

Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Dirk H. Rischke

Wintersemester 2023/2024

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen der Elektrodynamik	1
1.1	Lagrange-Formalismus für Felder	2
1.1.1	Lagrange-Mechanik eines N -Teilchen-Systems	2
1.1.2	Lagrange-Mechanik eines kontinuierlichen Systems	4
1.1.3	Kovarianter Lagrange-Formalismus	7
1.2	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	11
1.2.1	4-Potential	11
1.2.2	Feldstärketensor	12
1.2.3	Transformationsverhalten elektromagnetischer Felder	15
1.2.4	Jacobi-Identität	17
1.2.5	Dualer Feldstärketensor	18
1.2.6	Lorentz-Invarianten des elektromagnetischen Feldes	19
1.2.7	Elektrische Ladung und 4-Ladungsstromdichte	20
1.2.8	Lagrange-Dichte der Elektrodynamik	21
1.2.9	Maxwell-Gleichungen	23
1.2.10	Kontinuitätsgleichung	26
1.3	Eichtransformationen	26
1.3.1	Eichinvarianz des Feldstärketensors	26
1.3.2	Eichinvarianz der Wirkung	27
1.3.3	Lorenz-Eichung	28
1.3.4	Coulomb-Eichung	29
1.4	Energie- und Impulssatz	30
1.4.1	Energie-Impuls-Tensor	30
1.4.2	Energie-Impuls-Satz	32
1.4.3	Energiesatz	33
1.4.4	Coulomb-Kraft	33
1.4.5	Impulssatz	35
1.4.6	Lorentz-Kraft	35
1.4.7	4-Lorentz-Kraft und 4-Lorentz-Kraftdichte	36
1.5	Punktladungen	37
1.5.1	Das Konzept der Punktladung	37
1.5.2	Diracsche δ -Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge	39
1.5.3	Eigenschaften der Diracschen δ -Funktion	41
1.6	Elektrodynamik in Integralform	44
1.6.1	Flächenintegrale	44
1.6.2	Satz von Gauß	48
1.6.3	Kontinuitätsgleichung in Integralform	52
1.6.4	Satz von Stokes	53

1.6.5	Maxwell–Gleichungen in Integralform	57
1.6.6	Energie-Impulssatz in Integralform	61
1.6.7	Greensche Theoreme	62
1.6.8	Helmholtzscher Zerlegungssatz	63
1.7	Lösung partieller Differentialgleichungen	68
1.7.1	Vollständige Funktionensysteme	69
1.7.2	Fourier-Reihen und Fourier-Integrale	73
1.7.3	Lineare homogene partielle Differentialgleichungen	79
1.7.4	Lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen und Greensche Funktionen	81
2	Elektrostatik	85
2.1	Grundgleichungen der Elektrostatik	85
2.1.1	Poisson–Gleichung	85
2.1.2	Lösung der Poisson–Gleichung	86
2.1.3	Elektrostatische Energie	95
2.2	Einfache elektrostatische Probleme	96
2.2.1	Felder an Grenzflächen	96
2.2.2	Plattenkondensator	98
2.3	Randwertprobleme	101
2.3.1	Poisson–Gleichung mit Randbedingungen	101
2.3.2	Klassifizierung von Randbedingungen	103
2.3.3	Randbedingungen und Greensche Funktionen	104
2.3.4	Methode der Spiegelladungen	107
2.4	Multipolentwicklung	114
2.4.1	Laplace–Gleichung in Kugelkoordinaten und Kugelflächenfunktionen	114
2.4.2	Multipolentwicklung	120
3	Magnetostatik	129
3.1	Grundgleichungen der Magnetostatik	129
3.1.1	Gesetz von Biot-Savart	129
3.1.2	Kontinuitätsgleichung	133
3.2	Ampèresches Gesetz	134
3.3	Ohmsches Gesetz	137
3.3.1	Herleitung des Ohmschen Gesetzes	137
3.3.2	Mikroskopische Betrachtung zur elektrischen Leitfähigkeit	137
3.4	Magnetisches Moment	141
4	Elektrodynamik	145
4.1	Elektromagnetische Wellen im Vakuum	145
4.1.1	Homogene Wellengleichung	145
4.1.2	Ebene Wellen	146
4.1.3	Polarisation ebener Wellen	153
4.1.4	Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung	158
4.1.5	Wellenpakete	161

4.1.6	Aberration und Doppler-Effekt	165
4.2	Erzeugung elektromagnetischer Wellen	169
4.2.1	Inhomogene Wellengleichung	169
4.2.2	Liénard–Wiechert–Potentiale	176
4.2.3	Energieverlust beschleunigter Ladungen	177
5	Makroskopische Elektrodynamik	183
5.1	Makroskopische Maxwell–Gleichungen	184
5.1.1	Makroskopischer Mittelwert	184
5.1.2	Gemittelte Maxwell–Gleichungen	185
5.1.3	Polarisation	185
5.1.4	Dielektrische Verschiebung	188
5.1.5	Magnetisierung	188
5.1.6	Magnetfeld	191
5.2	Klassifizierung von Materialien	192
5.2.1	Dielektrika	192
5.2.2	Magnetika	195
5.3	Elektromagnetische Wellen in Materie	197
5.3.1	Wellenausbreitung in Materie	198
5.3.2	Felder an Grenzflächen	198
5.3.3	Reflexions- und Brechungsgesetz	200
5.3.4	Intensitäten bei Reflexion und Brechung	202
5.3.5	Energietransport bei Reflexion und Brechung	207
5.3.6	Wellenausbreitung in elektrischen Leitern	209

1 Grundlagen der Elektrodynamik

17.10.2023

Die **Elektrodynamik** ist die erste echte **Feldtheorie**, die uns in der Theoretischen Physik begegnet. Sie wurde von *James Clark Maxwell* 1861 - 1864 entwickelt und stellt eine **vereinheitlichte Beschreibung** aller Phänomene dar, die von **elektrischer** bzw. **magnetischer** Natur sind. Sie beschreibt außerdem die Ausbreitung **elektromagnetischer Wellen**, also insbesondere von **Lichtwellen**. Es konnte gezeigt werden, dass die **Strahlenoptik** als Spezialfall der Elektrodynamik anzusehen ist für den Fall, dass die Wellenlänge des Lichtes klein im Vergleich zur Ausdehnung der Objekte ist, an denen das Licht gestreut wird.

Als Theorie der Lichtausbreitung muss die Elektrodynamik den Gesetzen der **Speziellen Relativitätstheorie** genügen, also insbesondere mit den **Einsteinischen Postulaten** kompatibel sein. Mit anderen Worten: sie muss als **relativistisch kovariante Theorie** formulierbar sein.

Die Elektrodynamik wird in dieser Vorlesung auf rein **klassischem** Niveau behandelt. Sie ist aber ohne weiteres zu einer **Quantenfeldtheorie** verallgemeinerbar, der sog. **Quantenelektrodynamik (QED)**.

Die zentralen Größen der Elektrodynamik sind **elektrische** und **magnetische Felder**. Ein Feld ist eine Größe, die an **jedem** Raum-Zeitpunkt einen wohldefinierten Wert annimmt. Dies steht im Gegensatz zu mechanischen Massenpunkten, die sich lediglich an **einem speziellen Ort** zu **einer gegebenen Zeit** befinden. Deren Dynamik haben wir in den ersten beiden Vorlesungen "Theoretische Physik I: Mathematische Methoden" und "Theoretische Physik II: Klassische Mechanik" kennengelernt. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit der Dynamik elektromagnetischer Felder.

Wie in der Vorlesung "Theoretische Physik II: Klassische Mechanik" gesehen, kann man den Lagrange-Formalismus für Massenpunkte auch auf Felder verallgemeinern. Dazu benötigt man anstelle der Lagrange-Funktion die sog. **Lagrange-Dichte**. Aus der Lagrange-Dichte leitet man mit Hilfe der **Euler-Lagrange-Gleichungen** die Bewegungsgleichungen für die Felder ab.

In diesem Kapitel rekapitulieren wir zunächst den Lagrange-Formalismus für Felder, bevor wir ihn zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für die elektromagnetischen Felder, der sog. **Maxwell-Gleichungen**, anwenden. Dies wird, entsprechend den Anforderungen der Speziellen Relativitätstheorie, unter Berücksichtigung der relativistischen Kovarianz der auftretenden Größen durchgeführt. Sodann diskutieren wir die sog. **Eichtransformationen** der elektromagnetischen Potentiale. Als nächstes diskutieren wir den **Energie- und Impulsinhalt** des elektromagnetischen Feldes und die **Kraft**, die von elektromagnetischen Feldern auf Ladungen ausgeübt wird. Um das Konzept einer Punktladung in der Feldtheorie zu definieren, führen wir den Begriff der **Diracschen δ -Funktion** ein. Die Maxwell-Gleichungen in Integralform erfordern Kenntnisse einiger Integralsätze, wie

den **Satz von Gauß** und den **Satz von Stokes**. Ebenfalls nützlich sind die Kenntnis der **Greenschen Theoreme** und des **Helmholtzschen Zerlegungssatzes**, die wir im Anschluss diskutieren. Den Abschluss dieses Kapitels bildet ein mathematischer Einschub, wo wir die Lösung partieller Differentialgleichungen präsentieren und das überaus wichtige Konzept der **Greenschen Funktionen** einführen.

1.1 Lagrange–Formalismus für Felder

1.1.1 Lagrange–Mechanik eines N –Teilchen–Systems

In der Vorlesung “Theoretische Physik II: Klassische Mechanik” haben wir die Mechanik nach Lagrange kennengelernt. Zentrales Objekt der Lagrangeschen Mechanik ist die **Lagrange–Funktion**

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \equiv T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t) , \quad (1.1)$$

die die Differenz von kinetischer Energie $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ und potentieller Energie $V(\vec{q}, t)$ darstellt und von den **generalisierten Koordinaten** $\vec{q} \equiv (q_1, \dots, q_S)$, den **generalisierten Geschwindigkeiten** $\dot{\vec{q}} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S)$ und der **Zeit** t abhängt. Die Bewegungsgleichungen für das mechanische System folgen (für den Fall holonomer Zwangsbedingungen) aus den **Euler–Lagrange–Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, \dots, S , \quad (1.2)$$

Als einfaches Beispiel mit einem einzigen Freiheitsgrad betrachten wir den eindimensionalen harmonischen Oszillator, für den gilt

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 , \quad V(q) = \frac{1}{2} k q^2 , \quad L(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 ,$$

wobei die generalisierte Koordinate q die Auslenkung des Teilchens der Masse m aus der Ruhelage ist. Aus der Euler–Lagrange–Gleichung (1.2) erhalten wir demzufolge

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} (m \dot{q}) + k q = m \ddot{q} + k q \iff \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 , \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} ,$$

also in der Tat die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 . Die Lösungen sind wohlbekannt,

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) .$$

Als Beispiel für ein N –Teilchensystem betrachten wir die **longitudinal schwingende Kette** (vgl. Abschnitt 5.1 aus der Vorlesung “Theoretische Physik II: Klassische Mechanik”), s. Abb. 1.1.

