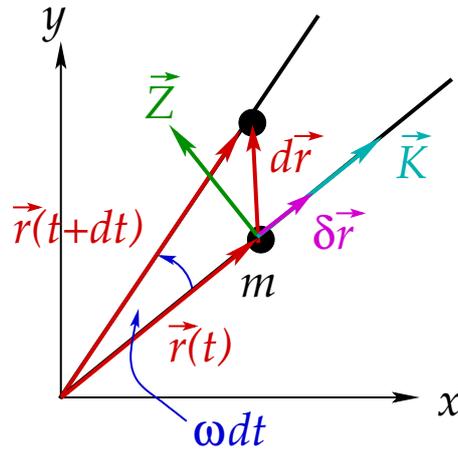


Abbildung 2.9: Auf die gleitende Perle wirkende Kräfte und infinitesimale tatsächliche und virtuelle Verrückungen.

weitergedreht hat, während letztere instantan und (im Einklang mit den Zwangsbedingungen) entlang des Drahtes geschieht. Die Zwangskraft leistet damit tatsächliche Arbeit an der Perle,

$$dW_Z = -\vec{Z} \cdot d\vec{r} < 0 ,$$

aber eben keine virtuelle Arbeit, da \vec{Z} und $\delta\vec{r}$ senkrecht aufeinander stehen,

$$\delta W_Z = -\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0 .$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist damit erfüllt.

2.2.4 Generalisierter Impuls und zyklische Koordinaten

Definition: Der zur generalisierten Koordinate q_j gehörende **generalisierte Impuls** p_j ist definiert als partielle Ableitung der Lagrange-Funktion nach der generalisierten Geschwindigkeit \dot{q}_j ,

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} . \tag{2.42}$$

Definition: Eine generalisierte Koordinate q_j heißt **zyklische Koordinate**, falls

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \tag{2.43}$$

Korollar: Die zu zyklischen Koordinaten q_j gehörenden generalisierten Impulse p_j sind **Erhaltungsgrößen**.

Beweis: Die Lagrange-Gleichung für eine zyklische Koordinate q_j lautet

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j \implies p_j = \text{const.} , \text{q.e.d.} .$$

Damit ist die Bewegungsgleichung für eine zyklische Koordinate nicht nur in besonders eleganter Weise gelöst, sie ist außerdem identisch mit einem Erhaltungssatz für den aus der Lagrange-Funktion einfach zu berechnenden generalisierten Impuls.

Beispiel: Kepler-Problem. Dieses Problem ist aus der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden” wohlbekannt. Die sich im Zentralpotential

$$V(r) = -\frac{\gamma m M}{r} \quad (2.44)$$

der Masse M bewegende Masse m hat drei Freiheitsgrade, z.B. die kartesischen Komponenten ihres Ortsvektors $\vec{r} = (x, y, z)$. Wir folgen wieder dem allgemeinen Lösungsschema aus Abschnitt 2.2.3.

- (i) Es gibt keine Zwangsbedingung. Diese Tatsache kann allerdings auch als (triviale) holonom-skleronome Zwangsbedingung interpretiert werden.
- (ii) Als generalisierte Koordinaten wählen wir zweckmäßigerweise Kugelkoordinaten,

$$r = q_1, \quad \vartheta = q_2, \quad \varphi = q_3.$$

Der Übersicht halber behalten wir die ursprüngliche Notation r, ϑ, φ bei. Die Transformationsformeln sind einfach die wohlbekanntesten Formeln für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten.

- (iii) Die kinetische Energie ist (vgl. Gl. (1.178) im Skript zur Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right).$$

Mit der potentiellen Energie (2.44) lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{\gamma m M}{r}. \quad (2.45)$$

Ganz offensichtlich ist φ eine zyklische Variable: die Lagrange-Funktion hängt zwar von $\dot{\varphi}$ ab, nicht aber von φ selbst, $\partial L / \partial \varphi = 0$.

Der zugehörige generalisierte Impuls ist

23.5.2017

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (2.46)$$

Dies ist identisch mit der z -Komponente des Bahndrehimpulses,

$$\begin{aligned} L_z &= m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z \\ &= m \left[r \cos \varphi \sin \vartheta \left(\dot{r} \sin \varphi \sin \vartheta + r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \sin \varphi \cos \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. - r \sin \varphi \sin \vartheta \left(\dot{r} \cos \varphi \sin \vartheta - r \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta \right) \right] \\ &= m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \equiv p_\varphi. \end{aligned}$$

Da aber die z -Komponente aufgrund der Symmetrie des Problems durch nichts ausgezeichnet ist, muss sogar der **gesamte** Drehimpuls erhalten sein,

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{const.} .$$

Zweckmäßigerweise wählt man das Koordinatensystem so, dass $\vec{L} = L_z \vec{e}_z \equiv p_\varphi \vec{e}_z$. Mit einer ähnlichen Rechnung wie für L_z findet man

$$\begin{aligned} L_x &= m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_x = -m r^2 \left(\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \right) , \\ L_y &= m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_y = m r^2 \left(\dot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \right) . \end{aligned}$$

Diese Komponenten des Bahndrehimpulses sollen aufgrund der Wahl des Koordinatensystems verschwinden, was durch geeignete Linearkombination auf folgende Bedingungen für den Winkel ϑ führt:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{L_x}{m r^2} \sin \varphi + \frac{L_y}{m r^2} \cos \varphi = \dot{\vartheta} \implies \vartheta = const. , \\ 0 &= \frac{L_x}{m r^2} \cos \varphi + \frac{L_y}{m r^2} \sin \varphi = -\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden im Definitionsbereich von ϑ durch $\vartheta = 0, \pi/2, \pi$ erfüllt. Der erste und letzte Wert ist aber auszuschließen, da ansonsten $p_\varphi = L_z = |\vec{L}| = 0$ wäre. Also muss stets $\vartheta = \pi/2$ sein, was bedeutet, dass die Bewegung ausschließlich in der (x, y) -Ebene stattfindet. Wir wissen aus der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden", dass dies eine Konsequenz der Drehimpulserhaltung ist.

- (iv) Die Lagrange-Gleichung für die generalisierte Koordinate φ ist trivial durch Gl. (2.46) gelöst und die für ϑ brauchen wir aufgrund der Drehimpulserhaltung nicht zu lösen, da stets $\vartheta = \pi/2$ gilt. Die Lagrange-Gleichung für die verbleibende generalisierte Koordinate r lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m \ddot{r} - m r (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{\gamma m M}{r^2} , \\ &= m \ddot{r} - \frac{p_\varphi^2}{m r^3} + \frac{\gamma m M}{r^2} , \\ &\equiv m \ddot{r} + \frac{dU}{dr} , \end{aligned} \tag{2.47}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $\vartheta = \pi/2$ ausgenutzt und Gl. (2.46) benutzt haben, um $\dot{\varphi}$ durch p_φ auszudrücken. Im letzten Schritt haben wir schließlich noch das **effektive Potential**

$$U(r) \equiv \frac{p_\varphi^2}{2 m r^2} - \frac{\gamma m M}{r}$$

für die Radialbewegung eingeführt. Die Lösung der Bewegungsgleichung (2.47) ist aus der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden" wohlbekannt.

- (v) Eine Rücktransformation auf kartesische Koordinaten ist nicht nötig.

2.2.5 Nicht-holonome Systeme: Die Lagrange-Gleichungen erster Art

Für **nicht-holonome** Systeme liegen die p Zwangsbedingungen nicht in einer Form vor, die es erlaubt, die Zahl der Freiheitsgrade von $3N$ um p auf $S = 3N - p$ **unabhängige** Freiheitsgrade zu reduzieren. Man kann zwar nach wie vor **generalisierte Koordinaten** q_j einführen, die sich u.U. von den Teilchenkoordinaten unterscheiden, aber sie sind nicht mehr **unabhängig** voneinander (und damit im strengen Sinne der Definition keine generalisierten Koordinaten). Im Prinzip ist die Diskussion aus Abschnitt 2.2.2 bis Gl. (2.23) nach wie vor gültig, aber da die δq_j nicht unabhängig voneinander sind, kann man keinen Satz von Bewegungsgleichungen ähnlich Gl. (2.24) für die q_j ableiten.

Falls die Zwangsbedingungen jedoch in **differentieller** (und i.a. nicht-integrabler) Form vorliegen, so gibt es ein Lösungsverfahren, die **Methode der Lagrange-Multiplikatoren**.

Wir betrachten ein System mit p' Zwangsbedingungen, von denen $p \leq p'$ in der Form

$$\sum_{m=1}^{3N} g_{\nu m}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + g_{\nu t}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0, \quad \nu = 1, \dots, p, \quad (2.48)$$

vorliegen. Ferner gebe es $p' - p$ holonome Zwangsbedingungen,

$$G_\nu(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, \quad \nu = p + 1, \dots, p'. \quad (2.49)$$

Das allgemeine Lösungsschema lautet wie folgt:

- (i) Nutze die $p' - p$ holonomen Zwangsbedingungen, um die Zahl der Freiheitsgrade von $3N$ auf $S = 3N - (p' - p)$ zu reduzieren. Man wählt dann S Koordinaten q_1, \dots, q_S , die aber im strengen Sinne **keine** generalisierten Koordinaten sind, da sie nicht unabhängig voneinander sind, sondern über die p nicht-holonomen Zwangsbedingungen miteinander verknüpft sind. Dennoch bezeichnen wir sie im folgenden weiterhin als **generalisierte Koordinaten**. Die Transformationsformeln lauten wie Gl. (2.5).
- (ii) Schreibe die p nicht-holonomen Zwangsbedingungen (2.48) mit Hilfe der Transformationsformeln auf generalisierte Koordinaten um. Dabei geht man wie folgt vor: mittels Gl. (2.13) für die totalen Differentiale der Teilchenkoordinaten lassen sich die dx_m in Gl. (2.48) durch die dq_j ausdrücken,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^{3N} g_{\nu m} dx_m + g_{\nu t} dt \\ &= \sum_{m=1}^{3N} g_{\nu m} \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial x_m}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_m}{\partial t} dt \right) + g_{\nu t} dt \\ &= \sum_{j=1}^S \left(\sum_{m=1}^{3N} g_{\nu m} \frac{\partial x_m}{\partial q_j} \right) dq_j + \left(\sum_{m=1}^{3N} g_{\nu m} \frac{\partial x_m}{\partial t} + g_{\nu t} \right) dt \\ &\equiv \sum_{j=1}^S a_{\nu j} dq_j + b_{\nu t} dt, \quad \nu = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.50)$$

wobei wir die Koeffizienten $a_{\nu j}$ und $b_{\nu t}$ eingeführt haben. Für **virtuelle Verrückungen** lauten diese Zwangsbedingungen

$$0 = \sum_{j=1}^S a_{\nu j} \delta q_j, \quad \nu = 1, \dots, p. \quad (2.51)$$

- (iii) Wir definieren p sog. **Lagrange-Multiplikatoren** λ_ν , $\nu = 1, \dots, p$. Diese sind **unabhängig** von den generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_S , können aber von der Zeit t abhängen. Wir multiplizieren jede der p Gleichungen (2.51) mit dem entsprechenden λ_ν und summieren,

$$0 = \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \sum_{j=1}^S a_{\nu j} \delta q_j = \sum_{j=1}^S \left(\sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta q_j. \quad (2.52)$$

- (iv) Für konservative Systeme hatten wir in Abschnitt 2.2.2 das d'Alembertsche Prinzip in der Form (2.27) abgeleitet. (Dies gilt, selbst wenn die q_j nicht unabhängig voneinander sind.) Wir subtrahieren Gl. (2.27) von Gl. (2.52) und erhalten

$$0 = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta q_j. \quad (2.53)$$

Von den S Koordinaten q_1, \dots, q_S sind im Prinzip $S - p = 3N - p'$ unabhängig, während p Koordinaten den nicht-holonomen Zwangsbedingungen (2.50) unterliegen und daher abhängig sind. O.B.d.A. seien

$$\begin{aligned} q_1, \dots, q_{S-p} & \text{ unabhängig,} \\ q_{S-p+1}, \dots, q_S & \text{ abhängig.} \end{aligned}$$

Wir **wählen** die p Lagrange-Multiplikatoren nun so, dass

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j} = 0, \quad j = S - p + 1, \dots, S. \quad (2.54)$$

Dies sind p Gleichungen für p Unbekannte λ_ν , das Gleichungssystem (2.54) ist also eindeutig lösbar. Mit Gl. (2.54) verschwinden nun aber die Terme in der Summe über j in Gl. (2.53), die zu den **abhängigen** Koordinaten q_{S-p+1}, \dots, q_S gehören. Gleichung (2.53) wird zu

$$0 = \sum_{j=1}^{S-p} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta q_j. \quad (2.55)$$

Die in dieser Gleichung noch auftretenden q_j sind aber **unabhängige** Koordinaten, also muss **jeder einzelne Term** in der Summe verschwinden. Zusammen mit Gl. (2.54) erhalten wir die **Lagrange-Gleichungen erster Art**,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j}, \quad j = 1, \dots, S. \quad (2.56)$$

Dies sind S Gleichungen für $S + p$ Unbekannte, die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_S und die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Um das Gleichungssystem eindeutig zu lösen, benötigen wir noch p weitere Bestimmungsgleichungen. Dies sind die Zwangsbedingungen (2.50), die wir in der Form

$$0 = \sum_{j=1}^S a_{\nu j} \dot{q}_j + b_{\nu t}, \quad \nu = 1 \dots, p, \quad (2.57)$$

schreiben.

Worin besteht die **physikalische Bedeutung** der Lagrange-Multiplikatoren? Benutzen wir $L = T - V$, so kann man Gl. (2.56) als

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_{\nu=1}^p \lambda_{\nu} a_{\nu j} \\ &= Q_j + \sum_{\nu=1}^p \lambda_{\nu} a_{\nu j} \\ &\equiv Q_j + \mathfrak{Z}_j, \end{aligned}$$

wobei wir $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$ und Gl. (2.19) für generalisierte Kräfte in konservativen Systemen benutzt, sowie die **generalisierte Zwangskraft**

$$\mathfrak{Z}_j \equiv \sum_{\nu=1}^p \lambda_{\nu} a_{\nu j} \quad (2.58)$$

definiert haben. Diese Definition erlaubt, Gl. (2.52) als das **Prinzip der virtuellen Arbeit für generalisierte Zwangskräfte** anzusehen:

$$0 = \sum_{j=1}^S \left(\sum_{\nu=1}^p \lambda_{\nu} a_{\nu j} \right) \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^S \mathfrak{Z}_j \delta q_j, \quad (2.59)$$

vgl. Gl. (2.11) für dieses Prinzip, ausgedrückt in gewöhnlichen Teilchenkoordinaten.

26.5.2017

2.2.6 Anwendungen der Lagrange-Gleichungen erster Art

Es besteht prinzipiell kein Problem, die Methode der Lagrange-Multiplikatoren auch auf Systeme mit **holonomen** Zwangsbedingungen anzuwenden. Man kann nämlich jede holonome Zwangsbedingung (2.49) auch in differentieller Form schreiben,

$$\begin{aligned} G_{\nu}(x_1, \dots, x_{3N}, t) &\equiv G_{\nu}(x_1(q_1, \dots, q_S, t), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_S, t), t) \equiv G_{\nu}(q_1, \dots, q_S, t) = 0 \\ \implies dG_{\nu} &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial G_{\nu}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial G_{\nu}}{\partial t} dt \equiv \sum_{j=1}^S a_{\nu j} dq_j + b_{\nu t} dt = 0. \end{aligned}$$

Dies ist Gl. (2.50), wobei die Koeffizienten $a_{\nu j}$, $b_{\nu t}$ jetzt explizit durch die partiellen Ableitungen der Funktion $G_{\nu}(q_1, \dots, q_S, t)$ gegeben sind.

Dieses Verfahren hat gewisse Vorteile: (a) man muss die abhängigen Koordinaten nicht explizit mit Hilfe der Zwangsbedingungen eliminieren und (b) die Zwangskräfte erscheinen explizit in Form von Gl. (2.58). Der Nachteil ist, dass man anstelle von $3N - p$ Gleichungen für $3N - p$ unabhängige Variable nun $S + p = 3N - p' + 2p$ Gleichungen für S voneinander abhängige Variable und p Lagrange-Multiplikatoren lösen muss. Im folgenden verdeutlichen wir dies anhand von zwei Beispielen.

Atwoodsche Fallmaschine

Die Atwoodsche Fallmaschine ist eigentlich ein holonomes System. Wir schreiben das Problem aber so um, dass es mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren lösbar ist. Dies liefert dann automatisch einen Ausdruck für die Zwangskraft. Die nachfolgenden Schritte folgen der Numerierung des vorangegangenen Abschnitts.

- (i) Zunächst folgern wir aus Gl. (2.38), dass es $p' = 5$ Zwangsbedingungen gibt. Wir fassen

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$$

als $p' - p = 4$ holonome Zwangsbedingungen auf, während wir das totale Differential von $x_1 + x_2 = \ell = \text{const.}$,

$$dx_1 + dx_2 = 0, \quad (2.60)$$

als die verbleibende ($p = 1$) Zwangsbedingung in differentieller Form annehmen. Die Zahl der generalisierten Koordinaten q_j beträgt nach Ausnutzen der holonomen Zwangsbedingungen $S = 6 - 4 = 2$. Wir wählen z.B.

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_2.$$

- (ii) Die Zwangsbedingung (2.60) in differentieller Form erlaubt durch Vergleich mit der allgemeinen Gl. (2.50), die Koeffizienten $a_{\nu j}$ und $b_{\nu t}$ zu identifizieren (da wir lediglich eine differentielle Zwangsbedingung haben, ist der Index ν überflüssig):

$$a_1 = a_2 = 1, \quad b_t = 0.$$

- (iii) Da wir nur eine Zwangsbedingung in differentieller Form haben, wird lediglich ein Lagrange-Multiplikator λ benötigt. Die generalisierten Zwangskräfte (2.58) lauten daher

$$\mathfrak{F}_1 = \lambda a_1 \equiv \lambda, \quad \mathfrak{F}_2 = \lambda a_2 \equiv \lambda \equiv \mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}.$$

Die beiden generalisierten Zwangskräfte sind identisch. Dies war nach der vorangegangenen Diskussion der Atwoodschen Fallmaschine auch nicht anders zu erwarten.

- (iv) Die Lagrange-Funktion des Systems lautet

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + g (m_1 q_1 + m_2 q_2).$$

Daraus folgen die Lagrange-Gleichungen erster Art,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = m_j \ddot{q}_j - g m_j = \lambda, \quad j = 1, 2.$$

Diese beiden Bewegungsgleichungen sind zusammen mit der Zwangsbedingung

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 ,$$

vgl. Gl. (2.57), zu lösen.

Subtrahieren wir die beiden Bewegungsgleichungen und benutzen $\ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2$, so folgt

$$m_1 \ddot{q}_1 - m_2 \ddot{q}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 = g(m_1 - m_2) \iff \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g ,$$

also das schon vorher erhaltene Resultat (2.39).

Addieren wir die Bewegungsgleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_2 - g(m_1 + m_2) &= (m_1 - m_2) \ddot{q}_1 - g(m_1 + m_2) \\ &= \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g - g(m_1 + m_2) = 2 \lambda \\ \iff \lambda &= \frac{g (m_1 - m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} = -2 g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \end{aligned}$$

Dies ist bis auf das Vorzeichen (welches sich aus der Richtung der Zwangskraft erklärt) identisch mit dem vormals erhaltenen Ausdruck (2.40) für die Zwangskraft,

$$\lambda = \mathfrak{Z} = -Z .$$

Rollen eines Rades auf rauher Fläche

Dieses Beispiel kennen wir schon aus Abb. 2.4.

- (i) Als generalisierte Koordinaten nehmen wir die kartesischen Komponenten (x, y) des Auflagepunktes des Rades sowie die beiden Winkel φ, ϑ :

$$x = q_1 , \quad y = q_2 , \quad \varphi = q_3 , \quad \vartheta = q_4 .$$

- (ii) Es gibt $p = 2$ Zwangsbedingungen in differentieller Form, vgl. Gl. (2.4),

$$\begin{aligned} dq_1 - R \cos q_4 dq_3 &= 0 , \\ dq_2 - R \sin q_4 dq_3 &= 0 , \end{aligned}$$

aus denen durch Vergleich mit Gl. (2.50) die Koeffizienten $a_{\nu j}, b_{\nu t}$ abgelesen werden können,

$$\begin{aligned} a_{11} = 1 , \quad a_{12} = 0 , \quad a_{13} = -R \cos q_4 , \quad a_{14} = 0 , \quad b_{1t} = 0 , \\ a_{21} = 0 , \quad a_{22} = 1 , \quad a_{23} = -R \sin q_4 , \quad a_{24} = 0 , \quad b_{2t} = 0 . \end{aligned}$$

- (iii) Wir benötigen zwei Lagrange-Multiplikatoren, λ_1, λ_2 , aus denen sich die generalisierten Zwangskräfte gemäß Gl. (2.58) berechnen,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} = \lambda_1 , \\ \mathfrak{Z}_2 &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = \lambda_2 , \\ \mathfrak{Z}_3 &= \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} = -\lambda_1 R \cos q_4 - \lambda_2 R \sin q_4 , \\ \mathfrak{Z}_4 &= \lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} = 0 . \end{aligned}$$

- (iv) Da sich das Rad stets in der (x, y) -Ebene bewegt, kann die potentielle Energie gleich null gesetzt werden, $V = 0$. Die kinetische Energie hat zwei Anteile, für die Translationsbewegung und die Rotationsbewegung. Letztere ist unabhängig vom Koordinatensystem, also können wir sie im Hauptachsensystem angeben, vgl. Gl. (1.50). Der Drehvektor hat zwei Komponenten, eine, die in Richtung der Radnabe zeigt, und eine, wenn das Rad eine "Kurve" fährt. Hierbei dreht das Rad um eine Achse, die vom Auflagepunkt (x, y) durch den Radmittelpunkt geht. Da das Rad ein symmetrischer Kreisel ist, handelt es sich bei der Radnabe um die Figuren-achse, also eine der drei Hauptachsen, und bei der zweiten genannten Achse um eine der beiden anderen Hauptachsen. Die Winkelgeschwindigkeit für Drehungen um die Radnabe ist $\dot{\varphi}$ und die für eine "Kurve" ist $\dot{\vartheta}$, vgl. Abb. 2.4. Insgesamt erhalten wir also für die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= T = T_T + T_R \\ &= \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}^2 \\ &= \frac{1}{2} M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_4^2, \end{aligned}$$

wobei M die Masse des Rades, J_1 das Hauptträgheitsmoment für eine Drehung um die Figuren-achse und J_2 dasjenige für eine Drehung um die Hauptachse ist, die vom Auflagepunkt durch den Radmittelpunkt geht.

Die Lagrange-Gleichungen erster Art lauten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= M \ddot{q}_1 = \lambda_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= M \ddot{q}_2 = \lambda_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} &= J_1 \ddot{q}_3 = -\lambda_1 R \cos q_4 - \lambda_2 R \sin q_4, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} - \frac{\partial L}{\partial q_4} &= J_2 \ddot{q}_4 = 0. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Zusammen mit den Zwangsbedingungen in der Form

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 - R \cos q_4 \dot{q}_3 &= 0, \\ \dot{q}_2 - R \sin q_4 \dot{q}_3 &= 0, \end{aligned} \tag{2.62}$$

sind dies sechs Gleichungen für sechs Unbekannte, die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_4 und die beiden Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 .

Aus der letzten Gl. (2.61) folgern wir sofort, dass

$$\dot{q}_4 = \omega_{\vartheta} = \text{const.} \implies q_4 = \vartheta = \omega_{\vartheta} t + \vartheta_0. \tag{2.63}$$

Dies entspricht dem Durchfahren einer Kurve mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_{ϑ} . Für $\omega_{\vartheta} = 0$ fährt das Rad geradeaus.

Differenzieren wir die Zwangsbedingungen (2.62) nach der Zeit, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= R \ddot{q}_3 \cos q_4 - R \dot{q}_3 \dot{q}_4 \sin q_4 , \\ \ddot{q}_2 &= R \ddot{q}_3 \sin q_4 + R \dot{q}_3 \dot{q}_4 \cos q_4 .\end{aligned}$$

Damit und mit der Lösung (2.63) lauten die ersten beiden Bewegungsgleichungen (2.61)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= M R [\ddot{q}_3 \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) - \dot{q}_3 \omega_\vartheta \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0)] , \\ \lambda_2 &= M R [\ddot{q}_3 \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) + \dot{q}_3 \omega_\vartheta \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0)] .\end{aligned}$$

Eingesetzt in die dritte Bewegungsgleichung (2.61) ergibt sich

$$\begin{aligned}J_1 \ddot{q}_3 &= -M R^2 \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) [\ddot{q}_3 \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) - \dot{q}_3 \omega_\vartheta \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0)] \\ &\quad -M R^2 \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) [\ddot{q}_3 \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) + \dot{q}_3 \omega_\vartheta \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0)] \\ &= -M R^2 \ddot{q}_3 ,\end{aligned}$$

also

$$(J_1 + M R^2) \ddot{q}_3 = 0 \implies \ddot{q}_3 = 0 \implies \dot{q}_3 = \omega_\varphi = \text{const.} \implies q_3 = \varphi = \omega_\varphi t + \varphi_0 .$$

Damit sind die Zwangskräfte vollständig bestimmt,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1 &= \lambda_1 = -M R \omega_\varphi \omega_\vartheta \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) , \\ \mathfrak{F}_2 &= \lambda_2 = M R \omega_\varphi \omega_\vartheta \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) , \\ \mathfrak{F}_3 &= -\lambda_1 R \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) - \lambda_2 R \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) \equiv J_1 \ddot{q}_3 = 0 , \\ \mathfrak{F}_4 &= 0 .\end{aligned}$$

Diese Zwangskräfte sorgen dafür, dass das Rad senkrecht auf der (x, y) -Ebene rollt. Führt das Rad geradeaus, $\omega_\vartheta = 0$, so verschwinden sie.

Es bleibt, die Gleichungen für q_1, q_2 zu lösen. Sie lauten mit den bislang gewonnenen Resultaten

$$\begin{aligned}M \ddot{q}_1 &= \lambda_1 = -M R \omega_\varphi \omega_\vartheta \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) , \\ M \ddot{q}_2 &= \lambda_2 = M R \omega_\varphi \omega_\vartheta \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) .\end{aligned}$$

Dies läßt sich sofort integrieren,

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= R \omega_\varphi \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) + c_{0x} , \\ \dot{q}_2 &= R \omega_\varphi \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) + c_{0y} ,\end{aligned}\tag{2.64}$$

wobei c_{0x}, c_{0y} Integrationskonstanten sind. Die Abrollbedingung des Rades,

$$R \omega_\varphi \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \equiv \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2} ,$$

ist aber am einfachsten mit der Wahl $c_{0x} = c_{0y} = 0$ zu erfüllen, weshalb wir diese Konstanten im folgenden weglassen.

Im Fall, dass das Rad geradeaus läuft, $\omega_\vartheta = 0$, vereinfachen sich die Glgen. (2.64) zu

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= R \omega_\varphi \cos \vartheta_0 \equiv v_{0x} = \text{const.} , \\ \dot{q}_2 &= R \omega_\varphi \sin \vartheta_0 \equiv v_{0y} = \text{const.} ,\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$q_1 \equiv x = v_{0x}t + x_0 , \quad q_2 \equiv y = v_{0y}t + y_0 ,$$

mit zwei weiteren Integrationskonstanten x_0, y_0 . Das Rad läuft mit konstanter Geschwindigkeit v_0 geradeaus.

Im Fall, dass das Rad eine Kurve fährt, $\omega_\vartheta \neq 0$, liefert eine weitere Integration der Glgen. (2.64)

$$\begin{aligned}q_1 \equiv x &= R \frac{\omega_\varphi}{\omega_\vartheta} \sin(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) + x_0 , \\ q_2 \equiv y &= -R \frac{\omega_\varphi}{\omega_\vartheta} \cos(\omega_\vartheta t + \vartheta_0) + y_0 .\end{aligned}$$

Vom Aufpunkt (x_0, y_0) beschreibt diese Lösung eine ‘Kurve’ in Form eines Segmentes eines Kreises mit Radius $R \omega_\varphi / \omega_\vartheta$. Die Kurve wird mit der Winkelgeschwindigkeit ω_ϑ durchlaufen.

2.3 Das Hamiltonsche Prinzip

Es gibt in der Analytischen Mechanik zwei Arten von **Variationsprinzipien**. Wir kennen bereits das **d’Alembertsche Prinzip**. Es handelt sich hierbei um ein **Differentialprinzip**. Dabei wird der **momentane Zustand** des Systems verglichen mit einem Zustand, der sich aus diesem durch **Variation der Koordinaten** unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen, also der **virtuellen Verrückungen**, ergibt. Daraus resultieren dann die **Bewegungsgleichungen** in Form der Lagrange-Gleichungen erster bzw. zweiter Art.

In diesem Kapitel lernen wir ein weiteres Variationsprinzip kennen, das **Hamiltonsche Prinzip**. Es handelt sich hierbei um ein **Integralprinzip**. Dabei wird die gesamte **Trajektorie** eines Systems im Konfigurationsraum zwischen zwei festen Zeiten t_a und t_e verglichen mit einer anderen Trajektorie, die sich aus der ursprünglichen durch virtuelle Verrückungen der Koordinaten zu **allen** Zeiten t , $t_a < t < t_e$, ergibt. Auch hieraus lassen sich Bewegungsgleichungen ableiten, die **identisch** mit den Lagrange-Gleichungen sind. Das Hamiltonsche Prinzip ist damit äquivalent zum d’Alembertschen Prinzip. Dennoch ist es lehrreich, sich mit diesem Prinzip auseinanderzusetzen, denn es bildet einen **direkten Zugang** zur **Quantenmechanik**, wenn man diese mit Hilfe des **Feynmanschen Pfadintegralformalismus** formuliert.

2.3.1 Das Wirkungsfunktional

Wir betrachten den S -dimensionalen **Konfigurationsraum** \mathbb{K} , der durch die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_S aufgespannt wird. Jeder Punkt im Konfigurationsraum

beschreibt einen möglichen Zustand des **Gesamtsystems**. Der **Konfigurationsvektor** $\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_s(t))$ beschreibt den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t . Das System folgt im Laufe der Zeit einer Trajektorie im Konfigurationsraum, der sog. **Konfigurationsbahn**,

$$\mathcal{K} = \{\vec{q}(t) \in \mathbb{K}, t_a \leq t \leq t_e\},$$

die bei der Zeit t_a beginnt und bei t_e endet, vgl. Abb. 2.10.

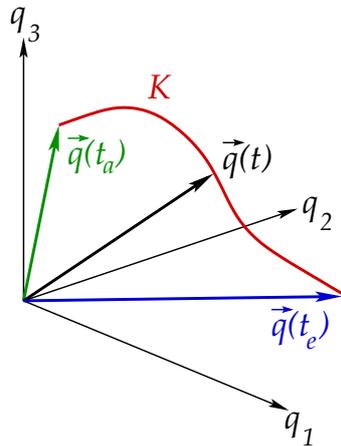


Abbildung 2.10: Konfigurationsbahn im Konfigurationsraum.

30.5.2017

Wir betrachten zunächst **holonome, konservative** Systeme. Dann existiert eine **Lagrange-Funktion** $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Wir berechnen L auf der **Konfigurationsbahn** \mathcal{K} , d.h. für alle **Konfigurationsvektoren** $\vec{q}(t) \in \mathcal{K}$,

$$L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \equiv \tilde{L}(t), \quad t_a \leq t \leq t_e.$$

Damit wird eine Abbildung $t \mapsto \tilde{L}(t)$ definiert, die jedem Zeitpunkt t auf der Konfigurationsbahn eine Zahl $\tilde{L}(t)$, nämlich gerade den Wert der Lagrange-Funktion zu diesem Zeitpunkt, zuordnet. Diese Abbildung definiert die Funktion $\tilde{L}(t)$, die damit nur noch eine Funktion der Zeit t ist.

Definition: Das sog. **Wirkungsfunktional**, oder kurz die **Wirkung** ist gegeben durch

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_a}^{t_e} dt \tilde{L}(t) = \int_{t_a}^{t_e} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t). \quad (2.65)$$

Jeder möglichen Konfigurationsbahn $\mathcal{K} = \{\vec{q}(t) \in \mathbb{K}, t_a \leq t \leq t_e\}$, die aus dem **gesamten Funktionsverlauf** des Konfigurationsvektors $\vec{q}(t)$ zwischen Anfangs- und Endzeitpunkt t_a bzw. t_e besteht, wird auf diese Weise eine **einzigste Zahl** $S[\vec{q}(t)]$ zugeordnet. Der Wert dieser Zahl hängt von Anfangs- und Endzeitpunkt t_a bzw. t_e und der vom System zwischen diesen Zeiten durchlaufenen Konfigurationsbahn \mathcal{K} ab. Eine solche Zuordnung von Funktionen zu Zahlen bezeichnet man als **Funktional**.

Die **Dimension** der Wirkung S bezeichnet man üblicherweise auch mit **Wirkung**. Sie ist das Produkt von Energie und Zeit, $[S] = [L][t] = [T][t] = Js$.

2.3.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Wir führen nun für **jeden** Punkt $\vec{q}(t)$ auf der Konfigurationsbahn eine **virtuelle Verrückung** $\delta\vec{q}(t)$ durch. Dadurch erhalten wir eine neue, ‐varierte‐ Konfigurationsbahn

$$\mathcal{K}' = \{\vec{q}(t) + \delta\vec{q}(t) \in \mathbb{K}, t_a \leq t \leq t_e\}.$$

Definition: Die sog. **Konkurrenzschar**

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{K} \in \mathbb{K}, \vec{q}(t_a) = \vec{q}_a, \vec{q}(t_e) = \vec{q}_e\},$$

ist die Menge aller Konfigurationsbahnen \mathcal{K} mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Konfigurationsvektoren $\vec{q}(t)$ aller Konfigurationsbahnen $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$ nehmen bei $t = t_a$ stets den gleichen Wert $\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a$ und bei t_e den gleichen Wert $\vec{q}(t_e) = \vec{q}_e$ an. Mit anderen Worten, virtuelle Verrückungen der Anfangs- und Endpositionen sind ausgeschlossen, $\delta\vec{q}(t_a) = \delta\vec{q}(t_e) = 0$.
- (ii) Alle Konfigurationsbahnen $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$ besitzen gleiche Anfangs- und Endzeiten t_a bzw. t_e . Damit sind auch die Durchlaufzeiten für alle Konfigurationsbahnen in der Konkurrenzschar gleich.
- (iii) Jede Konfigurationsbahn $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$ ist stetig differenzierbar und läßt sich durch virtuelle Verrückungen $\delta\vec{q}(t)$ stetig in eine andere Bahn $\mathcal{K}' \in \mathcal{M}$ überführen.

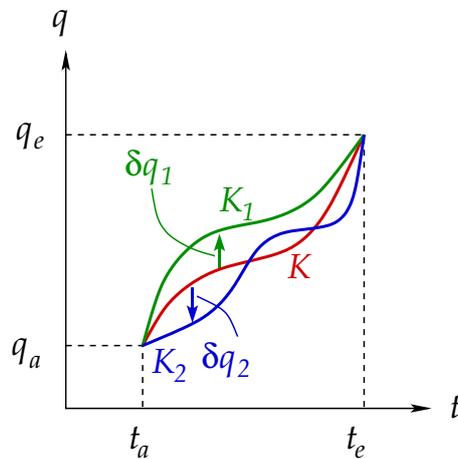


Abbildung 2.11: Drei Elemente einer Konkurrenzschar. Die Konfigurationsbahn \mathcal{K}_1 entsteht aus \mathcal{K} durch die virtuelle Verrückung $\delta q_1(t)$, die Bahn \mathcal{K}_2 entsprechend durch eine andere Verrückung $\delta q_2(t)$. Beide Verrückungen sind auf dem Zeitintervall $t_a \leq t \leq t_e$ definierte Funktionen.

Abbildung 2.11 veranschaulicht die Konkurrenzschar in einer eindimensionalen Projektion des Konfigurationsraums.

Das **Hamiltonsche Prinzip** besagt nun, dass die Bewegung des Systems im Konfigurationsraum so erfolgt, dass das Wirkungsfunktional $S[\vec{q}(t)]$ für die **tatsächliche, physikalisch durchlaufene** Konfigurationsbahn $\mathcal{K}_{\text{phys}} \in \mathcal{M}$ ein **Extremum** annimmt,

$$\delta S = \delta \int_{t_a}^{t_e} dt L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = 0 \quad \text{für } \vec{q}(t) \in \mathcal{K}_{\text{phys}} . \quad (2.66)$$

Das Symbol “ δ ” bedeutet hier **Variation**. Für Funktionale ist es die Entsprechung des Differentialen “ d ” für Funktionen. Mit anderen Worten ausgedrückt lautet das Hamiltonsche Prinzip: auf der tatsächlichen Konfigurationsbahn $\mathcal{K}_{\text{phys}}$ ist die **Wirkung stationär**, d.h. ihre Variation verschwindet.

Die Konkurrenzchar hat immense Bedeutung im Feynmanschen Pfadintegralformalismus der Quantenmechanik. Die Resultate der Quantenmechanik lassen sich nämlich unter der Annahme ableiten, dass man zulässt, dass ein quantenmechanisches Teilchen nicht nur die **klassische** Konfigurationsbahn $\mathcal{K}_{\text{klass}} \equiv \mathcal{K}_{\text{phys}}$ durchläuft, sondern mit einer gewissen komplexen Wahrscheinlichkeitsamplitude auch **jede andere** Bahn $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$. Diese komplexe Amplitude lautet $\exp\{iS[\vec{q}(t)]/\hbar\}$, wobei $S[\vec{q}(t)]$ die zu der jeweiligen Bahn \mathcal{K} gehörende Wirkung ist und $\hbar = h/(2\pi)$, mit dem **Planckschen Wirkungsquantum** $h = 6.62606896 \cdot 10^{-34}$ Js. Die gesamte Amplitude für den Übergang von einem Zustand mit Koordinaten \vec{q}_a zum Zeitpunkt t_a in einen Zustand mit Koordinaten \vec{q}_e zum Zeitpunkt t_e ist

$$\mathcal{A}(\vec{q}_a, t_a \rightarrow \vec{q}_e, t_e) \propto \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{M}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\vec{q}(t)] \right\} .$$

Die **Wahrscheinlichkeit** für den Übergang ist dann $|\mathcal{A}|^2$.

2.3.3 Äquivalenz des Hamiltonschen Prinzips zum d’Alembertschen Prinzip

Wir zeigen nun, dass das Hamiltonsche Prinzip äquivalent zum d’Alembertschen Prinzip ist. Letzteres ist durch Gl. (2.12) gegeben,

$$0 = \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i) \cdot \delta \vec{r}_i .$$

Für holonome, konservative Systeme gilt, vgl. Glgen. (2.17) und (2.19),

$$\sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j = - \sum_{j=1}^S \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \equiv -\delta V , \quad (2.67)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass mit virtuellen Verrückungen “ δ ” wie mit totalen Differentialen, “ d ”, gerechnet wird, wobei aber $\delta t = 0$ zu beachten ist. Ferner gilt

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \frac{1}{2} \delta \left(\dot{\vec{r}}_i^2 \right) ,$$

also

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \delta \left(\dot{\vec{r}}_i^2 \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \delta \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \delta T, \tag{2.68}
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der kinetischen Energie ausgenutzt haben. Wir setzen die Zwischenergebnisse (2.67) und (2.68) in das d'Alembertsche Prinzip ein und integrieren über ein Zeitintervall $[t_a, t_e]$,

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right) - \delta T + \delta V \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \Big|_{t_a}^{t_e} - \int_{t_a}^{t_e} dt \delta L, \tag{2.69}
 \end{aligned}$$

wobei wir die Definition der Lagrange-Funktion, $L = T - V$, ausgenutzt haben. Der erste Term verschwindet, da die Anfangs- und Endpunkte der Konfigurationsbahn keinen virtuellen Verrückungen unterzogen werden,

$$\delta \vec{r}_i \Big|_{t=t_a, t_e} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \Big|_{t=t_a, t_e} = 0.$$

Wenn wir nun in Gl. (2.69) die Verrückung δ der Lagrange-Funktion vor das Zeitintegral ziehen, erhalten wir gerade das Hamiltonsche Prinzip (2.66). Dieser letzte Schritt bedarf streng genommen noch einer mathematischen Begründung. Da wir aber noch nicht wissen, wie wir mit Variationen zu rechnen haben, soll an dieser Stelle das heuristische Argument genügen, dass bei virtuellen Verrückungen Zeiten nicht verändert werden, $\delta t = 0$, also dass man das “ δ ” in Gl. (2.69) vor das Zeitintegral ziehen darf.

2.3.4 Variationsrechnung

In diesem Abschnitt werden wir lernen, wie man mit Variationen rechnet. Wir werden das Gelernte anwenden, um diejenige Konfigurationsbahn $\mathcal{K}_{\text{phys}}$ zu bestimmen, für die die Wirkung $S[\vec{q}(t)]$ extremal wird, welche also gerade das Hamiltonsche Prinzip erfüllt.

Wir betrachten zunächst ein eindimensionales Problem, d.h. die Funktion $y(x)$. Die “Konfigurationsbahn” sei der Kurvenverlauf der Funktion $y(x)$ zwischen x_a und x_b ,

$$\mathcal{K} = \{y(x) \in \mathbb{R}, x_a \leq x \leq x_b\},$$

und die “Konkurrenzchar” aller “Konfigurationsbahnen” ist

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{K}, y(x) \text{ mind. } 2 \times \text{diffbar.}, y(x_a) = y_a, y(x_b) = y_b\},$$

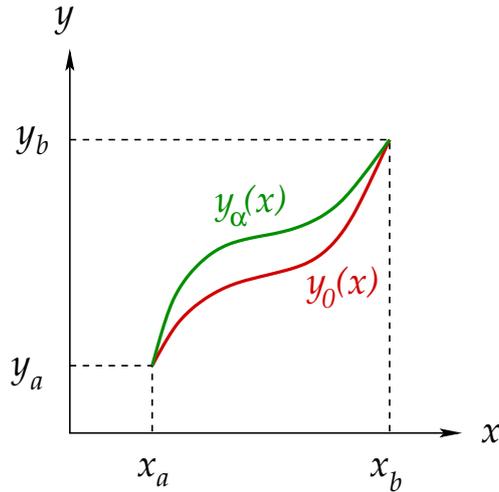


Abbildung 2.12: Zwei Elemente $y_0(x)$, $y_\alpha(x)$ der Konkurrenz­schar \mathcal{M} für das eindimensionale Problem.

vgl. Abb. 2.12.

Wir definieren das **Funktional**

$$J[y(x)] = \int_{x_a}^{x_b} dx f(x, y, y') \equiv \int_{x_a}^{x_b} dx \tilde{f}(x), \quad (2.70)$$

wobei $y' \equiv dy/dx$ und

$$\tilde{f}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x))$$

diejenige Funktion von x ist, die sich aus der Funktion $f(x, y, y')$ durch Einsetzen von $y = y(x)$ und $y' = y'(x)$ ergibt.

Die Frage ist nun, für welches $y(x)$ das Funktional $J[y(x)]$ **extremal** bzw. **stationär** wird. Dazu müssen wir die Konfigurationsbahnen $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$ in geeigneter Weise “durchnummerieren”. Dies geschieht wie folgt: wir charakterisieren jede der möglichen Funktionen $y(x) \in \mathcal{M}$ mit Hilfe eines sog. **Scharparameters** α ,

$$y(x) \rightarrow y_\alpha(x),$$

wobei

$$y_0(x) = y_{\alpha=0}(x)$$

eine bestimmte, vorgegebene Funktion aus der Konkurrenz­schar sei. Da sich alle Konfigurationsbahnen aus der Konkurrenz­schar durch stetige Verschiebung aus einer vorgegebenen generieren lassen, gilt

$$y_\alpha(x) = y_0(x) + \gamma_\alpha(x), \quad (2.71)$$

mit einer mindestens zweimal differenzierbaren Funktion $\gamma_\alpha(x)$, welche

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha(x_a) &= \gamma_\alpha(x_b) = 0 \quad \forall \alpha \\ \text{und } \gamma_0(x) &= \gamma_{\alpha=0}(x) = 0 \quad \forall x \end{aligned} \quad (2.72)$$

erfüllt. Die Abhängigkeit von $\gamma_\alpha(x)$ vom Scharparameter α sei so, dass man $\gamma_\alpha(x)$ in eine Taylorreihe bezüglich α um den Punkt $\alpha = 0$ entwickeln kann,

$$\gamma_\alpha(x) = \gamma_0(x) + \alpha \left. \frac{\partial \gamma_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \gamma_\alpha(x)}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} + O(\alpha^3). \quad (2.73)$$

(Der Scharparameter ist also kein Element einer abzählbar unendlichen Menge, sondern einer überabzählbar unendlichen, also kontinuierlichen Menge. Dies stellt keine nennenswerte Schwierigkeit dar.) Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (2.73) verschwindet aufgrund der Definition (2.72) von $\gamma_\alpha(x)$. Eingesetzt in Gl. (2.71) ergibt sich

$$y_\alpha(x) = y_0(x) + \alpha \left. \frac{\partial \gamma_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + O(\alpha^2). \quad (2.74)$$

Die **Variation der Funktion** $y_0(x)$ ist definiert als

$$\delta y_0(x) \equiv y_{d\alpha}(x) - y_0(x) = d\alpha \left. \frac{\partial \gamma_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad (2.75)$$

also gerade die Differenz zwischen der vorgegebenen Funktion $y_0(x)$ und einer Funktion $y_{d\alpha}(x)$, die sich durch eine **infinitesimale Verschiebung** $d\alpha$ aus dieser entsprechend Gl. (2.74) ergibt. Man beachte, dass die Verschiebung bei festgehaltenem x durchgeführt wird und die Variation **für jedes** x auf dem Funktionsverlauf von $y_0(x)$ zwischen x_a und x_b definiert ist. Die Variation $\delta y_0(x)$ entspricht also der **virtuellen Verrückung** $\delta \vec{q}(t)$ der generalisierten Koordinaten bei festgehaltenem t ($\delta t = 0$).

Für die Variation der **Ableitung** der Funktion $y_0(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \delta y'_0(x) &\equiv \delta \frac{dy_0(x)}{dx} = \frac{dy_{d\alpha}(x)}{dx} - \frac{dy_0(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [y_{d\alpha}(x) - y_0(x)] \\ &= \frac{d}{dx} \delta y_0(x) = \frac{d}{dx} d\alpha \left. \frac{\partial \gamma_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = d\alpha \left. \frac{d}{dx} \frac{\partial \gamma_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Wir definieren nun die **Variation des Funktionals**,

$$\delta J[y_0(x)] \equiv J[y_{d\alpha}(x)] - J[y_0(x)] = \int_{x_a}^{x_b} dx [f(x, y_{d\alpha}, y'_{d\alpha}) - f(x, y_0, y'_0)]. \quad (2.77)$$

Mit Hilfe von Gl. (2.75) läßt sich der Integrand weiter auswerten, indem wir $f(x, y_{d\alpha}, y'_{d\alpha})$ nach Taylor um y_0, y'_0 entwickeln. Da $\delta y_0, \delta y'_0 \sim d\alpha$ infinitesimal sind, genügt es, Terme bis zur Ordnung $O(d\alpha)$ mitzunehmen:

$$\begin{aligned} f(x, y_{d\alpha}, y'_{d\alpha}) &= f(x, y_0, y'_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0, y'_0) \delta y_0 + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_0, y'_0) \delta y'_0 + O((d\alpha)^2) \\ &\simeq f(x, y_0, y'_0) + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left. \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) d\alpha, \end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (2.75) und (2.76) benutzt und die Argumentliste bei den partiellen Ableitungen der Übersicht halber unterdrückt haben. Einsetzen in Gl. (2.77) liefert

$$\delta J[y_0(x)] = \int_{x_a}^{x_b} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} \right) d\alpha, \quad (2.78)$$

wobei die Ableitung von γ_α nach α bei $\alpha = 0$ auszuwerten ist. Nun wird der letzte Term im Integranden partiell integriert,

$$\int_{x_a}^{x_e} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_e} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (2.79)$$

Der erste Term verschwindet, weil die Funktion $\gamma_\alpha(x)$ **für alle** α bei $x = x_a, x_b$ verschwindet, s. ihre Definition (2.72), d.h. auch ihre Ableitung nach α muss verschwinden,

$$\frac{\partial \gamma_\alpha(x)}{\partial \alpha} \Big|_{x=x_a, x_b} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma_\alpha(x_{a,b}) = 0.$$

Einsetzen von Gl. (2.79) in Gl. (2.78) liefert für die Variation des Funktionals $J[y_0(x)]$:

$$\delta J[y_0(x)] = \int_{x_a}^{x_b} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} d\alpha \equiv \int_{x_a}^{x_b} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y_0. \quad (2.80)$$

Der erste Teil dieser Gleichung erlaubt mit der Definition

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \equiv \int_{x_a}^{x_b} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

folgende Interpretation: Man kann $J[y_0(x)]$ anstelle als Funktional von $y_0(x)$ auch als **Funktio**n des Scharparameters α ansehen, $J(\alpha)$. Damit ist die Variation $\delta J[y_0(x)]$ als Ableitung nach α ausgedrückt worden,

$$\delta J[y_0(x)] = \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} d\alpha.$$

Die vorgegebene Funktion $y_0(x)$ sei nun o.B.d.A. gerade diejenige, für welche $J[y(x)]$ extremal wird, also

$$\delta J[y_0(x)] = 0.$$

Da die Variation δy_0 , bzw. die Funktion $\gamma_\alpha(x)$ in Gl. (2.80) **beliebig** war, kann dies nur dann erfüllt werden, wenn

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (2.81)$$

Dies ist die sog. **Eulersche Gleichung** der Variationsrechnung. Wegen der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y''$$

ist dies eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die (mindestens zweimal differenzierbare) Funktion $y(x)$.

Beispiele:

- (i) **Kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene.** Wir betrachten die in Abb. 2.13 gegebene Kurve, die die beiden Punkte (x_a, y_a) und (x_b, y_b) in der (x, y) -Ebene miteinander verbindet.

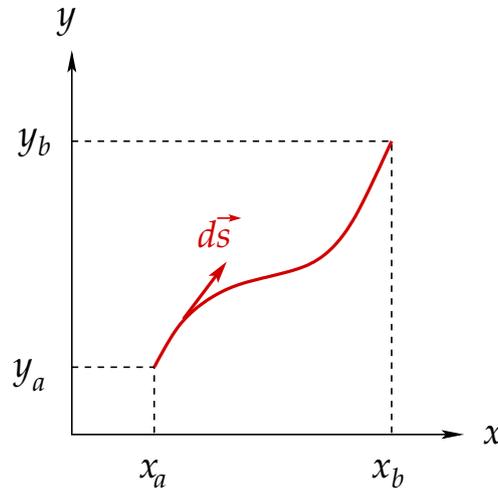


Abbildung 2.13: Verbindungskurve zwischen den Punkten (x_a, y_a) und (x_b, y_b) .

Ein Element der Bogenlänge ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx . \quad (2.82)$$

Die gesamte Länge der Kurve ist

$$J[y(x)] = \int_{(x_a, y_a)}^{(x_b, y_b)} ds = \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{1 + y'^2} .$$

Die **kürzeste** Verbindung zwischen (x_a, y_a) und (x_b, y_b) ergibt sich aus dem **Minimum** des Funktionals $J[y(x)]$, also für $\delta J = 0$. Damit dies erfüllt ist, muss die Eulersche Gleichung (2.81) mit $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ gelten:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \implies \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} .$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung für $y(x)$ hat die Lösung $y' = a = \text{const.}$, also

$$y(x) = ax + b .$$

Dies ist die Gleichung für eine **Gerade** mit Steigung $y' = a$. Die Integrationskonstanten a, b werden durch die Forderung festgelegt, dass die Gerade durch die beiden Punkte (x_a, y_a) und (x_b, y_b) gehen muss.

- (ii) **Brachistochronenproblem** (griech. βραχύς = kurz, βράχιστος = am kürzesten, χρόνος = Zeit). Auf welchem Weg $y(x)$ gelangt ein reibungslos gleitender Massepunkt m unter dem Einfluss der Schwerkraft am schnellsten von $(x_a, y_a = 0)$ nach (x_b, y_b) , vgl. Abb. 2.14 ? Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_a = 0$.

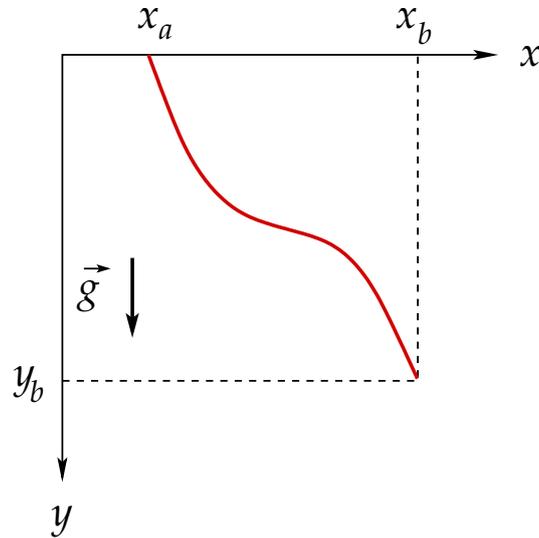


Abbildung 2.14: Zum Brachistochronenproblem.

Die Masse m legt im Zeitintervall dt die Strecke $ds = v dt$ zurück, wobei sich die Geschwindigkeit v am einfachsten aus dem Energiesatz bestimmen läßt:

$$T + V = \frac{1}{2} m v^2 - m g y = \text{const.} = \frac{1}{2} m v_a^2 - m g y_a = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 g y} .$$

Die Gesamtzeitdauer für das Durchlaufen der Kurve ist

$$J[y(x)] = \int_{t_a}^{t_b} dt = \int_{(x_a, 0)}^{(x_b, y_b)} \frac{ds}{v} = \int_{x_a}^{x_b} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2 g y}} = \frac{1}{\sqrt{2 g}} \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} ,$$

wobei wir den Ausdruck (2.82) für die Bogenlänge aus dem vorangegangenen Beispiel benutzt haben. Die kürzeste Laufzeit ergibt sich, wenn die Funktion

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

die Eulersche Gleichung (2.81) erfüllt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2 y^{3/2}} , \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} , \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} &= -\frac{y'^2}{2 y^{3/2} \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{y''}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y} (1 + y'^2)^{3/2}} , \end{aligned}$$

und setzen in die Eulersche Gleichung (2.81) ein,

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} &= -\frac{y'^2}{2y^{3/2}\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} \\ \iff -(1+y'^2) &= -y'^2 + 2yy'' - 2y\frac{y'^2 y''}{1+y'^2} \\ \iff 0 &= 1 + 2yy'' - 2y\frac{y'^2 y''}{1+y'^2} = 1 + \frac{2yy''}{1+y'^2} \\ \iff 0 &= 1 + y'^2 + 2yy'' . \end{aligned}$$

Offenbar muss $y' \neq 0$ sein, da ansonsten auch $y'' = 0$ und die Gleichung nicht erfüllbar wäre. Für $y' \neq 0$ ist obige Gleichung aber identisch mit

$$\frac{d}{dx} [y(1+y'^2)] = 0 ,$$

wie man sich durch Ausführen der Ableitung leicht überzeugt. Wir schließen also, dass

$$y(1+y'^2) = a = \text{const.} \quad \iff \quad y'^2 = \frac{a}{y} - 1 = \frac{a-y}{y} .$$

Separation der Variablen und anschließende Integration mit der Substitution $y = a \sin^2 \varphi$, $dy = 2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$ ergibt

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{\frac{y}{a-y}} dy \\ \iff x_b - x_a &= \int_0^{y_b} dy \sqrt{\frac{y}{a-y}} = 2a \int_0^{\varphi_b} d\varphi \sin^2 \varphi = a \left[\varphi_b - \frac{1}{2} \sin(2\varphi_b) \right] . \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet also

$$x_b = a \left[\varphi_b - \frac{1}{2} \sin(2\varphi_b) \right] + x_a , \quad y_b = \frac{a}{2} [1 - \cos(2\varphi_b)] .$$

Wenn wir den Anfangswert $x_a = R\pi$ setzen, wobei $R \equiv a/2$, und wenn wir den Winkel gemäß $\psi = 2\varphi_b + \pi$ umdefinieren, so ergibt sich die gängige Parameterdarstellung der **Zykloidenbahn**, vgl. Abb. 2.15,

$$x_b = R(\psi + \sin \psi) , \quad y_b = R(1 + \cos \psi) .$$

2.3.5 Euler-Lagrange-Gleichungen

Die bislang vorgestellte Variationsrechnung lässt sich leicht auf Funktionale mehrerer Funktionen verallgemeinern,

$$J[\vec{y}(x)] \equiv J[y_1(x), \dots, y_S(x)] = \int_{x_a}^{x_b} dx f(x, y_1, \dots, y_S, y'_1, \dots, y'_S) \equiv \int_{x_a}^{x_b} dx f(x, \vec{y}, \vec{y}') , \quad (2.83)$$

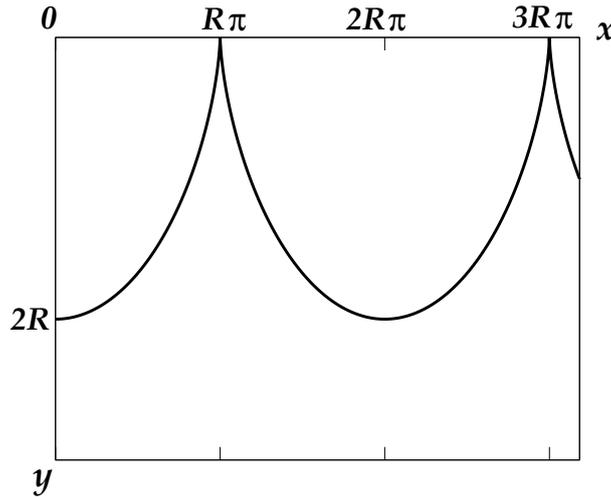


Abbildung 2.15: Zykloidenbahn.

wobei $\vec{y} \equiv (y_1, \dots, y_S)$ ein S -dimensionaler Vektor ist. Die Bedingung, dass die Variation von $J[\vec{y}(x)]$ extremal wird, liefert einen Satz von Differentialgleichungen, mit denen man die Funktion $\vec{y}(x)$, welche $J[\vec{y}(x)]$ extremal macht, bestimmen kann. Dies sind die sog. **Euler-Lagrange-Gleichungen**.

Analog zur obigen Diskussion für den eindimensionalen Fall führen wir Konfigurationsbahnen ein, jetzt aber für vektorwertige Funktionen im S -dimensionalen Raum,

$$\mathcal{K} = \{ \vec{y}(x) \in \mathbb{R}^S, x_a \leq x \leq x_b \},$$

und die entsprechende Konkurrenz­schar aller Konfigurationsbahnen,

$$\mathcal{M} = \{ \mathcal{K}, \vec{y}(x) \text{ mind. } 2 \times \text{diffbar.}, \vec{y}(x_a) = \vec{y}_a, \vec{y}(x_b) = \vec{y}_b \}.$$

Wir charakterisieren die Funktionen $\vec{y}(x) \in \mathcal{M}$ wieder mit Hilfe eines Scharparameters α , $\vec{y}(x) \rightarrow \vec{y}_\alpha(x)$, und definieren

$$\vec{y}_\alpha(x) = \vec{y}_0(x) + \vec{\gamma}_\alpha(x), \quad (2.84)$$

mit $\vec{y}_0(x) \equiv \vec{y}_{\alpha=0}(x)$. Die Komponenten der auf diese Weise eingeführten, mindestens zweimal differenzierbaren, vektorwertigen Funktion $\vec{\gamma}_\alpha(x)$ erfüllen die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \gamma_{j,\alpha}(x_a) &= \gamma_{j,\alpha}(x_b) = 0 \quad \forall \alpha \\ \text{und} \quad \gamma_{j,0}(x) &= \gamma_{j,\alpha=0}(x) = 0 \quad \forall x. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Dieselben Schritte wie im vorangegangenen Abschnitt führen auf die **Variation der vektorwertigen Funktion** $\vec{y}_0(x)$,

$$\delta \vec{y}_0(x) \equiv \vec{y}_{d\alpha}(x) - \vec{y}_0(x) = d\alpha \left. \frac{\partial \vec{\gamma}_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad (2.86)$$

und entsprechend für ihre Ableitung,

$$\delta \vec{y}'_0(x) \equiv \frac{d}{dx} [\vec{y}_{d\alpha}(x) - \vec{y}_0(x)] = d\alpha \left. \frac{d}{dx} \frac{\partial \vec{\gamma}_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} .$$

Die **Variation des Funktionals** ist definiert als

$$\delta J[\vec{y}_0(x)] \equiv J[\vec{y}_{d\alpha}(x)] - J[\vec{y}_0(x)] = \int_{x_a}^{x_b} dx [f(x, \vec{y}_{d\alpha}, \vec{y}'_{d\alpha}) - f(x, \vec{y}_0, \vec{y}'_0)] . \quad (2.87)$$

Die Taylorentwicklung der Funktion $f(x, \vec{y}_{d\alpha}, \vec{y}'_{d\alpha})$ lautet nun

$$f(x, \vec{y}_{d\alpha}, \vec{y}'_{d\alpha}) \simeq f(x, \vec{y}_0, \vec{y}'_0) + \sum_{j=1}^S \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial \gamma_{j,\alpha}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial y'_j} \frac{d}{dx} \frac{\partial \gamma_{j,\alpha}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) d\alpha .$$

Einsetzen in Gl. (2.87), partielles Integrieren und Ausnutzen der Eigenschaften (2.85) ergibt ganz analog zum Resultat (2.80)

$$\delta J[\vec{y}_0(x)] = \int_{x_a}^{x_b} dx \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_j} \right) \delta y_{j,0} . \quad (2.88)$$

Sei nun $\vec{y}_0(x)$ diejenige Funktion, welche $J[\vec{y}(x)]$ extremal macht,

$$\delta J[\vec{y}_0(x)] = 0 . \quad (2.89)$$

Da alle $\delta y_{j,0}$ in Gl. (2.88) unabhängig voneinander sind, müssen alle ihre Koeffizienten verschwinden, damit auch das Integral über x verschwindet,

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0 , \quad j = 1, \dots, S . \quad (2.90)$$

Dies sind die gesuchten **Euler-Lagrange-Gleichungen**. Mit den Ersetzungen

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t , \quad y_{j,0} \rightarrow q_j , \quad y'_{j,0} \rightarrow \dot{q}_j , \quad j = 1, \dots, S , \\ f(x, \vec{y}_0, \vec{y}'_0) &\rightarrow L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) , \end{aligned} \quad (2.91)$$

sind sie **identisch mit den Lagrange-Gleichungen zweiter Art**, Gl. (2.28). Das Hamiltonsche Prinzip ergibt sich aus Gl. (2.89) mit der Ersetzung

$$J[\vec{y}_0(x)] \rightarrow S[\vec{q}(t)] ,$$

wobei $\vec{q}(t)$ der Konfigurationsvektor der tatsächlich durchlaufenen, physikalischen Konfigurationsbahn $\mathcal{K}_{\text{phys}}$ ist, der sich als Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt.

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Lagrange-Gleichungen zweiter Art sind, dass es sich um ein **konservatives System** handelt (ansonsten könnte man keine Lagrange-Funktion definieren) und dass das System **holonomen Zwangsbedingungen** unterliegt (ansonsten sind die δq_j nicht unabhängig voneinander). Letzteres beeinflusst auch die

Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen (2.90), denn ansonsten ist der Schritt von Gl. (2.88) zu (2.90) nicht möglich, da die $\delta y_{j,0}$ nicht unabhängig voneinander sind.

Für den Fall, dass die $\delta y_{j,0}$ voneinander abhängig sind kommt man jedoch wiederum mit der **Methode der Lagrange-Multiplikatoren** weiter. Wir nehmen an, dass die Variationen $\delta y_{j,0}$ der Komponenten von \vec{y}_0 über p Bedingungen (Zwangsbedingungen) miteinander verknüpft sind, welche die Form

$$0 = \sum_{j=1}^S a_{\nu j} \delta y_{j,0}, \quad \nu = 1 \dots, p, \quad (2.92)$$

haben mögen. Multiplizieren wir diese Gleichungen jeweils mit einem Lagrange-Multiplikator λ_ν und summieren über alle ν , so erhalten wir

$$0 = \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \sum_{j=1}^S a_{\nu j} \delta y_{j,0} = \sum_{j=1}^S \left(\sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta y_{j,0}.$$

Addieren wir dies zu Gl. (2.88) und nehmen an, dass die Funktion \vec{y}_0 das Funktional $J[\vec{y}(x)]$ extremal macht, Gl. (2.89), so erhalten wir

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} dx \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_j} + \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta y_{j,0}. \quad (2.93)$$

Legen wir nun fest, dass die letzten p Funktionen $y_{j,0}(x)$, $j = S - p + 1, \dots, S$ die **abhängigen** Funktionen sind und die ersten $S - p$ Funktionen $y_{j,0}(x)$, $j = 1, \dots, S - p$ die **unabhängigen**, dann können wir die p Lagrange-Multiplikatoren so wählen, dass

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j}, \quad j = S - p + 1, \dots, S. \quad (2.94)$$

Damit wird Gl. (2.93) zu

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} dx \sum_{j=1}^{S-p} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_j} + \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j} \right) \delta y_{j,0}.$$

Diese Gleichung enthält aber nur die Variationen $\delta y_{j,0}$ der **unabhängigen** Funktionen $y_{j,0}(x)$. Damit muss Gl. (2.94) auch für $j = 1, \dots, S - p$ gelten. Insgesamt erhalten wir

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu a_{\nu j}, \quad j = 1, \dots, S.$$

Mit der Ersetzung (2.91) ist dies **identisch mit den Lagrange-Gleichungen erster Art**, Gl. (2.56). Die Variationsrechnung ist also auch für den Fall anwendbar, dass die Funktionen $y_{j,0}$ über **Zwangsbedingungen** miteinander verknüpft sind. Falls diese die Form (2.92) haben, können wir sie für **nicht-holonome Systeme** mit Zwangsbedingungen in **differentieller Form** anwenden.

2.3.6 Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf nicht-konservative Systeme

Das Hamiltonsche Prinzip läßt sich auf nicht-konservative Systeme erweitern. Hierzu definiert man eine **modifizierte** Wirkung

$$\tilde{S}[\vec{q}(t)] \equiv \int_{t_a}^{t_e} dt (T - W_K) ,$$

mit der von den treibenden Kräften geleisteten **Arbeit**

$$W_K = - \sum_{i=1}^N \int d\vec{r}_i \cdot \vec{K}_i .$$

Das erweiterte Hamiltonsche Prinzip lautet nun

$$\delta\tilde{S}[\vec{q}(t)] = 0 ,$$

bzw.

$$0 = \int_{t_a}^{t_e} dt (\delta T - \delta W_K) . \quad (2.95)$$

Nun ist

$$\delta W_K = - \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i \equiv - \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j ,$$

vgl. Gl. (2.17), und

$$\delta T = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \right) ,$$

wobei wir $\delta t = 0$ und, im letzten Schritt, die Vertauschbarkeit der Zeitableitung mit der Variation ausgenutzt haben. Eingesetzt in Gl. (2.95) erhalten wir nach einer partiellen Integration und Ausnutzen der Tatsache, dass $\delta q_j(t_a) = \delta q_j(t_e) = 0$:

$$0 = \int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j .$$

Für **holonome** Systeme sind die δq_j voneinander unabhängig und wir erhalten die Bewegungsgleichungen (2.24), wie vormals schon aus dem d'Alembertschen Prinzip.

2.4 Erhaltungssätze

2.4.1 Integrale der Bewegung

Die Bewegung eines mechanischen Systems wird durch $2S$ Variablen beschrieben,

$$\begin{aligned} \text{die generalisierten Koordinaten } \vec{q}(t) &= (q_1(t), \dots, q_S(t)) , \\ \text{die generalisierten Geschwindigkeiten } \dot{\vec{q}}(t) &= (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_S(t)) . \end{aligned}$$

Definition: Ein **Integral der Bewegung** ist eine Funktion

$$F_r = F_r(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) = C_r = \text{const.}, \quad r = 1, \dots, R.$$

Da $F_r = C_r = \text{const.} = F_r(\vec{q}(0), \dot{\vec{q}}(0))$, ist der **Wert** eines Integrals der Bewegung durch die **Anfangsbedingungen** $\vec{q}(0)$, $\dot{\vec{q}}(0)$ eindeutig festgelegt. Umgekehrt kann man die Anfangsbedingungen durch die Integrale der Bewegung festlegen,

$$\left. \begin{aligned} q_i(0) &= q_i(C_1, \dots, C_R; t=0) \\ \dot{q}_i(0) &= \dot{q}_i(C_1, \dots, C_R; t=0) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, S.$$

Falls $R = 2S$, so kann man die Anfangsbedingungen sogar **eindeutig** durch die Integrale der Bewegung festlegen. Das Problem selbst ist eindeutig gelöst, wenn man die $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ durch Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen bestimmt hat.

Beispiel: Die **zyklischen Koordinaten** zugeordneten **generalisierten Impulse** sind Integrale der Bewegung,

$$q_i \text{ zyklisch} \iff \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \implies 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i \implies p_i = \text{const.}.$$

Für zyklische Koordinaten braucht man keine Bewegungsgleichung zu lösen, da diese äquivalent zu einem Erhaltungssatz für den zugehörigen generalisierten Impuls sind. Die Idee ist daher, durch geschickte Wahl der generalisierten Koordinaten **möglichst viele** Koordinaten zu zyklischen Koordinaten zu machen. Dieses Ziel wird durch die sog. **kanonischen Transformationen** erreicht und wird in der sog. **Hamilton-Jacobi-Theorie** formalisiert.

6.6.2017

Beispiel: Zweikörperproblem. Wir betrachten zwei Massen m_1, m_2 mit Ortsvektoren $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, die durch ein Zweikörperpotential $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ miteinander wechselwirken. Die Lagrange-Funktion des Systems in **kartesischen Koordinaten** lautet

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}).$$

Offensichtlich ist keine Koordinate zyklisch.

Nun betrachten wir das System in **Schwerpunkts-** und **Relativkoordinaten**,

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \equiv (X, Y, Z), \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv r (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \end{aligned}$$

wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse des Systems ist. Aus der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden" wissen wir, dass das Problem in diesen Koordinaten auf ein effektives **Einkörperproblem** für die **reduzierte Masse** $\mu = m_1 m_2 / M$ im **Zentralkraftfeld** $V(\vec{r}) \equiv V(r)$ abgebildet wird. In diesen Koordinaten lautet die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) \\ &= \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - V(r), \end{aligned}$$

wobei wir aus der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”, Gl. (3.34) für die kinetische Energie in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten und Gl. (1.178) für die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten benutzt haben. Es ist ganz offensichtlich, dass X, Y, Z und φ **zyklische Koordinaten** sind. Damit gibt es vier **Integrale der Bewegung**, nämlich die zu diesen Koordinaten gehörenden generalisierten Impulse,

$$\begin{aligned} p_X &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M \dot{X} = \text{const.} , \\ p_Y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = M \dot{Y} = \text{const.} , \\ p_Z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = M \dot{Z} = \text{const.} , \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \equiv \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = \text{const.} , \end{aligned}$$

die drei Komponenten des Gesamtimpulses

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \overrightarrow{\text{const.}} ,$$

und die z -Komponente des Relativdrehimpulses,

$$L_{r,z} \equiv \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = \text{const.} .$$

Da keine Raumrichtung ausgezeichnet ist, muss auch der gesamte Relativdrehimpuls \vec{L}_r ein Integral der Bewegung sein, vgl. die Argumentation zum Keplerproblem in Abschnitt 2.2.4.

Üblicherweise folgt die Existenz von Integralen der Bewegungen aus bestimmten **Symmetrien** des Problems. In unserem Beispiel hängt das Potential nur vom **Relativabstand** r der beiden Massen ab. Damit bewegt sich der Schwerpunkt automatisch **kräftefrei**. In (Relativ-)Kugelkoordinaten ist außerdem das Zweikörperpotential **kugelsymmetrisch**, hängt also nicht von den Winkeln ϑ und φ ab. Diese Symmetrie des Problems führt letztlich auf die Drehimpulserhaltung. Wir werden diese heuristische Überlegung im nächsten Abschnitt in Gestalt des **Noether-Theorems** formalisieren.

2.4.2 Das Noethersche Theorem

Definition: Ein physikalisches System besitzt eine **Symmetrie**, wenn seine Wirkung **invariant** unter einer Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t'(t) , \\ \vec{q}(t) &\longrightarrow \vec{q}'(\vec{q}(t), t) , \end{aligned}$$

ist. Eine solche Transformation heißt dann **Symmetrietransformation**.

Satz (Noethersches Theorem):

Aus einer Symmetrie eines physikalischen Systems folgt ein Integral der Bewegung.

Beweis: Um die Notation zu vereinfachen, vereinbaren wir für das folgende, dass ein Punkt über einer ungestrichenen Koordinate Zeitableitung nach t bedeutet und ein Punkt über einer gestrichenen Koordinate Zeitableitung nach t' ,

$$\dot{\vec{q}} \equiv \frac{d\vec{q}}{dt}, \quad \dot{\vec{q}}' \equiv \frac{d\vec{q}'}{dt'}.$$

Da man jede (endliche) Transformation als Folge (unendlich vieler) infinitesimaler Transformationen betrachten kann, genügt es, **infinitesimale Transformationen**

$$\begin{aligned} t'(t) &= t + \delta t(t), \\ \vec{q}'(\vec{q}(t), t) &= \vec{q}(t) + \delta \vec{q}(\vec{q}(t), t), \end{aligned} \quad (2.96)$$

zu betrachten. (Achtung: das Symbol “ δ ” bedeutet hier nicht “virtuelle Verrückung, sondern steht lediglich für eine infinitesimale Änderung der entsprechenden Größe.) Daraus folgt

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt} \delta t, \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}}' &= \frac{d\vec{q}'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} (\vec{q} + \delta \vec{q}) = \frac{1}{1 + \frac{d}{dt} \delta t} \left(\dot{\vec{q}} + \frac{d}{dt} \delta \vec{q} \right) \\ &= \dot{\vec{q}} + \frac{d}{dt} \delta \vec{q} - \dot{\vec{q}} \frac{d}{dt} \delta t + O(\delta t^2) \equiv \dot{\vec{q}} + \delta \dot{\vec{q}} + O(\delta t^2), \end{aligned} \quad (2.98)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Taylor-Entwicklung $1/(1+x) = 1 - x + O(x^2)$ ausgenutzt und im letzten Schritt die Größe

$$\delta \dot{\vec{q}} \equiv \frac{d}{dt} \delta \vec{q} - \dot{\vec{q}} \frac{d}{dt} \delta t \quad (2.99)$$

definiert haben. Ganz offensichtlich ist

$$\dot{\vec{q}}' \equiv \dot{\vec{q}}'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t),$$

wobei die Abhängigkeit von \vec{q} über die der Funktion $\delta \vec{q}(\vec{q}, t)$, vgl. Gl. (2.96), zustandekommt.