In der Ruhelage haben die Massen den Abstand a . Beim Schwingen wird die i –te Masse um eine Distanz φ_i aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. Die kinetische Energie des Systems beträgt

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^N \dot{\varphi}_j^2 . \quad (1.3)$$

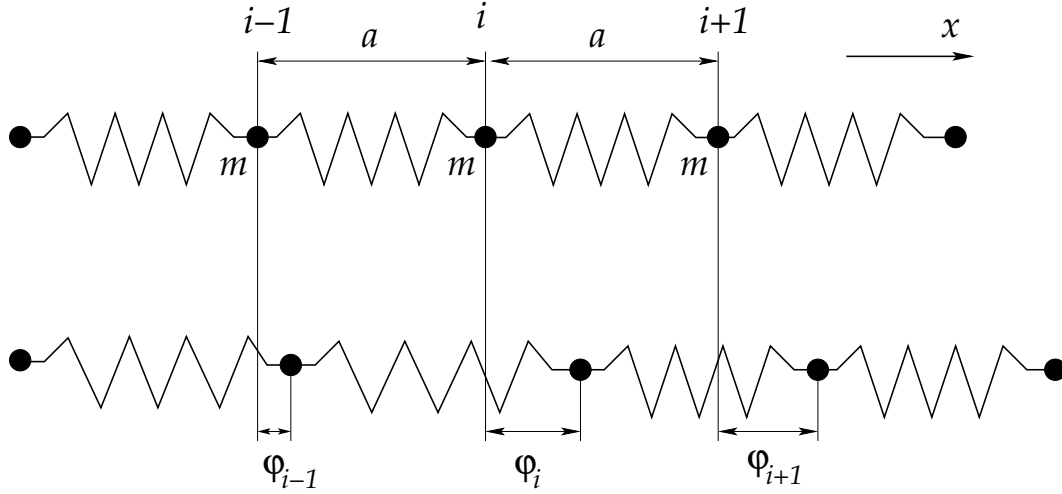


Abbildung 1.1: Die longitudinal schwingende Kette.

Die potentielle Energie ist

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^{N-1} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2 . \quad (1.4)$$

Wir haben uns in Abschnitt 5.1 der Vorlesung “Theoretische Physik II” davon überzeugt, dass dieser Ausdruck korrekt ist, weil er das Hookesche Kraftgesetz für die einzelnen Massenpunkte liefert.

Mit den Glgen. (1.3) und (1.4) lautet die Lagrange-Funktion des Systems

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[m \dot{\varphi}_j^2 - k (\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} a \left[\frac{m}{a} \dot{\varphi}_j^2 - ka \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{a} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} a \left[\mu \dot{\varphi}_j^2 - \kappa \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{a} \right)^2 \right] \\ &\equiv \sum_{j=1}^{N-1} a \mathcal{L}_j , \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei wir die **Masse pro Längeneinheit** $\mu \equiv m/a$, das **Elastizitätsmodul** $\kappa \equiv ka$ und die **Lagrange-Funktion pro Längeneinheit** für den j -ten Massenpunkt, $\mathcal{L}_j$, eingeführt haben. Desweiteren haben wir die kinetische Energie des N -ten Massenpunktes vernachlässigt. Falls $N \gg 1$, ist dies eine gerechtfertigte Näherung, da die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes die Bewegung des gesamten Systems nicht wesentlich beeinflussen kann.

Die Auslenkungen φ_i der Massen repräsentieren die **Freiheitsgrade** des Systems. Die

Euler–Lagrange–Gleichungen (1.2) für diese Freiheitsgrade lauten

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} a \frac{d}{dt} \left(2 \mu \dot{\varphi}_j \frac{\partial \dot{\varphi}_j}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} 2 a \kappa \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial \varphi_i} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{N-1} a \left[\mu \ddot{\varphi}_j \delta_{ij} + \kappa \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{a^2} (\delta_{i,j+1} - \delta_{ij}) \right] \\
 \implies 0 &= \mu \ddot{\varphi}_i + \kappa \left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{a^2} - \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a^2} \right) \\
 &= \mu \ddot{\varphi}_i - \kappa \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{a^2} .
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.1.2 Lagrange–Mechanik eines kontinuierlichen Systems

Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts lassen sich auf ein Kontinuum von Massenpunkten verallgemeinern. Wir betrachten dazu den Limes $N \rightarrow \infty$ und gleichzeitig $a \rightarrow 0$, so dass die Kettenlänge $\ell \equiv (N-1)a$ endlich bleibt. Die Kette geht dann über in einen **kontinuierlichen elastischen Stab**. Der Positionsindex i nimmt **kontinuierliche Werte** an; wir können ihn durch die x –Koordinate ersetzen,

$$\varphi_i(t) \longrightarrow \varphi(t, x) .$$

Der Abstand a zwischen den Massen wird durch das infinitesimale Differential dx ersetzt, so dass

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)}{a} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, x+dx) - \varphi(t, x)}{dx} \equiv \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} , \\
 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i-1}(t)}{a^2} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, x+dx) - 2\varphi(t, x) + \varphi(t, x-dx)}{dx^2} \\
 = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \left[\frac{\varphi(t, x+dx) - \varphi(t, x)}{dx} - \frac{\varphi(t, x) - \varphi(t, x-dx)}{dx} \right] &\equiv \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} .
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass aufgrund der Abhängigkeit der Auslenkung $\varphi(t, x)$ von Zeit **und** Ort nun partielle Ableitungen auftreten. Daher ist die Differentiation von φ_i nach der Zeit ebenfalls durch eine partielle Ableitung zu ersetzen,

$$\dot{\varphi}_i \longrightarrow \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} , \quad \ddot{\varphi}_i \longrightarrow \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} .$$

Die Lagrange–Funktion (1.5) geht über in

$$L = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{N-1} a \mathcal{L}_j \equiv \int_0^\ell dx \mathcal{L} , \tag{1.7}$$

wobei

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \quad (1.8)$$

die sog. **Lagrange-Dichte** ist. Die Bewegungsgleichung (1.6) nimmt die Form

$$0 = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

an.

Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich auf ein dreidimensionales System verallgemeinern. Gleichung (1.7) lautet dann

$$L = \int_V dx dy dz \mathcal{L} \equiv \int_V d^3 \vec{r} \mathcal{L} , \quad (1.10)$$

wobei V das Volumen des betrachteten Systems ist. Anhand von Gl. (1.8) sehen wir, dass die **Lagrange-Dichte** $\mathcal{L}$ nicht nur eine Funktion von $\partial \varphi / \partial t$ ist, sondern auch von den räumlichen Ableitungen $\partial \varphi / \partial x$ abhängt. In drei Dimensionen treten dann i.a. auch partielle Ableitungen nach y und z auf. Desweiteren kann die Lagrange-Dichte auch vom Feld φ selbst und (explizit) von Zeit und Ort abhängen. I.a. treten also folgende funktionale Abhängigkeiten auf:

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{\nabla} \varphi, t, \vec{r} \right) , \quad (1.11)$$

wobei wir die partiellen Ableitungen von φ nach den Ortskoordinaten durch den Gradienten ausgedrückt haben, $\vec{\nabla} \varphi \equiv (\partial \varphi / \partial x, \partial \varphi / \partial y, \partial \varphi / \partial z)$.

Man beachte, dass im Vergleich zur Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ in der Lagrange-Dichte das Feld φ die Rolle der generalisierten Koordinaten q_i übernimmt, seine Ableitungen $\partial \varphi / \partial t, \vec{\nabla} \varphi$ die der generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, und dass die explizite Abhängigkeit von der Zeit t um eine von Zeit t **und** Ort $\vec{r}$ erweitert wird. Die Ortsvariable hat nicht länger die Bedeutung der Koordinate eines Teilchens, sondern sie ist lediglich ein **kontinuierlicher** Index, ähnlich wie der Index i bei den generalisierten Koordinaten q_i . In der Lagrange-Funktion waren $q_i, \dot{q}_i$ unabhängige **Freiheitsgrade** des Systems. In der Lagrange-Dichte sind die Freiheitsgrade des Systems das Feld φ und seine Ableitungen $\partial \varphi / \partial t, \vec{\nabla} \varphi$. Da diese Funktionen an **jedem** Punkt $(t, \vec{r})$ der Raum-Zeit unterschiedliche und (prinzipiell) voneinander unabhängige Werte annehmen können, stellt dies ein System mit **unendlich vielen** Freiheitsgraden dar.

Für kontinuierliche Systeme spielt die Lagrange-Dichte dieselbe Rolle wie die Lagrange-Funktion für diskrete Systeme. Daher muss es prinzipiell möglich sein, die Bewegungsgleichung (z.B. Gl. (1.9) für das obige Beispiel des elastischen Stabes) für das Feld $\varphi(t, \vec{r})$ aus der Lagrange-Dichte selbst abzuleiten. Dies soll im Folgenden erläutert werden.

Zunächst sollten die Bewegungsgleichungen prinzipiell aus dem **Hamiltonschen Prinzip** folgen (vgl. Abschnitt 2.3 der Vorlesung "Theoretische Physik II"), welches mit Gl. (1.11) lautet

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} dt d^3 \vec{r} \mathcal{L} = 0 . \quad (1.12)$$

Die Integration läuft über ein **Raum-Zeit-Volumen** $\Omega \equiv [t_a, t_e] \times V$. Die Variation δ auf der rechten Seite dieser Gleichung bezieht sich auf die Freiheitsgrade $\varphi, \partial \varphi / \partial t, \vec{\nabla} \varphi$ des

Systems, **nicht aber** auf die Zeit- und Ortskoordinaten $t, \vec{r}$ in der Lagrange-Dichte (1.11). Das Raum-Zeit-Volumen Ω wird **nicht** mitvariiert, ebensowenig wie das Feld $\varphi(t, \vec{r})$ auf der **Oberfläche** $\partial\Omega$ des Raum-Zeit-Volumens Ω ,

$$\delta\varphi(t, \vec{r})|_{t, \vec{r} \in \partial\Omega} = 0, \quad (1.13)$$

vgl. Diskussion in Abschnitt 5.2 der Vorlesung “Theoretische Physik II”. Diese Einschränkung gilt aber **nicht** für die partiellen Ableitungen des Feldes.

Aufgrund dieser Vorbemerkungen können wir die Variation in Gl. (1.12) unter das Raum-Zeit-Integral schreiben und auf die Lagrange-Dichte anwenden. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir dann

$$0 = \int_{\Omega} dt d^3\vec{r} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \right]. \quad (1.14)$$

Bei festgehaltenem $t, \vec{r}$ darf man Variation und partielle Ableitung vertauschen,

$$\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t}, \quad \delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \equiv \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i}.$$

Dann können wir einige Terme in Gl. (1.14) partiell integrieren, z.B.

$$\int_{t_a}^{t_e} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} \delta\varphi \Big|_{t_a}^{t_e} - \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} \delta\varphi.$$

Der erste Term verschwindet aber aufgrund der Bedingung (1.13), da das Feld auf der Oberfläche $\partial\Omega$ des Raum-Zeit-Volumens nicht variiert wird und die Zeitpunkte $t = t_a$ und $t = t_e$ zu $\partial\Omega$ gehören. Ganz ähnlich verfährt man mit den Termen, die die räumlichen Ableitungen des Feldes enthalten. Auch diese verschwinden, da das Feld auch auf dem räumlichen Teil der Oberfläche $\partial\Omega$ nicht variiert wird. Letztlich erhalten wir

$$0 = \int_{\Omega} dt d^3\vec{r} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} \right] \delta\varphi.$$

Da die Variation $\delta\varphi(t, \vec{r})$ des Feldes an jedem Raum-Zeit-Punkt $(t, \vec{r})$ unabhängig ist, muss der Term in eckigen Klammern verschwinden,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}. \quad (1.15)$$

Dies ist die **Euler-Lagrange-Gleichung** für kontinuierliche Systeme, d.h. für das Feld φ , welches die (unendlich vielen) Freiheitsgrade eines solchen kontinuierlichen Systems darstellt.

Wir überzeugen uns davon, dass Gl. (1.15) die richtige Bewegungsgleichung für das Feld φ darstellt, indem wir sie auf das Beispiel des elastischen Stabes anwenden, also die

Bewegungsgleichung (1.15) mit der Lagrange-Dichte (1.8) berechnen und zeigen, dass wir daraus die Bewegungsgleichung (1.9) erhalten.

Die Lagrange-Dichte (1.8) enthält nur Ableitungen des Feldes, also ist $\partial\mathcal{L}/\partial\varphi \equiv 0$. Die Ableitung von $\mathcal{L}$ nach der partiellen Ableitung des Feldes nach der Zeit ergibt

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} = \mu \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

und die Ableitung nach der partiellen Ableitung des Feldes nach der Raumkoordinate x ist

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} = -\kappa \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Da es sich um ein eindimensionales Problem handelt, treten keine Abhängigkeiten oder Ableitungen nach y oder z auf. Eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung (1.15) erhalten wir

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\kappa \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \equiv \mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

was mit der vormals abgeleiteten Bewegungsgleichung (1.9) übereinstimmt.

Falls wir ein System betrachten, in dem nicht nur ein einziges, sondern **mehrere** Felder auftreten, so tragen diese einen weiteren Index,

$$\varphi_a(t, \vec{r}), \quad a = 1, 2, \dots$$

Dann erfüllt **jedes** dieser Felder eine Euler-Lagrange-Gleichung vom Typ (1.15),

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial t}\right)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial x_i}\right)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}, \quad a = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

1.1.3 Kovarianter Lagrange-Formalismus

20.10.2023

Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts lassen sich sehr einfach in relativistisch kovariante Form bringen (vgl. Abschnitt 6.3.9 der Vorlesung “Theoretische Physik II: Klassische Mechanik”). Dazu erinnern wir uns an einige wichtige Relationen aus der Speziellen Relativitätstheorie.

Der **kontravariante 4-Ortsvektor** im **Minkowski-Raum**, also der **vierdimensionalen Raum-Zeit** (vgl. Abschnitt 6.2.1 der Vorlesung “Theoretische Physik II”), ist definiert als

$$X \equiv (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (ct, x, y, z)^T \equiv (ct, \vec{r})^T, \quad (1.17)$$

wobei c die **Lichtgeschwindigkeit** ist. Neben den kontravarianten 4-Vektoren (mit hochgestellten Indizes) gibt es auch die **kovarianten 4-Vektoren** (mit herkömmlichen, tiefgestellten Indizes). Den Zusammenhang zwischen beiden Arten von Vektoren liefert der **metrische Tensor**

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Z.B. ergeben sich für die Komponenten des kovarianten 4-Ortsvektors

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu , \quad (1.19)$$

wobei wir die **Einsteinsche Summenkonvention** benutzt haben, die besagt, dass über paarweise gleiche kontra- und kovariante Indizes summiert wird. (In diesem Fall impliziert dies eine Summe über ν von 0 bis 3 auf der rechten Seite der Gleichung.) Mit Gl. (1.18) berechnet sich der kovariante 4-Ortsvektor daher zu

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}) . \quad (1.20)$$

Mit dem metrischen Tensor (1.18) lassen sich also kontravariante Indizes “herunterziehen”, d.h. in kovariante umwandeln.

Mit dem Inversen des metrischen Tensors,

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (1.21)$$

lassen sich Indizes aber auch “heraufziehen”, d.h. kovariante in kontravariante umwandeln. Z.B. gilt für den Ortsvektor

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu ,$$

wobei wir wieder die Einsteinsche Summenkonvention benutzt haben.

In geradlinigen Koordinatensystemen ist der vollständig kontravariante metrische Tensor (1.21) identisch mit dem vollständig kovarianten metrischen Tensor (1.18). In krummlinigen Koordinatensystemen ist dies i.a. nicht mehr der Fall. Es gilt aber stets

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu , \quad (1.22)$$

wobei

$$(\delta^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad (1.23)$$

die (4×4) -**Einheitsmatrix** ist. Da der metrische Tensor $g_{\lambda\nu}$ Indizes herunterzieht, können wir die Einheitsmatrix auch als metrischen Tensor mit **gemischten Indizes** ansehen,

$$\delta^\mu_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} \equiv g^\mu_\nu . \quad (1.24)$$

Um die Euler–Lagrange–Gleichungen für Felder (1.16) in relativistisch kovariante Form zu bringen, benötigen wir noch den **4-Gradienten**,

$$(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) . \quad (1.25)$$

Der 4-Gradient ist der 4-Vektor, der sich aus den partiellen Ableitungen nach den Komponenten des **kontravarianten** 4-Ortsvektors ergibt. Er selbst ist aber ein **kovarianter**

4-Vektor, was durch die Stellung des Index auf der linken Seite der Gleichung verdeutlicht wird. (Salopp gesprochen entspricht ein **kontravarianter** Index im **Nenner** eines Bruchs, hier also der des Ortsvektors x^μ , einem **kovarianten** Index im **Zähler**, und umgekehrt.)

Der Unterschied zwischen kontra- und kovarianten Indizes ergibt sich aus ihrem Verhalten unter **Lorentz-Transformationen**. Sei $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_\nu)$ eine **Lorentz-Transformationsmatrix**. Dann gilt für einen **kontravarianten** 4-Vektor $A \equiv (a^\mu)$

$$A' = \Lambda A \iff a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu ,$$

also insbesondere für den 4-Ortsvektor

$$X' = \Lambda X \iff x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu . \quad (1.26)$$

Daraus folgt durch Ableiten nach x^λ , dass

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} \equiv \Lambda^\mu_\nu \delta^\nu_\lambda = \Lambda^\mu_\lambda . \quad (1.27)$$

Die Komponenten der Lorentz-Transformationsmatrix ergeben sich also aus den partiellen Ableitungen der Komponenten des transformierten 4-Ortsvektors X' nach den Komponenten des ursprünglichen 4-Ortsvektors X .

Kovariante 4-Vektoren transformieren sich jedoch mit der **Inversen** der Lorentz-Transformationsmatrix,

$$a'_\mu = a_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu . \quad (1.28)$$

Dies liegt daran, dass Lorentz-Transformationen das **4-Skalarprodukt**

$$a_\mu a^\mu \equiv a^\nu g_{\nu\mu} a^\mu \equiv (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 \quad (1.29)$$

eines 4-Vektors mit sich selbst per Definition **invariant** lassen, also

$$a'_\mu a'^\mu \equiv a_\nu a^\nu .$$

Diese Gleichung bedingt, dass

$$a'_\mu a'^\mu = a'_\mu \Lambda^\mu_\nu a^\nu \equiv a_\nu a^\nu \iff a'_\mu \Lambda^\mu_\nu \equiv a_\nu .$$

Multiplikation von rechts mit der Inversen der Lorentz-Transformationsmatrix ergibt

$$a'_\mu \Lambda^\mu_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\lambda = a'_\mu \delta^\mu_\lambda \equiv a'_\lambda = a_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\lambda ,$$

womit Gl. (1.28) bewiesen wäre. Wegen

$$X = \Lambda^{-1} X' \iff x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\lambda x'^\lambda$$

gilt nach Ableiten beider Seiten nach x'^μ , dass

$$(\Lambda^{-1})^\nu_\mu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} . \quad (1.30)$$

Nun können wir uns sehr leicht davon überzeugen, dass der 4-Gradient (1.25) ein kovarianter 4-Vektor ist. Mit Hilfe der Kettenregel schreiben wir den 4-Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion φ nach dem transformierten 4-Ortsvektor X' als

$$\partial'_\mu \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \equiv (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \equiv (\partial_\nu \varphi) (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu ,$$

wobei wir Gl. (1.30) benutzt haben. Durch Vergleich mit Gl. (1.28) stellen wir fest, dass sich der 4-Gradient wie ein **kovarianter** 4-Vektor transformiert.

Durch Heraufziehen des Index mit Hilfe des metrischen Tensors läßt sich natürlich auch die **kontravariante** Version des 4-Gradienten konstruieren,

$$\begin{aligned} (\partial^\mu) &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)^T \\ &\equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)^T . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Die funktionalen Abhängigkeiten (1.11) der Lagrange-Dichte lassen sich mit dem 4-Gradienten und dem 4-Ortsvektor sehr kompakt zu

$$\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, X) \quad (1.32)$$

zusammenfassen. Wir benutzen nun den 4-Gradienten (1.25) und die Einsteinsche Summenkonvention, um Gl. (1.16) in

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial(ct)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial(ct)} \right)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^i} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\mu} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \\ &\equiv \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} , \quad a = 1, 2, \dots , \end{aligned} \quad (1.33)$$

umzuschreiben, vgl. Gl. (6.80) des Skripts der Vorlesung “Theoretische Physik II”.

Die bloße Verwendung von 4-Vektoren ist natürlich nicht ausreichend, um Naturgesetze wie die Bewegungsgleichungen (1.33) für die Felder φ_a wirklich relativistisch kovariant zu machen. Wir erinnern uns (Abschnitt 6.3.2 der Vorlesung “Theoretische Physik II”), dass die **relativistisch kovariante Formulierung von Naturgesetzen** sich dadurch auszeichnet, dass sich linke und rechte Seiten einer Gleichung wie **Lorentz-Tensoren derselben Stufe** transformieren, also z.B.

$$a = b \text{ (Lorentz-Skalar)} , \quad a^\mu = b^\mu \text{ (4-Vektor)} , \quad A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} \text{ (Tensor 2. Stufe)} , \text{ etc.}$$

Was ist das Verhalten der Feldgleichung (1.33) unter Lorentz-Transformationen? Dazu betrachten wir zunächst das Verhalten der Lagrange-Dichte unter Lorentz-Transformationen. (Da sie keinen Lorentz-Index trägt, ist unsere Erwartung, dass sie sich wie ein **Lorentz-Skalar** transformiert.)

In Abschnitt 6.3.9 der Vorlesung “Theoretische Physik II” hatten wir gesehen, dass die **Wirkung**

$$S = \frac{1}{c} \int d^4X \mathcal{L} = \int dt d^3\vec{r} \mathcal{L}$$

einer Feldtheorie stets **invariant** unter sog. **Poincaré-Transformationen** sein muss. Diese bilden aus mathematischer Sicht eine **Gruppe**, die aus dem direkten Produkt der Lorentz-Gruppe und der Gruppe der Raum-Zeit-Translationen besteht. Wenn die Wirkung also invariant unter Poincaré-Transformationen ist, ist sie insbesondere ein **Lorentz-Skalar**. Raum-Zeit-Translationen,

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu ,$$

wobei (a^μ) ein **konstanter** 4-Vektor ist, lassen aber das 4-Volumen in der Raum-Zeit unverändert, $d^4X' \equiv d^4X$. Für Lorentz-Transformationen gilt

$$d^4X \longrightarrow d^4X' = d^4X \mathcal{J} ,$$

wobei

$$\mathcal{J} \equiv \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right|$$

der **Betrag** der **Funktional-Determinante** beim Wechsel der Variablen $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ ist, vgl. Gl. (1.128) der Vorlesung “Theoretische Physik I”. Aufgrund von Gl. (1.27) ist aber

$$\mathcal{J} \equiv |\det(\Lambda^\mu_\nu)| = |\det\Lambda| \equiv 1 ,$$

weil die Determinante von Lorentz-Transformationen stets ± 1 ist. Also ist das infinitesimale Raum-Zeit-Volumen d^4X eine **Poincaré-Invariante**. Damit folgt sofort, dass auch die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ ein **Lorentz-Skalar** ist, sie ist also **invariant** unter Lorentz-Transformationen. Damit ergibt sich das Transformationsverhalten von Gl. (1.33) unter Lorentz-Transformationen ausschließlich aus dem Transformationsverhalten der Felder φ_a .

Sind diese Felder Lorentz-Skalare, so sind auch die Feldgleichungen (1.33) Lorentz-Skalare. Sind sie 4-Vektoren, ist der Index a also ein Lorentz-Index, $\varphi_a \equiv \varphi_\nu$, $\nu = 0, \dots, 3$, so transformieren sie sich ebenfalls wie 4-Vektoren. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Feldgleichung für ein **kovariantes** 4-Vektorfeld φ_ν wie ein **kontravarianter** 4-Vektor transformiert, denn φ_ν steht im **Nenner** der Feldgleichung (1.33). Entsprechendes gilt für Lorentz-Tensoren höherer Stufe.