Die Wirkung transformiert sich wie folgt:

$$S[\vec{q}] = \int_{t_a}^{t_e} dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \longrightarrow S'[\vec{q}'] = \int_{t'_a}^{t'_e} dt' L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') \equiv \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{dt'}{dt} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t'), \quad (2.100)$$

wobei die Form der Lagrange-Funktion unverändert bleibt und lediglich die alten (ungestrichenen) Variablen durch die neuen (gestrichenen) ersetzt werden. Im letzten Schritt wurde lediglich die Integrationsvariable $t' \rightarrow t$ substituiert. Bei der infinitesimalen Transformation (2.96) ändert sich die Lagrange-Funktion um einen infinitesimalen Betrag δL , d.h. Gl. (2.100) läßt sich schreiben als

$$S'[\vec{q}'] = \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{dt'}{dt} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') \equiv \int_{t_a}^{t_e} dt \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \right] \equiv S[\vec{q}] + \delta S[\vec{q}], \quad (2.101)$$

wobei

$$\delta S[\vec{q}] \equiv \int_{t_a}^{t_e} dt \delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) . \quad (2.102)$$

Da t_a, t_e beliebig sind, können wir auch $t_a \rightarrow t_e$ gehen lassen. Dann aber müssen die Integranden in den beiden Integralen gleich sein, bzw.

$$\frac{dt'}{dt} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) . \quad (2.103)$$

Für eine **Symmetrietransformation** gilt, dass sich die Wirkung nicht ändert, also

$$S'[\vec{q}'] = S[\vec{q}] \quad \text{oder} \quad \delta S[\vec{q}] = \int_{t_a}^{t_e} dt \delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0 . \quad (2.104)$$

Damit muss δL entweder verschwinden, $\delta L \equiv 0$, oder identisch mit der totalen Zeitableitung einer (infinitesimalen) Funktion $\delta\Omega(\vec{q}, t)$ sein,

$$\delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \equiv \frac{d}{dt} \delta\Omega(\vec{q}, t) , \quad (2.105)$$

wobei die Abhängigkeit von $\dot{\vec{q}}$ auf der linken Seite ausschließlich von Zeitableitungen von \vec{q} auf der rechten Seite zustandekommt. Eine totale Zeitableitung ist erlaubt, da eine solche in den Bewegungsgleichungen nicht auftritt, vgl. Übungsaufgabe 4.1. Dies sehen wir wie folgt. Mit

$$\frac{d}{dt} \delta\Omega(\vec{q}, t) \equiv \sum_{j=1}^S \frac{\partial \delta\Omega}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \delta\Omega}{\partial t}$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \delta L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \delta L}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial \delta\Omega}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \delta\Omega}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial \delta\Omega}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \delta\Omega}{\partial t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \delta\Omega}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^S \frac{\partial^2 \delta\Omega}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 \delta\Omega}{\partial q_i \partial t} \\ &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial^2 \delta\Omega}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \delta\Omega}{\partial t \partial q_i} - \sum_{j=1}^S \frac{\partial^2 \delta\Omega}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 \delta\Omega}{\partial q_i \partial t} \equiv 0 , \end{aligned}$$

d.h. δL taucht in den Bewegungsgleichungen nicht auf.

Nun berechnen wir mit Gl. (2.103)

$$\begin{aligned} \delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &= \frac{dt'}{dt} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \\ &= \left(1 + \frac{d}{dt} \delta t \right) L(\vec{q} + \delta \vec{q}, \dot{\vec{q}} + \delta \dot{\vec{q}}, t + \delta t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \\ &\simeq \left(1 + \frac{d}{dt} \delta t \right) \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right] - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \\ &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \frac{d}{dt} \delta t , \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt Gl. (2.97) benutzt, im dritten Schritt eine Taylor-Entwicklung von $L(\vec{q} + \delta\vec{q}, \dot{\vec{q}} + \delta\dot{\vec{q}}, t + \delta t)$ durchgeführt und im letzten Schritt quadratische Terme in δq , $\delta\dot{q}$ und δt vernachlässigt haben.

Benutzen wir nun Gl. (2.99), sowie die Euler-Lagrange-Gleichung, um im ersten Term auf der linken Seite $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ durch $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ zu ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \frac{d}{dt} \delta t \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \frac{d}{dt} \delta t \\ &= \sum_{j=1}^S \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) + \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] \frac{d}{dt} \delta t + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\quad - \sum_{j=1}^S \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] = \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Euler-Lagrange-Gleichung benutzt haben. Damit können wir nun die rechte Seite von Gl. (2.106) als **totale Zeitableitung** schreiben,

$$\delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{d}{dt} \delta \Omega(\vec{q}, t) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] \delta t \right\},$$

bzw.

$$0 = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] \delta t - \delta \Omega(\vec{q}, t) \right\},$$

oder

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] \delta t - \delta \Omega(\vec{q}, t) = \text{const.} . \quad (2.108)$$

Man beachte, dass dies ein **konstruktiver** Beweis ist, d.h. es wird nicht nur die Existenz eines Integrals der Bewegung bewiesen, sondern dieses in Form von Gl. (2.108) gleich explizit angegeben! Dabei muss die Funktion $\delta \Omega(\vec{q}, t)$ bei vorgegebenem $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ über die Gln. (2.103) und (2.105) berechnet werden. Wir werden dies im folgenden an einigen wichtigen Beispielen erläutern.

2.4.3 Homogenität in der Zeit

Wir betrachten **Zeittranslationen**,

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t' = t + \delta t, & \delta t &= \text{const.}, \\ \vec{q} &\longrightarrow \vec{q}' \equiv \vec{q}, & \delta \vec{q} &= 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Falls das System, d.h. seine Wirkung **invariant** unter dieser Transformation ist, dann spricht man von **Homogenität in der Zeit**. Zeittranslationen sind dann **Symmetrietransformationen** des betrachteten Systems. Physikalisch bedeutet dies, dass es keine Rolle spielt, **wann** das System eine bestimmte Konfigurationsbahn durchläuft, dass also die Randbedingungen

$$\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a, \quad \vec{q}(t_e) = \vec{q}_e,$$

dieselbe Konfigurationsbahn \mathcal{K} liefern wie die Randbedingungen

$$\vec{q}(t_a + \delta t) = \vec{q}_a, \quad \vec{q}(t_e + \delta t) = \vec{q}_e.$$

Da $\delta t = \text{const.}$, ist gemäß Gl. (2.97) $dt'/dt = 1$. Außerdem ist nach Gl. (2.99) $\dot{q}' = \dot{q}$. Daher muss nach Gl. (2.103) gelten

$$\delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{dt'}{dt} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t + \delta t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t,$$

wobei wir im letzten Schritt $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t + \delta t)$ nach Taylor in der infinitesimalen Größe δt entwickelt haben und höhere Ordnungen in δt vernachlässigt haben. Man erkennt, dass $\delta L = 0$, falls L **nicht explizit von der Zeit abhängt**. In diesem Fall ist also gemäß Gl. (2.104) die Zeittranslation eine **Symmetrietransformation**, weil sie die Wirkung invariant lässt.

Beispiel: Eindimensionale Bewegung in konservativem Kraftfeld. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x). \quad (2.110)$$

Offensichtlich hängt L nicht explizit von der Zeit ab, ist also invariant unter Zeittranslationen,

$$L(x, \dot{x}, t + \delta t) = L(x, \dot{x}, t) \iff \delta L(x, \dot{x}, t) = \frac{d}{dt} \delta \Omega(x, t) = 0.$$

Damit ist $\delta \Omega = \text{const.}$ und kann in Gl. (2.108) zur Konstanten auf die rechte Seite geschlagen werden. Daher kann man auch o.B.d.A. $\delta \Omega \equiv 0$ wählen.

Für zeittranslationsinvariante Systeme, also solche, deren Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängen und damit $\delta \Omega = \text{const.}$, liefert das Noether-Theorem (2.108) mit Gl. (2.109) die Erhaltungsgröße

$$H \equiv \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L = \text{const.} \quad (2.111)$$

H ist die sog. **Hamilton-Funktion**. Sie läßt sich folgendermaßen physikalisch interpretieren. Falls die kinetische Energie **ausschließlich** eine **quadratische** Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten ist,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^S \mu_j \dot{q}_j^2,$$

dann gilt

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^S \mu_j \dot{q}_j^2 = 2T .$$

Das System ist außerdem konservativ (sonst könnte man keine Lagrange-Funktion definieren), also gilt

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 ,$$

so dass

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j .$$

Also gilt

$$H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - L = T + V \equiv E ;$$

für konservative Systeme, bei denen die kinetische Energie ausschließlich eine quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten ist, ist die Hamiltonfunktion mit der **Gesamtenergie** des Systems identisch. Die **Homogenität in der Zeit** führt also auf die **Energieerhaltung!**

Bemerkung: Gemäß Gl. (2.107) gilt

$$H = const. \implies \frac{dH}{dt} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left(L - \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \equiv \frac{\partial L}{\partial t} = 0 ,$$

was wiederum bestätigt, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängen darf.

2.4.4 Homogenität im Raum

Wir betrachten **Raumtranslationen**,

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t' \equiv t , & \delta t &= 0 , \\ \vec{r}_i &\longrightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \delta \vec{r} , \quad i = 1, \dots, N , & \delta \vec{r} &= \overrightarrow{const.} . \end{aligned} \quad (2.112)$$

Falls das System, d.h. seine Wirkung **invariant** unter dieser Transformation ist, dann spricht man von **Homogenität im Raum**. Raumtranslationen sind dann **Symmetrietransformationen** des betrachteten Systems. Physikalisch bedeutet dies, dass es keine Rolle spielt, ob die Teilchen eines Systems bei den Orten \vec{r}_i oder bei den um $\delta \vec{r}$ verschobenen Orten \vec{r}'_i lokalisiert sind, sofern **alle** Teilchen um den gleichen Vektor $\delta \vec{r}$ verschoben werden.

In diesem Fall gilt $dt' = dt$. Weil mit $\delta \vec{r} = const.$ auch die generalisierten Koordinaten $\delta q_j = const.$ sind, gilt aufgrund von Gl. (2.98), dass $\vec{q}' = \vec{q}$. Daher folgt gemäß Gl. (2.103)

$$\delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{dt'}{dt} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q} + \delta \vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j , \quad (2.113)$$

wobei wir im letzten Schritt $L(\vec{q} + \delta\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ nach Taylor in den infinitesimalen Größen δq_j entwickelt haben und höhere Ordnungen in den δq_j vernachlässigt haben. Falls L **nicht explizit von den q_j abhängt**, also $\partial L / \partial q_j = 0 \forall j = 1, \dots, S$, so ist $\delta L = 0$, also gemäß Gl. (2.104) eine Raumtranslation eine **Symmetrietransformation**, weil sie die Wirkung invariant läßt. (Man beachte aber, dass dies nur eine hinreichende Bedingung ist; i.a. muss nur die gesamte Summe in Gl. (2.113) verschwinden, nicht jeder einzelne Term.)

Beispiel: Die Lagrange-Funktion (2.110) ist **nicht** invariant unter Raumtranslationen, da L explizit über $V(x)$ von der Koordinate x abhängt. I.a. gilt natürlich $V(x + \delta x) \neq V(x)$. In einer Raumdimension ist Invarianz unter (beliebigen) Raumtranslationen nur für ein konstantes Potential, $V(x) = const.$, gewährleistet, also wenn L gerade nicht explizit von x abhängt. In diesem Fall ist wieder $\delta L(x, \dot{x}, t) = 0$ und $\delta\Omega = const.$, d.h. o.B.d.A. kann $\delta\Omega$ wieder gleich null gesetzt werden.

9.6.2017

Für raumtranslationsinvariante Systeme mit $\delta\Omega = const.$ liefert das Noether-Theorem (2.108) mit Gl. (2.112) die Erhaltungsgröße

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = const. \quad (2.114)$$

Wir müssen nun den Zusammenhang zwischen den δq_j und $\delta\vec{r}$ bestimmen. Es gilt aufgrund der Kettenregel

$$\delta\vec{r} = \vec{r}'_i - \vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q} + \delta\vec{q}, t) - \vec{r}_i(\vec{q}, t) = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.115)$$

Andererseits gilt für konservative Systeme, $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.116)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (2.15) benutzt haben. Setzen wir Gl. (2.116) in Gl. (2.114) ein und benutzen Gl. (2.115), so erhalten wir

$$const. = \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r} \equiv \vec{P} \cdot \delta\vec{r}, \quad (2.117)$$

d.h., die Komponente des **Gesamtimpulses**,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i,$$

die in **Richtung der Translation** $\delta\vec{r}$ zeigt, bleibt erhalten!

Falls $\delta\vec{r}$ in **beliebige** Richtungen zeigen darf, ohne die Invarianz des Systems zu verletzen, so bleibt auch der Gesamtimpuls erhalten, die **Homogenität im Raum** führt also auf die **Impulserhaltung!** Falls die Symmetrie nur bei Raumtranslationen in eine bestimmte Richtung besteht, so bleibt gemäß Gl. (2.117) lediglich die Impulskomponente erhalten, die in diese Richtung zeigt.

2.4.5 Isotropie des Raumes

Wir betrachten **Drehungen im Raum**,

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t' \equiv t, & \delta t &= 0, \\ \vec{r}_i &\longrightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, & \delta\vec{r}_i &= \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i, \quad i = 1, \dots, N, & \delta\vec{\phi} &= \overrightarrow{const.}, \end{aligned} \quad (2.118)$$

wobei wir den Vektor $\delta\vec{\phi}$ gemäß Abb. 2.16 eingeführt haben.

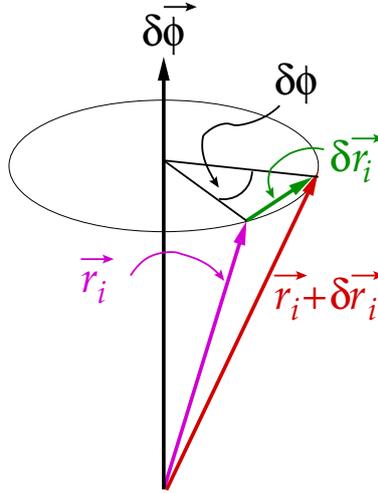


Abbildung 2.16: Zur Drehung der Teilchenkoordinaten.

Falls das System, d.h. seine Wirkung **invariant** unter dieser Transformation ist, dann spricht man von **Isotropie des Raumes**. Drehungen sind dann **Symmetrietransformationen** des betrachteten Systems. Es gilt wiederum Gl. (2.113), allerdings mit einem anderen $\delta\vec{q}$, welches nun Raumdrehungen entsprechenden Transformationen der generalisierten Koordinaten entspricht.

Beispiel: Kepler-Problem. Die Lagrange-Funktion hat die Form

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\gamma m M}{r}.$$

Raumdrehungen lassen den Betrag $r = |\vec{r}|$ des Ortsvektors und das Quadrat $\dot{\vec{r}}^2$ des Geschwindigkeitsvektors invariant, daher ist die Lagrange-Funktion invariant unter Raumdrehungen. Damit ist $\delta L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$ und $\delta\Omega(\vec{r}, t) = const.$, kann also wieder o.B.d.A. gleich null gesetzt werden.

Das Noether-Theorem liefert dieselbe Erhaltungsgröße (2.114) wie im Fall der Raumtranslationen. Allerdings gibt es nun nicht nur einen einzigen Verschiebungsvektor $\delta\vec{r}$ für alle Teilchen, sondern **jedes** Teilchen wird um einen **anderen** Vektor $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i$ verschoben. Dieser lautet jedoch analog Gl. (2.115)

$$\delta\vec{r}_i = \vec{r}'_i - \vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q} + \delta\vec{q}, t) - \vec{r}_i(\vec{q}, t) = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.119)$$

Deshalb können wir die vorangegangene Rechnung bis zu Gl. (2.117) übertragen, die nun lautet

$$\begin{aligned}
 const. &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i) \\
 &= \delta \vec{\phi} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) \equiv \delta \vec{\phi} \cdot \vec{L}, \tag{2.120}
 \end{aligned}$$

wobei die zyklische Vertauschbarkeit des Spatproduktes und die Definition des **Gesamtdrehimpulses** des Systems,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i,$$

ausgenutzt wurde. Gleichung (2.120) sagt also aus, dass die Komponente des Gesamtdrehimpulses in **Richtung des Vektors** $\delta \vec{\phi}$ erhalten bleibt!

Für den Fall, dass der Raum **isotrop** ist, also $\delta \vec{\phi}$ in **beliebige** Richtungen zeigen darf, ohne dass die Invarianz des Systems verletzt wird, ist auch der Gesamtdrehimpuls erhalten, die **Isotropie des Raumes** führt also auf die **Drehimpulserhaltung!** Falls diese Symmetrie nur für eine bestimmte Drehachse gilt, so ist nur die Drehimpulskomponente in Richtung dieser Achse erhalten.

3 Hamilton-Mechanik

Die Mechanik nach Hamilton stellt eine formale Weiterentwicklung der Lagrange-Mechanik dar. Sie ist vollkommen äquivalent zu dieser und bietet daher keine neuen physikalischen Erkenntnisse. Sie ist aber besonders zweckmäßig für die Erweiterung der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

Die Idee, die der Hamilton-Mechanik zugrundeliegt, ist, die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i , die in der Lagrange-Mechanik unabhängige Variablen neben den generalisierten Koordinaten q_i sind, durch die generalisierten Impulse p_i zu ersetzen. Desweiteren werden die Bewegungsgleichungen, welche im Fall der Lagrange-Mechanik S Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $q_i(t)$, nämlich die Euler-Lagrange-Gleichungen, sind, durch $2S$ Differentialgleichungen erster Ordnung für $q_i(t)$ und $p_i(t)$ ersetzt. Die Zahl der Anfangsbedingungen ändert sich dabei natürlich nicht; im Fall der Lagrange-Mechanik benötigt man $2S$ Anfangsbedingungen für $\vec{q}(0)$, $\dot{\vec{q}}(0)$ und im Fall der Hamilton-Mechanik die gleiche Anzahl für $\vec{q}(0)$, $\vec{p}(0)$. Die Unterschiede zwischen der Lagrange- und Hamilton-Mechanik sind in nachfolgender Tabelle noch einmal zusammengestellt.

	Lagrange-Mechanik	Hamilton-Mechanik
Variablen	$\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t$	\vec{q}, \vec{p}, t
Bewegungsgleichungen	S Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $\vec{q}(t)$ $2S$ Anfangsbedingungen	$2S$ Differentialgleichungen erster Ordnung für $\vec{q}(t)$, $\vec{p}(t)$ $2S$ Anfangsbedingungen

Tabelle 3.1: Unterschiede zwischen Lagrange- und Hamilton-Mechanik.

3.1 Legendre-Transformation

Der für die Hamilton-Mechanik nötige Wechsel von generalisierten Geschwindigkeiten zu generalisierten Impulsen wird mathematisch durch die sog. **Legendre-Transformation** vermittelt.

3 Hamilton-Mechanik

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, mit totalem Differential

$$df = \frac{df}{dx} dx = u dx, \quad u(x) \equiv \frac{df(x)}{dx}.$$

Gesucht ist die sog. **Legendre-Transformierte** der Funktion $f(x)$, d.h. eine Funktion $g(u)$ mit

$$dg = \frac{dg}{du} du = -x du, \quad \frac{dg(u)}{du} \equiv -x(u).$$

Behauptung: Die gesuchte Funktion $g(u)$ berechnet sich aus der Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $u = df/dx$ wie folgt:

$$g = f - u x = f - \frac{df}{dx} x. \quad (3.1)$$

Bemerkungen:

- (i) Auf der rechten Seite von Gl. (3.1) ist x als Funktion von u aufzufassen, also unter Ausschreiben sämtlicher funktionaler Abhängigkeiten

$$g(u) = f(x(u)) - u x(u).$$

Die funktionale Abhängigkeit $x(u)$ bestimmt man durch Invertieren von $u(x) = df(x)/dx$.

- (ii) Es muss gelten

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0,$$

weil ansonsten $u = df/dx = \text{const.}$, also keine echte Variable ist.

Beweis von Gl. (3.1): Einerseits ist

$$dg = \frac{dg}{du} du. \quad (3.2)$$

Andererseits ist aufgrund der Produktregel

$$dg = d(f - u x) = df - d(u x) = \frac{df}{dx} dx - x du - u dx = u dx - x du - u dx = -x du. \quad (3.3)$$

Der Vergleich von Glgen. (3.2) und (3.3) ergibt

$$\frac{dg}{du} = -x, \quad \text{q.e.d.}$$

Es stellt sich die Frage, warum man den Variablenwechsel $x \rightarrow u$ nicht einfach durch Invertieren von $u(x) = df/dx$, was $x(u)$ liefert, und nachfolgendem Einsetzen,

$$\tilde{g}(u) = f(x(u)),$$

vollzieht. Der Grund ist, dass dies keine eindeutige Funktion $\tilde{g}(u)$ liefert. Z.B. haben die Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = (x+c)^2$ die gleiche Funktion $\tilde{g}(u)$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{df_1}{dx} = 2x \implies x = \frac{u}{2} \implies \tilde{g}_1(u) = f_1(x(u)) = \frac{u^2}{4}, \\ u &= \frac{df_2}{dx} = 2(x+c) \implies x = \frac{u}{2} - c \implies \tilde{g}_2(u) = f_2(x(u)) = \left(\frac{u}{2} - c + c\right)^2 \equiv \tilde{g}_1(u). \end{aligned}$$

Dagegen liefert die Legendre-Transformation (3.1) immer ein eindeutiges $g(u)$, z.B. für das obige Beispiel:

$$\begin{aligned} u &= \frac{df_1}{dx} = 2x \implies g_1 = f_1 - ux = \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{2} = -\frac{u^2}{4}, \\ u &= \frac{df_2}{dx} = 2(x+c) \implies g_2 = f_2 - ux = \frac{u^2}{4} - u\left(\frac{u}{2} - c\right) = -\frac{u^2}{4} + uc \neq g_1. \end{aligned}$$

Die Legendre-Transformation ist auch eindeutig **umkehrbar**, d.h. bei Kenntnis der Legendre-Transformierten $g(u)$ läßt sich $f(x)$ aus $g(u)$ und seiner Ableitung $dg(u)/du \equiv -x(u)$ berechnen,

$$f = g + ux = g - u \frac{dg}{du}.$$

Hierbei ist u auf der rechten Seite als Funktion von x aufzufassen. Diesen Zusammenhang erhält man durch Invertieren von $x(u) = -dg(u)/du$.

Das Konzept der Legendre-Transformation läßt sich auf Funktionen **mehrerer** Variablen verallgemeinern. Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$, mit totalem Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy, \quad u(x, y) \equiv \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_y, \quad v(x, y) \equiv \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_x.$$

Gesucht wird die Funktion $g(x, v)$ mit

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial v} dv = u dx - y dv, \quad u(x, y(x, v)) \equiv \left. \frac{\partial g(x, v)}{\partial x} \right|_v, \quad -y(x, v) \equiv \left. \frac{\partial g(x, v)}{\partial v} \right|_x.$$

Hierbei nennt man x die **passive** und y die **aktive** Variable der Legendre-Transformation. Die gesuchte Funktion berechnet sich aus f und seiner partiellen Ableitung nach der aktiven Variablen,

$$g = f - vy = f - \frac{\partial f}{\partial y} y. \quad (3.4)$$

Dies ist die **Legendre-Transformierte** der Funktion $f(x, y)$ **bezüglich** y . Man beachte, dass y auf der rechten Seite eine Funktion von x und v ist, mit allen funktionalen Abhängigkeiten explizit ausgeschrieben also gilt

$$g(x, v) = f(x, y(x, v)) - v y(x, v).$$

Den funktionalen Zusammenhang $y(x, v)$ erhält man durch Invertieren von $v(x, y) = \partial f(x, y)/\partial y|_x$.

Der Beweis von Gl. (3.4) folgt analog dem oben diskutierten Fall von Funktionen einer Variablen. Einerseits gilt nach der Regel für das totale Differential

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial v} dv . \quad (3.5)$$

Andererseits gilt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} dg &= d(f - v y) = df - d(v y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy - v dy - y dv = u dx + v dy - v dy - y dv \\ &= u dx - y dv . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vergleich der Koeffizienten in Gln. (3.5) und (3.6) liefert die Behauptung.

Auch diese Legendre-Transformation ist eindeutig umkehrbar. Die Funktion $f(x, y)$ errechnet sich aus ihrer Legendre-Transformierten $g(x, v)$ gemäß

$$f = g + v y = g - v \frac{\partial g}{\partial v} ,$$

wobei v auf der rechten Seite als Funktion von x und y aufzufassen ist. Diesen Zusammenhang erhält man durch Invertieren von $-y(x, v) = \partial g(x, v) / \partial v|_x$.

Für Funktionen mehrerer Variablen kann man die Legendre-Transformation auch wiederholt ausführen, um mehr als eine Variable zu ersetzen. Sei z.B. eine Funktion $f(x, y_1, y_2)$ gegeben mit

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} dy_2 = u dx + v_1 dy_1 + v_2 dy_2 , \\ u(x, y_1, y_2) &= \left. \frac{\partial f(x, y_1, y_2)}{\partial x} \right|_{y_1, y_2} , \\ v_1(x, y_1, y_2) &= \left. \frac{\partial f(x, y_1, y_2)}{\partial y_1} \right|_{x, y_2} , \\ v_2(x, y_1, y_2) &= \left. \frac{\partial f(x, y_1, y_2)}{\partial y_2} \right|_{x, y_1} , \end{aligned}$$

und wir wollen die Variablen y_1 und y_2 durch v_1 und v_2 mittels Legendre-Transformationen ersetzen. Man kann zunächst y_1 durch die Legendre-Transformation

$$\tilde{g} = f - \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1 = f - v_1 y_1$$

ersetzen. Die Funktion \tilde{g} hängt von den Variablen x, v_1, y_2 ab, wobei

$$\begin{aligned} d\tilde{g} &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_2} dy_2 = u dx - y_1 dv_1 + v_2 dy_2 , \\ u(x, y_1(x, v_1, y_2), y_2) &= \left. \frac{\partial \tilde{g}(x, v_1, y_2)}{\partial x} \right|_{v_1, y_2} , \\ -y_1(x, v_1, y_2) &= \left. \frac{\partial \tilde{g}(x, v_1, y_2)}{\partial v_1} \right|_{x, y_2} , \\ v_2(x, y_1(x, v_1, y_2), y_2) &= \left. \frac{\partial \tilde{g}(x, v_1, y_2)}{\partial y_2} \right|_{x, v_1} . \end{aligned}$$

In einer zweiten Legendre-Transformation ersetzt man dann y_2 ,

$$g = \tilde{g} - \frac{\partial g}{\partial y_2} y_2 = \tilde{g} - v_2 y_2 .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial g}{\partial v_2} dv_2 = u dx - y_1 dv_1 - y_2 dv_2 , \\ u(x, y_1(x, v_1, v_2), y_2(x, v_1, v_2)) &= \left. \frac{\partial g(x, v_1, v_2)}{\partial x} \right|_{v_1, v_2} , \\ -y_1(x, v_1, v_2) &= \left. \frac{\partial g(x, v_1, v_2)}{\partial v_1} \right|_{x, v_2} , \\ -y_2(x, v_1, v_2) &= \left. \frac{\partial g(x, v_1, v_2)}{\partial v_2} \right|_{x, v_1} , \end{aligned}$$

Man kann aber beide Legendre-Transformationen auch in einem Schritt ausführen, was aus folgender Identität ersichtlich wird

$$g = \tilde{g} - v_2 y_2 = f - v_1 y_1 - v_2 y_2 = f - \sum_{i=1}^2 v_i y_i = f - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i .$$

3.2 Kanonische Gleichungen

3.2.1 Herleitung der kanonischen Gleichungen

Wir wenden nun das im vorangegangenen Abschnitt über die Legendre-Transformation Gelernte an, um in der Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t)$$

alle generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j durch die generalisierten Impulse,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

zu ersetzen. Wir suchen also die **Legendre-Transformierte** von L bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j , $j = 1, \dots, S$. Die generalisierten Geschwindigkeiten sind die **aktiven** Variablen, die generalisierten Koordinaten und die Zeit sind die **passiven** Variablen der Legendre-Transformation. Nach Gl. (3.4) berechnet sich die gesuchte Legendre-Transformierte gemäß

$$L - \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = L - \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j \equiv -H , \quad (3.7)$$

wobei wir die Definition (2.111) der Hamilton-Funktion benutzt haben. Die **Hamilton-Funktion** ist also gerade die **(negative) Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion!** Sie hängt damit von den generalisierten Koordinaten q_j , den generalisierten Impulsen p_j und der Zeit ab,

$$H(q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S, t)$$

Ebenso wie aus der Lagrange-Funktion L Bewegungsgleichungen für das System ableitbar sind, kann man auch aus der Hamilton-Funktion H Bewegungsgleichungen ableiten. Das totale Differential von H lautet

$$dH = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \quad (3.8)$$

Andererseits ist aufgrund der Definition (2.111) von H

$$\begin{aligned} dH &= d \left(\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - L \right) \\ &= \sum_{j=1}^S (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j) - \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^S (-\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt , \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei wir die Definition (2.42) des generalisierten Impulses und die Euler-Lagrange-Gleichung,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j \equiv \dot{p}_j ,$$

benutzt haben. Der Vergleich der Koeffizienten der Differentiale dq_j und dp_j in den Glgen. (3.8) und (3.9) liefert die sog. **kanonischen Gleichungen** oder **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen**

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} , \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} , \quad j = 1, \dots, S . \quad (3.10)$$

Man bezeichnet \vec{q}, \vec{p} als **kanonische Variablen**, oder **kanonisch konjugierte Variablen**.

Eine weitere Gleichung erhält man aus dem Vergleich der Koeffizienten des Differentials dt in den Glgen. (3.8) und (3.9),

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \quad (3.11)$$

Dies ist keine Bewegungsgleichung im eigentlichen Sinne. Sie liefert jedoch ein Kriterium, um zu entscheiden, ob die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße darstellt. Berechnen

wir nach Gl. (3.8) die totale Zeitableitung von H , so erhalten wir mit Hilfe der kanonischen Gleichungen (3.10) und Gl. (3.11)

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^S (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Totale Zeitableitung und partielle Zeitableitung der Hamilton-Funktion sind also identisch. Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, $\partial L/\partial t = 0$, so hängt auch die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, und dann verschwindet auch die totale Zeitableitung von H , d.h. $H = \text{const.}$.

3.2.2 Der Phasenraum

13.6.2017

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (3.10) stellen $2S$ Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die generalisierten Koordinaten q_j und die generalisierten Impulse p_j dar. Sie sind äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gleichungen, die S Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit für die generalisierten Koordinaten sind.

Wie wir gesehen hatten, beschreiben die **Euler-Lagrange-Gleichungen** die Bewegung des Systems im **S -dimensionalen Konfigurationsraum** \mathbb{K} . Dagegen beschreiben die **Hamiltonschen Gleichungen** die Bewegung im **$2S$ -dimensionalen Phasenraum** \mathbb{P} . Der Phasenraum wird durch die generalisierten Koordinaten **und** die generalisierten Impulse aufgespannt. Wir definieren den sog. **Phasenraumvektor**

$$\vec{\pi} = (\vec{q}, \vec{p}) \equiv (q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S) .$$

Offenbar ist der Konfigurationsraum ein S -dimensionaler Unterraum des Phasenraums, $\mathbb{K} \subset \mathbb{P}$.

In Analogie zur **Konfigurationsbahn** im Konfigurationsraum durchläuft der Phasenraumvektor $\vec{\pi}(t)$ im Laufe der Zeit die sog. **Phasenraumbahn**

$$\mathcal{P} = \{ \vec{\pi}(t) \in \mathbb{P}, t_a \leq t \leq t_e \} .$$

Im Fall von **zyklischen Variablen** liefert der Hamiltonsche Formalismus eine rechnerische Vereinfachung gegenüber dem Lagrange-Formalismus. Sei q_j eine zyklische Variable, d.h. die Lagrange-Funktion hängt nicht explizit von q_j ab,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für } q_j \text{ zyklisch} .$$

Wie wir gesehen hatten, ist dann der zugehörige generalisierte Impuls

$$p_j \equiv C_j = \text{const.} .$$

Aus der Hamiltonschen Gleichung (3.10) für p_j folgern wir

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 ,$$

d.h. auch die Hamilton-Funktion hängt nicht explizit von der zyklischen Koordinate q_j ab. Der Unterschied zur Lagrange-Funktion, die immer noch von der generalisierten Geschwindigkeit \dot{q}_j abhängt,

$$L(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{j-1}, \dot{q}_j, \dot{q}_{j+1}, \dots, \dot{q}_S, t) ,$$

ist, dass der zugehörige generalisierte Impuls stets konstant bleibt, also keine echte Variable mehr ist. Er wird schon durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Hamilton-Funktion hängt dann nicht mehr von $2S$ Variablen (und der Zeit), sondern nur noch von $2S - 2$ Variablen (und der Zeit) ab,

$$H(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_S, p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_S, t \mid p_j = C_j) ,$$

wobei wir den Wert des zur zyklischen Variable gehörenden generalisierten Impulses p_j explizit angeben haben.

Für die **Bewegung des Systems im Phasenraum** bedeutet dies, dass sie lediglich auf einem durch die Bedingung $p_j = C_j = \text{const.}$ definierten $(2S - 1)$ -dimensionalen **Unterraum** von \mathbb{P} stattfindet. Die Bewegung auf diesem Unterraum wird durch Lösen von $2S - 2$ kanonischen Gleichungen für die verbleibenden Variablen $q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_S, p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_S$, sowie der Gleichung

$$\dot{q}_j = \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{p_j=C_j}$$

für die zyklische Variable q_j bestimmt.

Falls es gelingt, die generalisierten Koordinaten so zu wählen, dass **alle** zyklisch sind, und falls die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, $\partial H / \partial t = 0$, dann ist das Problem automatisch gelöst. In diesem Fall gibt es S Integrale der Bewegung,

$$p_1 = C_1 , \dots , p_S = C_S .$$

Die Bewegung findet auf einem durch diese Bedingungen definierten S -dimensionalen Unterraum des Phasenraums statt. Die Hamilton-Funktion bleibt auf diesem Unterraum stets konstant,

$$H(p_1 = C_1, \dots, p_S = C_S) = H(\vec{p} = \vec{C}) = \text{const.} .$$

Die Bewegung auf diesem Unterraum wird durch die S Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_j = \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{\vec{p}=\vec{C}} \equiv \xi_j = \text{const.} , \quad j = 1, \dots, S ,$$

bestimmt, welche die triviale Lösung

$$q_j(t) = \xi_j t + D_j , \quad j = 1, \dots, S ,$$

haben, wobei die D_j Konstanten sind, die wie die C_j durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Zu einem solchen geeigneten Satz generalisierter Koordinaten gelangt man mit Hilfe von sog. **kanonischen Transformationen**. Das Ziel der **Hamilton-Jacobi-Theorie** ist es, diejenige kanonische Transformation zu bestimmen, die gerade alle generalisierten Koordinaten zyklisch macht.

3.2.3 Einfache Beispiele

Das **allgemeine Lösungsschema** des Hamilton-Formalismus ist das folgende:

- (i) Festlegen der generalisierten Koordinaten, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_S)$ und Aufstellen der Transformationsformeln,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t), \quad \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), \quad i = 1, \dots, N.$$

- (ii) Bestimmen der Lagrange-Funktion als Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten,

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t).$$

- (iii) Berechnen der generalisierten Impulse,

$$p_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, S.$$

- (iv) Auflösen nach den generalisierten Geschwindigkeiten,

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad j = 1, \dots, S.$$

- (v) Berechnen der Hamilton-Funktion als Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion,

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t).$$

- (vi) Aufstellen der kanonischen Gleichungen,

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, S,$$

und Lösen dieser Gleichungen.

Wir werden dieses allgemeine Schema jetzt anhand von zwei prominenten Beispielen erläutern.

1. Eindimensionaler harmonischer Oszillator.

- (i) Der Oszillator möge sich in der kartesischen x -Richtung bewegen. Wir wählen diese auch als generalisierte Koordinate, so dass die Transformationsformel

$$x = q$$

lautet.

- (ii) Gemäß Gl. (2.155) der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden” lautet die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 .$$

Sie hängt nicht explizit von der Zeit ab. Aus Gl. (3.11) wissen wir, dass die Hamilton-Funktion dann auch nicht explizit von der Zeit abhängen wird.

- (iii) Der generalisierte Impuls ist

$$p(\dot{q}) = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} .$$

Er hängt nicht von q oder t ab.

- (iv) Die generalisierte Geschwindigkeit ist

$$\dot{q}(p) = \frac{p}{m} .$$

- (v) Die Hamilton-Funktion lautet

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p \dot{q}(p) - L(q, \dot{q}(p)) \\ &= p \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2} k q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 \equiv \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 , \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ des Oszillators.