1.2 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

1.2.1 4-Potential

Um die Bewegungsgleichungen für die Elektrodynamik, also die **Maxwell-Gleichungen** abzuleiten, benötigen wir die **Lagrange-Dichte der Elektrodynamik**. Diese ist nach

(1.32) eine Funktion der Felder, ihrer partiellen Ableitungen, sowie ggfs. von der Raum-Zeit, X . Aber was sind die der Elektrodynamik zugrundeliegenden Felder? Das **fundamentale Feld der Elektrodynamik** ist das sog. **4-Potential**

$$(A^\mu) \equiv \left(\frac{1}{c} \varphi, \vec{A} \right)^T, \quad (1.34)$$

wobei man die 0-Komponente, φ , gewöhnlich als **skalares Potential** und die räumlichen Komponenten, $\vec{A}$, als **Vektorpotential** bezeichnet.

Aus Sicht der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik ist die erste Bezeichnung inkorrekt, da das “skalare” Potential kein Lorentz-Skalar sondern die 0-Komponente eines 4-Vektors ist. Diese transformiert sich unter Lorentz-Transformationen (genauer gesagt, unter Lorentz-Boosts; Raumdrehungen lassen φ in der Tat invariant), während ein echter Lorentz-Skalar (als Lorentz-Invariante) dies nicht tut. Wenden wir z.B. einen Lorentz-Boost in z -Richtung auf (A^μ) an,

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu,$$

so ergibt sich mit der expliziten Form der Lorentz-Transformationsmatrix (vgl. Gl. (6.42) der Vorlesung “Theoretische Physik II”)

$$\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

wobei $\beta \equiv v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ und v die Relativgeschwindigkeit zwischen ruhendem und geboostetem Inertialsystem ist, dass

$$\begin{aligned} \varphi' &= \gamma(\varphi - v A^z), \\ A'^x &= A^x, \\ A'^y &= A^y, \\ A'^z &= \gamma\left(A^z - \frac{v}{c^2} \varphi\right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Das “skalare” Potential φ' enthält also im geboosteten System einen Anteil vom Vektorpotential $\vec{A}$ im ruhenden System, und entsprechend das Vektorpotential $\vec{A}'$ im geboosteten auch einen Anteil vom “skalaren” Potential φ im ruhenden System.

24.10.2023

1.2.2 Feldstärketensor

Mit Hilfe des 4-Gradienten des 4-Potentials bildet man den sog. **Feldstärketensor**

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.37)$$

Er ist ein **Lorentz-Tensor zweiter Stufe** und, wie man an seiner Definition sofort erkennt, vollständig **antisymmetrisch**,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (1.38)$$

Dies bedeutet insbesondere, dass $F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} \equiv 0$. Die übrigen Komponenten des Feldstärketensors sind

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \equiv \frac{1}{c} E^i, \quad i = x, y, z, \quad (1.39)$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i \equiv -\epsilon^{ijk} B^k, \quad i, j = x, y, z, \quad (1.40)$$

wobei E^i die i -te Komponente des 3-Vektors des **elektrischen Feldes**, $\vec{E}$, und B^k die k -te Komponente des 3-Vektors der **magnetischen Induktion**, $\vec{B}$, ist. Der vollständig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor in Gl. (1.40) ist definiert als

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123), \\ -1, & (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

vgl. Gl. (1.46) der Vorlesung "Theoretische Physik I". In Gl. (1.40) haben wir die Einsteinsche Summenkonvention erweitert, indem wir vereinbaren, dass auch über doppelt vorkommende **räumliche** Indizes (in diesem Fall k) zu summieren ist (allerdings nur von $k = 1$ bis 3). Dies gelte nicht nur, wenn einer ko- und einer kontravariant ist, sondern auch, wenn beide kontravariant (wie hier) oder beide kovariant sind.

Wenn man kontravariante räumliche Indizes in kovariante (durch Herunterziehen) umwandelt (und umgekehrt kovariante in kontravariante durch Heraufziehen), ist ein Vorzeichenwechsel aufgrund der Definition des metrischen Tensors (1.18) zu beachten, z.B.

$$a_i = g_{i\nu} a^\nu = g_{i0} a^0 + g_{ij} a^j = -g^i_j a^j = -a^i.$$

Hier haben wir im vorletzten Schritt benutzt, dass $g_{i0} = 0$ und $g_{ij} = -1 = -g^i_j$ ist. Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass $g^i_j \equiv \delta^i_j$ für $i \neq j$ verschwindet. Für zeitliche Indizes ist dies unproblematisch, sie können ohne Vorzeichenwechsel sowohl in kontra- als auch in kovarianter Stellung geschrieben werden, z.B.

$$a_0 = g_{0\nu} a^\nu = g_{00} a^0 + g_{0j} a^j = g_{00} a^0 = a^0.$$

Also ergeben sich für die Komponenten des Feldstärketensors die Beziehungen

$$F^{i0} = -F_i^0 = -F_{i0} = F_{0i} = -F_0^i = -F^{0i}, \quad F^{ij} = -F^i_j = F_{ij} = -F_{ji} = F_j^i = -F^{ji}. \quad (1.41)$$

Nutzen wir die Tatsache, dass beim Herauf- oder Herunterziehen eines räumlichen Index ein Vorzeichenwechsel stattfindet, während dies bei einem zeitlichen Index nicht passiert, erhalten wir mit Gl. (1.34) eine Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und den Komponenten des 4-Vektorpotentials,

$$\frac{1}{c} E^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i \implies \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.42)$$

wobei wir $x^0 = ct$ benutzt haben. Eine entsprechende Gleichung für die magnetische Induktion erhalten wir, indem wir beide Seiten von Gl. (1.40) mit $\epsilon^{ij\ell}$ multiplizieren und

über i und j summieren. Benutzen wir dann nämlich den Konvolutionssatz (s. Vorlesung “Theoretische Physik I”, Gl. (1.49)),

$$\epsilon^{ij\ell} \epsilon^{ijk} = \delta^{jj} \delta^{\ell k} - \delta^{jk} \delta^{\ell j} = 3 \delta^{\ell k} - \delta^{\ell k} = 2 \delta^{\ell k}, \quad (1.43)$$

wobei wir die erweiterte Einsteinsche Summenkonvention und $\delta^{jj} \equiv \sum_{j=1}^3 \delta^{jj} = 3$ benutzt haben, so ergibt sich

$$\epsilon^{ij\ell} F^{ij} = -\epsilon^{ij\ell} \epsilon^{ijk} B^k = -2 \delta^{\ell k} B^k = -2 B^\ell \iff B^\ell = -\frac{1}{2} \epsilon^{\ell ij} F^{ij}. \quad (1.44)$$

Setzen wir $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i$ in diese Gleichung ein, multiplizieren mit dem Einheitsvektor $\vec{e}^\ell$ in ℓ -Richtung und summieren über ℓ so ergibt sich

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \vec{e}^\ell \epsilon^{\ell ij} (\partial_i A^j - \partial_j A^i) = \vec{e}^\ell \epsilon^{\ell ij} \partial_i A^j = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.45)$$

wobei wir von der zweiten zur dritten Gleichung $\epsilon^{\ell ij} = -\epsilon^{\ell ji}$ ausgenutzt, sowie eine Umbenennung der Summationsindizes im zweiten Term, $i \leftrightarrow j$, vorgenommen haben.

Unter Benutzung der Gln. (1.39) und (1.40) kann man den Feldstärketensor in eine einer (4×4) -Matrix ähnelnde Form bringen, die man so sehr oft in Lehrbüchern findet,

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} E^x & -\frac{1}{c} E^y & -\frac{1}{c} E^z \\ \frac{1}{c} E^x & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{1}{c} E^y & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{1}{c} E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Dies ist aber irreführend, denn der zweite Index von $F^{\mu\nu}$ ist ein **kontravarianter** Index, wohingegen er ein **kovarianter** Index sein müsste, damit das Objekt (1.46) den Regeln der Matrizenrechnung genügt. Mit anderen Worten, F^μ_ν ist eine echte (4×4) -Matrix, $F^{\mu\nu}$ dagegen nicht. Unter Benutzung der Gln. (1.39), (1.40) und (1.41) erhalten wir $F^0_i = -F^{0i} = F^{i0} = \frac{1}{c} E^i$, $F^i_0 = F^{i0} = \frac{1}{c} E^i$, $F^i_j = -F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$ und damit

$$(F^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E^x & \frac{1}{c} E^y & \frac{1}{c} E^z \\ \frac{1}{c} E^x & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{1}{c} E^y & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{1}{c} E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind auf den zweiten Blick durchaus überraschend. In der herkömmlichen, nichtkovarianten Diskussion der Elektrodynamik werden elektrisches Feld und magnetische Induktion als 3-Vektoren, $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$, eingeführt. Man würde nun vermuten, dass es bei der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik genügt, diese 3-Vektoren in geeigneter Weise zu 4-Vektoren zu verallgemeinern, wie wir dies bei der relativistischen Formulierung der Mechanik getan hatten (vgl. Vorlesung “Theoretische Physik II”). Dies ist offenbar nicht der Fall. Das elektrische Feld und die magnetische Induktion sind Komponenten eines Lorentz-Tensors zweiter Stufe. Dies hat weitreichende Konsequenzen, wie wir im folgenden Abschnitt erläutern werden.

1.2.3 Transformationsverhalten elektromagnetischer Felder

Unter Lorentz-Transformationen transformiert sich der Feldstärketensor bekannterweise (vgl. Abschnitt 6.3.1 der Vorlesung “Theoretische Physik II”) wie folgt:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} . \quad (1.48)$$

Aus diesem Ausdruck läßt sich im Prinzip das Transformationsverhalten der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bestimmen. Die explizite Berechnung führt man am besten in Matrixschreibweise durch. Dann muss man aber die Lorentz-Transformation für den gemischten Feldstärketensor (1.47) betrachten,

$$F'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu_\alpha F^\alpha_\beta (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu . \quad (1.49)$$

Für einen Boost in z -Richtung, vgl. Gl. (1.35), erhalten wir

$$\begin{aligned} (F'^\mu{}_\nu) &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E^x & \frac{1}{c}E^y & \frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{1}{c}E^y & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{1}{c}E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta\gamma\frac{1}{c}E^z & \gamma(\frac{1}{c}E^x - \beta B^y) & \gamma(\frac{1}{c}E^y + \beta B^x) & \gamma\frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{1}{c}E^y & -B^z & 0 & B^x \\ \gamma\frac{1}{c}E^z & -\gamma(\beta\frac{1}{c}E^x - B^y) & -\gamma(\beta\frac{1}{c}E^y + B^x) & -\beta\gamma\frac{1}{c}E^z \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma(\frac{1}{c}E^x - \beta B^y) & \gamma(\frac{1}{c}E^y + \beta B^x) & \gamma^2(1 - \beta^2)\frac{1}{c}E^z \\ \gamma(\frac{1}{c}E^x - \beta B^y) & 0 & B^z & \gamma(\beta\frac{1}{c}E^x - B^y) \\ \gamma(\frac{1}{c}E^y + \beta B^x) & -B^z & 0 & \gamma(\beta\frac{1}{c}E^y + B^x) \\ \gamma^2(1 - \beta^2)\frac{1}{c}E^z & -\gamma(\beta\frac{1}{c}E^x - B^y) & -\gamma(\beta\frac{1}{c}E^y + B^x) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma(\frac{1}{c}E^x - \beta B^y) & \gamma(\frac{1}{c}E^y + \beta B^x) & \frac{1}{c}E^z \\ \gamma(\frac{1}{c}E^x - \beta B^y) & 0 & B^z & -\gamma(B^y - \beta\frac{1}{c}E^x) \\ \gamma(\frac{1}{c}E^y + \beta B^x) & -B^z & 0 & \gamma(B^x + \beta\frac{1}{c}E^y) \\ \frac{1}{c}E^z & \gamma(B^y - \beta\frac{1}{c}E^x) & -\gamma(B^x + \beta\frac{1}{c}E^y) & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (1.50)$$

Hier haben wir in der ersten Zeile ausgenutzt, dass man die Inverse der Lorentz-Transformationsmatrix durch Umkehren der Boost-Geschwindigkeit, $\beta \rightarrow -\beta$, erhält, vgl. Diskussion in Abschnitt 6.2.2 der Vorlesung “Theoretische Physik II”.

Durch Vergleich mit der Definition (1.46) des Feldstärketensors lesen wir das Lorentz-Transformationsverhalten für das elektrische Feld und die magnetische Induktion ab,

$$\begin{aligned} E'^x &= \gamma (E^x - v B^y) , & B'^x &= \gamma \left(B^x + \frac{v}{c^2} E^y \right) , \\ E'^y &= \gamma (E^y + v B^x) , & B'^y &= \gamma \left(B^y - \frac{v}{c^2} E^x \right) , \\ E'^z &= E^z , & B'^z &= B^z . \end{aligned} \quad (1.51)$$

Wir stellen zwei überraschende Tatsachen fest:

- (i) Die Komponenten der Felder **longitudinal** zur Boost-Richtung bleiben **unverändert**, während sich die Komponenten **transversal** zur Boost-Richtung ändern. Dies ist ein großer Unterschied zum Transformationsverhalten von 4-Vektoren, bei denen die transversalen Komponenten von einem Boost nicht beeinflusst werden und sich lediglich die longitudinale und die zeitliche Komponente ändern.
- (ii) Lorentz-Transformationen **mischen** elektrisches Feld und magnetische Induktion. Ein elektrisches Feld (ein magnetisches Induktionsfeld) im geboosteten System ist eine Linearkombination aus elektrischem Feld und magnetischer Induktion im Ruhesystem.

Durch Multiplikation der Komponenten der Felder mit den kartesischen Einheitsvektoren kann man die Transformationsgleichungen (1.51) auch in vektorieller Form schreiben. Die Komponenten der Felder parallel zur Boost-Richtung, also die **longitudinalen** Komponenten bleiben unverändert,

$$E'^z \vec{e}^z \equiv \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \equiv E^z \vec{e}^z , \quad B'^z \vec{e}^z \equiv \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \equiv B^z \vec{e}^z , \quad (1.52)$$

während für die Komponenten senkrecht zur Boost-Richtung, also die **transversalen** Komponenten gilt

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\perp} \equiv E'^x \vec{e}^x + E'^y \vec{e}^y &= \gamma [E^x \vec{e}^x + E^y \vec{e}^y - v (B^y \vec{e}^x - B^x \vec{e}^y)] \\ &\equiv \gamma \left[\vec{E}_{\perp} - v (B^y \vec{e}^x - B^x \vec{e}^y) \right] , \\ \vec{B}'_{\perp} \equiv B'^x \vec{e}^x + B'^y \vec{e}^y &= \gamma \left[B^x \vec{e}^x + B^y \vec{e}^y + \frac{v}{c^2} (E^y \vec{e}^x - E^x \vec{e}^y) \right] \\ &\equiv \gamma \left[\vec{B}_{\perp} + \frac{v}{c^2} (E^y \vec{e}^x - E^x \vec{e}^y) \right] . \end{aligned}$$

Benutzen wir nun die Tatsache, dass der Geschwindigkeitsvektor des Lorentz-Boosts $\vec{v} = (0, 0, v)^T$ ist, so gilt per Definition des Kreuzprodukts

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B} &= \vec{e}^x (v^y B^z - v^z B^y) + \vec{e}^y (v^z B^x - v^x B^z) + \vec{e}^z (v^x B^y - v^y B^x) \\ &= -v (\vec{e}^x B^y - \vec{e}^y B^x) , \end{aligned}$$

und analog für $\vec{v} \times \vec{E}$. Damit schreiben sich die transformierten transversalen $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Felder sehr kompakt als

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} \right) , \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \right) . \quad (1.53)$$

Diese Transformationsgleichungen sind auch für Lorentz-Boosts in beliebiger Richtung (nicht nur in z -Richtung) gültig.

Mit den Identitäten

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, \quad \vec{B} \equiv \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp},$$

sowie

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &\equiv \hat{v} \hat{v} \cdot \vec{E} = \frac{c^2}{v^2} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{E} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{E}, \\ \vec{B}_{\parallel} &\equiv \hat{v} \hat{v} \cdot \vec{B} = \frac{c^2}{v^2} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{B} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} = \frac{1}{1 - \gamma^{-2}} = \frac{1}{1 - 1 + v^2/c^2} = \frac{c^2}{v^2}$$

benutzt haben, lassen sich die Gleichungen (1.52) und (1.53) wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \vec{E}' = \vec{E}'_{\perp} + \vec{E}'_{\parallel} &= \gamma \left(\vec{E} - \vec{E}_{\parallel} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + \vec{E}_{\parallel} \\ &= \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + (1 - \gamma) \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{E} \\ &= \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}' = \vec{B}'_{\perp} + \vec{B}'_{\parallel} &= \gamma \left(\vec{B} - \vec{B}_{\parallel} - \frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{E}}{c} \right) + \vec{B}_{\parallel} \\ &= \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{E}}{c} \right) + (1 - \gamma) \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{B} \\ &= \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{E}}{c} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

1.2.4 Jacobi-Identität

27.10.2023

Der Feldstärketensor erfüllt die **Jacobi-Identität**

$$\partial^{\lambda} F^{\mu\nu} + \partial^{\mu} F^{\nu\lambda} + \partial^{\nu} F^{\lambda\mu} = 0. \quad (1.56)$$

Dies beweist man sehr einfach durch Einsetzen der Definition (1.37) und Umsortieren der Terme

$$\begin{aligned} \partial^{\lambda} F^{\mu\nu} + \partial^{\mu} F^{\nu\lambda} + \partial^{\nu} F^{\lambda\mu} &= \partial^{\lambda} (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) + \partial^{\mu} (\partial^{\nu} A^{\lambda} - \partial^{\lambda} A^{\nu}) + \partial^{\nu} (\partial^{\lambda} A^{\mu} - \partial^{\mu} A^{\lambda}) \\ &= (\partial^{\lambda} \partial^{\mu} - \partial^{\mu} \partial^{\lambda}) A^{\nu} - (\partial^{\lambda} \partial^{\nu} - \partial^{\nu} \partial^{\lambda}) A^{\mu} + (\partial^{\mu} \partial^{\nu} - \partial^{\nu} \partial^{\mu}) A^{\lambda} \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt vorausgesetzt haben, dass das 4-Potential hinreichend oft stetig differenzierbar ist, q.e.d.

1.2.5 Dualer Feldstärketensor

Mit Hilfe des Feldstärketensors konstruiert man den sog. **dualen Feldstärketensor**

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} , \quad (1.57)$$

wobei

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \begin{cases} +1, & (\mu\nu\alpha\beta) \text{ gerade Permutation von } (0123), \\ -1, & (\mu\nu\alpha\beta) \text{ ungerade Permutation von } (0123), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.58)$$

der **vollständig antisymmetrische Tensor vom Rang 4**, also das Analogon des Levi-Civita-Tensors für vier Dimensionen ist. Aufgrund der Definition (1.58) ist der duale Feldstärketensor (1.57) ebenfalls antisymmetrisch,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu} .$$

Dies bedeutet, dass die Diagonalelemente wie beim gewöhnlichen Feldstärketensor verschwinden, $\tilde{F}^{00} = \tilde{F}^{11} = \tilde{F}^{22} = \tilde{F}^{33} \equiv 0$.

Die anderen Elemente des dualen Feldstärketensors berechnet man einfach durch Einsetzen:

$$\tilde{F}^{0i} = \frac{1}{2} \epsilon^{0i\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \equiv -B^i .$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass die Indizes α, β in $\epsilon^{0i\alpha\beta}$ räumliche Indizes sein müssen, $\alpha \equiv j, \beta \equiv k$, da der erste Index bereits ein zeitlicher Index ist und der Tensor nach Definition verschwindet, wenn ein weiterer Index ebenfalls ein zeitlicher ist, $\epsilon^{0i\alpha\beta} \equiv \epsilon^{0ijk}$. Ferner gilt nach Definition, Gl. (1.58), dass $\epsilon^{0ijk} \equiv \epsilon^{ijk}$. Im letzten Schritt haben wir noch Gl. (1.44) (mit $F_{jk} \equiv F^{jk}$) benutzt. Es gilt also explizit

$$\tilde{F}^{01} = F^{23} = -B^x, \quad \tilde{F}^{02} = F^{31} = -B^y, \quad \tilde{F}^{03} = F^{12} = -B^z . \quad (1.59)$$

Für die räumlichen Komponenten des dualen Feldstärketensors erhalten wir das Zwischenergebnis

$$\tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ij\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{ij0k} F_{0k} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk0} F_{k0} , \quad (1.60)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass, wenn i, j feste räumliche Indizes sind, von den Indizes α, β wenigstens einer ein zeitlicher Index sein muss, ansonsten käme einer der drei räumlichen Indizes 1, 2, 3 doppelt vor und der Tensor verschwände gemäß Definition (1.58). Es ist also entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$. Im ersten Fall muss β dann wieder ein räumlicher Index sein, der von i und j verschieden ist, im zweiten Fall muss α ein solcher Index sein. Da über α und β gemäß der Einsteinschen Summenkonvention summiert wird, bleiben als nichtverschwindende Terme von dieser Summe nur die beiden auf der rechten Seite von Gl. (1.60) aufgeführten übrig. Diese können nun wegen $\epsilon^{ij0k} \equiv -\epsilon^{ijk0} = \epsilon^{ijk} \equiv \epsilon^{ijk}$ zusammengefaßt werden,

$$\tilde{F}^{ij} = \epsilon^{ijk} F_{0k} \equiv \epsilon^{ijk} F^{k0} \equiv \frac{1}{c} \epsilon^{ijk} E^k , \quad (1.61)$$

wobei wir die Gleichungen (1.39) und (1.41) benutzt haben. Somit gilt explizit

$$\tilde{F}^{12} = F^{30} = \frac{1}{c} E^z, \quad \tilde{F}^{13} = -F^{20} = -\frac{1}{c} E^y, \quad \tilde{F}^{23} = F^{10} = \frac{1}{c} E^x. \quad (1.62)$$

In der Form einer (4×4) -Matrix ähnelnden Schreibweise erhalten wir

$$\left(\tilde{F}^{\mu\nu} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & \frac{1}{c} E^z & -\frac{1}{c} E^y \\ B^y & -\frac{1}{c} E^z & 0 & \frac{1}{c} E^x \\ B^z & \frac{1}{c} E^y & -\frac{1}{c} E^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Offenbar folgt der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ aus dem gewöhnlichen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ durch die Ersetzung

$$\frac{1}{c} \vec{E} \longrightarrow \vec{B}, \quad \vec{B} \longrightarrow -\frac{1}{c} \vec{E}. \quad (1.64)$$

Mit dem dualen Feldstärketensor läßt sich die Jacobi-Identität in kompakterer Form schreiben. Wählen wir beispielsweise die Kombination $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 1, 2)$, so lautet Gl. (1.56)

$$\begin{aligned} \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} &= \partial_0 F^{12} + \partial_1 F^{02} + \partial_2 F^{10} = \partial_0 \tilde{F}^{03} + \partial_1 \tilde{F}^{13} + \partial_2 \tilde{F}^{23} \\ &= \partial_0 \tilde{F}^{03} + \partial_1 \tilde{F}^{13} + \partial_2 \tilde{F}^{23} + \partial_3 \tilde{F}^{33} \equiv \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 3} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir $\partial^i = -\partial_i$, die Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$, die Glgen. (1.59) und (1.62) und $\tilde{F}^{33} \equiv 0$ benutzt haben. Ganz analog verfährt man mit den Kombinationen $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 2, 3)$, $(0, 3, 1)$ und $(1, 2, 3)$, die auf die Gleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 1} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 2} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} = 0$$

führen. Zusammengefaßt ist die Jacobi-Identität also identisch mit den vier Gleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \nu = 0, \dots, 3. \quad (1.65)$$

1.2.6 Lorentz-Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Mit Hilfe des Feldstärketensors läßt sich folgende Lorentz-Invariante konstruieren:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij} = -2 F^{i0} F^{i0} + F^{ij} F^{ij} \\ &= -\frac{2}{c^2} E^i E^i + \epsilon^{ijk} \epsilon^{ijl} B^k B^l = -\frac{2}{c^2} \vec{E}^2 + 2 \delta^{kl} B^k B^l \\ &= 2 \left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Hier haben wir Gl. (1.41) und den Konvolutionssatz (1.43) benutzt.