Da $\partial H/\partial t = 0$, folgt aus Gl. (3.12), dass die Hamilton-Funktion eine **Erhaltungsgröße** ist. Weil die kinetische Energie ausschließlich eine quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten ist, ist sie außerdem mit der **Gesamtenergie** E identisch, vgl. Diskussion nach Gl. (2.111),

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 = \text{const.} \quad \iff \quad 1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/(m\omega_0^2)} . \quad (3.14)$$

Diese Gleichung ist die Normalform einer **Ellipse**,

$$1 = \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} ,$$

mit den Halbachsen $a = \sqrt{2E/(m\omega_0^2)}$, $b = \sqrt{2mE}$ in der (q, p) -Ebene, vgl. Abb. 3.1. Diese Ebene ist für den eindimensionalen harmonischen Oszillator identisch mit dem **Phasenraum**. Für gegebene Gesamtenergie E bewegt sich der **Phasenraumvektor** $\vec{\pi} = (q, p)$ des Systems also stets auf den durch Gl. (3.14) definierten Ellipsen. Man kann sich zudem leicht klar machen, dass die Bewegung stets im **Uhrzeigersinn** erfolgt. Lenkt man den Oszillator zum Anfangszeitpunkt aus, z.B. in die positive q -Richtung, aber stößt ihn dabei nicht an, so startet man genau am Punkt $q = \sqrt{2E/(m\omega_0^2)}$, $p = 0$ in Abb. 3.1. Die weitere Bewegung erfolgt aufgrund der Rückstellkraft zunächst in die

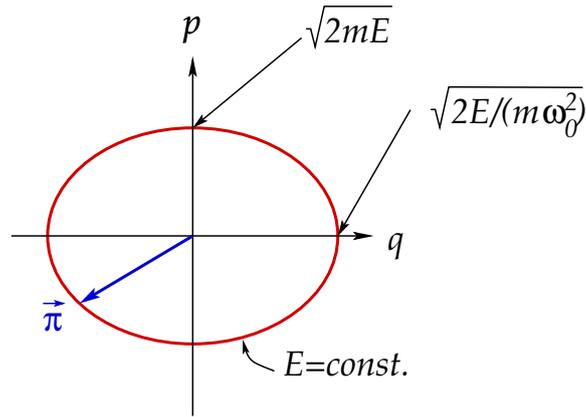


Abbildung 3.1: Phasenraum des eindimensionalen harmonischen Oszillators und Ellipsen konstanter Energie.

negative q -Richtung mit negativem Impuls, also genau im Uhrzeigersinn. Stößt man den Oszillator aus der Ruhelage z.B. mit positivem Impuls an, so startet man am Punkt $q = 0$, $p = \sqrt{2Em}$. Dann bewegt sich der Oszillator zunächst in die positive q -Richtung, also wieder im Uhrzeigersinn. Ähnlich kann man auch für andere Anfangsbedingungen argumentieren.

(vi) Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2 q.$$

Differenzieren wir die erste Gleichung noch einmal nach der Zeit und setzen die zweite ein,

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega_0^2 q \iff \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

so erhalten wir die altbekannte Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, deren Lösung ebenfalls wohlbekannt ist,

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

mit Konstanten A, B , die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen.

2. **Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.** Die Bewegung eines Teilchens der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld wird durch die **Lorentzkraft**

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

bestimmt, wobei \vec{E} das **elektrische Feld**, \vec{v} die Geschwindigkeit des Teilchens und \vec{B} die **magnetische Induktion** sind. \vec{E} und \vec{B} lassen sich durch das **skalare Potential** $\varphi(\vec{r}, t)$ und das **Vektorpotential** $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ausdrücken,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.15)$$

so dass

$$\vec{F} = \mathfrak{q} \left[-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]. \quad (3.16)$$

Aufgrund der Geschwindigkeitsabhängigkeit ist dies **keine** konservative Kraft. Bei holonomen Zwangsbedingungen lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen in diesem Fall

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, S,$$

vgl. Gl. (2.24). Für gewisse geschwindigkeitsabhängige Kräfte läßt sich der Lagrange-Formalismus jedoch verallgemeinern, und zwar wenn sich die generalisierten Kräfte Q_j aus einem **generalisierten Potential** $U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ gemäß

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S,$$

ableiten lassen. Dann kann man nämlich eine **verallgemeinerte Lagrange-Funktion**

$$\tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

definieren, mit der Gl. (2.24) die Standardform der Euler-Lagrange-Gleichungen annimmt,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S.$$

Wir zeigen nun, dass für die Lorentzkraft genau so ein generalisiertes Potential existiert. Wir wählen als generalisierte Koordinaten die kartesischen Koordinaten, so dass die generalisierte Kraft Q_j aufgrund von Gl. (2.18) mit $\partial \vec{r} / \partial q_j \equiv \partial \vec{r} / \partial x_j = \vec{e}_j$ identisch mit der j -Komponente F_j der Lorentzkraft ist. Das gesuchte generalisierte Potential lautet

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \mathfrak{q} \left[\varphi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right].$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} Q_j &\equiv F_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} \\ &= \mathfrak{q} \left(-\frac{dA_j}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \right) \\ &= \mathfrak{q} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei wir im letzten Schritt die totale Zeitableitung von A_j benutzt haben. Der letzte Term in dieser Gleichung ist offenbar gerade die j -Komponente des letzten

Terms in Gl. (3.16),

$$\begin{aligned} \left[\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \right]_j &= \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} v_k \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)_l = \sum_{k,l,m,n=1}^3 \epsilon_{jkl} \epsilon_{lmn} v_k \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \sum_{k,m,n=1}^3 (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) v_k \frac{\partial A_n}{\partial x_m} = \sum_{k=1}^3 v_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Der Vergleich von Gl. (3.17) mit Gl. (3.16) liefert die Behauptung, q.e.d.

Wir wenden nun das allgemeine Lösungsschema an, um die Hamilton-Funktion und die kanonischen Gleichungen abzuleiten.

- (i) Die generalisierten Koordinaten sollen identisch mit den kartesischen Koordinaten des Teilchens sein, $\vec{r} \equiv \vec{q}$. Der Einfachheit halber bleiben wir bei der Notation \vec{r} anstelle von \vec{q} .
- (ii) Wie gerade erläutert, lautet die verallgemeinerte Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \mathbf{q} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - \mathbf{q} \varphi(\vec{r}, t). \quad (3.18)$$

- (iii) Der generalisierte Impuls ist **nicht** mehr identisch mit dem mechanischen Impuls $m \dot{\vec{r}}$,

$$p_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{\partial \tilde{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j + \mathbf{q} A_j(\vec{r}, t). \quad (3.19)$$

- (iv) Die j -Komponente der Geschwindigkeit lautet

$$\dot{x}_j(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{p_j - \mathbf{q} A_j(\vec{r}, t)}{m}. \quad (3.20)$$

- (v) Die verallgemeinerte Hamilton-Funktion als Legendre-Transformierte der verallgemeinerten Lagrange-Funktion (3.18) lautet

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}}(\vec{r}, \vec{p}, t) - \tilde{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}(\vec{r}, \vec{p}, t), t) \\ &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \mathbf{q} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \mathbf{q} \varphi(\vec{r}, t) \\ &= \left[\vec{p} - \mathbf{q} \vec{A}(\vec{r}, t) \right] \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \mathbf{q} \varphi(\vec{r}, t) \\ &= \frac{1}{m} \left[\vec{p} - \mathbf{q} \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 - \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \mathbf{q} \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + \mathbf{q} \varphi(\vec{r}, t) \\ &= \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \mathbf{q} \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + \mathbf{q} \varphi(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (3.21)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Definition (3.20) der Geschwindigkeit eingesetzt haben. Diese Form der Hamilton-Funktion wird uns in der Quantenmechanik als **Hamilton-Operator** für die Bewegung eines quantenmechanischen Teilchens im elektromagnetischen Feld wiederbegegnen. Die Form, in der das Vektorpotential im generalisierten Impuls (3.19) auftaucht, bezeichnet man als **minimale Kopplung**.

(vi) Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_j} = \frac{p_j - \mathfrak{q} A_j}{m}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_j} = \frac{\mathfrak{q}}{m} (\vec{p} - \mathfrak{q} \vec{A}) \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} - \mathfrak{q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \\ &= \mathfrak{q} \left(\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \equiv - \left. \frac{\partial U}{\partial x_j} \right|_{\dot{\vec{r}}, t}.\end{aligned}$$

16.6.2017

3.3 Modifiziertes Hamiltonsches Prinzip

Man kann die kanonischen Gleichungen auch aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip ableiten, welches wir in diesem Zusammenhang als **modifiziertes Hamiltonsches Prinzip** bezeichnen,

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_a}^{t_e} dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \delta \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right]. \quad (3.22)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die Lagrange-Funktion durch die Definition der Hamilton-Funktion als deren (negative) Legendre-Transformierte ersetzt.

Da die rechte Seite neben dem Konfigurationsvektor \vec{q} auch vom Vektor \vec{p} der generalisierten Impulse abhängt, muss das Variationsymbol “ δ ” entsprechend erweitert werden. Es wird nicht länger nur die Konfigurationsbahn \mathcal{K} variiert, sondern die **Phasenraumbahn** \mathcal{P} . Alle möglichen Variationen der Phasenraumbahn liefern wieder eine **Konkurrenzchar**,

$$\mathcal{M} = \{ \mathcal{P} \in \mathbb{P}, \vec{\pi} \text{ mind. } 2 \times \text{ diffbar.}, \vec{q}(t_a) = \vec{q}_a, \vec{q}(t_e) = \vec{q}_e \}.$$

Hier ist zu beachten, dass **lediglich die Konfigurationsbahnen** vom selben Punkt \vec{q}_a bei t_a starten und am selben Punkt \vec{q}_e bei t_e enden. Dagegen gibt es **keine** solche Beschränkung für die Werte der generalisierten Impulse $\vec{p}(t_a), \vec{p}(t_e)$. Für diese sind **alle möglichen Werte** zugelassen. Dies ist in Abb. 3.2 veranschaulicht.

Warum ist dies so? Zunächst ist zu bemerken, dass vormals bei der Variation der Konkurrenzchar der Konfigurationsbahnen die Anfangs- und Endwerte der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j(t_a), \dot{q}_j(t_e)$ auch nicht festgelegt waren, sondern alle möglichen Werte annehmen konnten. Dies liegt daran, dass die Geschwindigkeit der Grenzwert eines Differenzenquotienten der Koordinaten ist,

$$\dot{q}_j(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_j(t + \Delta t) - q_j(t)}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad \dot{q}_j(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q_j(t) - q_j(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Wenn wir bei t_a den vorwärts genommenen Differenzenquotienten betrachten, hängt sie nicht nur von $q_j(t_a)$, sondern auch von $q_j(t_a + \Delta t)$, also vom Wert der Koordinate bei einem späteren Zeitpunkt $t_a + \Delta t$ ab. Dieser Wert wird aber im Rahmen der Konkurrenzchar mitvariiert. Entsprechendes gilt für den Endzeitpunkt t_e , wenn wir dort den rückwärts

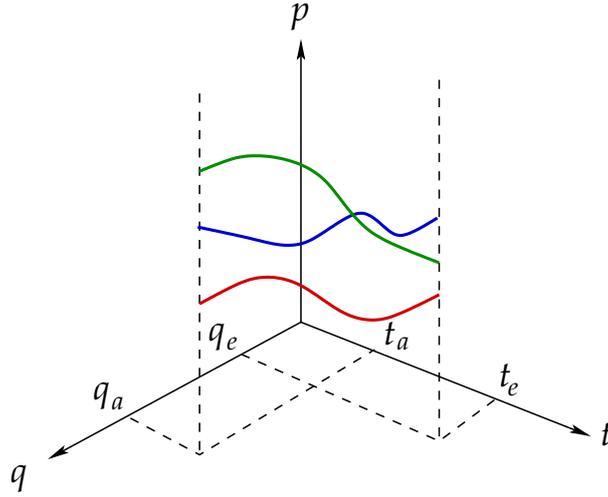


Abbildung 3.2: Konkurrenzschicht im Phasenraum.

genommenen Differenzenquotienten nehmen. Hier ist zwar $q_j(t_e)$ fest, aber $q_j(t_e - \Delta t)$ wird mitvariiert. Da zwischen generalisiertem Impuls und generalisierter Geschwindigkeit ein eindeutiger Zusammenhang besteht (z.B. $p_j = m\dot{q}_j$), wird nun klar, warum die Werte von p_j bei t_a und t_e mitvariiert werden müssen.

Wir charakterisieren nun die Phasenraumbahnen aus der Konkurrenzschicht wieder mit Hilfe eines Scharparameters α . Eine bestimmte Phasenraumbahn aus der Konkurrenzschicht kann man daher wie folgt schreiben:

$$\vec{\pi}_\alpha(t) = (\vec{q}_\alpha(t), \vec{p}_\alpha(t)) , \quad \vec{q}_\alpha(t) = \vec{q}_0(t) + \vec{\gamma}_\alpha(t) , \quad \vec{p}_\alpha(t) = \vec{p}_0(t) + \vec{\beta}_\alpha(t) ,$$

mit einer fest vorgegebenen Phasenraumbahn $\vec{\pi}_0(t) = (\vec{q}_0(t), \vec{p}_0(t))$, vgl. Gl. (2.84). Hierbei ist

$$\gamma_{j,\alpha}(t_a) = \gamma_{j,\alpha}(t_e) = 0 \quad \forall \alpha , \quad \gamma_{j,0}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_a, t_e] , \quad j = 1, \dots, S , \quad (3.23)$$

während für die Funktionen $\beta_{j,\alpha}(t)$ lediglich die Bedingung

$$\beta_{j,0}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_a, t_e] , \quad j = 1, \dots, S ,$$

gilt. Wir übertragen nun die vormalig im Rahmen der Variationsrechnung diskutierte Relation (2.87) und erhalten

$$\delta S[\vec{\pi}_0(t)] = \int_{t_a}^{t_e} dt \left[f(\vec{q}_{d\alpha}, \dot{\vec{q}}_{d\alpha}, \vec{p}_{d\alpha}, t) - f(\vec{q}_0, \dot{\vec{q}}_0, \vec{p}_0, t) \right] , \quad (3.24)$$

wobei

$$f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{p}, t) \equiv \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

ist. Taylor-Entwicklung liefert ganz analog wie vormals

$$f(\vec{q}_{d\alpha}, \dot{\vec{q}}_{d\alpha}, \vec{p}_{d\alpha}, t) \simeq f(\vec{q}_0, \dot{\vec{q}}_0, \vec{p}_0, t) + \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial \gamma_{j,\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial \gamma_{j,\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial \beta_{j,\alpha}}{\partial \alpha} \right) d\alpha ,$$

wobei die Ableitungen nach α bei $\alpha = 0$ zu nehmen sind und die Ableitungen nach q_j , \dot{q}_j und p_j bei \vec{q}_0 , $\dot{\vec{q}}_0$ und \vec{p}_0 . Einsetzen in Gl. (3.24) liefert mit Hilfe von

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} , \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} = p_j , \quad \frac{\partial f}{\partial p_j} = \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

das Resultat (wir lassen den Index "0" im folgenden weg, es ist klar, dass sich alle Größen auf die vorgegebene Phasenraumbahn beziehen)

$$\delta S[\vec{\pi}(t)] = \int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{j=1}^S \left[-\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial \gamma_{j,\alpha}}{\partial \alpha} + p_j \frac{d}{dt} \frac{\partial \gamma_{j,\alpha}}{\partial \alpha} + \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \frac{\partial \beta_{j,\alpha}}{\partial \alpha} \right] d\alpha .$$

Der mittlere Term wird wieder partiell integriert. Mit den Bedingungen (3.23) erhalten wir

$$\delta S[\vec{\pi}(t)] = \int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{j=1}^S \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] , \quad (3.25)$$

wobei wir analog zu Gl. (2.86) die Variation der Phasenraumbahn,

$$\delta q_j \equiv \frac{\partial \gamma_{j,\alpha}}{\partial \alpha} d\alpha , \quad \delta p_j \equiv \frac{\partial \beta_{j,\alpha}}{\partial \alpha} d\alpha , \quad j = 1, \dots, S , \quad (3.26)$$

benutzt haben. Die Phasenraumbahn $\vec{\pi}(t) = (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$, $t_a \leq t \leq t_e$, sei nun diejenige, welche das modifizierte Hamiltonsche Prinzip (3.22) erfüllt, also die Wirkung extremal macht, $\delta S = 0$. Da die Variationen (3.26) unabhängig sind, müssen ihre Koeffizienten in Gl. (3.25) verschwinden, also

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} , \quad j = 1, \dots, S .$$

Dies sind wieder die kanonischen Gleichungen.

3.4 Poisson-Klammern

3.4.1 Definition der Poisson-Klammer

Wir betrachten eine beliebige Funktion des Phasenraumvektors $\vec{\pi} = (\vec{q}, \vec{p})$ und der Zeit, $f(\vec{\pi}, t) = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$. Ihre totale Zeitableitung ist

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} ,$$

die wir mit Hilfe der kanonischen Gleichungen (3.10) in

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.27)$$

umschreiben können.

Definition: Seien $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ skalare Funktionen von \vec{q} , \vec{p} und der Zeit t . Dann ist

$$\{f, g\}_{\vec{q}, \vec{p}} \equiv \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \quad (3.28)$$

die **Poisson-Klammer** von f mit g .

Mit der Poisson-Klammer lautet die totale Zeitableitung (3.27)

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.29)$$

Es wird sich herausstellen, dass der Index \vec{q}, \vec{p} unnötig ist, da der Wert der Poisson-Klammer von der Wahl der kanonischen Variablen unabhängig ist.

Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \dot{q}_j = \{q_j, H\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial q_j}{\partial t} &= \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial q_j}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial q_j}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) + \frac{\partial q_j}{\partial t} \\ &= \sum_{l=1}^S \delta_{jl} \frac{\partial H}{\partial p_l} + \frac{\partial q_j}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial q_j}{\partial t} = \dot{q}_j + \frac{\partial q_j}{\partial t} \\ \implies \frac{\partial q_j}{\partial t} = 0 &\implies \dot{q}_j = \{q_j, H\}_{\vec{q}, \vec{p}}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei wir die Unabhängigkeit der Variablen q_j und p_l , $\partial q_j / \partial p_l = 0$, und die kanonischen Gleichungen (3.10) ausgenutzt haben. Das Resultat bedeutet, dass q_j und t ebenfalls als unabhängige Variablen zu betrachten sind und dass dementsprechend die Zeitableitung von q_j gleich der Poisson-Klammer von q_j mit H ist. Ganz analog zeigt man

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial p_j}{\partial t} = 0, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}_{\vec{q}, \vec{p}}, \quad (3.31)$$

auch p_j und t sind unabhängige Variablen.

3.4.2 Fundamentale Poisson-Klammern

Die nächsten drei Beziehungen bezeichnet man als **fundamentale Poisson-Klammern**:

$$\{q_i, q_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \delta_{ij}. \quad (3.32)$$

Beweis: Die erste Relation folgt sofort aus der Definition (3.28),

$$\{q_i, q_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial q_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial q_j}{\partial q_l} \right) = 0 ,$$

da $\partial q_i / \partial p_l = 0$ und $\partial q_j / \partial p_l = 0$. Analog beweist man die zweite Relation. Die dritte lautet

$$\{q_i, p_j\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_j}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^S \delta_{il} \delta_{jl} = \delta_{ij} , \quad \text{q.e.d. .}$$

Es stellt sich die Frage, ob die Poisson-Klammern **unabhängig** von der Wahl der kanonischen Variablen sind. Dazu betrachten wir das Analog der Punkttransformation (2.31) für den Phasenraum, die sog. **Phasentransformation**,

$$\begin{aligned} \vec{q} &\longrightarrow \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t) , \\ \vec{p} &\longrightarrow \vec{P} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die neuen kanonischen Variablen \vec{Q}, \vec{P} können i.a. von den alten Variablen \vec{q}, \vec{p} und der Zeit abhängen. Im folgenden betrachten wir allerdings nur **zeitunabhängige** Phasentransformationen $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p})$, $\vec{P}(\vec{q}, \vec{p})$, bzw. ihre Umkehrung $\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P})$, $\vec{p}(\vec{Q}, \vec{P})$. Dies ist nicht zwingend, vereinfacht jedoch die Beweisführung der folgenden beiden Sätze.

Satz: Seien (\vec{q}, \vec{p}) und (\vec{Q}, \vec{P}) zwei kanonische Variablensätze, die miteinander über eine zeitunabhängige Phasentransformation (3.33) in Beziehung stehen. Für beide gelten jeweils die kanonischen Gleichungen mit der Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ bzw. $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$. Hierbei berechnet sich $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ durch Einsetzen von $\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P})$ und $\vec{p}(\vec{Q}, \vec{P})$ in $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$, also

$$H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}), t) = \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) , \quad \text{bzw.} \quad \tilde{H}(\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}), \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}), t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t) .$$

Dann gilt

$$\{Q_i, Q_j\}_{\vec{Q}, \vec{P}} = 0 , \quad \{P_i, P_j\}_{\vec{Q}, \vec{P}} = 0 , \quad \{Q_i, P_j\}_{\vec{Q}, \vec{P}} = \delta_{ij} . \quad (3.34)$$

Dies bedeutet, dass die **fundamentalen Poisson-Klammern** nicht von der Wahl der kanonischen Variablen abhängen.

Beweis: Da die Q_i nicht explizit von der Zeit abhängen sollen, gilt

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \{Q_i, H\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^S \left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^S \left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^S \left(-\dot{P}_l \{Q_i, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \dot{Q}_l \{Q_i, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} \right) , \end{aligned}$$

wobei wir von der ersten auf die zweite Zeile die Kettenregel für die Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t) \equiv \tilde{H}(\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}), \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}), t)$ benutzt haben und im letzten Schritt die kanonischen Gleichungen für Q_l, P_l und die Definition der Poisson-Klammern benutzt haben. Damit die rechte und die linke Seite übereinstimmen, muss gelten

$$\{Q_i, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad \{Q_i, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \delta_{il}.$$

Berechnet man ganz analog \dot{P}_i , so findet man auch, dass

$$\{P_i, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = 0, \quad \text{q.e.d. .}$$

Der nächste Satz besagt, dass auch der Wert einer **beliebigen** Poisson-Klammer von der Wahl der kanonischen Variablen unabhängig ist.

Satz: Seien (\vec{q}, \vec{p}) und (\vec{Q}, \vec{P}) zwei Sätze kanonischer Variablen, die über eine zeitunabhängige Phasentransformation (3.33) miteinander in Beziehung stehen. Seien $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $G(\vec{q}, \vec{p}, t)$ zwei beliebige skalare Funktionen der kanonischen Variablen und der Zeit und $\tilde{F}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$, $\tilde{G}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ die Funktionen, die durch Einsetzen von $\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P})$, $\vec{p}(\vec{Q}, \vec{P})$ aus F und G resultieren,

$$\begin{aligned} F(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}), t) &= \tilde{F}(\vec{Q}, \vec{P}, t), & G(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}), t) &= \tilde{G}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \\ \text{bzw. } \tilde{F}(\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}), \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}), t) &= F(\vec{q}, \vec{p}, t), & \tilde{G}(\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}), \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}), t) &= G(\vec{q}, \vec{p}, t). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\{F, G\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{\vec{Q}, \vec{P}}.$$

Beweis: Der erste Teil des Beweises folgt denselben Rechenschritten wie der Beweis des letzten Satzes,

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\vec{q}, \vec{p}} &= \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^S \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_k} \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^S \left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_l} \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_l} \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_l} \{F, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_l} \{F, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} \right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Für die spezielle Wahl $F = Q_k$ ergibt sich mit den fundamentalen Poisson-Klammern (3.34) daraus das Resultat

$$\{Q_k, G\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \sum_{l=1}^S \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_l} \delta_{kl} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_k}.$$

Da die Poisson-Klammern per Definition, Gl. (3.28), antisymmetrisch unter Vertauschung ihrer Argumente sind, $\{F, G\}_{\vec{q}, \vec{p}} = -\{G, F\}_{\vec{q}, \vec{p}}$, gilt auch

$$\{G, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = -\frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_l},$$

wobei wir Q_k durch Q_l ersetzt haben. Da die Funktionen F und G durch nichts ausgezeichnet sind, muss auch gelten

$$\{F, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_l}. \quad (3.36)$$

Analog erhalten wir, wenn wir in Gl. (3.35) die spezielle Wahl $F = P_k$ treffen und die fundamentale Poisson-Klammer $\{P_k, Q_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = -\delta_{kl}$, vgl. Gl. (3.34), benutzen

$$\{P_k, G\}_{\vec{q}, \vec{p}} = -\frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_k},$$

bzw. mit den gleichen Argumenten wie oben

$$\{F, P_l\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_l}. \quad (3.37)$$

Setzen wir die Glgen. (3.36) und (3.37) in Gl. (3.35) ein, so erhalten wir

$$\{F, G\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \sum_{l=1}^s \left(-\frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q_l} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_l} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial P_l} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_l} \right) \equiv \{\tilde{F}, \tilde{G}\}_{\vec{Q}, \vec{P}}, \quad \text{q.e.d.}$$

Dieser Satz berechtigt uns, im folgenden die Indizes an den Poisson-Klammern wegzulassen.

20.6.2017

3.4.3 Formale Eigenschaften

In diesem Abschnitt führen wir einige formale Eigenschaften der Poisson-Klammer (3.28) auf.

- (i) **Antisymmetrie:** f, g seien Funktionen der kanonischen Variablen und der Zeit. Dann gilt

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition (3.28). Als Korollar folgt daraus

$$\{f, f\} = 0 \quad \forall f. \quad (3.38)$$

Dies folgt auch direkt aus der Definition (3.28).

- (ii) **Linearität:** c_1, c_2 seien zwei Konstanten und f_1, f_2 und g Funktionen der kanonischen Variablen und der Zeit. Dann gilt

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition (3.28).

- (iii) **Nullelement.** Sei $c = \text{const.}$ und f eine Funktion der kanonischen Variablen und der Zeit. Dann gilt

$$\{c, f\} = 0 \quad \forall f .$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition (3.28).

- (iv) **Produktregel.** Seien f, g und h Funktionen der kanonischen Variablen und der Zeit. Dann gilt

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h .$$

Beweis: Mit der Definition (3.28) und der Produktregel berechnen wir

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial(gh)}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial(gh)}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^S \left(g \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} h - g \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} h \right) \\ &= g \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} \right) + \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) h , \quad \text{q.e.d.} . \end{aligned}$$

- (v) **Jacobi-Identität.** Seien f, g und h Funktionen der kanonischen Variablen und der Zeit. Dann gilt

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 .$$

Beweis: Durch Ausrechnen.

$$\begin{aligned} &\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} \\ &= \sum_{j,k=1}^S \left[\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) \right] \\ &+ \sum_{j,k=1}^S \left[\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^S \left[\frac{\partial f}{\partial q_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_k} - \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial q_k} \right) \right. \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial p_k} - \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_k} \right) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial q_k} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_j} - \frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial q_j} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\partial g}{\partial p_k} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial p_j} - \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j,k=1}^S \left[\frac{\partial f}{\partial q_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial g}{\partial q_k} \left(\frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial q_j} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_k} \left(\frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j} \right) \right] \quad (*) \\
 &= \sum_{j,k=1}^S \left[\frac{\partial f}{\partial q_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial g}{\partial q_j} \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_k} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_j} \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k} \right) \right] \quad (**) \\
 &= \sum_{k=1}^S \left[-\frac{\partial h}{\partial q_k} \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial h}{\partial p_k} \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \right] \\
 &= - \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \{f, g\} - \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \{f, g\} \right) \equiv - \{h, \{f, g\}\} ,
 \end{aligned}$$

wobei sich die farbig gekennzeichneten Terme gegenseitig wegheben und wir von der mit (*) gekennzeichneten Zeile zur mit (**) gekennzeichneten die Summationsindizes j, k vertauscht haben, q.e.d.

3.4.4 Integrale der Bewegung

Sei $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ eine Funktion der kanonischen Variablen und der Zeit. F ist **genau dann** ein Integral der Bewegung, **falls**

$$\frac{dF}{dt} = 0 .$$

Aus Gl. (3.29) folgern wir, dass F **genau dann** ein Integral der Bewegung ist, **falls**

$$\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \{H, F\} . \quad (3.39)$$

Obwohl die totale Zeitableitung von F verschwindet, muss die partielle nicht verschwinden, sie muss nur gleich der Poisson-Klammer von H mit F sein.

Falls $F = H$, so liefert Gl. (3.29) mit Gl. (3.38)

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} .$$

Diesen Sachverhalt haben wir schon in Gl. (3.12) abgeleitet. Falls die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, $\partial H/\partial t = 0$, so ist H ein Integral der Bewegung.

Poissonscher Satz: $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $G(\vec{q}, \vec{p}, t)$ seien Integrale der Bewegung. Dann ist auch $\{F, G\}$ ein Integral der Bewegung.

Beweis: Die Jacobi-Identität für F, G und H lautet nach Umordnen der Terme und Ausnutzen der Antisymmetrie der Poisson-Klammer

$$\{H, \{F, G\}\} = \{F, \{H, G\}\} - \{G, \{H, F\}\} .$$

Für Integrale der Bewegung gilt Gl. (3.39), also

$$\{H, \{F, G\}\} = \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \{F, G\} ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Produktregel benutzt haben. Dies ist aber gerade Gl. (3.39) für $\{F, G\}$. Damit ist auch $\{F, G\}$ Integral der Bewegung, q.e.d.

Der Poissonsche Satz erlaubt, aus der Kenntnis von zwei Integralen der Bewegung eine ganze Reihe weiterer zu konstruieren: $\{F, \{F, G\}\}$, $\{G, \{F, G\}\}$, $\{F, \{F, \{F, G\}\}\}$, etc. Diese sind aber nicht immer nicht-triviale Größen (sonst hätte jedes System mit mindestens zwei Integralen der Bewegung automatisch unendlich viele).

3.4.5 Der Bezug zur Quantenmechanik

In der Quantenmechanik werden physikalische **Observable** durch **Operatoren** repräsentiert, im folgenden durch “ $\hat{}$ ” über dem entsprechenden Symbol gekennzeichnet. Z.B. gilt für Ort und Impuls:

$$q_j \rightarrow \hat{q}_j , \quad p_j \rightarrow \hat{p}_j .$$

Die Poisson-Klammer zweier physikalischer Größen A, B wird durch den sog. **Kommutator** der diesen Größen zugeordneten Operatoren ersetzt,

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \equiv \frac{1}{i\hbar} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) ,$$

wobei wir die Größe $\hbar \equiv h/(2\pi)$ schon früher kennengelernt hatten. Die fundamentalen Poisson-Klammern (3.32) nehmen die Form

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 , \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 , \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} ,$$

an. Generell gilt, dass physikalische Größen genau dann **gleichzeitig scharf meßbar** sind, wenn der **Kommutator der ihnen zugeordneten Operatoren verschwindet**. Angewendet auf die letzte Gleichung bedeutet dies, dass eine Ortskoordinate und der ihr zugehörige Impuls, z.B. x und p_x , **nicht** gleichzeitig scharf meßbar sind. Dies ist die Kernaussage der **Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation**.

Die Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ wird, wie wir schon früher erwähnt hatten, durch den sog. **Hamilton-Operator** $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t)$ ersetzt. Die Gl. (3.29) nimmt dann für einen Operator \hat{A} die Form

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

an. Dies ist die sog. **Heisenbergsche Bewegungsgleichung** für den Operator \hat{A} .

3.5 Kanonische Transformationen

3.5.1 Definition

Wie wir in Abschnitt 3.2.2 gesehen hatten, ist es zur Lösung eines mechanischen Problems im Rahmen des Hamilton-Formalismus zweckmäßig, die Wahl der kanonischen Variablen so zu treffen, dass es möglichst viele zyklische Variablen bzw. dazugehörige Integrale der Bewegung gibt. Es stellt sich daher die Frage, wie man von einem Satz kanonischer Variablen \vec{q}, \vec{p} zu einem anderen, möglicherweise in dieser Hinsicht günstigeren Satz \vec{Q}, \vec{P} transformiert. Eine Möglichkeit ist das Analog zur Punkttransformation (2.31) im Konfigurationsraum, die **Phasentransformation** (3.33) im Phasenraum. Während jedoch **alle** Punkttransformationen die Lagrange-Gleichungen von der Form her invariant lassen, gilt dies für die kanonischen Gleichungen nicht für alle Phasentransformationen. Solche, die dies tun, nennt man **kanonische Transformationen**.

Definition: Eine Phasentransformation (3.33) heißt **kanonisch**, falls es eine Funktion $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ gibt, für die die kanonischen Gleichungen

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j}, \quad j = 1, \dots, S,$$

gelten. Falls $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ durch Einsetzen der Phasentransformation (3.33) aus $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ hervorgeht,

$$H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}, t), t) = \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t),$$

so nennt man die Transformation **kanonisch im engeren Sinne**.

Beispiele:

(i) **Vertauschen von Orten und Impulsen.** Die Phasentransformation

$$Q_j = Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t) \equiv Q_j(p_j) = -p_j, \quad P_j = P_j(\vec{q}, \vec{p}, t) \equiv P_j(q_j) = q_j, \quad j = 1, \dots, S, \quad (3.40)$$

ist **kanonisch im engeren Sinne**. Es gelten nämlich mit

$$\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}(\vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}), t)$$

die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{\partial P_j} &= \frac{\partial H(\vec{q}(\vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}), t)}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_j} = \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = \dot{Q}_j, \\ \frac{\partial \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{\partial Q_j} &= \frac{\partial H(\vec{q}(\vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}), t)}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_j} = -\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial p_j} = -\dot{q}_j = -\dot{P}_j. \end{aligned}$$

Offenbar spielt es in der Hamilton-Mechanik keine Rolle, welche Größe wir als Koordinate und welche als Impuls bezeichnen.

- (ii) **Mechanische Eichtransformationen.** Wir hatten gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen invariant bleiben, wenn man eine totale Zeitableitung zur Lagrange-Funktion addiert,

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \longrightarrow \tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt}\Omega(\vec{q}, t).$$

Welchen Effekt hat dies auf die Hamilton-Funktion? Zunächst verändert sich dadurch der generalisierte Impuls,

$$P_j = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{l=1}^S \frac{\partial \Omega}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) = p_j + \frac{\partial \Omega}{\partial q_j}.$$

Wir betrachten also die Phasentransformation

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j + \frac{\partial \Omega(\vec{q}, t)}{\partial q_j}, \quad (3.41)$$

mit der Umkehrung

$$q_j(Q_j) \equiv Q_j, \quad p_j(\vec{q}, P_j, t) \equiv P_j - \frac{\partial \Omega(\vec{q}, t)}{\partial q_j}, \quad (3.42)$$

und berechnen die zu den kanonischen Variablen \vec{Q}, \vec{P} gehörende Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ aus der Legendre-transformierten Lagrange-Funktion \tilde{L} ,

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \sum_{j=1}^S P_j \dot{Q}_j - \tilde{L} = \sum_{j=1}^S \left(p_j + \frac{\partial \Omega}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j - L - \frac{d\Omega}{dt} \\ &= H + \sum_{j=1}^S \frac{\partial \Omega}{\partial q_j} \dot{q}_j - \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial \Omega}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) \\ &= H - \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Hamilton-Funktion \tilde{H} folgt aus H also nicht länger durch bloßes Einsetzen der Phasentransformation (3.41). Es kann sich also nicht um eine kanonische Transformation im engeren Sinne handeln. Wir müssen aber noch überprüfen, ob es sich überhaupt um eine kanonische Transformation handelt. Dazu leiten wir die kanonischen Gleichungen ab. Mit Hilfe der Kettenregel berechnen wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{\partial Q_j} \right|_{\{Q_i, i \neq j\}, \vec{P}, t} &= \left. \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}(\vec{q}, \vec{P}, t), t)}{\partial q_j} \right|_{\{q_i, i \neq j\}, \vec{P}, t} \\ &+ \sum_{l=1}^S \left. \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}(\vec{q}, \vec{P}, t), t)}{\partial p_l} \right|_{\vec{q}, \{p_i, i \neq l\}, t} \left. \frac{\partial p_l(\vec{q}, P_l, t)}{\partial q_j} \right|_{\{q_i, i \neq j\}, P_l, t} \\ &- \left. \frac{\partial^2 \Omega(\vec{q}, t)}{\partial q_j \partial t} \right|_{\{q_i, i \neq j\}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Bei festem P_l ist gemäß Gl. (3.42)

$$\frac{\partial p_l(\vec{q}, P_l, t)}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 \Omega(\vec{q}, t)}{\partial q_j \partial q_l}$$

und mit Hilfe der kanonischen Gleichungen wird aus Gl. (3.44)

$$\frac{\partial \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{\partial Q_j} = -\dot{p}_j - \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 \Omega(\vec{q}, t)}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial^2 \Omega(\vec{q}, t)}{\partial q_j \partial t} = -\dot{p}_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega(\vec{q}, t)}{\partial q_j} \equiv -\dot{P}_j,$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition von P_j gemäß Gl. (3.41) benutzt haben. Damit sind die kanonischen Gleichungen für die Impulse P_j abgeleitet.

Für die kanonischen Gleichungen für die Koordinaten Q_j berechnen wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)}{\partial P_j} \right|_{\vec{Q}, \{P_i, i \neq j\}, t} &= \sum_{l=1}^S \left. \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}(\vec{q}, \vec{P}, t), t)}{\partial p_l} \right|_{\vec{q}, \{p_i, i \neq l\}, t} \left. \frac{\partial p_l(\vec{q}, P_l, t)}{\partial P_j} \right|_{\vec{q}, \{P_i, i \neq j\}, t} \\ &= \sum_{l=1}^S \dot{q}_l \delta_{lj} = \dot{q}_j \equiv \dot{Q}_j, \end{aligned}$$

womit auch die übrigen kanonischen Gleichungen abgeleitet sind. Die Transformation (3.41) ist also eine kanonische Transformation.

Der Name “mechanische Eichtransformation” rührt daher, dass in einem elektromagnetischen Feld der generalisierte Impuls die Form (3.19) annimmt und das skalare sowie das Vektorpotential nur bis auf eine sog. “Eichtransformation”

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &\longrightarrow \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &\longrightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

bestimmt sind. (Der zusätzliche Term taucht nämlich in den elektromagnetischen Feldern (3.15) nicht auf.) Wenn wir $\mathbf{q} \Lambda(\vec{r}, t) \equiv \Omega(\vec{r}, t)$ setzen, ändert sich bei einer solchen Eichtransformation des Vektorfeldes der generalisierte Impuls gerade wie bei der mechanischen Eichtransformation (3.41),

$$p_j = m \dot{x}_j + \mathbf{q} A_j(\vec{r}, t) \longrightarrow P_j = p_j + \mathbf{q} \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial x_j} \equiv p_j + \frac{\partial \Omega(\vec{r}, t)}{\partial x_j}.$$

23.6.2017

3.5.2 Die erzeugende Funktion

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, dass eine kanonische Transformation die Existenz einer Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ für die neuen kanonischen Variablen \vec{Q}, \vec{P} voraussetzt, mit der die kanonischen Gleichungen die Standardform annehmen. Aber wie findet man diese Hamilton-Funktion?