Eine weitere Lorentz-Invariante ergibt sich aus dem Produkt von Feldstärketensor und dualen Feldstärketensor,

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{2}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} - 2 \vec{B} \cdot \frac{1}{c} \vec{E} \equiv -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (1.67)$$

Dieses Resultat beweist man entweder durch explizites Nachrechnen oder, erheblich einfacher, durch Ausnutzen der Ersetzung (1.64) in Gl. (1.66).

Eine dritte Invariante wäre formal

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} .$$

Die Ersetzung (1.64), angewandt auf Gl. (1.67), liefert aber bis auf das Vorzeichen die gleiche Invariante wie Gl. (1.66).

1.2.7 Elektrische Ladung und 4-Ladungsstromdichte

Wie hinlänglich (z.B. aus der Einführungsvorlesung) bekannt, sind **elektrische Ladungen** die **Quellen** elektrischer Felder. **Bewegte** Ladungen wiederum erzeugen magnetische Induktionsfelder. Die elektrische Ladung spielt also eine zentrale Rolle in der Elektrodynamik.

Wir bezeichnen die elektrische Ladung mit dem Symbol q . Sie ist ein **Lorentz-Skalar**, genau wie die Masse, denn die elektrische Ladung eines physikalischen Objekts kann sich nicht dadurch ändern, dass man sich relativ zu diesem Objekt bewegt; man beobachtet in allen Inertialsystemen dieselbe Ladung q .

Im Ruhesystem Σ_0 eines geladenen Körpers sei

$$dq = \rho_0 dV_0 \quad (1.68)$$

die in einem Volumenelement dV_0 befindliche elektrische Ladung; ρ_0 ist die **Ladungsdichte** im System Σ_0 . In einem relativ zu Σ_0 mit Geschwindigkeit $\vec{v} \equiv -v \vec{e}^z$ bewegten System Σ beobachten wir nach oben Gesagtem dieselbe Ladung

$$dq = \rho dV \equiv \rho_0 dV_0 , \quad (1.69)$$

allerdings ist nun das Volumenelement dV aufgrund der **Lorentz-Kontraktion**

$$dV = dx dy dz \equiv dx_0 dy_0 dz_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} dV_0$$

kleiner als das entsprechende Volumenelement dV_0 im Ruhesystem des Körpers. Also ist die Ladungsdichte im System Σ gegeben durch

$$\rho \equiv \frac{dq}{dV} = \frac{\rho_0 dV_0}{dV} = \gamma \rho_0 \quad (1.70)$$

um den entsprechenden Lorentz-Gammafaktor größer als im Ruhesystem. Die Ladungsdichte ρ_0 im Ruhesystem des Körpers, die sog. **Ruheladungsdichte**, kann aufgrund dieser Betrachtung als **Lorentz-Skalar** aufgefasst werden.

Vom System Σ aus betrachtet bewegt sich die Ladung dq mit Geschwindigkeit $\vec{v} = +v \vec{e}^z$. Diese Bewegung entspricht einer **Ladungsstromdichte**

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \gamma \rho_0 \vec{v} . \quad (1.71)$$

Die Größen ρ und $\vec{j}$, gegeben durch die Glgen. (1.70) und (1.71), lassen sich mit Hilfe der schon aus der Vorlesung “Theoretische Physik II” (Gl. (6.65)) bekannten **4-Geschwindigkeit**

$$(u^\mu) = (c\gamma, \gamma\vec{v})^T = \gamma (c, \vec{v})^T \quad (1.72)$$

zu einem 4-Vektor, der sog. **4-Ladungsstromdichte**, kombinieren,

$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})^T = (c\gamma\rho_0, \gamma\rho_0\vec{v})^T = \rho_0 (c\gamma, \gamma\vec{v})^T = \rho_0 (u^\mu) . \quad (1.73)$$

Da die Ruheladungsdichte ρ_0 als Lorentz-Skalar aufgefaßt werden kann, transformiert sich j^μ wie u^μ , also in der Tat wie ein 4-Vektor.

Eine alternative Herleitung der 4-Ladungsstromdichte (1.73) ergibt sich mit Hilfe einer Lorentz-Transformation vom System Σ_0 in das System Σ . Im System Σ_0 gilt für die 4-Ladungsstromdichte

$$(j_0^\mu) = (c\rho_0, 0, 0, 0)^T ,$$

denn im Ruhesystem der Ladung ist $\vec{v} = \vec{v}_0 \equiv 0$. Das System Σ bewegt sich relativ zu Σ_0 mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = -v\vec{e}^z$. Im System Σ bewegt sich dann der Ladungsstrom mit Geschwindigkeit $\vec{v} = +v\vec{e}^z$. Um von Σ_0 nach Σ zu gelangen, muss man einen Lorentz-Boost mit $\vec{v} = -v\vec{e}^z$ durchführen. Man beachte das Vorzeichen der Geschwindigkeit, welches dazu führt, dass die (03)– und (30)–Komponenten der entsprechenden Lorentz-Transformationsmatrix sich im Vorzeichen von den in Gl. (1.35) angegebenen Komponenten unterscheiden. Die 4-Ladungsstromdichte im System Σ berechnet sich mit Hilfe dieses Lorentz-Boosts zu

$$\begin{aligned} (j^\mu) &= (\Lambda^\mu_\nu) (j_0^\nu) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\rho_0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma\rho_0 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \rho\vec{v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (1.74)$$

was mit Gl. (1.73) übereinstimmt.

1.2.8 Lagrange-Dichte der Elektrodynamik

Die **Lagrange-Dichte der Elektrodynamik** muss eine Funktion des 4-Potentials A^μ sowie seiner partiellen Ableitungen, $\partial^\nu A^\mu$, sein. Außerdem können elektrische Ladungen als **Quellen** des elektromagnetischen Feldes auftreten. In Lorentz-kovarianter Schreibweise erscheinen elektrische Ladungen in Form der im vorangegangenen Abschnitt eingeführten 4-Ladungsstromdichte j^μ . Da diese i.a. eine Funktion der Raum-Zeit sind, $j^\mu = j^\mu(X)$, sorgt dies für eine explizite Abhängigkeit der Lagrange-Dichte von der Raum-Zeit-Variable X . In Analogie zu Gl. (1.32) stellt sich die gesamte funktionale Abhängigkeit der Lagrange-Dichte der Elektrodynamik also wie folgt dar:

$$\mathcal{L}_{\text{ED}}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu, X) . \quad (1.75)$$

Wie wir sehen, nimmt die μ –Komponente des 4-Potentials, A^μ , die Rolle des Feldes φ_a in Gl. (1.33) ein. Der Lorentz-Index μ ersetzt also den Index a , der die Felder durchnumeriert.

Wie wir in Abschnitt 1.1.3 gesehen hatten, muss die Lagrange-Dichte stets ein **Lorentz-Skalar** sein. Daher müssen alle in $\mathcal{L}_{\text{ED}}$ auftretenden 4-Vektoren ($A^\mu, j^\mu, \dots$), sowie höhere Lorentz-Tensoren ($\partial^\nu A^\mu, \dots$) in **allen freien Lorentz-Indizes** mit anderen 4-Vektoren oder Lorentz-Tensoren zu **Lorentz-Skalaren kontrahiert** werden.

Diese Vorüberlegungen erlauben eine Vielzahl von Termen, die in der Lagrange-Dichte auftreten können, z.B.

$$A_\mu A^\mu, \quad j_\mu A^\mu, \quad F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad A_\mu F^{\mu\nu} A_\nu, \quad \dots$$

Hierbei haben wir nur die antisymmetrische Kombination des Tensors der partiellen Ableitungen, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, berücksichtigt. Im Prinzip gäbe es aber auch Terme mit der symmetrischen Kombination $\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu$. Es stellt sich nun heraus, dass die Natur eine relativ einfache Variante gewählt hat:

$$\mathcal{L}_{\text{ED}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu. \quad (1.76)$$

Der tiefere Grund ist eigentlich erst im Rahmen der Quantisierung der Elektrodynamik verständlich. So stellen z.B. Terme der Form $A_\mu A^\mu$ einen Massenterm für Lichtquanten dar. Da Lichtquanten aber masselos sind, kann ein solcher Term nicht auftreten. Desweiteren sorgen Terme, die Felder und Ableitungen in höherer als der vierten Potenz enthalten, dafür, dass die Theorie in vier Dimensionen nicht mehr renormierbar ist. Der Term $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ verletzt eine diskrete Symmetrie, die Paritätsinvarianz. Und schließlich brechen Terme mit der symmetrischen Kombination der partiellen Ableitungen, $\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu$, die Eichinvarianz der Theorie (vgl. Abschnitt 1.3).

31.10.2023

Die in Gl. (1.76) auftretende Konstante μ_0 ist die sog. **magnetische Feldkonstante** oder **Permeabilitätskonstante** des Vakuums,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

Hierbei ist V die Einheit der elektrischen Spannung, **Volt**, und A die Einheit des elektrischen Stromes, **Ampère**. Die Permeabilitätskonstante sorgt dafür, dass die Lagrange-Dichte die richtige Einheit (nämlich Energiedichte, $\text{J/m}^3 = \text{N/m}^2$) hat. Die magnetische Induktion $\vec{B}$ hat nämlich die Einheit

$$[B] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T (Tesla)},$$

so dass aufgrund von Gl. (1.66)

$$\left[\frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\mu_0} \right] = \left[\frac{B^2}{\mu_0} \right] = \frac{\text{V}^2 \text{s}^2 \text{A m}}{\text{m}^4 \text{V s}} = \frac{\text{A V s}}{\text{m}^3} \equiv \frac{\text{J}}{\text{m}^3},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass das Produkt von Strom und Spannung mit der elektrischen **Leistung** identisch ist, welche die Einheit $\text{AV} = \text{W (Watt)}$ hat, und dass die Leistung die Einheit Energie pro Zeiteinheit hat, $\text{W} = \text{J/s}$.

Die Größe

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{\mu_0 c^2} \simeq 8,854187 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}} \quad (1.77)$$

bezeichnet man als **Influenzkonstante** oder **Dielektrizitätskonstante des Vakuums**. Mit Hilfe der Gln. (1.34), (1.66) und (1.73) kann man Gl. (1.76) daher auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ED}} &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) - c\rho \frac{\varphi}{c} + \vec{j} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) - \rho \varphi + \vec{j} \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Das elektrische Feld hat die Einheit

$$[E] = \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

so dass in der Tat

$$[\epsilon_0 E^2] = \frac{\text{A s V}^2}{\text{V m m}^2} = \frac{\text{A V s}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

die Einheit Energiedichte trägt.