Die Idee ist, dass das **modifizierte Hamiltonsche Prinzip** (3.22) auch für die **neuen kanonischen Variablen** \vec{Q}, \vec{P} mit der **neuen Hamilton-Funktion** $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ gelten muss,

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\sum_{j=1}^S P_j \dot{Q}_j - \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) \right].$$

Damit auch diese Variation verschwindet, kann der Integrand sich nicht allzu sehr von dem in Gl. (3.22) unterscheiden. Diese Idee führt auf den folgenden

Satz: Eine Phasentransformation (3.33) ist **kanonisch**, falls

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^S P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} + \frac{dF_1}{dt}. \quad (3.45)$$

Dabei ist die sog. **Erzeugende** der Phasentransformation (3.33)

$$F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) \quad (3.46)$$

eine hinreichend oft differenzierbare Funktion der alten und neuen Koordinaten und der Zeit.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Funktion F_1 die Phasentransformation (3.33) und die Form von \tilde{H} **eindeutig festlegt**, was den Begriff ‘‘Erzeugende’’ rechtfertigt. Einerseits ist das totale Differential von F_1 durch ihre funktionale Abhängigkeit festgelegt,

$$dF_1 = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt.$$

Andererseits gilt, wenn man Gl. (3.45) etwas umstellt,

$$dF_1 = \sum_{j=1}^S (p_j dq_j - P_j dQ_j) + (\tilde{H} - H) dt. \quad (3.47)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$p_j(\vec{q}, \vec{Q}, t) = \frac{\partial F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S, \quad (3.48)$$

$$P_j(\vec{q}, \vec{Q}, t) = -\frac{\partial F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial Q_j}, \quad j = 1, \dots, S, \quad (3.49)$$

$$\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t) + \frac{\partial F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial t}. \quad (3.50)$$

Diese Gleichungen legen die Phasentransformation bereits vollständig fest. Für vorgegebene \vec{q}, \vec{p} und F_1 liefert die Umkehrung der ersten Gleichung nämlich die Funktionen $Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $j = 1, \dots, S$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir die Funktionen $P_j(\vec{q}, \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t), t) \equiv P_j(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $j = 1, \dots, S$. Die Phasentransformation

(3.33) ist also bei Kenntnis von F_1 festgelegt. Die Hamilton-Funktion \tilde{H} ist dann schließlich durch Einsetzen der Umkehrung der Phasentransformation in die dritte Gleichung eindeutig bestimmt,

$$\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}, t), t) + \frac{\partial F_1(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \vec{Q}, t)}{\partial t}.$$

Wir zeigen nun, dass die von F_1 erzeugte Phasentransformation auch **kanonisch** ist, d.h. sich aus dem modifizierten Hamiltonschen Prinzip (3.22) auch die kanonischen Gleichungen für die **neuen** Variablen \vec{Q}, \vec{P} ableiten lassen. Es gilt mit Gl. (3.45)

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \right] = \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\sum_{j=1}^S P_j \dot{Q}_j - \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{dF_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{dt} \right] \\ &= \int_{t_a}^{t_e} dt \left[\sum_{j=1}^S P_j \dot{Q}_j - \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) \right] + F_1(\vec{q}_e, \vec{Q}(t_e), t_e) - F_1(\vec{q}_a, \vec{Q}(t_a), t_a). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Hierbei müssen wir einen subtilen Punkt beachten. Zwar sind Anfangs- und Endkoordinaten für die q_j für alle variierten Phasenraumbahnen identisch, $\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a$, $\vec{q}(t_e) = \vec{q}_e$, aber dies gilt nicht mehr für die neuen Anfangs- und Endkoordinaten, da diese auch von den Impulsen abhängen, die beim Anfangs- und Endzeitpunkt mitvariiert werden. Die Größen

$$\vec{Q}(t_a) \equiv \vec{Q}(\vec{q}_a, \vec{p}(t_a), t_a), \quad \vec{Q}(t_e) \equiv \vec{Q}(\vec{q}_e, \vec{p}(t_e), t_e),$$

ändern sich also bei der Variation. Die Variation von Gl. (3.51) lautet demnach

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta F_1(\vec{q}_e, \vec{Q}(t_e), t_e) - \delta F_1(\vec{q}_a, \vec{Q}(t_a), t_a) \\ &\quad + \int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{j=1}^S \left(\delta P_j \dot{Q}_j + P_j \delta \dot{Q}_j - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} \delta Q_j - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} \delta P_j \right). \end{aligned}$$

Wir benutzen

$$\delta F_1(\vec{q}_e, \vec{Q}(t_e), t_e) - \delta F_1(\vec{q}_a, \vec{Q}(t_a), t_a) = \sum_{j=1}^S \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \delta Q_j \Big|_{t_a}^{t_e},$$

integrieren partiell,

$$\int_{t_a}^{t_e} dt P_j \delta \dot{Q}_j \equiv \int_{t_a}^{t_e} dt P_j \frac{d}{dt} \delta Q_j = P_j \delta Q_j \Big|_{t_a}^{t_e} - \int_{t_a}^{t_e} dt \dot{P}_j \delta Q_j,$$

und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \sum_{j=1}^S \left(P_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) \delta Q_j \Big|_{t_a}^{t_e} \\ &\quad + \int_{t_a}^{t_e} dt \sum_{j=1}^S \left[\left(\dot{Q}_j - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} \right) \delta P_j - \left(\dot{P}_j + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} \right) \delta Q_j \right]. \end{aligned}$$

Obwohl die Variation δQ_j bei t_a und t_e nicht verschwindet, ist der erste Term aufgrund von Gl. (3.49) null. Weil die Variationen $\delta Q_j, \delta P_j$ der neuen Variablen unabhängig sind, folgt, dass ihre Koeffizienten verschwinden müssen. Dies liefert aber gerade wieder die kanonischen Gleichungen, q.e.d.

Beispiele:

- (i) **Vertauschen von Orten und Impulsen.** Dieses Beispiel hatten wir schon im vorangegangenen Abschnitt diskutiert. Die Erzeugende, die diese kanonische Transformation bewirkt, lautet

$$F_1(\vec{q}, \vec{Q}) = - \sum_{j=1}^S q_j Q_j$$

Gemäß den Glgen. (3.48), (3.49) berechnen wir nämlich

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = -Q_j, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = q_j.$$

Dies sind aber gerade die Transformationsformeln (3.40). Da F_1 nicht explizit zeitabhängig ist, folgt gemäß Gl. (3.50) die neue Hamilton-Funktion einfach durch Einsetzen der Transformationsformeln,

$$\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}, t), t) \equiv H(\vec{q}(\vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}), t).$$

- (ii) **Harmonischer Oszillator.** Dieses Beispiel zeigt, dass man durch eine geeignet gewählte kanonische Transformation die Integration der Bewegungsgleichungen stark vereinfachen kann. Die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators ist durch Gl. (3.13) gegeben. Wir wählen nun die Erzeugende

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot Q.$$

Daraus ergibt sich mit den Glgen. (3.48), (3.49),

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}.$$

Wir lösen diese Gleichungen nach q und p als Funktion von Q und P auf,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2Pm\omega_0} \cos Q. \quad (3.52)$$

Wegen der Zeitunabhängigkeit von F_1 folgt die neue Hamilton-Funktion einfach durch Einsetzen dieser Formeln in die alte,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(Q, P) &= H(q(Q, P), p(Q, P)) = \frac{p^2(Q, P)}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2(Q, P) \\ &= P \omega_0 \cos^2 Q + P \omega_0 \sin^2 Q \equiv P \omega_0 \equiv \tilde{H}(P). \end{aligned}$$

Ganz offensichtlich ist die neue Koordinate Q eine **zyklische Variable**, d.h.

$$P(t) = P_0 = \text{const.}$$

Die kanonische Gleichung für Q lautet

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega_0 = \text{const.}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist denkbar einfach,

$$Q(t) = \omega_0 t + Q_0, \quad Q_0 = \text{const.}$$

Wir setzen diese Lösung in die Transformationsformeln (3.52) ein und erhalten

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q_0), \quad p(t) = \sqrt{2m\omega_0 P_0} \cos(\omega_0 t + Q_0).$$

Dies ist die wohlbekannte Lösung für den harmonischen Oszillator. Die Anfangsbedingungen $q(0)$, $\dot{q}(0)$ legen die Konstanten Q_0 und P_0 eindeutig fest.

3.5.3 Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion

Es ist nicht unbedingt zwingend erforderlich, dass die Erzeugende F_1 der kanonischen Transformation von den alten und neuen Koordinaten abhängt. Denkbar sind auch die Erzeugenden

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t), \quad F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t), \quad F_4(\vec{p}, \vec{P}, t).$$

Wichtig ist, dass die Erzeugenden jeweils eine alte Koordinate oder einen alten Impuls mit einer neuen Koordinate oder einem neuen Impuls verknüpfen. Welche Erzeugende man wählt, hängt von der jeweiligen Problemstellung ab. Die Erzeugenden hängen über entsprechende **Legendre-Transformationen** miteinander zusammen.

- (i) $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$: Wir ersetzen die Abhängigkeit von F_1 von \vec{Q} per Legendre-Transformation durch eine Abhängigkeit von \vec{P} ,

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} Q_j \equiv F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) + \sum_{j=1}^S P_j Q_j,$$

wobei wir Gl. (3.49) benutzt haben. Mit Gl. (3.47) berechnen wir das totale Differential von F_2 ,

$$\begin{aligned} dF_2 &= dF_1 + \sum_{j=1}^S (P_j dQ_j + Q_j dP_j) \\ &= \sum_{j=1}^S (p_j dq_j - P_j dQ_j) + (\tilde{H} - H) dt + \sum_{j=1}^S (P_j dQ_j + Q_j dP_j) \\ &= \sum_{j=1}^S (p_j dq_j + Q_j dP_j) + (\tilde{H} - H) dt. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Daraus folgt

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (3.54)$$

Invertieren und Auflösen liefert wieder die Transformationsformeln $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $\vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t)$.

Um zu zeigen, dass auch F_2 eine kanonische Transformation liefert, formt man zunächst Gl. (3.45) mit Hilfe von Gl. (3.53) um,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H &= \sum_{j=1}^S P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} + \frac{dF_1}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^S P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} + \frac{dF_2}{dt} - \sum_{j=1}^S (P_j \dot{Q}_j + Q_j \dot{P}_j) \\ &= - \sum_{j=1}^S Q_j \dot{P}_j - \tilde{H} + \frac{dF_2}{dt}. \end{aligned}$$

Man kann ganz analog zum Beweis für F_1 zeigen, dass diese Gleichung, eingesetzt in das modifizierte Hamiltonsche Prinzip, wieder auf die kanonischen Gleichungen führt. Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe.

(ii) $F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t)$: Die Legendre-Transformation lautet nun

$$F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t) = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j \equiv F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) - \sum_{j=1}^S p_j q_j.$$

Das totale Differential ist

$$dF_3 = - \sum_{j=1}^S (q_j dp_j + P_j dQ_j) + (\tilde{H} - H) dt,$$

und führt auf die Gleichungen

$$q_j = - \frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad P_j = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

Auch F_3 vermittelt eine kanonische Transformation, wie man sich durch Nachrechnen analog zu obigem überzeugt.

(iii) $F_4(\vec{p}, \vec{P}, t)$: Die Legendre-Transformation lautet nun

$$F_4(\vec{p}, \vec{P}, t) = F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial F_2}{\partial q_j} q_j \equiv F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) - \sum_{j=1}^S p_j q_j.$$

Das totale Differential ist

$$dF_4 = - \sum_{j=1}^S (q_j dp_j - Q_j dP_j) + (\tilde{H} - H) dt,$$

und führt auf die Gleichungen

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

Auch F_4 vermittelt eine kanonische Transformation, Beweis wie oben.

Beispiel: Mechanische Eichtransformationen. Diese Phasentransformationen hatten wir schon in Abschnitt 3.5.1 kennengelernt und uns davon überzeugt, dass es sich um kanonische Transformationen handelt. Sie werden durch die Erzeugende

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = \sum_{j=1}^S q_j P_j - \Omega(\vec{q}, t)$$

vermittelt. Mittels Gl. (3.54) rechnen wir nämlich nach, dass

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j - \frac{\partial \Omega}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Dies sind genau die Glgen. (3.42), (3.43).

4 Hamilton-Jacobi-Theorie

4.1 Motivation

Wie wir im vorangegangenen Abschnitt 3.5 gesehen hatten, erlauben kanonische Transformationen, von einem Satz kanonischer Variablen zu einem anderen überzugehen. Es stellt sich nun die Frage, wie man eine kanonische Transformation findet, mit der die Lösung eines mechanischen Problems besonders einfach wird.

Wir sind hierauf schon am Ende von Abschnitt 3.2.2 eingegangen. Dort hatten wir gesehen, dass, wenn die Hamilton-Funktion zeitunabhängig ist,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 ,$$

und wenn man einen Satz kanonischer Variablen gefunden hat, bei dem **alle** generalisierten Koordinaten **zyklisch** sind, so dass H lediglich eine Funktion der generalisierten Impulse ist,

$$H = H(\vec{p}) ,$$

dass dann die Lösung der kanonischen Gleichungen besonders einfach wird,

$$p_j = C_j = \text{const.} , \quad q_j = \xi_j t + D_j , \quad \xi_j , D_j = \text{const.} , \quad j = 1, \dots, S .$$

Wir werden nun diese Idee zugrundelegend den allgemeineren Fall behandeln, bei dem auch eine explizite Zeitabhängigkeit der Hamilton-Funktion zugelassen ist.

Wir suchen konkret nach derjenigen kanonischen Transformation, für die

$$P_j = \alpha_j = \text{const.} , \quad Q_j = \beta_j = \text{const.} , \quad j = 1, \dots, S . \quad (4.1)$$

Wenn sowohl generalisierte Impulse wie Koordinaten einfach Konstanten sind, so sind sie bereits durch die Anfangsbedingungen festgelegt, $P_j(0) = \alpha_j$, $Q_j(0) = \beta_j$. Dann folgt die Lösung des mechanischen Problems durch Invertieren der Phasentransformation (3.33),

$$q_j = q_j(\vec{Q}, \vec{P}, t) \equiv q_j(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, t) , \quad p_j = p_j(\vec{Q}, \vec{P}, t) \equiv p_j(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, t) , \quad j = 1, \dots, S . \quad (4.2)$$

Da die Konstanten $\vec{\beta}$ und $\vec{\alpha}$ auch die Anfangsbedingungen für die ursprünglichen kanonischen Variablen festlegen, $q_j(0) \equiv q_{j,0} = q_j(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, 0)$, $p_j(0) \equiv p_{j,0} = p_j(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, 0)$, kann man durch Invertieren dieses Zusammenhangs Gl. (4.2) auch so interpretieren, dass die kanonischen Variablen durch ihre Anfangsbedingungen und die durch die Phasentransformation (3.33) vorgegebene Zeitabhängigkeit bestimmt sind,

$$q_j = q_j(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t) , \quad p_j = p_j(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t) , \quad j = 1, \dots, S .$$

Die Frage ist, wie man diese spezielle kanonische Transformation findet.

4.2 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir bemerken zunächst, dass **eine spezielle** kanonische Transformation, welche auf Gl. (4.1) führt, automatisch diejenige ist, die auch die Hamilton-Funktion zum Verschwinden bringt,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (4.3)$$

Die kanonischen Gleichungen und ihre Lösung lauten dann nämlich

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} = 0 &\implies Q_j = \beta_j = \text{const.}, \quad j = 1, \dots, S, \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} = 0 &\implies P_j = \alpha_j = \text{const.}, \quad j = 1, \dots, S. \end{aligned}$$

Es ist für das folgende nicht zwingend, aber praktisch, die erzeugende Funktion vom Typ $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ zu wählen. Dann gilt gemäß Gl. (3.54)

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}.$$

Eingesetzt in Gl. (4.3) ergibt sich die sog. **Hamilton-Jacobi-Gleichung**,

$$H\left(q_1, \dots, q_S, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_S}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (4.4)$$

Bemerkungen:

1. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist eine **nichtlineare, partielle Differentialgleichung erster Ordnung** für die Erzeugende F_2 in den $S + 1$ Variablen q_1, \dots, q_S, t . Sie ist nichtlinear, weil H i.a. eine quadratische Funktion der generalisierten Impulse $p_j = \partial F_2 / \partial q_j$ ist. Sie ist erster Ordnung, weil nur erste partielle Ableitungen $\partial F_2 / \partial q_j, \partial F_2 / \partial t$ der Erzeugenden $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ auftreten.
2. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung enthält $S + 1$ erste Ableitungen von F_2 . Die Lösung hängt also von $S + 1$ Integrationskonstanten C_1, \dots, C_{S+1} ab,

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t | C_1, \dots, C_{S+1}).$$

Da aber in Gl. (4.4) nur erste Ableitungen von F_2 auftreten, ist F_2 lediglich bis auf eine Konstante C bestimmt. Mit F_2 ist also auch $F_2 + C$ eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Da es aber nicht mehr als $S + 1$ Integrationskonstanten geben kann, muss eine der $S + 1$ Integrationskonstanten additiv sein, z.B. die $(S + 1)$ te,

$$F_2(\vec{q}, \vec{P}, t | C_1, \dots, C_S) + C_{S+1}.$$

Da H lediglich von den Ableitungen von F_2 abhängt, können wir o.B.d.A. $C_{S+1} = 0$ setzen.

3. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung macht über die (konstanten) Impulse $P_j = \alpha_j$ keine Aussage. Es steht uns also frei, die Impulse mit den Integrationskonstanten C_1, \dots, C_S gleichzusetzen, $P_j = \alpha_j \equiv C_j$. Die sog. **vollständige Lösung** der Hamilton-Jacobi-Gleichung hat dann die Form

$$F_2(q_1, \dots, q_S, t | \alpha_1, \dots, \alpha_S) .$$

Behauptung: Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist

$$F_2 = S , \tag{4.5}$$

also gerade die **Wirkung**.

Beweis: Die totale Zeitableitung von F_2 ist gemäß Gl. (3.53)

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(p_j \dot{q}_j + Q_j \dot{P}_j \right) + \tilde{H} - H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H ,$$

wobei wir $P_j = \alpha_j = \text{const.}$ und die Tatsache, dass F_2 die neue Hamilton-Funktion zum Verschwinden bringt, $\tilde{H} = 0$, ausgenutzt haben. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber gerade die Lagrange-Funktion L ,

$$\frac{dF_2}{dt} = L \implies F_2 = \int dt L + \text{const.} \equiv S + \text{const.}$$

Da eine additive Konstante in der Hamilton-Jacobi-Gleichung keine Rolle spielt, können wir sie o.B.d.A. gleich null setzen, d.h.

$$F_2 = S , \quad \text{q.e.d. .}$$

Diese Erkenntnis dient lediglich der physikalischen Interpretation der Erzeugenden F_2 . Sie hilft natürlich nicht, F_2 konkret zu bestimmen. Um das Wirkungsfunktional $S \equiv F_2$ zu berechnen, muss man nämlich die Lösung $\vec{q}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichungen kennen. Dann ist aber das Problem bereits gelöst.

4.3 Lösungsmethode

Das **allgemeine Lösungsverfahren** eines mechanischen Problems mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Theorie stellt sich wie folgt dar:

1. Herleitung der Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$.
2. Ersetzen der Impulse p_j durch die partiellen Ableitungen $\partial F_2 / \partial q_j$ und Aufstellen der Hamilton-Jacobi-Gleichung (4.4).
3. Lösen der Hamilton-Jacobi-Gleichung,

$$F_2 = S(q_1, \dots, q_S, t | \alpha_1, \dots, \alpha_S) \equiv S(\vec{q}, t | \vec{\alpha}) .$$

4. Berechnen der neuen generalisierten Koordinaten,

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \equiv Q_j(\vec{q}, t | \vec{\alpha}) \equiv \beta_j, \quad j = 1, \dots, S,$$

und Auflösen nach den alten generalisierten Koordinaten,

$$q_j = q_j(t | \vec{\alpha}, \vec{\beta}), \quad j = 1, \dots, S.$$

5. Berechnen der alten generalisierten Impulse,

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial S}{\partial q_j} \equiv p_j(\vec{q}, t | \vec{\alpha}), \quad j = 1, \dots, S,$$

und Einsetzen der Koordinaten q_j ,

$$p_j(\vec{q}(t | \vec{\alpha}, \vec{\beta}), t | \vec{\alpha}) \equiv p_j(t | \vec{\alpha}, \vec{\beta}), \quad j = 1, \dots, S.$$

6. Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = t_0$, $q_{j,0} = q_j(t_0 | \vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $p_{j,0} = p_j(t_0 | \vec{\alpha}, \vec{\beta})$, liefern

$$\alpha_j = \alpha_j(t_0 | \vec{q}_0, \vec{p}_0), \quad \beta_j = \beta_j(t_0 | \vec{q}_0, \vec{p}_0), \quad j = 1, \dots, S.$$

7. Einsetzen der $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ in $q_j(t | \vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $p_j(t | \vec{\alpha}, \vec{\beta})$ löst das Problem vollständig.

Wir diskutieren dieses allgemeine Lösungsverfahren nun am **Beispiel des harmonischen Oszillators**:

1. Die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators ist durch Gl. (3.13) gegeben.

2. Mit $p = \partial F_2 / \partial q \equiv \partial S / \partial q$ lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung (4.4)

$$H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

3. Wir machen den folgenden **Lösungsansatz**,

$$S(q, t | P) = W(q | P) + V(t | P), \quad (4.6)$$

mit dem die Hamilton-Jacobi-Gleichung in der Form

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 = -\frac{dV}{dt}$$

geschrieben werden kann. Gleichung (4.6) ist ein sog. **Separationsansatz**, denn die q -Abhängigkeit von S steht ausschließlich auf der linken Seite dieser Gleichung,

während die t -Abhängigkeit nur auf der rechten Seite auftaucht. Für beliebige q, t können die beiden Seiten nur dann gleich sein, wenn sie konstant sind,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 &= \alpha, \\ \frac{dV}{dt} &= -\alpha, \quad \alpha = \text{const.} . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dies sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $W(q|P)$ und $V(t|P)$. Die Lösung der zweiten Gleichung ist besonders einfach,

$$V(t|P) = -\alpha t + V_0, \quad V_0 = \text{const.} ,$$

wobei die Konstante V_0 irrelevant ist und o.B.d.A. gleich null gesetzt werden kann, da additive Konstanten in $F_2 = S = W + V$ keine Rolle spielen. Wir können die Konstante α nach obiger Diskussion mit dem neuen generalisierten Impuls identifizieren,

$$P \equiv \alpha .$$

Da V die Dimension einer Wirkung hat, hat α die Dimension einer Energie. Die Differentialgleichung (4.7) können wir wie folgt schreiben,

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{2m \left(\alpha - \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 \right)} = m \omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}, \quad (4.8)$$

so dass nach Separation der Variablen und Integration (z.B. mit Hilfe von Gl. (1.1.3.3.157) in Ref. [13]) folgt

$$\begin{aligned} S(q, t|\alpha) &= m \omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} - \alpha t \\ &= m \omega_0 \left[\frac{q}{2} \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} + \frac{\alpha}{m\omega_0^2} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2\alpha}} \right) \right] + W_0 - \alpha t, \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante $W_0 = \text{const.}$ wieder o.B.d.A. gleich null gesetzt werden kann.

4. Die neue generalisierte Koordinate lautet (vgl. Gl. (1.1.3.3.164) in Ref. [13])

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{\omega_0} \int dq \frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}} - t \\ &= \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2\alpha}} \right) - t \equiv \beta = \text{const.} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Diese Gleichung muss nun nach q aufgelöst werden,

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2}} \sin [\omega_0(t + \beta)] \equiv q(t|\alpha, \beta) . \quad (4.10)$$

Die neue generalisierte Koordinate $Q \equiv \beta$ hat offensichtlich die Dimension einer Zeit.

5. Der alte generalisierte Impuls ist mit Gl. (4.8) und der Lösung (4.10) für q

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dW}{dq} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} = \sqrt{2\alpha m} \cos[\omega_0(t + \beta)] \equiv p(t|\alpha, \beta). \quad (4.11)$$

6. Wir wählen zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ die Anfangsbedingungen $q_0 = q(0) \neq 0$, $p_0 = p(0) = 0$. Dann ist nach Gl. (4.11)

$$0 = \frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q_0^2 \iff \alpha = \frac{m}{2} \omega_0^2 q_0^2 = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 q_0^2 \equiv E,$$

d.h. der neue generalisierte Impuls $P \equiv \alpha$ ist identisch mit der **Gesamtenergie** des Systems. Energie und Zeit sind also kanonisch konjugierte Variablen. Die zweite Konstante $\beta \equiv Q$ ergibt sich gemäß Gl. (4.9) zu

$$\beta = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2 q_0^2}{2E}}\right) = \frac{1}{\omega_0} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2\omega_0}.$$

7. Mit den Anfangsbedingungen lautet die Lösung nun

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t), \quad p(t) = -\sqrt{2Em} \sin(\omega_0 t),$$

wie zu erwarten war.

4.4 Hamiltonsche charakteristische Funktion

Für den Spezialfall, in dem die Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig ist, $\partial H/\partial t = 0$, d.h. wenn H eine Erhaltungsgröße ist, kann man die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Lösungsmethode für die Hamilton-Jacobi-Gleichung weiter konkretisieren. Diese Gleichung nimmt dann die Form

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (4.12)$$

an. Die Zeitabhängigkeit kann nun, ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt am Beispiel des harmonischen Oszillators gezeigt, jetzt allerdings ganz allgemein, mit dem folgenden Ansatz separiert werden:

$$S(\vec{q}, t|\vec{P}) = W(\vec{q}|\vec{P}) - E(\vec{P})t, \quad (4.13)$$

was auf

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E(\vec{P}) \quad (4.14)$$

führt. Die Bezeichnung suggeriert, dass die Konstante E mit der **Gesamtenergie** des Systems zu identifizieren ist. Dies ist zumindest in den Fällen, in denen die Hamilton-Funktion mit der Gesamtenergie identisch ist, sofort ersichtlich. Die Funktion $W(\vec{q}|\vec{P})$ heißt **Hamiltonsche charakteristische Funktion** und wird durch die partielle Differentialgleichung (4.14) festgelegt.

Anstelle von $S \equiv F_2$ kann man auch die Hamiltonsche charakteristische Funktion **selbst** als Erzeugende einer nicht explizit zeitabhängigen kanonischen Transformation vom Typ F_2 ansehen. Zur besseren Unterscheidung vom vorher diskutierten nennen wir die neuen Variablen \tilde{Q}_j, \tilde{P}_j . Es ist also $F_2 = W(\vec{q}, \vec{P})$ und gemäß Gl. (3.54)

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}, \quad \tilde{Q}_j = \frac{\partial W}{\partial \tilde{P}_j}, \quad j = 1 \dots, S. \quad (4.15)$$

Da W nicht explizit zeitabhängig ist, handelt es sich um eine kanonische Transformation **im engeren Sinne**, d.h. die neue Hamilton-Funktion \tilde{H} folgt direkt aus der alten, H , durch Einsetzen,

$$\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}) \equiv H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P})). \quad (4.16)$$

Wir fordern nun, dass die durch W vermittelte kanonische Transformation alle neuen generalisierten Koordinaten \tilde{Q}_j **zyklisch macht**, d.h. dass die neue Hamilton-Funktion lediglich von den neuen generalisierten Impulsen abhängt, $\tilde{H} = \tilde{H}(\vec{P})$, und dass diese konstant sind,

$$\tilde{P}_j = \alpha_j = \text{const.}, \quad j = 1, \dots, S.$$

Dies bedeutet aber mit den Glgen. (4.15) und (4.16), dass

$$H(\vec{q}, \vec{p}) \equiv H\left(q_1, \dots, q_S, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_S}\right) = \tilde{H}(\vec{P}) \equiv E(\vec{P}) = \text{const.} \quad (4.17)$$

Man wird also wieder auf die Hamilton-Jacobi-Gleichung (4.14) geführt, obwohl die durch W vermittelte kanonische Transformation nun nicht mehr wie S alle Koordinaten und Impulse konstant macht, sondern lediglich alle Koordinaten zyklisch und damit nur die Impulse konstant macht.

Die kanonischen Gleichungen für die neuen generalisierten Koordinaten lauten

$$\dot{\tilde{Q}}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_j} \equiv \xi_j = \text{const.} \quad \implies \quad \tilde{Q}_j(t) = \xi_j t + \beta_j, \quad \beta_j = \text{const.}, \quad j = 1 \dots, S.$$

In der Tat sind die neuen generalisierten Koordinaten nun nicht mehr, wie noch bei der durch S vermittelten Transformation, konstant, sondern besitzen eine (wenngleich ausgesprochen einfache) Zeitabhängigkeit.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass man W so wählen kann, dass **einer** der neuen, konstanten, generalisierten Impulse **identisch** mit der (ebenfalls konstanten) neuen Hamilton-Funktion \tilde{H} sein soll, z.B.

$$\tilde{H}(\vec{P}) \equiv \tilde{P}_1.$$

Dann gilt aufgrund der Unabhängigkeit der neuen generalisierten Impulse

$$\dot{\tilde{Q}}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_j} = \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \tilde{P}_j} = \delta_{1j}, \quad j = 1, \dots, S,$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1(t) &= t + \beta_1, \quad \beta_1 = \text{const.}, \\ \tilde{Q}_j &= \beta_j, \quad \beta_j = \text{const.}, \quad j = 2, \dots, S.\end{aligned}$$

Diese durch W vermittelte kanonische Transformation hat also für $j \geq 2$ die gleiche Wirkung wie die durch S vermittelte, nämlich die generalisierten Koordinaten konstant zu machen.

5 Lagrange-Mechanik für Felder

30.6.2017

Die bisher betrachteten Systeme wiesen alle eine abzählbar endliche Zahl $N < \infty$ von Freiheitsgraden auf. Es ist jedoch in einigen Anwendungen der Mechanik zweckmäßig, zu einer überabzählbar unendlichen Zahl, d.h. zu einem **Kontinuum** von Freiheitsgraden überzugehen. Beispiele hierfür sind die schwingende Saite oder die schwingende Membran.

In der **Quantenfeldtheorie** werden wir den Lagrange-Formalismus auf **Felder** anwenden, d.h. auf Funktionen $\varphi(t, \vec{r})$, die von Zeit t und Ort \vec{r} abhängen. In diesem Fall repräsentiert der Wert $\varphi(t, \vec{r})$ des Feldes zum Zeitpunkt t am Ort \vec{r} **einen** Freiheitsgrad des Systems. Da die Raum-Zeit ein Kontinuum von Zeiten und Orten darstellt, handelt es sich bei einer Feldtheorie um ein System mit überabzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden.

5.1 Der Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen System

Wir betrachten zunächst ein einfaches eindimensionales Beispiel. Gegeben sei eine in x -Richtung ausgedehnte Kette aus N Teilchen der Masse m , die durch Federn mit Federkonstante k miteinander verbunden sind und **longitudinale Schwingungen**, d.h. Schwingungen in Richtung der Ausdehnung der Kette ausführen, vgl. Abb. 5.1.

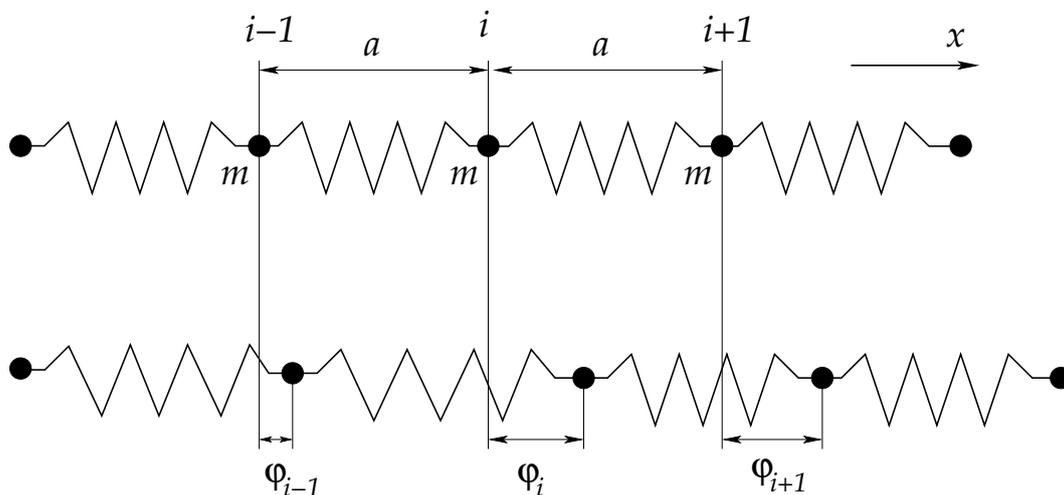


Abbildung 5.1: Die longitudinal schwingende Kette.

In der Ruhelage haben die Massen den Abstand a . Beim Schwingen wird die i -te Masse um eine Distanz φ_i aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. Die kinetische Energie des Systems

beträgt offensichtlich

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i^2 . \quad (5.1)$$

Die potentielle Energie ist

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 . \quad (5.2)$$

Wir überzeugen uns davon, dass dieser Ausdruck korrekt ist, indem wir die auf die j -te Masse wirkende Kraft berechnen,

$$F_j = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_j} = -k(\varphi_j - \varphi_{j-1}) + k(\varphi_{j+1} - \varphi_j) , \quad j = 2, \dots, N-1 . \quad (5.3)$$

Der erste Term auf der rechten Seite entspricht gerade dem Hookeschen Gesetz für die Feder auf der linken Seite der j -ten Masse. Wird diese Feder elongiert, also $\varphi_j - \varphi_{j-1} > 0$, so zieht sie die j -te Masse in $(-x)$ -Richtung zurück. Wird sie dagegen komprimiert, $\varphi_j - \varphi_{j-1} < 0$, so drückt sie die Masse in $(+x)$ -Richtung. Daher muss dieser Term mit einem negativen Vorzeichen auftreten. Der zweite Term auf der rechten Seite entspricht dem Hookeschen Gesetz für die Feder auf der rechten Seite der j -ten Masse. Hier argumentiert man ganz analog, aber da eine Elongation dieser Feder die Masse in $(+x)$ -Richtung zieht und eine Kompression sie in $(-x)$ -Richtung drückt, ist das Vorzeichen des zweiten Terms gerade das umgekehrte des ersten. Für $j = 1$ bzw. $j = N$ erhalten wir die Kraft, indem wir den ersten bzw. den letzten Term in Gl. (5.3) weglassen.

Mit den Glgen. (5.1) und (5.2) lautet die Lagrange-Funktion des Systems

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} [m \dot{\varphi}_i^2 - k (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a \left[\frac{m}{a} \dot{\varphi}_i^2 - ka \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a \left[\mu \dot{\varphi}_i^2 - \kappa \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a} \right)^2 \right] \equiv \sum_{i=1}^{N-1} a \mathcal{L}_i , \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei wir die **Masse pro Längeneinheit** $\mu \equiv m/a$, das **Elastizitätsmodul** $\kappa \equiv ka$ und die **Lagrange-Funktion pro Längeneinheit** \mathcal{L}_i eingeführt haben. Desweiteren haben wir die kinetische Energie des N -ten Massenpunktes vernachlässigt. Falls $N \gg 1$, ist dies eine gerechtfertigte Näherung, da die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes die Bewegung des gesamten Systems nicht wesentlich beeinflussen kann.

Die Auslenkungen φ_i der Massen repräsentieren die **Freiheitsgrade** des Systems. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für diese Freiheitsgrade lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \\ \iff 0 &= \mu \ddot{\varphi}_i - \kappa \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a^2} - \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{a^2} \right) \\ &= \mu \ddot{\varphi}_i - \kappa \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{a^2} . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wir betrachten nun den Limes, in dem $N \rightarrow \infty$ und $a \rightarrow 0$ gehen. Die Kette von eindimensionalen harmonischen Oszillatoren geht dann über in einen kontinuierlichen **elastischen Stab**. Wenn alle (unendlich vielen) Oszillatoren in der Ruhelage sind, nehme die Stablänge den Wert ℓ an. Dieser Wert kann sich ändern, wenn die Oszillatoren Schwingungen ausführen; der Stab kann in x -Richtung elongiert oder komprimiert werden. Der Positionsindex i nimmt **kontinuierliche Werte** an; wir können ihn durch die x -Koordinate ersetzen,

$$\varphi_i(t) \longrightarrow \varphi(t, x).$$

Der Abstand a zwischen den Massen wird durch das infinitesimale Differential dx ersetzt, so dass

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)}{a} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, x + dx) - \varphi(t, x)}{dx} \equiv \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}, \\ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i-1}(t)}{a^2} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, x + dx) - 2\varphi(t, x) + \varphi(t, x - dx)}{dx^2} \\ &\equiv \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass aufgrund der Abhängigkeit der Auslenkung $\varphi(t, x)$ von Zeit **und** Ort nun partielle Ableitungen auftreten. Daher ist die Differentiation von φ_i nach der Zeit ebenfalls durch eine partielle Ableitung zu ersetzen,

$$\dot{\varphi}_i \longrightarrow \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}, \quad \ddot{\varphi}_i \longrightarrow \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2}.$$

Die Lagrange-Funktion (5.4) geht über in

$$L = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} a \mathcal{L}_i \equiv \int_0^\ell dx \mathcal{L}, \quad (5.6)$$

wobei ℓ die Gesamtlänge des Stabes ist (wie oben erwähnt, ist diese nicht konstant, da die Federschwingungen zur Elongation bzw. Kompression des Systems führen) und

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \quad (5.7)$$

die sog. **Lagrangedichte**. Die Bewegungsgleichung (5.5) nimmt die Form

$$0 = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (5.8)$$

an.