Wir überprüfen noch die Einheiten der übrigen Terme in Gl. (1.78). Die Einheit der elektrischen Ladung ist

$$[q] = C \text{ (Coulomb)}.$$

Daher hat die Ladungsdichte die Einheit $[\rho] = \text{C/m}^3$. Das skalare Potential φ hat dieselbe Einheit wie die Spannung, $[\varphi] = \text{V}$. Also ist

$$[\rho \varphi] = \frac{\text{C V}}{\text{m}^3} \equiv \frac{\text{J}}{\text{m}^3},$$

wenn wir benutzen, dass das Produkt aus Ladung und Spannung die **elektrostatische Energie** ist, mit der Einheit $\text{C V} = \text{J}$. Schließlich hat die Ladungsstromdichte die Einheit $[j] = (\text{C/m}^3) \text{ m/s} = \text{C}/(\text{m}^2 \text{ s})$ und das Vektorpotential $[A] = \text{T m} = \text{V s m}/\text{m}^2 = \text{V s}/\text{m}$, so dass

$$[jA] = \frac{\text{C V s}}{\text{m}^2 \text{ s m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

1.2.9 Maxwell–Gleichungen

Die dynamischen Felder der Elektrodynamik sind die vier Komponenten des 4-Potentials, A^μ . Um die Bewegungsgleichungen abzuleiten, müssen wir, wie zu Beginn des vorangegangenen Abschnitts diskutiert, in den Euler–Lagrange–Gleichungen (1.33) die Felder φ_a durch die Komponenten des 4-Potentials ersetzen. Der Übersicht halber wählen wir die kovariante Form und benennen den Index in ν um, weil der Index μ schon als Summationsindex in Gl. (1.33) verwendet wird. Die Feldgleichungen transformieren sich dann wie die Komponenten eines kontravarianten 4-Vektors (weil ein kovarianter Index im Nenner einem kontravarianten Index im Zähler entspricht),

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ED}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ED}}}{\partial A_\nu}. \quad (1.79)$$

Zur Berechnung des ersten Term bemerken wir zunächst, dass lediglich der erste Term in der Lagrange-Dichte (1.76) von den **Ableitungen** des 4-Potentials abhängt (über die Definition (1.37) des Feldstärketensors), der zweite Term dagegen hängt nur von A_ν , aber nicht von seinen Ableitungen ab,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$$

Hier haben wir auch noch einige Summationsindizes umbenannt. Der nächste Schritt besteht darin, alle kontravarianten Indizes mit Hilfe des metrischen Tensors in kovariante umzuwandeln, damit beim Ableiten nach $\partial_\mu A_\nu$ kein Term vergessen wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma}) \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} . \end{aligned}$$

Gemäß Definition des Feldstärketensors, Gl. (1.37), gilt

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\mu_\beta g^\nu_\alpha ,$$

und eine entsprechende Relation, wenn wir die Indizes $(\alpha\beta)$ durch $(\rho\sigma)$ ersetzen. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4\mu_0} [(g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\mu_\beta g^\nu_\alpha) F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta} (g^\mu_\rho g^\nu_\sigma - g^\mu_\sigma g^\nu_\rho)] g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} [(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha})] \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \equiv -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (1.80)$$

wobei wir im letzten Schritt die Antisymmetrie des Feldstärketensors ausgenutzt haben.

Für die Berechnung des zweiten Terms in Gl. (1.79) bemerken wir, dass der zweite Term in Gl. (1.76) von den Feldern A^μ , aber nicht von deren Ableitungen abhängt,

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ED}}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu} (j_\alpha g^{\alpha\beta} A_\beta) = j_\alpha g^{\alpha\beta} g^\nu_\beta = j^\nu . \quad (1.81)$$

Setzen wir die Resultate (1.80) und (1.81) in Gl. (1.79) ein, so erhalten wir

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu , \quad \nu = 0, \dots, 3 . \quad (1.82)$$

Dies sind vier gekoppelte partielle Differentialgleichungen, die die Bewegungsgleichungen für die vier Komponenten des 4-Potentials A^μ darstellen. Bei vorgegebener 4-Ladungsstromdichte (und vorgegebenen Randbedingungen im Minkowski-Raum) sind diese i.d.R. eindeutig lösbar. Diese Bewegungsgleichungen sind die **Maxwell-Gleichungen** für das 4-Potential A^μ .

In der Regel schreibt man aber die Maxwell-Gleichungen nicht für das 4-Potential, sondern für das elektrische Feld $\vec{E}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$. Diese Form ergibt sich durch Betrachtung der einzelnen Komponenten von Gl. (1.82). Für $\nu = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &\equiv \partial_i F^{i0} = \frac{1}{c} \partial_i E^i = \mu_0 j^0 = \mu_0 c \rho \\ \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \mu_0 c^2 \rho \equiv \frac{1}{\epsilon_0} \rho ,\end{aligned}\quad (1.83)$$

wobei wir die Glgen. (1.39) und (1.77) benutzt haben. Für die räumlichen Komponenten, $\nu = i = x, y, z$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} - \epsilon^{jik} \partial_j B^k = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \mu_0 j^i \\ \iff \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} ,\end{aligned}\quad (1.84)$$

wobei wir $F^{0i} = -F^{i0} = -E^i/c$, Gl. (1.40) und die Definition des Kreuzprodukts (ausgedrückt durch den Levi-Civita-Tensor, vgl. Vorlesung "Theoretische Physik I") ausgenutzt haben. Die Glgen. (1.83) und (1.84) bilden den Satz der sog. **inhomogenen Maxwell-Gleichungen** im Vakuum. Wenn man das elektrische Feld $\vec{E}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$ durch das 4-Potential ausdrückt, s. Glgen. (1.42) und (1.45), so bestimmen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84) das 4-Potential vollständig.

Oft ist man aber ausschließlich an einer Lösung für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ interessiert. Da diese beiden 3-Vektorfelder insgesamt sechs unabhängige Komponenten besitzen, reicht der Satz der vier inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84) nicht aus, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ eindeutig zu bestimmen. In diesem Fall nimmt man die Jacobi-Identität in der Form (1.65) zu den inhomogenen Maxwell-Gleichungen hinzu. Für $\nu = 0$ lautet Gl. (1.65) mit der expliziten Form (1.63) des dualen Feldstärketensors

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &\equiv \partial_i \tilde{F}^{i0} = \partial_i B^i = 0 \\ \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 .\end{aligned}\quad (1.85)$$

Für $\nu = i = x, y, z$ erhalten wir dagegen mit Gl. (1.61)

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} &= \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B^i}{\partial t} + \frac{1}{c} \epsilon^{jik} \partial_j E^k = 0 \\ \iff \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 .\end{aligned}\quad (1.86)$$

Die vier Gleichungen (1.85), (1.86) bilden den Satz der **homogenen Maxwell-Gleichungen**.

Zusammengenommen haben wir nun acht Gleichungen für die sechs Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Man könnte denken, dass das System von Maxwell-Gleichungen nun überbestimmt sei. Dass dem nicht so ist, wird später bei der Diskussion des Helmholtz-schen Zerlegungssatzes (Abschnitt 1.6.8) klar werden.

1.2.10 Kontinuitätsgleichung

Aus den Maxwell-Gleichungen (1.82) für das 4-Potential folgt eine weitere wichtige Relation. Die 4-Divergenz dieser Gleichung,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu j^\nu , \quad (1.87)$$

verschwindet nämlich aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}) \equiv 0 ,$$

wobei wir im vorletzten Schritt beim zweiten Term den Summationsindex μ in ν (und umgekehrt ν in μ) umbenannt und angenommen haben, dass $F^{\mu\nu}$ hinreichend oft stetig differenzierbar ist, so dass wir die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen können. Eine andere Möglichkeit, dieses Resultat zu erhalten, besteht darin, die Definition (1.37) zu benutzen,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \equiv 0 ,$$

wobei wir wieder angenommen haben, dass das 4-Potential hinreichend oft stetig differenzierbar ist, so dass wir die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen dürfen. Mit diesem Resultat lautet Gl. (1.87)

$$\begin{aligned} \partial_\nu j^\nu &= 0 \\ \iff \partial_0 j^0 + \partial_i j^i &= \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 . \end{aligned} \quad (1.88)$$

Dies ist die sog. **Kontinuitätsgleichung**. Sie besagt, dass die elektrische Ladung erhalten ist. Wir werden dies noch eingehender erläutern, wenn wir den Satz von Gauß in Abschnitt 1.6.2 besprechen.

1.3 Eichtransformationen

1.3.1 Eichinvarianz des Feldstärketensors

Das 4-Potential A^μ ist physikalisch nicht direkt beobachtbar. Meßbare Größen sind lediglich die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$, d.h. die Komponenten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$. Dies erlaubt eine gewisse Freiheit in der Wahl des 4-Potentials. Die sog. **Eichtransformation**

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi , \quad (1.89)$$

wobei $\chi \equiv \chi(X)$ eine beliebige, Lorentz-skalare und hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion der Raum-Zeit ist, läßt den Feldstärketensor **invariant**,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \chi - (\partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \chi) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \equiv F^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (1.90)$$

Da aber lediglich der Feldstärketensor (bzw. der duale Feldstärketensor) in den Maxwell-Gleichungen auftritt, sind auch die Maxwell-Gleichungen invariant unter der Eichtransformation (1.89).

1.3.2 Eichinvarianz der Wirkung

Man kann zeigen, dass auch die Wirkung der Elektrodynamik invariant unter der Eichtransformation (1.89) ist. Dazu berechnet man die eichtransformierte Wirkung,

$$\begin{aligned}
 S'_{\text{ED}} &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4X \mathcal{L}'_{\text{ED}} = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4X \left(\frac{1}{4\mu_0} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + j_{\mu} A'^{\mu} \right) \\
 &= -\frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4X \left[\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_{\mu} (A^{\mu} - \partial^{\mu} \chi) \right] \\
 &\equiv S_{\text{ED}} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4X j_{\mu} \partial^{\mu} \chi,
 \end{aligned} \tag{1.91}$$

wobei wir die Invarianz des Feldstärketensors unter Eichtransformationen und die Definition der untransformierten Wirkung,

$$S_{\text{ED}} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4X \mathcal{L}_{\text{ED}} = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4X \left(\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_{\mu} A^{\mu} \right),$$

benutzt haben. Im letzten Term in Gl. (1.91) schreiben wir die Summe über den Lorentz-Index explizit aus,

$$\int_{\Omega} d^4X j^{\mu} \partial_{\mu} \chi \equiv \int_{\Omega} d^4X (j^0 \partial_0 \chi + j^x \partial_x \chi + j^y \partial_y \chi + j^z \partial_z \chi)$$

und integrieren die einzelnen Terme partiell. Z.B. gilt für den Term mit der partiellen Ableitung nach x

$$\int dx j^x \partial_x \chi = j^x \chi \Big|_{x_a}^{x_e} - \int dx (\partial_x j^x) \chi.$$

Der erste Term verschwindet, wenn wir das Raum-Zeit-Volumen Ω so wählen, dass die 4-Ladungsstromdichte j_{μ} auf dessen Oberfläche $\partial\Omega$ verschwindet, $j_{\mu}(X) \equiv 0$ für $X \in \partial\Omega$. Genauso verfahren wir mit den Ableitungen nach y, z und $x^0 = ct$. Wenn wir alle verbleibenden Terme wieder zusammenfassen, erhalten wir

$$\int_{\Omega} d^4X j^{\mu} \partial_{\mu} \chi = - \int_{\Omega} d^4X (\partial_{\mu} j^{\mu}) \chi \equiv 0$$

aufgrund der Kontinuitätsgleichung (1.88). Damit ist die Wirkung in der Tat **invariant** unter Eichtransformationen (1.89),

$$S'_{\text{ED}} \equiv S_{\text{ED}}. \tag{1.92}$$

Man spricht von **Eichinvarianz** oder von der **Symmetrie unter Eichtransformationen**. Wir haben also gezeigt, dass, **falls** die Ladungserhaltung in Form der Kontinuitätsgleichung gilt, daraus die Eichinvarianz der Wirkung **folgt**. Man kann den Beweis aber auch umgekehrt führen: **falls** die Wirkung invariant ist, $S'_{\text{ED}} = S_{\text{ED}}$, **folgt** daraus die Kontinuitätsgleichung, $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, also die Ladungserhaltung. Dies ist die Kernaussage des **Noether-Theorems**: Symmetrien bzw. Invarianzen einer Theorie ziehen die Existenz einer **Erhaltungsgröße** nach sich.