5.2 Lagrange-Formalismus für kontinuierliche Systeme

Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts lassen sich ohne weiteres auf ein dreidimensionales System verallgemeinern. Gleichung (5.6) lautet dann

$$L = \int_V dx dy dz \mathcal{L} \equiv \int_V d^3\vec{r} \mathcal{L}, \quad (5.9)$$

wobei V das Volumen des betrachteten Systems ist. Anhand von Gl. (5.7) sehen wir, dass die **Lagrangedichte** \mathcal{L} nicht nur eine Funktion von $\partial\varphi/\partial t$ ist, sondern auch von den räumlichen Ableitungen $\partial\varphi/\partial x$. In drei Dimensionen treten dann i.a. auch partielle Ableitungen nach y und z auf. Desweiteren kann die Lagrange-Dichte auch vom Feld φ selbst und (explizit) von Zeit und Ort abhängen. I.a. treten also folgende funktionale Abhängigkeiten auf:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \vec{\nabla}\varphi, t, \vec{r} \right), \quad (5.10)$$

wobei wir die partiellen Ableitungen von φ nach den Ortskoordinaten durch den Gradienten ausgedrückt haben, $\vec{\nabla}\varphi \equiv (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z)$.

Man beachte, dass im Vergleich zur Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ in der **Lagrangedichte** das Feld φ die Rolle der generalisierten Koordinaten q_i übernimmt, seine Ableitungen $\partial\varphi/\partial t, \vec{\nabla}\varphi$ die der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i , und dass die explizite Abhängigkeit von der Zeit t um eine von Zeit t **und** Ort \vec{r} erweitert wird. Die Ortsvariable hat nicht länger die Bedeutung der Koordinate eines Teilchens, sondern sie ist lediglich ein **kontinuierlicher** Index, ähnlich wie der Index i bei den generalisierten Koordinaten q_i . In der Lagrange-Funktion waren q_i, \dot{q}_i unabhängige **Freiheitsgrade** des Systems. In der **Lagrangedichte** sind die Freiheitsgrade des Systems das Feld φ und seine Ableitungen $\partial\varphi/\partial t, \vec{\nabla}\varphi$. Da diese Funktionen an **jedem** Punkt (t, \vec{r}) der Raum-Zeit unterschiedliche und (prinzipiell) voneinander unabhängige Werte annehmen können, stellt dies ein System mit **unendlich vielen** Freiheitsgraden dar.

Für kontinuierliche Systeme spielt die **Lagrangedichte** dieselbe Rolle wie die Lagrange-Funktion für diskrete Systeme. Daher muss es prinzipiell möglich sein, die Bewegungsgleichung (z.B. Gl. (5.8) für das Beispiel im vorangegangenen Abschnitt) für das Feld $\varphi(t, \vec{r})$ aus der **Lagrangedichte** selbst abzuleiten. Dies werden wir im folgenden erläutern.

Zunächst sollten die Bewegungsgleichungen prinzipiell aus dem **Hamiltonschen Prinzip** folgen, welches mit Gl. (5.10) lautet

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} dt d^3\vec{r} \mathcal{L} = 0. \quad (5.11)$$

Die Integration läuft über ein **Raum-Zeit-Volumen** $\Omega \equiv [t_a, t_e] \times V$. Die Variation δ auf der rechten Seite dieser Gleichung bezieht sich auf die Freiheitsgrade $\varphi, \partial\varphi/\partial t, \vec{\nabla}\varphi$ des Systems, **nicht aber** auf die Zeit- und Ortskoordinaten t, \vec{r} in der **Lagrangedichte** (5.10). Auch das Raum-Zeit-Volumen Ω wird **nicht** mitvariiert. Es mag zwar, wie beim elastischen Stab aus dem vorangegangenen Abschnitt, eine Funktion der Zeit sein, aber **Variationen entsprechen virtuellen Verrückungen**, die bei konstant gehaltener Zeit, $\delta t = 0$, (und nun zusätzlich bei konstanten Ortsvariablen, $\delta\vec{r} = 0$,) ausgeführt werden. Ganz ähnlich wie die Konfigurationsbahnen, die am Anfangs- und Endzeitpunkt nicht variiert werden, wird auch das Feld $\varphi(t, \vec{r})$ auf der **Oberfläche** $\partial\Omega$ des Raum-Zeit-Volumens Ω **nicht** variiert,

$$\delta\varphi(t, \vec{r})|_{t, \vec{r} \in \partial\Omega} = 0. \quad (5.12)$$

Diese Einschränkung gilt aber nicht für die partiellen Ableitungen des Feldes, ganz ähnlich wie auch die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i bei t_a und t_e nicht festgehalten werden

dürfen, oder auch wie die generalisierten Impulse p_i im modifizierten Hamiltonschen Prinzip bei t_a und t_e mitvariiert werden müssen, vgl. Diskussion nach Abb. 3.2.

Aufgrund dieser Vorbemerkungen können wir die Variation in Gl. (5.11) unter das Raum-Zeit-Integral schreiben und auf die Lagrangedichte anwenden. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir dann

$$0 = \int_{\Omega} dt d^3\vec{r} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.13)$$

Bei festgehaltenem t, \vec{r} darf man Variation und partielle Ableitung vertauschen, vgl. Gl. (2.76),

$$\delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \equiv \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t}, \quad \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_i}.$$

Dann können wir einige Terme in Gl. (5.13) partiell integrieren, z.B.

$$\int_{t_a}^{t_e} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} \delta \varphi \Big|_{t_a}^{t_e} - \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} \delta \varphi.$$

Der erste Term verschwindet aber aufgrund der Bedingung (5.12), da das Feld auf der Oberfläche $\partial\Omega$ des Raum-Zeit-Volumens nicht variiert wird und die Zeitpunkte $t = t_a$ und $t = t_e$ zu $\partial\Omega$ gehören. Ganz ähnlich verfährt man mit den Termen, die die räumlichen Ableitungen des Feldes enthalten. Auch diese verschwinden, da das Feld auch auf dem räumlichen Teil der Oberfläche $\partial\Omega$ nicht variiert wird. Letztlich erhalten wir

$$0 = \int_{\Omega} dt d^3\vec{r} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)} \right] \delta \varphi.$$

Da die Variation $\delta\varphi(t, \vec{r})$ des Feldes an jedem Raum-Zeit-Punkt (t, \vec{r}) unabhängig ist, muss der Term in eckigen Klammern verschwinden,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}. \quad (5.14)$$

Dies ist die **Euler-Lagrange-Gleichung** für kontinuierliche Systeme, d.h. für das Feld φ , welches die (unendlich vielen) Freiheitsgrade eines solchen kontinuierlichen Systems darstellt.

Wir überzeugen uns davon, dass Gl. (5.14) die richtige Bewegungsgleichung für das Feld φ darstellt, indem wir sie auf das Beispiel der elastischen Stabes aus dem vorangegangenen Abschnitt anwenden, also die Bewegungsgleichung (5.14) mit der Lagrangedichte (5.7) berechnen und zeigen, dass wir daraus die Bewegungsgleichung (5.8) erhalten.

Die Lagrangedichte (5.7) enthält nur Ableitungen des Feldes, also ist $\partial\mathcal{L}/\partial\varphi \equiv 0$. Die Ableitung von \mathcal{L} nach der partiellen Ableitung des Feldes nach der Zeit ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

und die Ableitung nach der partiellen Ableitung des Feldes nach der Raumkoordinate x ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Da es sich um ein eindimensionales Problem handelt, treten keine Abhängigkeiten oder Ableitungen nach y oder z auf. Eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung (5.14) erhalten wir

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \equiv \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

was mit der vormals abgeleiteten Bewegungsgleichung (5.8) übereinstimmt.

Falls wir ein System betrachten, in dem nicht nur ein einziges, sondern **mehrere** Felder auftreten, so tragen diese einen weiteren Index,

$$\varphi_a(t, \vec{r}), \quad a = 1, 2, \dots$$

Dann erfüllt **jedes** dieser Felder eine Euler-Lagrange-Gleichung vom Typ (5.14),

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial t}\right)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}, \quad a = 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

6 Spezielle Relativitätstheorie

4.7.2017

6.1 Die Einsteinschen Postulate

6.1.1 Ätherhypothese

In der klassischen Mechanik haben Zeit und Raum **absoluten** Charakter:

1. Der **absolute Raum** ist unbeweglich und unveränderlich. Er setzt Bewegungen materieller Körper keinen Widerstand entgegen. In ihm gelten die Grundgesetze der Mechanik. Man bezeichnet ihn auch als **Weltäther**.
2. Die **absolute Zeit** beschreibt den Verlauf der Zeit im absoluten Raum.

Aus der Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden” wissen wir, dass die Grundgesetze der Mechanik nicht nur im absoluten Raum, sondern auch in allen gegenüber dem absoluten Raum **geradlinig gleichförmig** bewegten Systemen, den sog. **Inertialsystemen**, gelten. Sei Σ ein Inertialsystem, bezüglich dessen sich ein System Σ' geradlinig gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_z$, $v = \text{const.}$, bewege, vgl. Abb. 6.1.

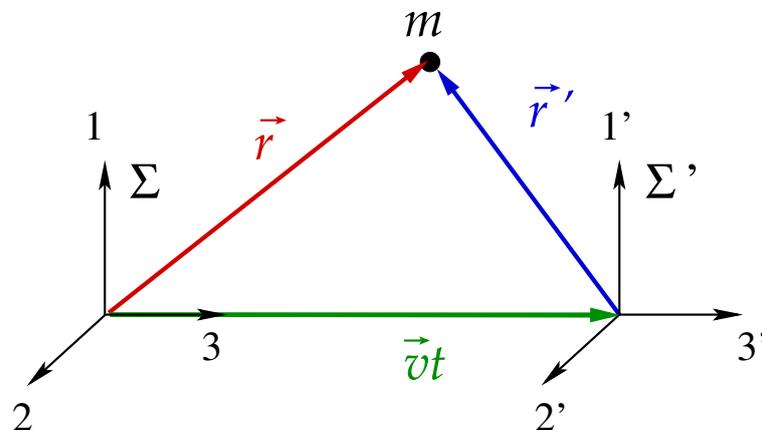


Abbildung 6.1: Zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme.

Der Koordinatenursprung von Σ' möge mit dem von Σ zum Zeitpunkt $t = 0$ übereinstimmen. Die sog. **Galilei-Transformation**

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t, \end{aligned} \tag{6.1}$$

vermittelt die Transformationen der Zeit und der Ortskoordinaten zwischen den beiden Systemen. Es gilt für die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}' &\equiv \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{v}t) = \dot{\vec{r}} - \vec{v}, \\ \ddot{\vec{r}}' &\equiv \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r} - \vec{v}t) = \ddot{\vec{r}}.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass $t = t'$, also auch $dt = dt'$. Aufgrund von Gl. (6.2) ist die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Massenpunkt m im System Σ' **identisch** mit der in Σ ,

$$\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Also ist Σ' ebenfalls ein Inertialsystem. Dies gilt natürlich nicht mehr, wenn Σ' relativ zu Σ **rotiert**, denn dann treten **Scheinkräfte** auf, s. Vorlesung “Theoretische Physik I: Mathematische Methoden”.

Mit Hilfe von **mechanischen** Versuchen kann man also offenbar nicht entscheiden, ob man sich relativ zum Weltäther bewegt, denn die Gesetze der Mechanik sind in allen Inertialsystemen identisch. Es stellt sich jedoch die Frage, ob es andere Naturkräfte gibt, mit denen eine solche Unterscheidung möglich ist.

6.1.2 Das Michelson-Morley-Experiment

Falls die Ausbreitung von **Licht**, also von **elektromagnetischen Wellen** an den Weltäther geknüpft ist, so könnte ein **optisches Experiment** vielleicht entscheiden, ob man sich **relativ zum Weltäther bewegt**. Dies ist die Motivation für das berühmte **Michelson-Morley-Experiment**, vgl. Abb. 6.2.

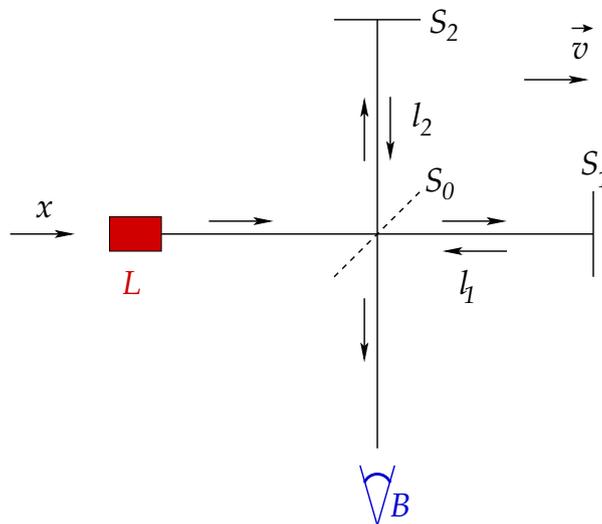


Abbildung 6.2: Michelson-Morley-Experiment.

Der Versuchsaufbau stehe im Inertialsystem Σ' , welches sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ relativ zum System Σ des Weltäthers bewege. Im System Σ' sendet eine Lichtquelle

L monochromatisches Licht der Wellenlänge λ in x -Richtung aus. Dieses fällt auf einen **halbdurchlässigen Spiegel** S_0 , welcher einen Teil des Lichtstrahls zum Spiegel S_2 reflektiert, einen anderen Teil dagegen zum Spiegel S_1 durchläßt. Der von S_2 reflektierte Strahl wiederum wird von S_0 teilweise durchgelassen und gelangt zum Beobachter B . Der von S_1 reflektierte Strahl wird von S_0 teilweise reflektiert und gelangt ebenfalls zum Beobachter.

Der Lichtstrahl, der die Strecke $\overline{S_0 S_1 S_0}$ durchläuft, **interferiert** dabei mit demjenigen, der die Strecke $\overline{S_0 S_2 S_0}$ durchläuft. Es tritt **konstruktive Interferenz** auf, wenn die Weglängendifferenz δ auf den beiden Wegen ein **ganzzahliges Vielfaches** der Wellenlänge des Lichtes beträgt.

$$\delta = m \lambda, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Wir berechnen nun diese Weglängendifferenz unter der Annahme, dass sich das Licht mit **konstanter Geschwindigkeit** c , der **Lichtgeschwindigkeit, relativ zum Weltäther** bewegt und dass die **Galilei-Transformation** (6.1), (6.2) anwendbar ist.

Sei t_{01} die Zeit, die das Licht auf dem Hinweg von Spiegel S_0 zum Spiegel S_1 benötigt und t_{10} die Zeit, die es für den Rückweg braucht. Entsprechend sind die Zeiten t_{02} und t_{20} definiert. Da das Licht sich relativ zum Weltäther stets mit konstanter Geschwindigkeit c bewegt, gilt im System des Äthers für die Weglängendifferenz

$$\delta = c [t_{02} + t_{20} - (t_{01} + t_{10})]. \quad (6.3)$$

Wir setzen nun die Laufzeiten t_{01} und t_{10} mit Strecken im System Σ' des Versuchsaufbaus in Verbindung. Dabei nehmen wir an, dass sich die Zeiten bei der Galilei-Transformation (6.1) nicht ändern, also das Konzept der absoluten Zeit Gültigkeit besitzt. Aufgrund der Galilei-Transformation (6.2) erscheint die Lichtgeschwindigkeit c' im System Σ' um die Geschwindigkeit v des Systems **verringert**, $c' = c - v$, wenn sich das System **in** Richtung des Lichtstrahls bewegt, und um die Geschwindigkeit v **vergrößert**, wenn es sich **gegen** die Richtung des Lichtstrahls bewegt. Für die Laufzeit t_{01} gilt daher

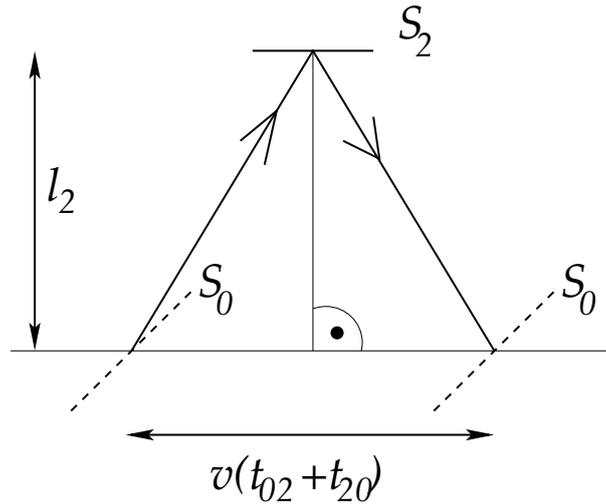
$$t_{01} = \frac{\ell_1}{c'} = \frac{\ell_1}{c - v} = \frac{\ell_1}{c} \frac{1}{1 - v/c} > \frac{\ell_1}{c}, \quad (6.4)$$

da Lichtstrahl und System sich in die gleiche Richtung bewegen. Anschaulich gesprochen hat sich der Spiegel S_1 während der Laufzeit des Lichtes von S_0 ein Stück fortbewegt, und die Laufzeit verlängert sich relativ zur Situation, in der der Versuchsaufbau im System des Äthers ruhen würde. Für die Laufzeit t_{10} gilt entsprechend

$$t_{10} = \frac{\ell_1}{c'} = \frac{\ell_1}{c + v} = \frac{\ell_1}{c} \frac{1}{1 + v/c} < \frac{\ell_1}{c}, \quad (6.5)$$

denn Lichtstrahl und System bewegen sich in entgegengesetzte Richtungen. Anschaulich gesprochen ist der Spiegel S_0 dem Lichtstrahl während der Laufzeit des Lichtes von S_1 ein Stück entgegengekommen, und die Laufzeit verkürzt sich relativ zur Situation, in der der Versuch in Σ ruht.

Wir berechnen nun die Laufzeiten von Spiegel S_0 zu S_2 und zurück, nun allerdings im System Σ . Dabei müssen wir berücksichtigen, dass sich während dieser Laufzeiten der

Abbildung 6.3: Zur Berechnung der Laufzeiten t_{02} und t_{20} .

Versuchsaufbau (das System Σ') in x -Richtung weiterbewegt hat, vgl. Abb. 6.3. Aus Symmetriegründen muss $t_{02} \equiv t_{20}$ sein. Für die während der Laufzeit t_{02} im System Σ zurückgelegte Strecke gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$c t_{02} \equiv c t_{20} = \sqrt{\ell_2^2 + v^2 \left(\frac{t_{02} + t_{20}}{2} \right)^2} \equiv \sqrt{\ell_2^2 + v^2 t_{02}^2}.$$

Aufgelöst nach t_{02} ergibt sich

$$t_{02}^2 = \frac{\ell_2^2}{c^2 - v^2} \iff t_{02} = \frac{\ell_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.6)$$

Wir setzen nun die Glgen. (6.4), (6.5) und (6.6) in Gl. (6.3) ein,

$$\begin{aligned} \delta &= c[2 t_{02} - (t_{01} + t_{10})] \\ &= \frac{2 \ell_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \ell_1 \left(\frac{1}{1 + v/c} + \frac{1}{1 - v/c} \right) \\ &= \frac{2 \ell_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{2 \ell_1}{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

Nun wird die gesamte Versuchsanordnung in Σ' um 90° gedreht, so dass die Strecke ℓ_1 senkrecht zur Bewegungsrichtung und die Strecke ℓ_2 in Bewegungsrichtung zu liegen kommt. Auch jetzt ergibt sich eine Weglängendifferenz δ' zwischen den Laufwegen, allerdings muss man in der obigen Formel die beiden Nenner vertauschen,

$$\delta' = \frac{2 \ell_2}{1 - v^2/c^2} - \frac{2 \ell_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Falls der Beobachter im ersten Fall aufgrund der Weglängendifferenz konstruktive Interferenz beobachtet hat, $\delta = m \lambda$, so tut er dies nun nicht mehr, da sich die Weglängendifferenz verändert hat. Der Unterschied $\delta' - \delta$ beträgt unter der Annahme, dass $v \ll c$:

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= \frac{2\ell_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) - \frac{2\ell_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \\ &= \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \\ &\simeq 2(\ell_1 + \ell_2) \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) \simeq (\ell_1 + \ell_2) \frac{v^2}{c^2}, \end{aligned}$$

wobei wir die Wurzeln bis zur ersten Ordnung nach Taylor entwickelt und nur Terme bis zur Ordnung $O(v^2/c^2)$ berücksichtigt haben.

Im ersten Versuch von Michelson (1881) war $\ell_1 + \ell_2 = 2.4$ m. Der Versuch war stationär in einem Labor auf der Erde aufgebaut. Die Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne beträgt $v \simeq 3 \cdot 10^4$ m/s und, vorausgesetzt die Sonne ist stationär im System des Weltäther, so kann man diese Geschwindigkeit auch für die Geschwindigkeit v des Versuchsaufbaus Σ' in Σ ansetzen. Die Lichtgeschwindigkeit ist $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s. Also war

$$\delta' - \delta \simeq 2.4 \left(\frac{3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} \right)^2 \text{ m} = 2.4 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 24 \text{ nm}.$$

Die Wellenlänge des für den Versuch benutzten monochromatischen Lichts betrug $\lambda \simeq 500$ nm, also wurde die konstruktive Interferenz um ca. 5% einer Wellenlänge aus der Phase gebracht. Dies war auch zum damaligen Zeitpunkt ein durchaus meßbarer Effekt. In einem zweiten Versuch (1887) hat Michelson gemeinsam mit Morley $\ell_1 + \ell_2$ durch Vielfachreflexion an mehreren Spiegeln um einen Faktor 10 vergrößert, so dass nun bei Drehung des Versuchsaufbaus die erwartete Phasenverschiebung 50%, d.h. eine halbe Wellenlänge betrug. Dies hätte dann zu **destruktiver** Interferenz führen müssen! Beobachtet wurde jedoch ein Effekt von 1%, also (im Rahmen der Meßgenauigkeit) **nichts!**

Der Michelson-Morley-Versuch widerlegt eindrucksvoll die Hypothese, dass die Lichtausbreitung an den Weltäther gekoppelt ist. Lichtwellen breiten sich offensichtlich in **allen** Inertialsystemen mit der **gleichen** Geschwindigkeit aus. Dann ist die Weglängendifferenz δ ganz einfach im System Σ' zu berechnen,

$$\delta = 2\ell_2 - 2\ell_1,$$

und daran ändert sich auch bei Drehung des Versuchsaufbaus nichts. Diese Erkenntnis führt direkt auf die **Einsteinschen Postulate**, die wir im nächsten Abschnitt besprechen. Es sei noch angemerkt, dass Michelson 1907 den Nobelpreis für Physik für "seine optischen Präzisionsinstrumente und die damit ausgeführten spektroskopischen und metrologischen Experimente" erhielt.

6.1.3 Die Einsteinschen Postulate

Einstein schlug seine berühmt gewordenen Postulate zur Erklärung des experimentellen Befundes von Michelson und Morley vor:

Postulat 1. Alle physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.

Postulat 2. Die Lichtgeschwindigkeit hat im Vakuum in allen Inertialsystemen den konstanten Wert c .

Postulat 1 ist schon in der klassischen Mechanik bekannt. Einstein erweitert dies auf **alle** bekannten physikalischen Theorien, seinerzeit also noch auf den Elektromagnetismus.

Postulat 2 ist das bahnbrechend Neue: es besagt nämlich, dass die Geschwindigkeit des Lichtes **nicht** geringer wird, wenn man sich von der Lichtquelle wegbewegt ($c' = c - v$), oder größer wird, wenn man sich auf die Lichtquelle zubewegt ($c' = c + v$). Stattdessen nimmt sie **immer** den konstanten Wert c an. Damit ist die Galilei-Transformation **nicht** die korrekte Transformation zwischen Inertialsystemen. Wir werden im nächsten Abschnitt die richtige Transformation kennenlernen, die den Wert der Lichtgeschwindigkeit erhält.

6.2 Lorentz-Transformationen

6.2.1 Der Minkowski-Raum

Wir betrachten zwei sich relativ zueinander bewegende Inertialsysteme Σ , Σ' . O.B.d.A. sei Σ das ruhende System und Σ' bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v} . Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ mögen die Ursprünge von Σ und Σ' zusammenfallen. Am Ursprung von Σ befinde sich eine Lichtquelle, die zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ ein Lichtsignal aussendet.

Im ruhenden System Σ breitet sich das Signal in Form einer **Kugelwelle** radial nach außen aus. Die Geschwindigkeit der Wellenfront ist

$$\dot{\vec{r}} = c \vec{e}_r .$$

Die Wellenfront selbst befindet sich also bei

$$\vec{r} = ct \vec{e}_r ,$$

d.h.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \equiv c^2 t^2 .$$

Weil aber die Ursprünge von Σ und Σ' bei $t = t' = 0$ zusammenfallen, wird das Lichtsignal in Σ' auf die gleiche Weise wie in Σ ausgesendet. Das zweite Einsteinsche Postulat bedingt, dass die Wellenfront in Σ' gemessen die Gleichung

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \equiv c^2 t'^2$$

erfüllt, also

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 . \quad (6.7)$$

Wir führen die folgende Notation ein:

$$x^0 = ct , \quad x^1 = x , \quad x^2 = y , \quad x^3 = z . \quad (6.8)$$

Hierbei sind die Ziffern **Indizes** und keine Potenzen. Warum sie oben stehen, wird später klar werden. Gleichung (6.7) nimmt nun folgende kompakte Form an:

$$(x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = (x'^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x'^i)^2 = 0. \quad (6.9)$$

7.7.2017

Um diese Gleichung mathematisch zu interpretieren, machen wir eine Zwischenüberlegung. Wir betrachten einen **Spaltenvektor** X_E im **vierdimensionalen Euklidischen Raum**

$$X_E \equiv (X_E^\mu) = (x_E^0, x_E^1, x_E^2, x_E^3)^T.$$

Den dazu **transponierten** Vektor X_E^T führen wir als **Zeilenvektor** ein,

$$X_E^T \equiv (X_{E\mu}) = (x_{E0}, x_{E1}, x_{E2}, x_{E3}).$$

Hierbei wurden die Komponenten des Spaltenvektors X_E durch **obenstehende** und die des Zeilenvektors X_E^T durch **untenstehende** Indizes gekennzeichnet. Im Euklidischen Raum gilt

$$x_E^\mu \equiv x_{E\mu}, \quad (6.10)$$

d.h. die Stellung der Indizes spielt eigentlich keine Rolle (wir werden aber sogleich sehen, dass dies im Minkowski-Raum, also der Raum-Zeit, in der wir leben, anders sein wird). Wir werden sie aber weiter zur Kennzeichnung von Zeilen und Spalten nutzen, d.h. eine (4×4) -Matrix A im Euklidischen Raum hat die Komponenten a_ν^μ , wobei der obenstehende Index μ die Zeilen und der untenstehende Index ν die Spalten kennzeichnet.

Genau wie Drehungen im dreidimensionalen Euklidischen Raum durch (3×3) -Drehmatrizen bewirkt werden, werden Drehungen von X_E durch (4×4) -**Drehmatrizen** D vermittelt,

$$X'_E = D X_E, \quad x'_E{}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 d_\nu^\mu x_E^\nu.$$

Die Drehmatrix $D \equiv (d_\nu^\mu)$ ist eine Darstellung eines Elements der Gruppe $SO(4)$, der **speziellen orthogonalen Transformationen in vier Dimensionen**, d.h. D ist eine orthogonale Matrix, $D^T = D^{-1}$, mit $\det D = +1$. Die Orthogonalität der Drehmatrix bedingt, dass das **Betragsquadrat** des Vektors X_E unter Drehungen **invariant bleibt**.

Nun schreiben wir das Betragsquadrat des gedrehten Vektors X'_E als Produkt von Zeilenvektor X'^T_E mal Spaltenvektor X'_E ,

$$X'^2_E = X'^T_E X'_E = X^T_E D^T D X_E = X^T_E D^{-1} D X_E = X^T_E X_E = X^2_E.$$

In Komponenten ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} X^2_E &\equiv X^T_E X_E = \sum_{\mu=0}^3 x_{E\mu} x_E^\mu \equiv (x_E^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (x_E^i)^2 \\ &= (x'^0_E)^2 + \sum_{i=1}^3 (x'^i_E)^2 \equiv \sum_{\mu=0}^3 x'_{E\mu} x'^\mu_E \equiv X'^T_E X'_E = X'^2_E, \end{aligned} \quad (6.11)$$

wobei wir Gl. (6.10) benutzt haben. Dies ist nicht ganz identisch mit Gl. (6.9), wo ein zusätzliches Minuszeichen vor der Summe über die Raumkomponenten $i = 1, 2, 3$, auftritt. Bei Gl. (6.9) kann es sich also nicht um die Invarianz eines Vektors unter Drehungen mit orthogonalen Matrizen im vierdimensionalen Euklidischen Raum handeln. Aber um was handelt es sich dann?

Dazu bemerken wir zunächst, dass sich Gl. (6.9) als Invarianz des Betragsquadrates des vierdimensionalen (Spalten-)Vektors

$$X \equiv (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (ct, \vec{r})^T \quad (6.12)$$

auffassen ließe, falls der dazugehörige transponierte (Zeilen-)Vektor die Form

$$X^T \equiv (x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\vec{r}) \quad (6.13)$$

hat, wenn also gilt

$$x_0 = x^0, \quad x_i = -x^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.14)$$

Genau dann gilt nämlich

$$X^2 \equiv X^T X = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + \sum_{i=1}^3 x_i x^i = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2, \quad (6.15)$$

und Gl. (6.9) schreibt sich kompakt als

$$X^2 = X^T X = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x'_\mu x'^\mu = X'^T X' = X'^2 = 0. \quad (6.16)$$

Das Betragsquadrat des Vektors $X = (x^\mu)$ ist also invariant unter einem Wechsel des Bezugssystems $\Sigma \rightarrow \Sigma'$. Aber dieser Wechsel des Bezugssystems ist nicht identisch mit einer orthogonalen Transformation in der vierdimensionalen physikalischen Raum-Zeit, dem sog. **Minkowski-Raum**. Wir werden im nächsten Abschnitt die sog. **Lorentz-Transformationen**, unter denen das Betragsquadrat von X invariant bleibt, näher untersuchen.

Den Spaltenvektor (6.12) bezeichnet man als **kontravarianten 4-Ortsvektor** im sog. **Minkowski-Raum**. Den Zeilenvektor (6.13) bezeichnet man als **kovarianten 4-Ortsvektor**. Man erhält ihn aus dem kontravarianten Vektor durch die Vorschrift (6.14). Diese läßt sich mathematisch wie folgt schreiben,

$$x_\nu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu g_{\mu\nu}, \quad (6.17)$$

wobei $g_{\mu\nu}$ der sog. **metrische Tensor** des **Minkowski-Raumes** ist,

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = g_{i0} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.18)$$

Gleichung (6.17) gilt allgemein für 4-Vektoren im Minkowski-Raum: Multiplikation eines kontravarianten Vektors mit dem metrischen Tensor "zieht" den Vektorindex "herunter"

und macht den Vektor zum kovarianten Vektor. Dabei dreht sich aufgrund des metrischen Tensors (6.18) das Vorzeichen der räumlichen Komponenten um.

Völlig analog zu Gl. (6.17) kann man einen metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ definieren, der Indizes "heraufzieht",

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} x_\nu . \quad (6.19)$$

Mit Hilfe von Gl. (6.14) macht man sich sofort klar, dass auch gilt

$$g^{00} = 1 , \quad g^{0i} = g^{i0} = 0 , \quad g^{ij} = -\delta_{ij} , \quad i, j = 1, 2, 3 , \quad (6.20)$$

d.h. $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Man beachte aber, dass diese Gleichung nur in geradlinigen Koordinaten gilt, für die der metrische Tensor die Form (6.18) annimmt. In krummlinigen Koordinaten gilt dies i.a. nicht mehr.

Der allgemeine Zusammenhang zwischen $g^{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ läßt sich folgendermaßen bestimmen. Aufgrund der Invarianz von X^2 gilt mit den Glgen. (6.17), (6.19)

$$X^2 = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = \sum_{\mu,\nu,\lambda=0}^3 x^\lambda g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu} x_\nu = \sum_{\lambda,\nu=0}^3 x_\nu \left(\sum_{\mu=0}^3 g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu} \right) x^\lambda ,$$

woraus folgt

$$\sum_{\mu=0}^3 g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu} \equiv \delta^\nu_\lambda , \quad (6.21)$$

mit der (4×4) -Einheitsmatrix

$$\mathbb{1} = (\delta^\nu_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (6.22)$$

Gleichung (6.21) bedeutet, dass der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ das **Inverse** des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ ist. Dies gilt in allen Koordinatensystemen, d.h. sowohl für geradlinige als auch krummlinige Koordinaten. Insbesondere gilt dies auch in Situationen, wo die Raum-Zeit aufgrund der Anwesenheit von Massen gekrümmt wird. Deren Beschreibung ist Gegenstand der Allgemeinen Relativitätstheorie und soll hier nicht weiter vertieft werden.

Wir bemerken zum Abschluss, dass man auch einen metrischen Tensor mit gemischt kontra- und kovarianten Indizes definieren kann. Verallgemeinert man die Regel mit dem Heraufziehen der Indizes auf den metrischen Tensor, so gilt nämlich

$$g^{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda=0}^3 g^\mu_\lambda g^{\lambda\nu} . \quad (6.23)$$

Bei dem gemischten metrischen Tensor handelt es sich im Gegensatz zum metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}$ um eine echte Matrix, da er einen oberstehenden Zeilen- und einen untenstehenden Spaltenindex besitzt. Wenn man die Indizes in Gl. (6.23) alle möglichen

Werte annehmen läßt, so erkennt man, dass (in geradlinigen Koordinaten, wo Gl. (6.20) gilt) der gemischte metrische Tensor identisch mit der Einheitsmatrix sein muss,

$$(g^\mu{}_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Das **Skalarprodukt** zweier 4-Vektoren $A = (a^\mu)$, $B = (b^\mu)$ im Minkowski-Raum ist stets definiert als

$$\begin{aligned} A \cdot B &\equiv A^T B = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu \left(\sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} b_\nu \right) \equiv \sum_{\mu,\nu=0}^3 a_\mu g^{\mu\nu} b_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^3 b_\nu \left(\sum_{\mu=0}^3 g^{\nu\mu} a_\mu \right) = \sum_{\nu=0}^3 b_\nu a^\nu = B^T A = B \cdot A, \end{aligned} \quad (6.25)$$

wobei wir die Symmetrie des metrischen Tensors, $g^{\mu\nu} \equiv g^{\nu\mu}$, und die Glgen. (6.17), (6.19) ausgenutzt haben.

Das **Betragsquadrat** eines 4-Vektors $A = (a^\mu)$ im Minkowski-Raum ist definiert als das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst,

$$A^2 \equiv A \cdot A = A^T A = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu a^\mu.$$

Gleichung (6.16) besagt, dass bei der Transformation vom System Σ zum System Σ' das Betragsquadrat des 4-Ortsvektors einer Lichtwellenfront erhalten bleibt. Da der 4-Ortsvektor einer Lichtwelle sich aber nicht von anderen 4-Vektoren unterscheidet, sollte auch das **Betragsquadrat beliebiger 4-Vektoren** $A \equiv (a^\mu)$ bei dieser Transformation erhalten bleiben,

$$A^2 \equiv A \cdot A = A' \cdot A' \equiv A'^2. \quad (6.26)$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage zur Bestimmung der Lorentz-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen Σ, Σ' , die mit den Einsteinschen Postulaten in Einklang ist. Wir werden dies im folgenden Abschnitt diskutieren.

Zum Abschluss wollen wir noch für das Nachfolgende unsere Notation vereinfachen. Wir vereinbaren die sog. **Einsteinsche Summenkonvention**: über doppelt vorkommende kontra- und kovariante Indizes wird implizit immer summiert, z.B.

$$\sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu \equiv a_\mu b^\mu.$$

Das Summenzeichen ist damit überflüssig, es wird stets impliziert.

6.2.2 Die Lorentz-Transformation

Die Transformation zwischen Inertialsystemen, welche die Betragsquadrate von 4-Vektoren in der Raum-Zeit (im Minkowski-Raum) erhält, s. Gl. (6.26), und damit das Analogon zu Drehungen im vierdimensionalen Euklidischen Raum darstellt, ist die sog. **Lorentz-Transformation**,

$$X' = \Lambda X , \quad (6.27)$$

oder in Komponenten geschrieben,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} , \quad \mu = 0, \dots, 3 . \quad (6.28)$$

Man beachte, dass gemäß der Einsteinschen Summenkonvention über ν zu summieren ist. Die Matrix $\Lambda \equiv (\Lambda^{\mu}_{\nu})$ ist eine (4×4) -Matrix, die die Transformation eines kontravarianten 4-Vektors $X \equiv (x^{\nu})$ im System Σ in einen kontravarianten 4-Vektor $X' \equiv (x'^{\mu})$ im System Σ' vermittelt. Durch Transponieren von Gl. (6.27) erhält man die entsprechende Transformation für den kovarianten 4-Vektor $X^T = (x_{\mu})$:

$$X'^T = X^T \Lambda^T , \quad (6.29)$$

oder in Komponenten geschrieben

$$x'_{\lambda} = x_{\rho} (\Lambda^T)^{\rho}_{\lambda} . \quad (6.30)$$

Andererseits können wir den transformierten kovarianten 4-Vektor auch aus Gl. (6.28) durch Herunterziehen des Index μ mit Hilfe des metrischen Tensors bestimmen:

$$x'_{\lambda} = x'^{\mu} g_{\mu\lambda} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} g_{\mu\lambda} = \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} x_{\rho} g_{\mu\lambda} = x_{\rho} g_{\lambda\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} , \quad (6.31)$$

wobei wir die Glgen. (6.17), (6.19) und die Symmetrie des metrischen Tensors, $g_{\mu\lambda} = g_{\lambda\mu}$, benutzt haben. Vergleich der Glgen. (6.30) und (6.31) liefert

$$(\Lambda^T)^{\rho}_{\lambda} = g_{\lambda\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\rho} = \Lambda_{\lambda}^{\rho} , \quad (6.32)$$

wobei wir im letzten Schritt die Regeln für das Herauf- und Herunterziehen der Indizes auf die Matrix Λ^{μ}_{ν} angewendet haben. Das Ergebnis ist intuitiv verständlich, da Transponieren Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht. Man beachte aber, dass das Objekt auf der rechten Seite nicht einfach das $(\lambda\rho)$ -Element der Matrix Λ ist, da die Indizes an der falschen Stelle stehen.

Im folgenden werden wir die Lorentz-Transformationsmatrix Λ explizit bestimmen. Wir machen zunächst jedoch einige

Vorbemerkungen:

- (i) Die Menge der möglichen Lorentz-Transformationen zwischen zwei Bezugssystemen Σ, Σ' mit der Eigenschaft (6.26) bildet vom mathematischen Standpunkt eine **Gruppe**, die sog. **Lorentz-Gruppe** \mathbb{L} . Die (4×4) -Matrix $\Lambda \equiv (\Lambda^{\mu}_{\nu})$ aus Gl. (6.28) ist eine Darstellung eines Elementes dieser Gruppe, $\Lambda \in \mathbb{L}$.

- (ii) Die Lorentz-Gruppe enthält als **Untergruppe** die der **orthogonalen Transformationen in drei Dimensionen**, $O(3)$. Darstellungen dieser Gruppe sind **orthogonale (3×3) -Matrizen** D , $D^T = D^{-1}$, welche **Drehungen in drei Raumdimensionen** vermitteln. Es genügt, orthogonale Matrizen mit $\det D = +1$ zu betrachten. Diese bilden wiederum eine Untergruppe der $O(3)$, die der **speziellen** orthogonalen Matrizen in drei Dimensionen, $SO(3)$. Der Unterschied zwischen $SO(3)$ und $O(3)$ ist eine zusätzliche **diskrete** Transformation, die der Raumspiegelung am Ursprung (oder einer der drei Koordinatenachsen). Aus der Vorlesung "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden" wissen wir, dass eine solche Transformation aus einem rechtshändigen ein linkshändiges Koordinatensystem macht. Da wir uns stets auf rechtshändige Systeme beschränken, genügt es also, für Raumdrehungen spezielle orthogonale Matrizen $D \in SO(3)$ zu betrachten. Es gilt $SO(3) \subset \mathbb{L}$.

Um eine (3×3) -Drehmatrix D als Lorentz-Transformation (6.28) zu schreiben, müssen wir sie passend zu einer (4×4) -Matrix erweitern,

$$\Lambda_D \equiv (\Lambda_{D\nu}^\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & (d^i_j) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

wobei $D \equiv (d^i_j)$ eine orthogonale (3×3) -Untermatrix ist. Die Lorentz-Transformation (6.28) lautet nun explizit in Komponenten geschrieben:

$$x'^0 = ct' = x^0 = ct, \\ x'^i = \sum_{j=1}^3 d^i_j x^j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Wegen

$$x'_\mu x'^\mu = c^2 t'^2 - \vec{r}'^2 = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{r}^2$$

und $t' = t$ gilt auch

$$\vec{r}'^2 = \vec{r}^2.$$

Die Transformation Λ_D erhält also die Zeit und das Betragsquadrat von 3-Vektoren.

Dies sind die Eigenschaften einer Drehung im Raum.

11.7.2017

- (iii) Eine weitere Klasse von Transformationen aus der Lorentz-Gruppe sind die sog. **Boosts**, die Transformationen zwischen relativ zueinander bewegten Bezugssystemen vermitteln. Diese bilden **keine** echte Untergruppe der Lorentz-Gruppe, d.h. eine Abfolge von Boosts kann unter geeigneten Bedingungen eine Drehung ergeben. Es gilt, dass die Darstellung **jedes** Elementes $\Lambda \in \mathbb{L}$ in der Form

$$\Lambda = \Lambda_{D_1} \Lambda_B \Lambda_{D_2} \quad (6.34)$$

geschrieben werden kann, wobei Λ_B eine Boost-Matrix und $\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D_2} \in SO(3)$ beliebige Drehmatrizen sind.

Wir wollen nun die explizite Form der Darstellung Λ_B eines Boosts bestimmen. Wir gestalten die Situation so einfach wie möglich, indem wir annehmen, dass die Koordinatenachsen von Σ und Σ' stets in die gleiche Richtung zeigen, $\vec{e}_i = \vec{e}'_i$, $i = 1, 2, 3$, und dass zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ die Ursprünge von Σ und Σ' übereinstimmen. Ferner bewege sich Σ' relativ zu Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_z$. Dies ist genau die in Abb. 6.1 dargestellte Situation. Man spricht von einem Boost in z -Richtung. Der allgemeine Fall eines Boosts in einer beliebigen Raumrichtung läßt sich dann gemäß Gl. (6.34) durch eine (vor- bzw. nachgeschaltete) Drehung aus diesem speziellen Fall ableiten. Der Einfachheit halber lassen wir im folgenden den Index “ B ” an der Boostmatrix Λ_B weg.

Bestimmung von Λ für einen Boost in z -Richtung:

- (i) Da kein Punkt in der transversalen (x, y) -Ebene ausgezeichnet ist, dürfen x'^0 und x'^3 nicht von x^1 und x^2 abhängen. Umgekehrt dürfen x'^1 und x'^2 nicht von x^0 und x^3 abhängen:

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & 0 & 0 & \Lambda^0_3 \\ 0 & (a^i_j) & 0 & \\ 0 & & & \\ \Lambda^3_0 & 0 & 0 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}.$$

Die (2×2) -Untermatrix $A \equiv (a^i_j)$ muss eine Diagonalmatrix sein, da die (x, y) -Ebene und die (x', y') -Ebene beim Boost nicht gegeneinander verdreht werden,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

- (ii) Aus der Erhaltung der Betragssquadratur unter Lorentz-Transformationen, Gl. (6.26), erhalten wir, indem wir die Lorentz-Transformationen (6.28) und (6.30) einsetzen:

$$x'_\mu x'^\mu = x_\rho (\Lambda^T)^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu x^\nu \equiv x_\rho \delta^\rho_\nu x^\nu = x_\nu x^\nu,$$

also

$$(\Lambda^T)^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu = \delta^\rho_\nu, \quad (6.35)$$

was man in Matrixnotation auch als

$$\Lambda^T \Lambda = \mathbb{1} \quad (6.36)$$

schreiben kann. Wir folgern daraus, dass $\Lambda^T \equiv \Lambda^{-1}$. Für Drehmatrizen ist uns diese Identität wohlbekannt. In der Tat hatten wir ja schon gesehen, dass für die Raumdrehungen, welche eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe darstellen, $SO(3) \subset \mathbb{L}$, die (4×4) -Lorentz-Transformationsmatrizen Λ_D einfach triviale Erweiterungen der herkömmlichen (3×3) -Drehmatrizen sind. Es ist klar, dass es sich bei Λ_D auch um eine orthogonale Matrix handelt.

Dies ist aber bei Boosts aufgrund der Metrik des Minkowski-Raumes anders, d.h. es handelt sich nicht um orthogonale Matrizen, jedenfalls nicht in dem Sinne, dass zwei Zeilen bzw. zwei Spalten orthogonal zueinander sind.

Wir wollen nun Gl. (6.35) benutzen, um die Matrix Λ zu bestimmen. Dazu gehen wir zunächst zu Gl. (6.32) zurück und berechnen die Elemente der Matrix Λ^T mit Hilfe der rechten Seite. Obwohl die metrischen Tensoren $g_{\lambda\nu}$ und $g^{\nu\rho}$ streng genommen keine Matrizen sind, die man von links und rechts an die Matrix Λ^μ_ν multiplizieren darf, funktioniert dies in diesem Fall doch, weil sie lediglich Vorzeichen in Zeilen und Spalten von Λ^μ_ν umdrehen. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
 \Lambda^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & 0 & 0 & \Lambda_3^0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \Lambda_0^3 & 0 & 0 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & 0 & 0 & \Lambda_3^0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ -\Lambda_0^3 & 0 & 0 & -\Lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & 0 & 0 & -\Lambda_3^0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ -\Lambda_0^3 & 0 & 0 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix}. \tag{6.37}
 \end{aligned}$$

Es ist nun offensichtlich, dass es sich bei Λ^T nicht um die gewöhnliche Transponierte von Λ handelt (die man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält). Der Grund ist die nicht-triviale Metrik des Minkowski-Raums. Einsetzen in Gl. (6.36) liefert

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & 0 & 0 & -\Lambda_3^0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ -\Lambda_0^3 & 0 & 0 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & 0 & 0 & \Lambda_3^0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \Lambda_0^3 & 0 & 0 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\Lambda_0^0)^2 - \Lambda_3^0 \Lambda_3^0 & 0 & 0 & \Lambda_3^0 (\Lambda_0^0 - \Lambda_3^0) \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ \Lambda_3^0 (\Lambda_3^0 - \Lambda_0^0) & 0 & 0 & (\Lambda_3^0)^2 - \Lambda_3^0 \Lambda_0^0 \end{pmatrix}. \tag{6.38}
 \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Matrixelemente auf beiden Seiten erhalten wir die folgenden Bedingungen:

- (a) $a^2 = 1$, also $a = \pm 1$. Dies bedeutet, dass die transversalen Koordinaten x, y bei einem Boost in z -Richtung weder gestaucht noch elongiert werden. Wir wählen das positive Vorzeichen, $a = +1$, da $a = -1$ eine Spiegelung (Inversion) der transversalen Koordinatenachsen bedeuten würde. Da zwei Achsen gleichzeitig gespiegelt würden, ändert sich die Händigkeit des Koordinatensystems nicht, aber diese Spiegelung ist nicht notwendig.
- (b) Wir erhalten desweiteren vier Gleichungen für die verbleibenden vier Unbe-

kannten Matricelemente $\Lambda_0^0, \Lambda_3^0, \Lambda_0^3, \Lambda_3^3$:

$$\begin{aligned} 1 &= (\Lambda_0^0)^2 - \Lambda_3^0 \Lambda_0^3, \\ 1 &= (\Lambda_3^3)^2 - \Lambda_3^0 \Lambda_0^3, \\ 0 &= \Lambda_3^0 (\Lambda_0^0 - \Lambda_3^3), \\ 0 &= \Lambda_0^3 (\Lambda_0^0 - \Lambda_3^3). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Es ist klar, dass die letzten beiden Gleichungen jeweils $\Lambda_0^0 = \Lambda_3^3$ bedingen, aber es gibt dennoch keine eindeutige Lösung, da man dann lediglich eine unabhängige Gleichung für drei Unbekannte (Λ_0^0, Λ_3^0 und Λ_0^3) hat.

(iii) Wir machen den **Lösungsansatz**

$$\Lambda_0^0 = \Lambda_3^3 \equiv \cosh \chi, \quad \Lambda_3^0 = \Lambda_0^3 \equiv -\sinh \chi.$$

Dieser Ansatz erfüllt aufgrund der Eigenschaft $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$ der hyperbolischen Funktionen ganz offensichtlich die Gleichungen (6.39). Der freie Parameter χ ist die sog. **Rapidity**. Wir werden bald sehen, wie dieser Parameter physikalisch zu interpretieren ist. Wir fassen aber zunächst das bislang Erhaltene zusammen. Für einen **Boost in z-Richtung**, also für eine Lorentz-Transformation vom System Σ ins System Σ' , wobei sich Σ' relativ zu Σ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_z$ bewegt, lautet die Transformationsmatrix

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & 0 & 0 & -\sinh \chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \chi & 0 & 0 & \cosh \chi \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

(iv) Es ist klar, dass die Rapidity χ mit der Relativgeschwindigkeit v zwischen Σ und Σ' zusammenhängen muss. Es gilt jetzt, diesen Zusammenhang zu ermitteln.

Der Ursprung von Σ' hat von Σ aus gesehen die z -Koordinate

$$x^3 = vt = \frac{v}{c} x^0.$$

Mit der Lorentz-Transformation (6.28) für $\mu = 3$ gilt dann von Σ' aus gesehen für den Ursprung

$$0 = x'^3 = -\sinh \chi x^0 + \cosh \chi x^3 = x^0 \left(-\sinh \chi + \frac{v}{c} \cosh \chi \right),$$

also

$$\tanh \chi = \frac{v}{c} \equiv \beta, \quad (6.41)$$

wobei wir die neue Variable β eingeführt haben. Diese Gleichung stellt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Rapidity χ und der Relativgeschwindigkeit v der beiden Bezugssysteme her. Wegen $1 - \tanh^2 \chi = 1/\cosh^2 \chi$ gilt

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma,$$

wobei wir die neue Variable γ , den sog. **Lorentz-Gamma-Faktor** eingeführt haben. Es gilt außerdem

$$\sinh \chi = \tanh \chi \cosh \chi \equiv \beta \gamma .$$

Da reelle 4-Vektoren X wiederum in reelle 4-Vektoren X' transformiert werden, ist zu fordern, dass die Lorentz-Transformationsmatrix (6.40) reell bleibt. Dies wiederum bedingt, dass $v < c$. Die Lichtgeschwindigkeit stellt also eine **Grenzwgeschwindigkeit** für die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme Σ, Σ' dar. Der Zusammenhang zwischen dem Bereich der erlaubten Geschwindigkeiten und der zugehörigen Rapiditäten bzw. Lorentz-Gamma-Faktoren ist

$$0 \leq v < c \iff 0 \leq \chi < \infty \iff 1 \leq \gamma < \infty .$$

Die Geschwindigkeit v (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c), der Lorentz-Gamma-Faktor γ und $\sinh \chi \equiv \beta \gamma$ sind in Abb. 6.4 als Funktion der Rapidität χ dargestellt.

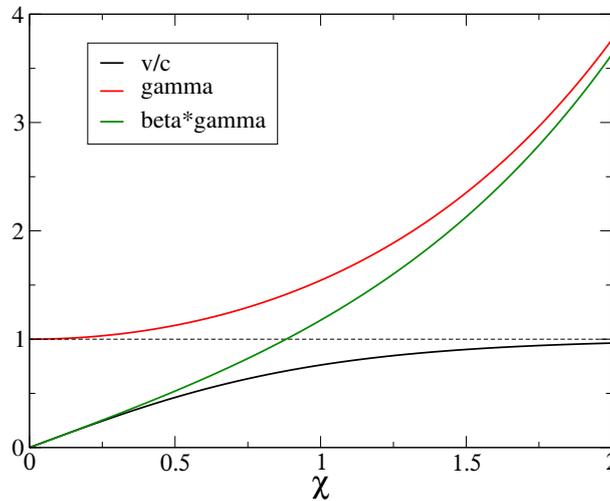


Abbildung 6.4: Geschwindigkeit (in Einheiten von c), Lorentz-Gamma-Faktor γ und $\beta \gamma$ als Funktion der Rapidität χ .

Eine alternative Darstellung der Boost-Matrix (6.40) ist

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \quad (6.42)$$

Bemerkungen:

- (i) Nach dem Determinantenentwicklungssatz berechnen wir

$$\det \Lambda_B = \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1 ,$$

also genau wie $\det \Lambda_D = 1$.

- (ii) Die Transponierte $\Lambda_B^T \equiv \Lambda_B^{-1}$ von Λ_B ist nicht einfach durch gewöhnliches Vertauschen von Zeilen und Spalten zu erhalten. Nach Gl. (6.37) gilt

$$\Lambda_B^T = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist

$$\Lambda_B^T(v) \equiv \Lambda_B(-v), \quad (6.43)$$

also

$$\begin{aligned} \Lambda_B(-v)\Lambda_B(v) &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2(1-\beta^2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Um einen Boost in ein mit v bewegtes System rückgängig zu machen, muss man noch einmal einen Boost mit Geschwindigkeit $-v$ ausführen, was physikalisch absolut plausibel ist.

- (iii) Mit der Boost-Matrix (6.42) schreiben wir den Lorentz-Boost (6.28) des Ortsvektors explizit in den einzelnen Koordinaten aus:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{x'^0}{c} = \frac{1}{c} (\gamma x^0 - \beta \gamma x^3) = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right), \\ x' &= x'^1 = x^1 = x, \\ y' &= x'^2 = x^2 = y, \\ z' &= x'^3 = -\beta \gamma x^0 + \gamma x^3 = \gamma(z - vt). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Im Spezialfall $v \ll c$ gilt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

also

$$\begin{aligned} t' &= \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) \left[1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right] = t + O\left(\frac{v}{c}\right) \simeq t, \\ x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= (z - vt) \left[1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right] \simeq z - vt. \end{aligned}$$

Dies ist genau die Galilei-Transformation (6.1) für den Fall, dass die Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_z$. Diese ergibt sich also als Grenzfall eines Lorentz-Boosts für **nichtrelativistische** Geschwindigkeiten $v \ll c$.

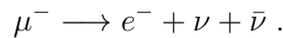
6.2.3 Zeitdilatation

Wir betrachten ein Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ zwischen zwei Ereignissen zu den Zeitpunkten t_1, t_2 am selben Ort $z = z_1 = z_2$, d.h. $\Delta z = z_2 - z_1 = 0$, im System Σ . Dies könnten z.B. zwei aufeinanderfolgende Ticks einer in Σ stationären Uhr sein. In diesem Fall ist $\Delta t = 1$ s. Dann gilt im mit $v > 0$ relativ zu Σ bewegten System Σ' ,

$$\Delta t' \equiv t'_2 - t'_1 = \gamma \left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (z_2 - z_1) \right] \equiv \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta z \right) = \gamma \Delta t > \Delta t. \quad (6.45)$$

Offenbar ist das Zeitintervall $\Delta t'$ um einen Lorentz-Gamma-Faktor $\gamma > 1$ größer als Δt . Wenn man also von Σ' aus die beiden Ereignisse betrachtet, so erscheint das Zeitintervall zwischen diesen Ereignissen vergrößert. Mit anderen Worten: das Zeitintervall 1 s im System Σ scheint vom relativ zu Σ bewegten System Σ' aus betrachtet größer als 1 s zu sein. Dieser Effekt ist als **Zeitdilatation** bekannt: "in bewegten Systemen scheinen Uhren langsamer zu gehen".

Beispiel: Zerfall instabiler Teilchen. Ein sog. μ -Lepton zerfällt gemäß der schwachen Wechselwirkung in ein Elektron und ein Neutrino-Antineutrino-Paar,



Für ruhende μ -Leptonen kennt man die mittlere Zerfallszeit, die sog. **Halbwertszeit** τ .

Nun führt man folgendes Experiment durch: man stelle einen Detektor D_1 auf einem Berg in Höhe L über dem Meeresspiegel und einen zweiten Detektor D_2 auf Meereshöhe auf. Beide Detektoren messen die Zahl der in der kosmischen Strahlung pro Zeiteinheit auftretenden μ -Leptonen. Kennt man die Geschwindigkeit der μ -Leptonen, so kennt man auch die Zeit, die die μ -Leptonen benötigen, um bei Detektor D_2 anzukommen. Vergleicht man diese mit der Halbwertszeit τ , so kann man bei Kenntnis der Zahl der bei D_1 vorhandenen μ -Leptonen die Zahl der noch bei D_2 vorhandenen voraussagen.

Das Ergebnis des Experiments ist jedoch, dass man viel mehr μ -Leptonen als erwartet bei D_2 beobachtet. Der Grund ist, dass die Zeit im Ruhesystem schnell bewegter μ -Leptonen viel langsamer vergeht als im System der beiden (relativ zueinander ruhenden) Detektoren. Dementsprechend zerfallen weniger μ -Leptonen und es kommen mehr beim Detektor D_2 an.

6.2.4 Längenkontraktion

Wir führen im System Σ eine Längenmessung zur festen Zeit $t = t_1 = t_2$ aus, d.h. $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$. Das Ergebnis ist offenbar

$$\ell = z_2 - z_1.$$

Nun führen wir die Längenmessung der Strecke ℓ vom relativ zu Σ mit v bewegten System Σ' durch. Die Längenmessung soll in Σ' ebenfalls zum gleichen Zeitpunkt $t' = t'_1 = t'_2$ stattfinden,

$$t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2 \right) = t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1 \right) \iff t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} (z_2 - z_1) \equiv \frac{v}{c^2} \ell.$$

Die Längenmessung zur festen Zeit t' im System Σ' entspricht offenbar einer **nicht gleichzeitigen** Längenmessung im System Σ . Der Beobachter in Σ' nimmt die Längenmessung zwischen den Punkten z'_1, z'_2 vor,

$$\begin{aligned} \ell' &= z'_2 - z'_1 = \gamma [z_2 - z_1 - v(t_2 - t_1)] \\ &= \gamma \left(\ell - \frac{v^2}{c^2} \ell \right) = \ell \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \equiv \frac{\ell}{\gamma} < \ell. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Die Länge ℓ erscheint vom bewegten System aus um einen Faktor $1/\gamma < 1$ verkürzt. Dieses Phänomen bezeichnet man als **Längenkontraktion**.

6.2.5 Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten

14.7.2017

Ein Massenpunkt m (Ruhesystem Σ_1) bewege sich mit Geschwindigkeit v_1 in z -Richtung eines Systems Σ_2 , welches sich wiederum mit Geschwindigkeit v_2 relativ zu einem System Σ_3 in z -Richtung bewege, vgl. Abb. 6.5.

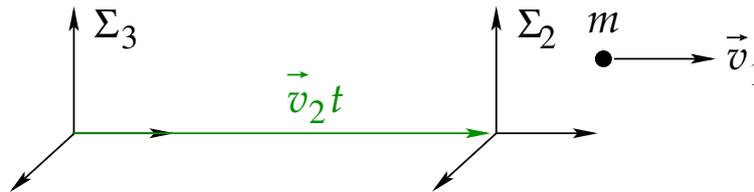


Abbildung 6.5: Zum Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes von Σ_3 aus gesehen? Kann er sich u.U. schneller als das Licht bewegen? Man betrachtet dieses Problem am besten als **Abfolge** von Lorentz-Boosts. Von Σ_2 gelangt man ins Ruhesystem Σ_1 des Massenpunktes mittels eines Boosts

$$(\Lambda_{1\nu}^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Von Σ_3 wiederum gelangt man ins System Σ_2 mittels eines Boosts

$$(\Lambda_{2\nu}^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Also gelangt man von Σ_3 ins Ruhesystem Σ_1 des Massenpunktes mittels

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{3\nu}^\mu) &\equiv \begin{pmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 & -\beta_3 \gamma_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_3 \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & -\beta_1 \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_1 \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & -\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) & 0 & 0 & -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2), \\
 \beta_3 \gamma_3 &= \gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2),
 \end{aligned}$$

also

$$v_3 = c \beta_3 = c \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \quad (6.47)$$

v_3 ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes von Σ_3 aus gesehen. Offenbar gilt für $v_1, v_2 \leq c$ stets $v_3 \leq c$, d.h. man kann die Lichtgeschwindigkeit **nie überschreiten**, sie bildet eine **Grenzgeschwindigkeit**.

Den **nichtrelativistischen Grenzfall** des Additionstheorems (6.47) erhält man für $v_1, v_2 \ll c$. Dann kann man den Nenner entwickeln,

$$v_3 = (v_1 + v_2) \left[1 - \frac{v_1 v_2}{c^2} + O\left(\frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}\right) \right] \simeq v_1 + v_2,$$

wobei wir Terme der Ordnung $O(v_1 v_2 / c^2)$ vernachlässigt haben. Man erhält also wie erwartet im nichtrelativistischen Grenzfall die Galilei-Transformation (6.2) für Geschwindigkeiten.

Man darf diese aber **nicht** mehr anwenden, wenn entweder v_1 oder v_2 nicht mehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist. Z.B. erhalten wir für den Spezialfall einer Lichtwelle, die sich im System Σ_2 mit Lichtgeschwindigkeit $v_1 = c$ bewegt, aus Gl. (6.47):

$$v_3 = \frac{c + v_2}{1 + v_2/c} = c.$$

Also bewegt sich eine Lichtwelle auch von Σ_3 aus gesehen mit Lichtgeschwindigkeit fort, im Einklang mit dem zweiten Einsteinschen Postulat.

Mit Hilfe der zu den Lorentz-Transformationen Λ_1, Λ_2 gehörenden Rapiditäten χ_1, χ_2 lautet das Additionstheorem (6.47)

$$\tanh \chi_3 = \frac{\tanh \chi_1 + \tanh \chi_2}{1 + \tanh \chi_1 \tanh \chi_2} \equiv \tanh(\chi_1 + \chi_2), \quad (6.48)$$

wobei wir das Additionstheorem für den hyperbolischen Tangens, $(\tanh x + \tanh y)/(1 + \tanh x \tanh y) = \tanh(x+y)$, benutzt haben. Im Gegensatz zur Geschwindigkeit ist die Rapidität eine Variable, die sich **additiv** unter einer Abfolge von Lorentz-Transformationen verhält,

$$\chi_3 = \chi_1 + \chi_2 . \quad (6.49)$$

6.2.6 Das Raum-Zeit-Diagramm (Minkowski-Diagramm)

Wie lassen sich Ereignisse in der vierdimensionalen Raum-Zeit, d.h. im Minkowski-Raum darstellen? Hierzu betrachtet man das sog. **Raum-Zeit-** oder **Minkowski-Diagramm**. Dies ist eine zweidimensionale Projektion der vierdimensionalen Raum-Zeit, mit der Zeitachse $x^0 = ct$ als y - und mit einer Raumrichtung, z.B. der z -Richtung, als x -Achse, vgl. Abb. 6.6.

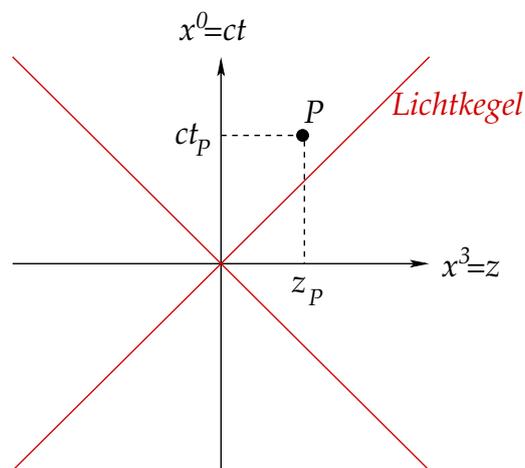


Abbildung 6.6: Das Raum-Zeit- (Minkowski-)Diagramm.

Ein Raum-Zeit-Ereignis P hat die Koordinaten $x_P^0 = ct_P$, $x_P^3 = z_P$. Der **Lichtkegel** ist durch die Relation

$$s_0^2 = x^\mu x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

gegeben. In der Projektion der Raum-Zeit auf die (x^0, x^3) -Ebene, Abb. 6.6, ist $x = y = 0$, also $(ct)^2 - z^2 = 0$, bzw. $ct = \pm z$; der Lichtkegel ist durch die beiden Winkelhalbierenden (rote Linien) gegeben. Vektoren x^μ , deren Betragsquadrat verschwindet, heißen auch **Nullvektoren**.

Wir betrachten nun eine Lorentz-Transformation in ein gegenüber Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_z$ bewegtes System Σ' , dessen Ursprung mit dem von Σ bei $t = t' = 0$ übereinstimmt. Zu späteren Zeitpunkten bestimmt sich die z -Koordinate des Ursprungs von Σ' im System Σ aus

$$0 = z' = \gamma(z - vt) ,$$

also $z = vt$ oder

$$x^0 = ct = c \frac{z}{v} = \frac{z}{\beta} = \frac{x^3}{\beta} .$$

Also ist die x'^0 -Achse, die durch die Bedingung $z' = 0$ definiert ist, in Abb. 6.6 durch eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $1/\beta > 1$ gegeben, vgl. Abb. 6.7. Ganz ähnlich ist die x'^3 -Achse, also die Orte, an denen $ct' = 0$ ist, durch die Gleichung

$$0 = t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) ,$$

bzw.

$$x^0 = ct = \frac{v}{c} z = \beta z = \beta x^3$$

gegeben. Dies entspricht einer Geraden mit Steigung $\beta < 1$, vgl. Abb. 6.7. Die neue Zeitskala x'^0 im System Σ' liegt also im Minkowski-Diagramm zwischen der Zeitachse x^0 im System Σ und dem Lichtkegel, während die Raumachse x'^3 im System Σ' im Minkowski-Diagramm zwischen dem Lichtkegel und der Raumachse x^3 im System Σ liegt. Obwohl sich die Zeit- und Raumachsen beim Übergang von Σ nach Σ' verschieben (und zwar so, dass der Winkel zwischen x'^0 -Achse und x'^3 -Achse nicht mehr 90° beträgt), bleibt der Lichtkegel stets der gleiche.

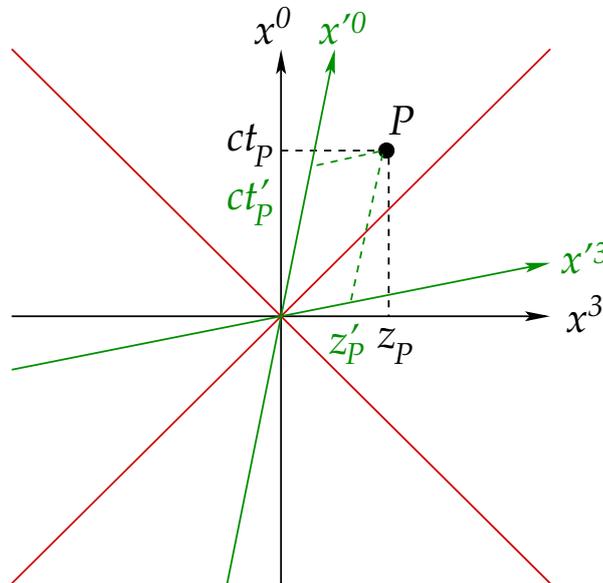


Abbildung 6.7: Verschiebung der Raum- und Zeitachsen bei einer Lorentz-Transformation im Minkowski-Diagramm.

Bei der Lorentz-Transformation ändert sich auch die **Achsenkalierung**. Man muss die Achsen also neu **eichen**. Dies geschieht wie folgt. Das 4-Betragsquadrat

$$s^2 = x^\mu x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

ist eine sog. **Lorentz-Invariante**, d.h. es ist **invariant unter Lorentztransformationen**. Da sich beim Übergang vom System Σ ins System Σ' , also einem Boost in z -Richtung, die x - und y -Koordinaten nicht ändern, $x' = x$, $y' = y$, ist bei einem Boost in z -Richtung auch die Größe

$$s_z^2 = (ct)^2 - z^2$$

eine Lorentz-Invariante. Der Längeneinheit ℓ (z.B. $\ell = 1$ m) auf der z -Achse (also bei $t = 0$) entspricht $s_\ell^2 = -\ell^2$. Dies legt die **invariante Längeneinheit** fest. Alle Raum-Zeit-Punkte (ct, z) , die $s_\ell^2 = -\ell^2$ entsprechen, sind durch die Gleichung $(ct)^2 - z^2 = s_\ell^2 = -\ell^2$ verknüpft, also

$$(ct)^2 = z^2 - \ell^2.$$

Dies entspricht einer Hyperbel im Minkowski-Diagramm, vgl. Abb. 6.8. Die Hyperbel schneidet die z' -Achse in dem Punkt, der der gleichen Längeneinheit ℓ im bewegten System Σ' entspricht. Im auf das ruhende System Σ bezogene Minkowski-Diagramm ist diese Länge aber offenbar $\ell' > \ell$. Wir werden gleich sehen, dass diese Tatsache in natürlicher Weise auf die Lorentz-Kontraktion führt.

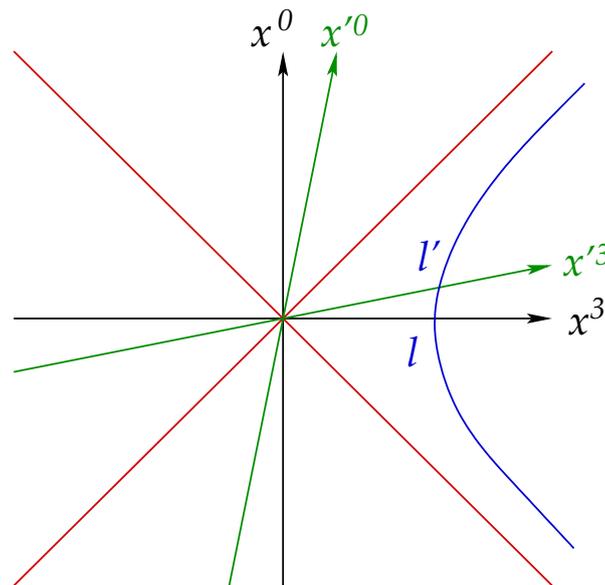


Abbildung 6.8: Invariante Längeneinheit im Minkowski-Diagramm.

Auf die gleiche Weise lässt sich die Zeiteinheit festlegen. Wir betrachten die Zeiteinheit $c\vartheta$ (z.B. $\vartheta = 1$ s) auf der x^0 -Achse. Bei $z = 0$ haben wir dann

$$s_\vartheta^2 = (c\vartheta)^2,$$

welches die **invariante Zeiteinheit** festlegt. Alle Raum-Zeit-Punkte (ct, z) , welche $s_\vartheta^2 = (c\vartheta)^2$ entsprechen, sind durch die Gleichung $(ct)^2 - z^2 = s_\vartheta^2 = (c\vartheta)^2$ miteinander verknüpft, also

$$(ct)^2 = (c\vartheta)^2 + z^2.$$

Auch dies entspricht einer Hyperbel im Minkowski-Diagramm, vgl. Abb. 6.9. Die Hyperbel schneidet die x'^0 -Achse in dem Punkt, der der gleichen Zeiteinheit ϑ im bewegten System Σ' entspricht. Im auf das ruhende System Σ bezogene Minkowski-Diagramm ist diese Länge aber offenbar $c\vartheta' > c\vartheta$. Wir werden gleich sehen, wie dies auf die Zeitdilatation führt.

Das 4-Betragsquadrat eines 4-Vektors x^μ , $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$, ist **nicht notwendigerweise positiv definit**. Man unterscheidet

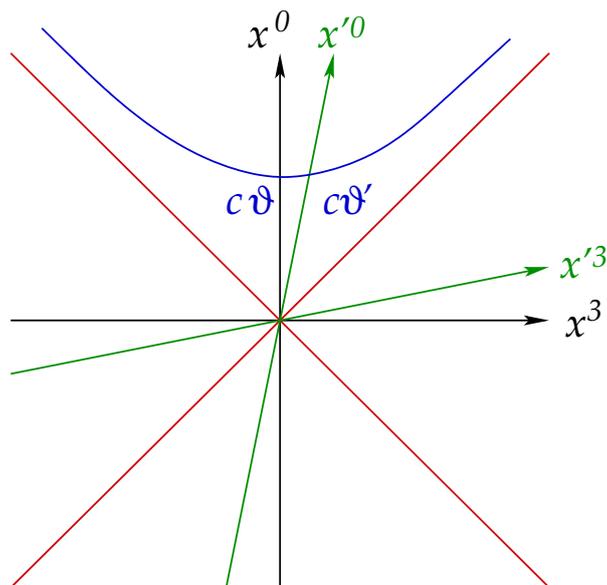


Abbildung 6.9: Invariante Zeiteinheit im Minkowski-Diagramm.

(i) **Zeitartige** 4-Vektoren: $s^2 > 0 \iff |ct| > |\vec{r}|$.

(ii) **Lichtartige** 4-Vektoren oder **Nullvektoren**: $s_0^2 = 0 \iff |ct| = |\vec{r}|$.

(iii) **Raumartige** 4-Vektoren: $s^2 < 0 \iff |ct| < |\vec{r}|$.

Diese drei Möglichkeiten sind in Abb. 6.10 dargestellt.

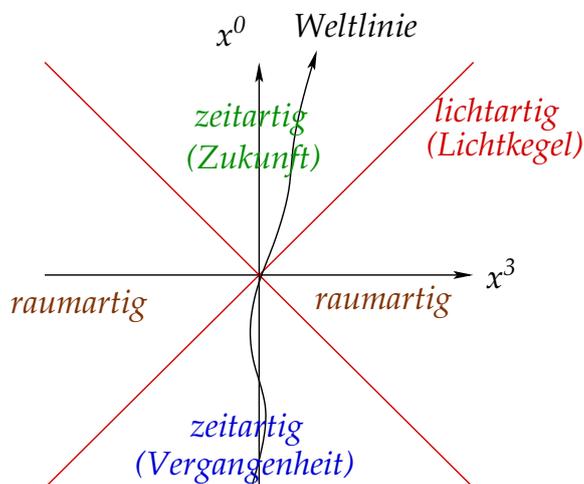


Abbildung 6.10: Unterteilung der zeitartigen und raumartigen Bereiche im Minkowski-Diagramm.

Die Bahnen physikalischer Objekte, die sog. **Weltlinien**, liegen wegen $v < c$ stets **innerhalb** des **zeitartigen** Lichtkegels (insofern die Weltlinie durch den Ursprung von

Σ führt). Die **lokale Steigung** der Weltlinie entspricht dem Inversen der momentanen Geschwindigkeit (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit), $1/\beta$, und muss stets **größer als 1** sein, sonst wäre das Teilchen schneller als die Lichtgeschwindigkeit c . Die Weltlinien von Photonen (Lichtquanten) liegen stets auf dem Lichtkegel (falls sie bei $t = 0$ vom Ursprung ausgesandt werden). Sie besitzen die Steigung 1.

Da s^2 **lorentz-invariant** ist, bleibt der Charakter eines 4-Vektors, also ob er zeit-, licht-, oder raumartig ist, unter Lorentz-Transformationen erhalten. Das gleiche gilt auch für den **Abstand zweier Raum-Zeit-Ereignisse**. Seien X_1 und X_2 die zu zwei Raum-Zeit-Ereignissen P_1 und P_2 gehörenden 4-Vektoren. Das Betragsquadrat ihres Abstands im Minkowski-Raum,

$$\begin{aligned} s_{21}^2 &= (x_2 - x_1)^\mu (x_2 - x_1)_\mu = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 \\ &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

ist ebenfalls **lorentz-invariant**. Wir betrachten zwei Ereignisse, für die $x_1 = y_1 = x_2 = y_2$, damit wir dies im Minkowski-Diagramm veranschaulichen können. O.B.d.A. sei auch $t_2 > t_1$ und $z_2 > z_1$. Wir unterscheiden

- (i) **Raumartiger Abstand:** $s_{21}^2 < 0$, d.h. $z_2 - z_1 > c(t_2 - t_1)$. Es folgt, dass P_1 und P_2 **nicht** durch ein Lichtsignal verbunden werden können. Sei z.B. P_1 im Ursprung von Σ . Dann ereignet sich P_2 zu einem **früheren** Zeitpunkt t_2 als der Zeitpunkt t_0 , zu dem das Lichtsignal (welches sich auf dem Lichtkegel bewegt) bei z_2 eintrifft, s. Abb. 6.11. Mit anderen Worten, ein Signal müßte mit einer Geschwindigkeit $v > c$ von P_1 nach P_2 gelangen, also auf einer Weltlinie mit Steigung < 1 , um rechtzeitig bei P_2 einzutreffen. Dies wiederum bedeutet, dass es **keine kausale Verbindung** zwischen den Ereignissen P_1 und P_2 gibt.

Für Ereignisse mit raumartigem Abstand kann man stets eine Lorentz-Transformation in ein Inertialsystem Σ' finden, in dem die beiden Ereignisse **gleichzeitig** stattfinden. Dazu berechnen wir

$$0 = c(t'_2 - t'_1) = \gamma [c(t_2 - t_1) - \beta(z_2 - z_1)] \iff z_2 - z_1 = \frac{c}{\beta}(t_2 - t_1).$$

Für raumartige Abstände gilt $z_2 - z_1 > c(t_2 - t_1)$, deshalb muss $1/\beta > 1$ sein, um diese Gleichung zu erfüllen. Dies ist natürlich immer möglich, da $\beta < 1$. Wir ziehen die Schlussfolgerung, dass die **zeitliche Reihenfolge** von raumartig verbundenen Ereignissen vom gewählten Bezugssystem abhängig ist. In unterschiedlichen Bezugssystemen kann sie verschieden sein.

- (ii) **Zeitartiger Abstand:** $s_{21}^2 > 0$, d.h. $c(t_2 - t_1) > z_2 - z_1$. In diesem Fall kommt ein Lichtsignal von P_1 stets **vor** der Zeit t_2 , zu dem sich P_2 ereignet, am Ort z_2 an, vgl. Abb. 6.12. Dies bedeutet, dass eine **kausale Verbindung** zwischen den Ereignissen möglich ist.

Es gibt zwar keine Lorentz-Transformation in ein System, in dem P_1 und P_2 gleichzeitig stattfinden, aber es gibt ein System, in dem $z'_1 = z'_2$, also in dem die Ereignisse am **gleichen Ort** zu unterschiedlichen Zeiten stattfinden,

$$0 = z'_2 - z'_1 = \gamma [z_2 - z_1 - v(t_2 - t_1)] \iff z_2 - z_1 = v(t_2 - t_1).$$

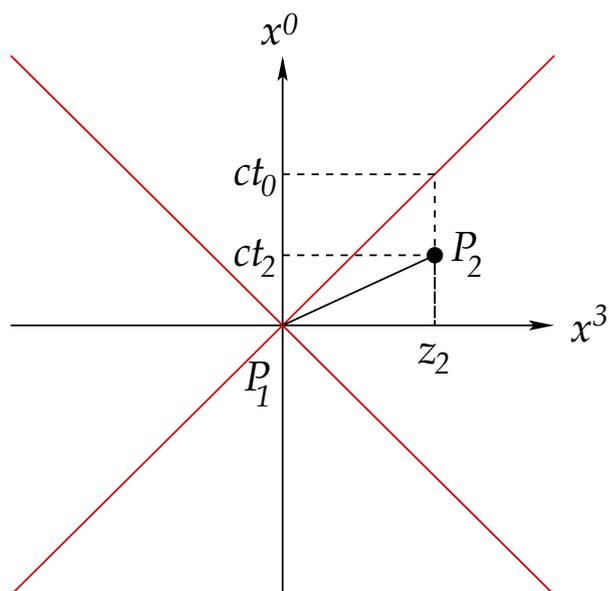


Abbildung 6.11: Veranschaulichung eines raumartigen Abstands im Minkowski-Diagramm.

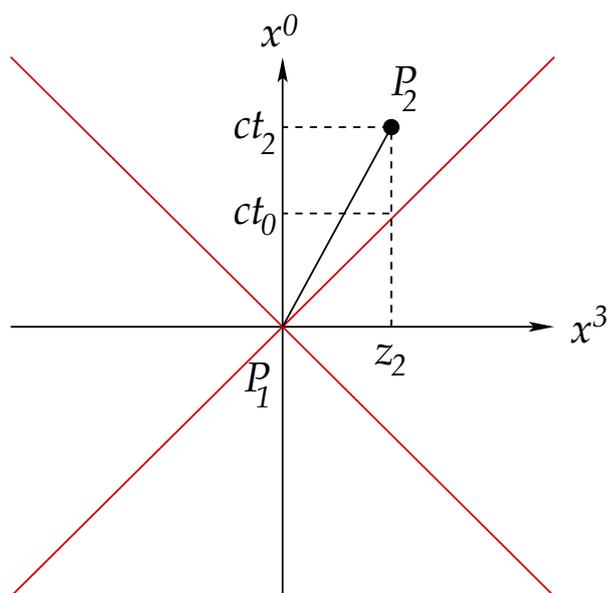


Abbildung 6.12: Veranschaulichung eines zeitartigen Abstands im Minkowski-Diagramm.

Für zeitartige Abstände gilt $c(t_2 - t_1) > z_2 - z_1$, also ist diese Gleichung erfüllbar, da $v < c$.

Zum Schluss dieses Abschnitts kommen wir auf die Längenkontraktion und Zeitdilatation zurück, die wir im Minkowski-Diagramm verstehen wollen.

- (i) Bei der **Längenkontraktion** wird eine Strecke ℓ , die im System Σ ruht, vom be-

wegen System Σ' aus gemessen. Da die Strecke in Σ ruht, verlaufen die Weltlinien des linken und rechten Endes von ℓ parallel zur x^0 -Achse, vgl. Abb. 6.13. Die Messung in Σ' verläuft instantan, also bei $t' = 0$. Anhand von Abb. 6.13 erkennt man, dass die so gemessene Strecke **kürzer** ist als die Strecke ℓ' , die gemäß den oben im Zusammenhang mit der Eichhyperbel gemachten Argumenten der Länge von ℓ im ruhenden System entspricht. Man beobachtet also von Σ' aus eine **Verkürzung** der Strecke ℓ . Dies ist gerade die Längenkontraktion.

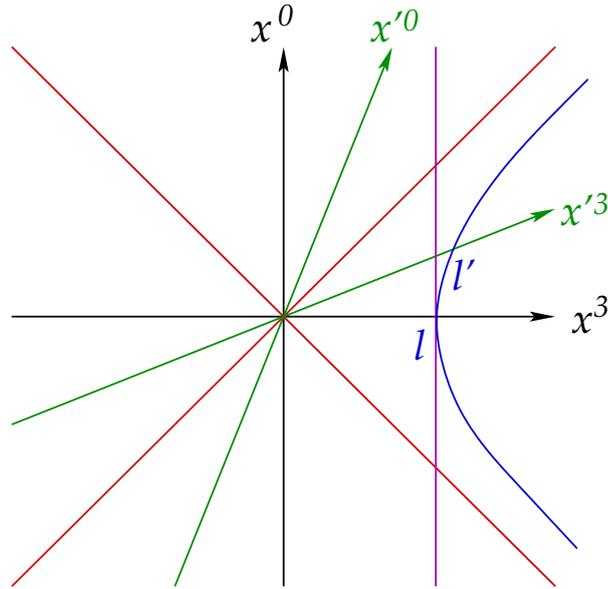


Abbildung 6.13: Veranschaulichung der Längenkontraktion im Minkowski-Diagramm.

- (ii) Bei der **Zeitdilatation** wird ein Zeitintervall ϑ zwischen zwei Ereignissen im System Σ vom bewegten System Σ' aus gemessen, vgl. Abb. 6.14. Die beiden Ereignisse in Σ finden am selben Ort $z = 0$ statt. Der Beobachter befinde sich stets im Ursprung von Σ' , also bei $z' = 0$. Das dem Zeitintervall ϑ im System Σ entsprechende Zeitintervall ϑ' in Σ' ist durch den Schnittpunkt der Eichhyperbel mit der x'^0 -Achse gegeben. Das in Σ' **gemessene** Zeitintervall ist aber durch den Schnittpunkt der (magenta-farbenen) parallel zur x'^3 -Achse verlaufenden Geraden mit der x'^0 -Achse gegeben. Dieses ist **länger** als das dem Zeitintervall ϑ im bewegten System entsprechende Zeitintervall ϑ' . Also beobachtet man von Σ' aus eine **Verlängerung** von Zeitintervallen ϑ . Dies ist gerade die Zeitdilatation.

6.3 Kovariante Formulierung der klassischen Mechanik

18.7.2017

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, Naturgesetze wie z.B. das Newtonsche Gesetz der klassischen Mechanik in **kovarianter Form** zu schreiben. Dies bedeutet, dass sie unter Lorentz-Transformationen **forminvariant** bleiben, d.h. in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen, wie vom ersten Einsteinschen Postulat gefordert.

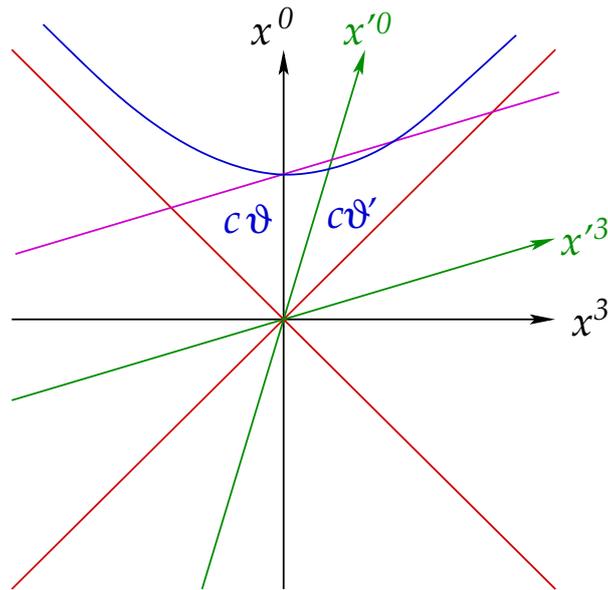


Abbildung 6.14: Veranschaulichung der Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm.

Wir wissen, dass das Newtonsche Gesetz invariant unter Galilei-Transformationen ist, welche den nichtrelativistischen Grenzfall ($v \ll c$) der Lorentz-Transformationen darstellen. Für physikalische Körper, deren Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit annähert, sollte man aber das Newtonsche Gesetz auch so schreiben können, dass es forminvariant unter Lorentz-Transformationen ist. Dies ist für die Naturbeschreibung nicht unbedingt von großer Konsequenz, da lediglich Objekte von der Größe von Elementarteilchen oder maximal von Atomkernen relativistische Geschwindigkeiten erreichen können. Solche Objekte unterliegen aber nicht den Gesetzen der klassischen Mechanik sondern der Quantenmechanik. Dennoch ist es zweckmäßig, sich anhand wohlbekannter Gesetze mit der kovarianten Formulierung vertraut zu machen.

Für die Ausbreitung von Licht, die durch die Gesetze der **Elektrodynamik** beschrieben werden, ist es jedoch wegen $v = c$ unabdingbar, von Anfang an eine relativistisch kovariante Formulierung finden zu können. Die Gesetze der Elektrodynamik müssen forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein, Galilei-Transformationen sind, wie wir am Beispiel des Michelson-Morley-Experimentes gesehen hatten, unbrauchbar.

6.3.1 Lorentz-Tensoren

Für eine forminvariante Formulierung von Naturgesetzen ist es zunächst erforderlich, alle physikalischen Größen in Form von sog. **Lorentz-Tensoren** zu schreiben. Man unterscheidet

- (i) **Tensoren nullter Stufe**, bzw. **Lorentz-Skalare**, a . Dies sind Größen, die in **allen** Inertialsystemen den gleichen Wert annehmen, also **invariant** unter Lorentz-Transformationen sind. Man sagt, sie sind **lorentz-invariant**. Beispiele sind z.B. das 4-Betragsquadrat des Ortsvektors, $s^2 \equiv x^\mu x_\mu$.

(ii) **Tensoren erster Stufe**, bzw. (kontravariante) **4-Vektoren**,

$$A = (a^\mu) = (a^0, a^1, a^2, a^3)^T .$$

Diese Größen, die man als vierdimensionale Spaltenvektoren auffassen kann, sind **nicht** invariant unter Lorentz-Transformationen, ihr Transformationsgesetz ist durch die Gleichung

$$A' = \Lambda A , \quad a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu ,$$

gegeben. Weil dies auch für den Ortsvektor gilt,

$$X' = \Lambda X , \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu ,$$

können wir die Komponenten Λ^μ_ν der Lorentz-Transformationsmatrix auch wie folgt schreiben:

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} , \quad (6.50)$$

bzw. nach Invertieren

$$x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x'^\mu \implies \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \equiv (\Lambda^{-1})^\nu_\mu . \quad (6.51)$$

Man beachte, dass ein kontravarianter Index im **Nenner** einem **kovarianten** Index entspricht.

Neben kontravarianten 4-Vektoren gibt es auch kovariante 4-Vektoren. Formal gilt

$$a'_\mu = a_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = a_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu , \quad (6.52)$$

denn dann ist das 4-Betragsquadrat in der Tat lorentz-invariant,

$$a'_\mu a'^\mu = a_\lambda (\Lambda^{-1})^\lambda_\mu \Lambda^\mu_\nu a^\nu = a_\lambda \delta^\lambda_\nu a^\nu = a_\nu a^\nu .$$

Beispiel: 4-Gradient einer skalaren Funktion:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) \equiv (\partial_\mu \varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right) .$$

Der 4-Gradient transformiert sich wie ein kovarianter 4-Vektor, denn es gilt gemäß der Kettenregel (man beachte die Einsteinsche Summenkonvention)

$$\partial'_\mu \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \partial_\nu \varphi (\Lambda^{-1})^\nu_\mu . \quad (6.53)$$

(iii) **Tensoren zweiter Stufe**. Hier gibt es wiederum drei verschiedene Klassen:

(a) **kontravariante 4-Tensoren**, $A^{\mu\nu}$. Ihr Transformationsgesetz lautet

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta A^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta}. \quad (6.54)$$

Jeder Index eines kontravarianten 4-Tensors transformiert sich wie der eines kontravarianten 4-Vektors.

Beispiel: Die Komponenten des **Tensorproduktes** zweier 4-Vektoren $A = (a^\mu)$, $B = (b^\nu)$ lauten

$$A^{\mu\nu} \equiv a^\mu b^\nu.$$

Aus dem Transformationsgesetz (6.52) für 4-Vektoren wird das Transformationsgesetz (6.54) für das Tensorprodukt als kontravarianter 4-Tensor unmittelbar ersichtlich.

(b) **kovariante 4-Tensoren**, $A_{\mu\nu}$. Ihr Transformationsgesetz lautet

$$A'_{\mu\nu} = A_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu (\Lambda^{-1})^\beta_\nu = A_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}, \quad (6.55)$$

jeder Index transformiert sich wie der eines kovarianten 4-Vektors.

(c) **gemischte 4-Tensoren**, A^μ_ν . Ihr Transformationsgesetz lautet

$$A'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\alpha A^\alpha_\beta (\Lambda^{-1})^\beta_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (6.56)$$

Kontravariante Indizes transformieren sich wie die von kontravarianten 4-Vektoren, kovariante Indizes wie die von kovarianten 4-Vektoren.

(iv) Ganz analog kann man **Tensoren höherer Stufe** und **verschiedener Art** (kontravariant, kovariant, gemischt) definieren.

6.3.2 Kovariante Formulierung von Naturgesetzen

Die **kovariante Formulierung von Naturgesetzen** bedeutet, dass linke und rechte Seiten einer Gleichung sich wie **Lorentz-Tensoren** der **gleichen Stufe** transformieren, also

$$\begin{aligned} a &= b && \text{Lorentz-Skalar,} \\ a^\mu &= b^\mu && \text{Lorentz-Vektor,} \\ A^{\mu\nu} &= B^{\mu\nu} && \text{Lorentz-Tensor zweiter Stufe,} \\ &\vdots && \end{aligned}$$

6.3.3 Rechenregeln

(i) **Addition:** Tensoren gleicher Stufe werden komponentenweise addiert, z.B.

$$c^\mu = a^\mu + b^\mu, \quad C^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + B^{\mu\nu}, \dots$$

- (ii) **Multiplikation mit einer Zahl:** Das Produkt eines Tensors mit einer Zahl ergibt sich aus Multiplikation jeder Komponente des Tensors mit dieser Zahl, z.B.

$$b A = b(a^\mu) = (b a^\mu) .$$

- (iii) **Verjüngung eines Tensors:** Darunter versteht man die **Kontraktion** zweier Indizes mit Hilfe des metrischen Tensors, z.B.

$$A^{\mu\nu}{}_{\nu\beta} \equiv A^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} g_\nu^\alpha . \quad (6.57)$$

Ein verjüngter Tensor k -ter Stufe transformiert sich wie ein Tensor $(k - 2)$ -ter Stufe, z.B.

$$\begin{aligned} A'^{\mu\nu}{}_{\nu\beta} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} A^{\lambda\rho}{}_{\sigma\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A^{\lambda\rho}{}_{\sigma\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\beta} \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\rho} A^{\lambda\rho}{}_{\sigma\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} g_\rho^\sigma A^{\lambda\rho}{}_{\sigma\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} A^{\lambda\rho}{}_{\rho\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\beta} . \end{aligned}$$

Spezialfall 1: Die **Spur** eines gemischten Tensors zweiter Stufe,

$$A^\mu{}_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A^\mu{}_\mu \equiv \text{Tr}(A^\mu{}_\nu) = \text{Tr} \begin{pmatrix} A^0_0 & \dots & A^0_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^3_0 & \dots & A^3_3 \end{pmatrix} ,$$

transformiert sich wie ein **Lorentz-Skalar**.

Spezialfall 2: Das **4-Skalarprodukt** zweier Vektoren $A = (a^\mu)$, $B = (b^\mu)$, $a^\mu b_\mu$, kann als **Spur** eines gemischten Tensors zweiter Stufe,

$$A^\mu{}_\nu \equiv a^\mu b_\nu$$

aufgefaßt werden. Dieses ist als Lorentz-Skalar invariant unter Lorentz-Transformationen.

6.3.4 Differentialoperatoren:

- (i) **4-Gradient:**

$$(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) . \quad (6.58)$$

Wir hatten schon in Gl. (6.53) gesehen, dass sich der 4-Gradient wie ein kovarianter Vektor transformiert. Es gibt auch eine kontravariante Version des 4-Gradienten,

$$(\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)^T .$$

- (ii) **4-Divergenz:** Die 4-Divergenz eines 4-Vektors A ist ein Lorentzskalar,

$$\partial_\mu a^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial a^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \equiv \partial^\mu a_\mu . \quad (6.59)$$

- (iii) **d'Alembert (Quabla-)Operator:** Der d'Alembert-Operator ist das 4-Betragsquadrat des 4-Gradienten,

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (6.60)$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist. Auch der d'Alembert-Operator ist ein Lorentz-Skalar.

6.3.5 Kinematische Grundgrößen

Die **Weltlinie** eines physikalischen Körpers hatten wir im Zusammenhang mit Abb. 6.10 diskutiert. Ähnlich wie die Konfigurationsbahn im Konfigurationsraum stellt sie die Menge aller 4-Ortsvektoren $X = (x^\mu) = (ct, x, y, z)^T$ in einem vorgegebenen Zeitintervall dar. Das Problem ist aber, dass die Zeit selbst eine der Koordinaten des 4-Ortsvektors ist und sich unter Lorentz-Transformationen ändern kann. Wir sollten also zur Parametrisierung der Weltlinie eine andere Größe wählen, die von der Wahl des Bezugssystems unabhängig ist. Daher muss es sich dabei um einen Lorentz-Skalar handeln.

Wir betrachten zunächst die **differentielle Änderung** des 4-Ortsvektors,

$$dX = (dx^\mu) = (c dt, dx, dy, dz)^T.$$

Das 4-Betragsquadrat dieser Größe,

$$ds^2 \equiv dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2,$$

ist ein Lorentz-Skalar. Wir definieren nun das sog. **differentielle Eigenzeitintervall**

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} (d\vec{r})^2, \quad (6.61)$$

welches ebenfalls ein Lorentz-Skalar ist, da c nach dem zweiten Einsteinschen Postulat in allen Bezugssystemen den gleichen Wert annimmt.

Im System Σ' des Körpers, seinem sog. **Ruhsystem**, ist stets $d\vec{r}' = 0$, also

$$d\tau^2 = dt'^2.$$

Das Eigenzeitintervall $d\tau$ ist also das Zeitintervall im Ruhsystem des Körpers. Die Größe

$$\tau = \int d\tau \quad (6.62)$$

bezeichnet man als **Eigenzeit**. Diese eignet sich als Lorentz-Skalar zur Parametrisierung der Weltlinie,

$$X(\tau) = (x^\mu(\tau)) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))^T. \quad (6.63)$$

Es gilt außerdem

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} (d\vec{r})^2} = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma^{-1} dt < dt,$$

wobei wir die 3-Geschwindigkeit $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt$ des Körpers im System Σ benutzt haben. Man sieht, dass das Zeitintervall dt gegenüber dem Eigenzeitintervall $d\tau$ gedehnt ist,

$$dt = \gamma d\tau > d\tau .$$

Dies ist die **Zeitdilatation** in einem gegenüber dem Ruhesystem Σ' des Körpers bewegten System Σ .

Die **4-Geschwindigkeit** eines Körpers ist definiert als die Ableitung des 4-Ortsvektors nach der Eigenzeit,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} . \quad (6.64)$$

Sie transformiert sich wie der kontravariante 4-Vektor dx^μ , da $d\tau$ ein Lorentz-Skalar ist. Es gilt mit der Kettenregel und $dt/d\tau = \gamma$:

$$(u^\mu) = \left(\frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = \gamma \left(\frac{dx^\mu}{dt} \right) = \gamma \left(\frac{d(ct)}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^T = \gamma(c, \vec{v})^T . \quad (6.65)$$

Das 4-Betragsquadrat der 4-Geschwindigkeit ist

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = c^2 . \quad (6.66)$$

21.7.2017

6.3.6 Die Newtonsche Grundgleichung in kovarianter Formulierung

Um das zweite Newtonsche Axiom in relativistisch kovarianter Form zu schreiben, benötigen wir zunächst den **4-Impuls**,

$$p^\mu = m u^\mu . \quad (6.67)$$

Dieser transformiert sich wie ein 4-Vektor, falls die Masse m des Körpers ein **Lorentz-Skalar**, also **lorentz-invariant** ist. Dies ist eine plausible Forderung, da die Masse eine Materialeigenschaft ist, die sich bei einem Wechsel des Bezugssystems nicht ändern sollte. Mit Gl. (6.65) lauten die Komponenten des 4-Impuls

$$p^0 = m \gamma c , \quad \vec{p} = m \gamma \vec{v} .$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist $\gamma = 1 + O(v^2/c^2) \simeq 1$, so dass der 3-Impuls

$$\vec{p} = m \gamma \vec{v} \simeq m \vec{v} \equiv \vec{p}_{\text{nr}}$$

in die nichtrelativistische Definition des Impulses übergeht. Das 4-Betragsquadrat des 4-Impulses ist

$$p^\mu p_\mu = m^2 \gamma^2 (c^2 - v^2) = m^2 \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = m^2 c^2 . \quad (6.68)$$

Die Newtonsche Grundgleichung in nichtrelativistischer Form lautete

$$\vec{F}_{\text{nr}} = \frac{d\vec{p}_{\text{nr}}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

Die naheliegende **relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Grundgleichung** ist

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (6.69)$$

wobei auf der linken Seite die sog. **Minkowski-Kraft** oder **4-Kraft** auftritt. Die Komponenten der 4-Kraft lauten mit $dt/d\tau = \gamma$,

$$K^0 = \gamma \frac{dp^0}{dt} = m \gamma c \frac{d\gamma}{dt}, \quad \vec{K} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = m \gamma \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt}.$$

Wir definieren die **3-Kraft** als Zeitableitung des 3-Impulses,

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Diese hat den korrekten nichtrelativistischen Grenzfall

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma \vec{p}_{\text{nr}})}{dt} \simeq \frac{d\vec{p}_{\text{nr}}}{dt} = \vec{F}_{\text{nr}}.$$

Dann schreiben sich die räumlichen Komponenten der Minkowski-Kraft als

$$\vec{K} = \gamma \vec{F}. \quad (6.70)$$

6.3.7 Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Wie ist die Zeitkomponente K^0 der 4-Kraft zu interpretieren? Zunächst ist

$$K^\mu u_\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = \frac{m}{2} \frac{dc^2}{d\tau} = 0,$$

wobei wir Gl. (6.66) benutzt haben. Diese Gleichung besagt, dass die 4-Kraft **4-orthogonal** zur 4-Geschwindigkeit ist. Andererseits ist mit Gl. (6.70)

$$0 = K^\mu u_\mu = K^0 \gamma c - \vec{K} \cdot (\gamma \vec{v}) = \gamma c \left(K^0 - \vec{K} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right) = \gamma c \left(K^0 - \gamma \vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right),$$

also

$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \quad (6.71)$$

d.h.

$$K \equiv (K^\mu) = \gamma \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right)^T. \quad (6.72)$$

In der nichtrelativistischen Mechanik war das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit (bis auf ein Vorzeichen) gerade die **Leistung**, also die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit. Mit den Glgen. (6.69) und (6.72) erhalten wir die Identität

$$-P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{c}{\gamma} K^0 = \frac{c}{\gamma} m \frac{dt}{d\tau} \frac{du^0}{dt} = \frac{c}{\gamma} m \gamma \frac{d(\gamma c)}{dt} = \frac{d}{dt} (m \gamma c^2).$$

Andererseits war die Leistung (bis auf ein Vorzeichen) identisch mit der **zeitlichen Änderung der kinetischen Energie**, $P \equiv -\dot{T}$. Es ist also naheliegend, die Größe

$$T \equiv m \gamma c^2 \quad (6.73)$$

als **relativistische Verallgemeinerung der kinetischen Energie** zu definieren, weil dann

$$-P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dT}{dt} \equiv \dot{T} .$$

Die relativistische kinetische Energie T hat den nichtrelativistischen Grenzfall

$$T = m c^2 \left[1 + \frac{v^2}{2 c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right] \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 = m c^2 + T_{\text{nr}} , \quad (6.74)$$

wobei $T_{\text{nr}} = \frac{1}{2} m v^2$ die **nichtrelativistische** kinetische Energie ist. Offenbar gibt es in der relativistischen Verallgemeinerung einen zusätzlichen konstanten Beitrag, die sog. **Ruheenergie** des Körpers

$$E_0 = m c^2 . \quad (6.75)$$

Die 4-Kraft (6.72) schreibt sich nun als

$$(K^\mu) = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dT}{dt} , \vec{F} \right)^T = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dT}{dt} , \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^T = \gamma \frac{d}{dt} \left(\frac{T}{c} , \vec{p} \right)^T = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{T}{c} , \vec{p} \right)^T . \quad (6.76)$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (6.69) schließen wir, dass

$$p^0 = m \gamma c \equiv \frac{T}{c} , \quad (6.77)$$

d.h. die Zeitkomponente des 4-Impulses ist (bis auf einen Faktor $1/c$) mit der **kinetischen Energie** identisch. Wegen Gl. (6.68) gilt nun

$$\frac{T^2}{c^2} = (p^0)^2 = p^\mu p_\mu + \vec{p}^2 = m^2 c^2 + p^2 ,$$

also

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \Longleftrightarrow \quad T = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} , \quad (6.78)$$

die sog. **relativistische Energie-Impuls-Beziehung**.

Bemerkungen:

- (i) Das negative Vorzeichen in Gl. (6.78) deutet darauf hin, dass die spezielle Relativitätstheorie neben Teilchen mit positiver (kinetischer) Energie auch solche mit **negativer Energie** zuläßt. Es wird sich herausstellen, dass dies nicht nur mathematisch zulässig ist, sondern auch physikalisch sinnvoll ist: es ist das erste Indiz für die Existenz der sog. **Antiteilchen**.

(ii) Der 3-Impuls läßt sich schreiben als

$$\vec{p} = \gamma \vec{p}_{\text{nr}} = m \gamma \vec{v} = m(v) \vec{v},$$

wobei

$$m(v) \equiv m \gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Dies sieht so aus, als ob die Masse eines Körpers in einem bewegten Bezugssystem zunähme, man spricht von der **relativistischen Massenzunahme**. Das ist aber streng genommen nicht korrekt, da die Masse als Lorentz-Skalar in allen Bezugssystemen denselben Wert annimmt. Was aber zunimmt, ist die **kinetische Energie**:

$$T(v = 0) = E_0 = m c^2 \leq T(v \neq 0) = m \gamma c^2.$$

(iii) Die **relativistische Impulserhaltung** bedingt die **relativistische Energieerhaltung**, denn aus $\vec{p} = m \gamma \vec{v} = \overrightarrow{\text{const.}}$ folgt wegen

$$\text{const.} = m^2 c^2 = p^\mu p_\mu = \frac{T^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{T^2}{c^2} - \overrightarrow{\text{const.}}^2,$$

dass auch $T = \text{const.}$ sein muss. Dies sieht zunächst unschuldig aus, hat aber weitreichende Konsequenzen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

6.3.8 Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie

Betrachten wir z.B. eine explodierende Bombe. **Vor** der Explosion ist die **nichtrelativistische** kinetische Energie

$$T_{\text{nr}}^a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_i^a)^2 \equiv 0,$$

weil $\vec{v}_i^a = 0 \forall i$. **Nach** der Explosion gilt aber

$$T_{\text{nr}}^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_i^e)^2 \neq 0,$$

weil die Bestandteile der Bombe in alle Richtungen davonfliegen, $\vec{v}_i^e \neq 0$. Offenbar ist eine andere Energieform in kinetische Energie umgewandelt worden.

Da auch bei einer explodierenden Bombe die Impulserhaltung gilt, würden wir für die **relativistische** kinetische Energie nun nach dem im vorangegangenen Abschnitt Gesagten folgern, dass

$$T^a = T^e = \text{const.}$$

Aus dieser Gleichung würden wir **naiv** schließen, dass

$$0 = T^e - T^a = \sum_{i=1}^N (m_i \gamma_i^e c^2 - m_i \gamma_i^a c^2) = \sum_{i=1}^N m_i c^2 (\gamma_i^e - 1),$$

da am Anfang $\vec{v}_i^a \equiv 0$, also $\gamma_i^a \equiv 1$. Nun erhalten wir einen Widerspruch, da diese Gleichung nur für $\gamma_i^e = 1 \forall i$ erfüllbar ist, also auch $\vec{v}_i^e = 0$, d.h. die Bombe wäre gar nicht explodiert!

Bei dieser naiven Rechnung haben wir implizit davon Gebrauch gemacht, dass sich die Massen der einzelnen Bombenbestandteile nicht ändern. Diese Annahme ist aber zu restriktiv. Wir erlauben, dass $m_i^e \neq m_i^a$ und erhalten mit $\gamma_i^a = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= T^e - T^a \\ &= \sum_{i=1}^N (m_i^e \gamma_i^e c^2 - m_i^a \gamma_i^a c^2) \\ &= \sum_{i=1}^N [m_i^e c^2 (\gamma_i^e - 1) - (m_i^a c^2 - m_i^e c^2)] , \end{aligned}$$

bzw., mit den Definitionen $\Delta m_i \equiv m_i^a - m_i^e$ und $\Delta E_i \equiv \Delta m_i c^2$,

$$\sum_{i=1}^N \Delta E_i = \sum_{i=1}^N m_i^e c^2 (\gamma_i^e - 1) \simeq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^e (v_i^e)^2 + O\left(\frac{(v_i^e)^4}{c^4}\right) > 0 .$$

Dies bedeutet, dass wenigstens für **ein** Teilchen, z.B. das j -te unter den Bombenbestandteilen

$$\Delta E_j = \Delta m_j c^2 = (m_j^a - m_j^e) c^2 > 0$$

gelten muss. Offenbar ist ein **Massenverlust** des Teilchens aufgrund der Explosion aufgetreten, **Masse ist in Bewegungsenergie umgewandelt worden**. Dies ist die berühmt gewordene Beziehung zwischen Masse und Energie,

$$E = m c^2 . \tag{6.79}$$

Aber wo kommt diese Energiedifferenz tatsächlich her? Natürlich hat sich die Masse der **elementaren** Konstituenten der Materie **nicht** verändert, wohl aber ihre **Bindungsenergie**, die angibt, wie stark die einzelnen Konstituenten aneinander gebunden sind. Diese ist im Grunde genommen eine Form der potentiellen Energie. Bei einer konventionellen Bombe wird **chemische** Bindungsenergie der Moleküle, bei einer Atombombe **nukleare** Bindungsenergie der Nukleonen im Atomkern freigesetzt. Dabei wird ein energetisch schwächer gebundener Zustand in einen energetisch stärker gebundenen überführt. Die **Differenz** in der Bindungsenergie, also in der potentiellen Energie, wird in kinetische Energie umgewandelt.

Es gibt jedoch auch einen Prozess, bei dem die **komplette** Masse der beteiligten Reaktionspartner in Energie umgewandelt wird. Dies ist die sog. **Vernichtung von Teilchen und Antiteilchen**. Betrachten wir z.B. die Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma ,$$

d.h. ein Elektron und sein Antiteilchen, das Positron, vernichten sich und erzeugen zwei Lichtquanten (es müssen aufgrund der Impulserhaltung zwei sein, da ein einzelnes Lichtquant in Ruhe keine Energie trägt). Wenn wir annehmen, dass Elektron und Positron vor der Vernichtung in Ruhe waren, so lautet die Energiebilanz wie folgt:

$$E_{e^-e^+} = m_{e^-} c^2 + m_{e^+} c^2 = 2 m_{e^-} c^2 = 2 \cdot 511 \text{ keV} = 1,022 \text{ MeV} \equiv E_{2\gamma} .$$

Da Lichtquanten keine Ruheenergie besitzen, $m_\gamma c^2 \equiv 0$, liegt die komplette Energie als kinetische Energie vor.

6.3.9 Kovariante Formulierung der Lagrange-Mechanik für Felder

Die Euler-Lagrange-Gleichung (5.15) für Felder läßt sich sehr leicht in eine relativistisch kovariante Form bringen. Berücksichtigen wir, dass $ct = x^0$ die Nullkomponente und x, y, z die räumlichen Komponenten des kontravarianten 4-Ortsvektors (x^μ) darstellen, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial(ct)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial(ct)} \right)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^i} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\mu} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \\ &\equiv \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}, \quad a = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.80)$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention benutzt haben.

Die **Wirkung**

$$S = \int d^4 X \mathcal{L} = \int dt d^3 \vec{r} \mathcal{L}$$

einer Feldtheorie ist stets **invariant** unter sog. **Poincaré-Transformationen**. Diese bilden eine Gruppe, die aus dem direkten Produkt der Lorentz-Gruppe und der Gruppe der Raum-Zeit-Translationen besteht. Raum-Zeit-Translationen,

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu,$$

wobei (a^μ) ein **konstanter** 4-Vektor ist, lassen aber das 4-Volumen in der Raum-Zeit unverändert, $d^4 X' \equiv d^4 X$. Für Lorentz-Transformationen gilt

$$d^4 X \longrightarrow d^4 X' = d^4 X \mathcal{J},$$

wobei

$$\mathcal{J} \equiv \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right|$$

der **Betrag** der **Funktional-Determinante** beim Wechsel der Variablen $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ ist, vgl. Gl. (1.128) der Vorlesung "Mechanik I". Aufgrund von Gl. (6.50) ist aber

$$\mathcal{J} \equiv |\det (\Lambda^\mu_\nu)| = |\det \Lambda| \equiv 1,$$

weil die Determinante von Lorentz-Transformationen stets ± 1 ist. Also ist das infinitesimale Raum-Zeit-Volumen $d^4 X$ eine **Poincaré-Invariante**. Damit folgt sofort, dass die Lagrangedichte \mathcal{L} insbesondere ein **Lorentz-Skalar** ist, sie ist also **invariant** unter Lorentz-Transformationen. Damit ergibt sich das Transformationsverhalten von Gl. (6.80) unter Lorentz-Transformationen aus dem Transformationsverhalten der Felder φ_a .

Literaturverzeichnis

- [1] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik* (Springer, Berlin)
- [2] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik* (Springer, Berlin)
- [3] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* (Springer, Berlin)
- [4] W. Greiner, *Theoretische Physik Band 1: Mechanik I* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [5] W. Greiner, *Theoretische Physik Band 2: Mechanik II* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [6] R. Jelitto, *Theoretische Physik 2: Mechanik II* (AULA-Verlag, Wiesbaden)
- [7] R. Jelitto, *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (AULA-Verlag, Wiesbaden)
- [8] R. Dreizler, C. Lüdde, *Theoretische Physik 1: Theoretische Mechanik* (Springer, Berlin)
- [9] R. Dreizler, C. Lüdde, *Theoretische Physik 2: Elektrodynamik und spezielle Relativitätstheorie* (Springer, Berlin)
- [10] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik I: Mechanik* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [11] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [12] H. Goldstein, *Klassische Mechanik* (Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden)
- [13] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)