Da lediglich die Feldstärken, nicht aber das 4-Vektorpotential physikalisch beobachtbar sind, können wir die Freiheit, die uns die Eichtransformation (1.89) erlaubt, nutzen, um die Maxwell-Gleichungen für das 4-Potential (1.82) zu vereinfachen. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Wahl einer Eichung**. Wir werden im Folgenden zwei prominente Beispiele besprechen.

1.3.3 Lorenz-Eichung

Durch Einführung des **d'Alembert**- oder **Quabla-Operators** (vgl. Vorlesung "Theoretische Physik II", Gl. (6.60))

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (1.93)$$

wobei Δ der **Laplace-Operator** ist (vgl. Vorlesung "Theoretische Physik I", Gl. (1.85)), und durch Vertauschen von partiellen Ableitungen schreiben wir die Maxwell-Gleichung (1.82) um in

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \equiv \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 j^\nu. \quad (1.94)$$

Falls wir nun die Eichung so wählen, dass stets

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.95)$$

gilt, so vereinfacht sich die Maxwell-Gleichung (1.94) zu

$$\square A^\nu = \mu_0 j^\nu, \quad \nu = 0, \dots, 3. \quad (1.96)$$

Diese Gleichung ist von der Form her eine **inhomogene Wellengleichung** für das 4-Potential A^ν . In zeitliche und räumliche Komponenten getrennt geschrieben lautet diese

$$\square \varphi = c^2 \mu_0 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.97)$$

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.98)$$

Die Wahl (1.95) der Eichung bezeichnet man als sog. **Lorenz-Eichung**.

3.11.2023

Aber kann man die Wahl (1.95) überhaupt treffen? Gesetzt den Fall, das 4-Potential erfüllt diese Bedingung **nicht**, also z.B.

$$\partial_\mu A^\mu(X) = f(X) \neq 0,$$

wobei $f(X)$ eine beliebige Funktion der Raum-Zeit-Koordinate $X \equiv (x^\mu)$ ist. Dann gilt für das eichtransformierte 4-Potential gemäß Gl. (1.89)

$$\partial_\mu A'^\mu(X) = \partial_\mu A^\mu(X) - \partial_\mu \partial^\mu \chi(X) = f(X) - \square \chi(X). \quad (1.99)$$

Wenn wir also die zunächst beliebige Funktion $\chi(X)$ so wählen, dass sie die **inhomogene Wellengleichung**

$$\square \chi(X) = f(X) \quad (1.100)$$

erfüllt (was im Prinzip immer möglich ist), dann ist die Eichbedingung (1.95) für das **eichtransformierte** 4-Potential A'^μ nach Gl. (1.99) erfüllt. In der Tat ist es also möglich, das 4-Potential A^μ so zu wählen, dass es die Lorenz-Eichbedingung (1.95) erfüllt.

Die Lösung $\chi(X)$ der inhomogenen Wellengleichung (1.100) bestimmt das eichtransformierte 4-Potential A'^μ allerdings nicht **eindeutig**. Wir können nämlich zu $\chi(X)$ immer eine Funktion $\psi(X)$ addieren, welche die **homogene Wellengleichung** erfüllt,

$$\square\psi(X) = 0 . \quad (1.101)$$

Falls $\chi(X)$ Gl. (1.100) und $\psi(X)$ Gl. (1.101) erfüllt, gilt ebenfalls die Lorenz-Eichbedingung für das eichtransformierte 4-Potential,

$$\partial_\mu A'^\mu(X) = \partial_\mu A^\mu(X) - \square[\chi(X) + \psi(X)] = \square\psi(X) \equiv 0 .$$

1.3.4 Coulomb-Eichung

Wir betrachten die inhomogene Maxwell-Gleichung (1.82) für $\nu = 0$, multipliziert mit $-c$,

$$\begin{aligned} -c \partial_\mu F^{\mu 0} &= -c \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = \partial_i \partial_i \varphi + \partial_i \partial_t A^i \\ &\equiv \Delta\varphi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -c^2 \mu_0 \rho = -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \end{aligned} \quad (1.102)$$

wobei wir $cA^0 = \varphi$, $c\partial_0 = \partial_t$, $cj^0 = c^2\rho$ benutzt und angenommen haben, dass A^μ hinreichend oft stetig differenzierbar ist, damit die Reihenfolge partieller Ableitungen vertauscht werden kann. Falls wir die sog. **Coulomb-Eichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.103)$$

wählen, vereinfacht sich Gl. (1.102) zu

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (1.104)$$

Dies ist die sog. **Poisson-Gleichung** für das skalare Potential φ .

Wiederum stellt sich die Frage, ob wir die Wahl (1.103) der Eichung treffen können. Gesetzt den Fall, das 4-Potential erfüllt **nicht** die Eichbedingung (1.103), also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(X) = g(X) \neq 0 ,$$

mit einer beliebigen Funktion $g(X)$ der Raum-Zeit-Koordinate X . Dann gilt gemäß Gl. (1.89) für die räumlichen Komponenten des eichtransformierten 4-Potentials (unter Benutzung von $\partial_i \partial^i = -\partial_i \partial_i \equiv -\Delta$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(X) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(X) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \chi(X) = g(X) + \Delta\chi(X) . \quad (1.105)$$

Falls also die Funktion $\chi(X)$ der **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\chi(X) = -g(X) \quad (1.106)$$

genügt, dann ist die Eichbedingung (1.103) für die räumlichen Komponenten des eichtransformierten 4-Potentials A'^μ , erfüllt. Wiederum ist $\chi(X)$ nicht eindeutig bestimmt. Man kann zu $\chi(X)$ stets eine Funktion $\psi(X)$ addieren, die die **Laplace–Gleichung**

$$\Delta\psi(X) = 0 \quad (1.107)$$

(d.h. die homogene Version der Poisson–Gleichung) erfüllt. Dann gilt nämlich unter Benutzung von Glgen. (1.106) und (1.107)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(X) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(X) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} [\chi(X) + \psi(X)] = g(X) + \Delta [\chi(X) + \psi(X)] = \Delta\psi(X) \equiv 0 .$$

Man beachte, dass über die Zeitkomponente A^0 in der Coulomb–Eichung keine Aussage getroffen wird. Es ist also im Prinzip möglich, eine weitere, unabhängige Bedingung an A^0 zu stellen. Dies wird z.B. in der sog. **Strahlungseichung** ausgenutzt, welche eine Kombination aus der sog. **temporalen Eichung**

$$A^0 = 0$$

und der Coulomb–Eichung (1.103) darstellt.

Für die räumlichen Komponenten, $\nu = i = x, y, z$, von Gl. (1.82) gilt in der Coulomb–Eichung

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_\mu (\partial^\mu A^i + \partial_i A^\mu) = \square A^i + \partial_i \partial_0 A^0 + \partial_i \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mu_0 j^i .$$

Unter Ausnutzung der Coulomb–Eichung (1.103) und in Vektornotation erhalten wir also

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu_0 \left(\vec{j} - \epsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) . \quad (1.108)$$

Dies ist wiederum eine **inhomogene Wellengleichung** für $\vec{A}$. Den zweiten Term auf der rechten Seite kann man weiter auswerten, wenn die Lösung φ der Poisson–Gleichung (1.104) bekannt ist. Wir werden später darauf zurückkommen.

1.4 Energie– und Impulssatz

1.4.1 Energie-Impuls-Tensor

Der **Energie-Impuls-Tensor** des elektromagnetischen Feldes ist definiert als

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) . \quad (1.109)$$

Eine Begründung für diese Form folgt aus der Invarianz der Wirkung unter Raum-Zeit-Translationen und dem Noether–Theorem, dies soll hier aber nicht weiter ausgeführt werden. Durch Vergleich mit Gl. (1.76) erkennt man, dass die Einheit des Energie-Impuls-Tensors offensichtlich identisch mit der der Lagrange–Dichte ist, $[T^{\mu\nu}] \equiv [\mathcal{L}_{\text{ED}}] = \text{J/m}^3$.

Der Energie-Impuls-Tensor ist, wie man sich leicht überzeugt, ein **symmetrischer** Lorentz-Tensor zweiter Stufe,

$$\begin{aligned} T^{\nu\mu} &= \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\nu\alpha} F_{\alpha}^{\mu} + \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\alpha}^{\nu} F^{\alpha\mu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \equiv T^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

wobei wir die Symmetrie des metrischen Tensors, $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$, und die Antisymmetrie des Feldstärketensors, $F^{\mu\alpha} = -F^{\alpha\mu}$, ausgenutzt haben. Symmetrische Lorentz-Tensoren zweiter Stufe können als symmetrische (4×4) -Matrizen dargestellt werden (zumindest in ihrer gemischt kontra- und kovarianten Version), besitzen also **zehn unabhängige** Komponenten. Die (00) -Komponente des Energie-Impuls-Tensors ist identisch mit der **Energiedichte**,

$$\begin{aligned} w &\equiv T^{00} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{0\alpha} F_{\alpha}^0 + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{\mu_0} F^{0i} F_i^0 - \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{E^i}{c} \frac{E^i}{c} - \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right), \end{aligned} \quad (1.110)$$

wobei wir die Glgen. (1.39), (1.41) und (1.66) benutzt haben.

Die $(0i)$ -Komponente des Energie-Impuls-Tensors ist die **Energiestromdichte**,

$$\begin{aligned} \frac{S^i}{c} &\equiv T^{0i} = \frac{1}{\mu_0} F^{0\alpha} F_{\alpha}^i = \frac{1}{\mu_0} F^{0j} F_j^i = -\frac{1}{\mu_0} F^{0j} F^{ji} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{E^j}{c} (-\epsilon^{jik} B^k) = \frac{1}{c\mu_0} \epsilon^{ijk} E^j B^k, \end{aligned} \quad (1.111)$$

wobei wir Gl. (1.40) benutzt haben, oder, in Vektornotation geschrieben,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (1.112)$$

Der Vektor $\vec{S}$ ist der sog. **Poynting-Vektor**.

Letztlich ist der sog. **Spannungstensor**

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{\mu_0} \left(F^{i\alpha} F_{\alpha}^j - \frac{1}{4} \delta^{ij} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} (F^{i0} F^{0j} - F^{ik} F^{kj}) + \frac{1}{2\mu_0} \delta^{ij} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right), \end{aligned}$$

wobei wir Gl. (1.66) benutzt haben. Unter Benutzung von Glgen. (1.39), (1.40) und dem Konvolutionssatz (vgl. Vorlesung "Theoretische Physik I", Gl. (1.49))

$$\epsilon^{ilk} \epsilon^{kjm} \equiv \delta^{ij} \delta^{lm} - \delta^{im} \delta^{jl}$$

berechnen wir weiter

$$\begin{aligned}
 T^{ij} &= -\frac{1}{c^2 \mu_0} E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} \epsilon^{ikl} \epsilon^{kjm} B^l B^m + \frac{1}{2\mu_0} \delta^{ij} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right) \\
 &= -\epsilon_0 E^i E^j + \frac{1}{\mu_0} (\delta^{ij} \delta^{lm} - \delta^{im} \delta^{jl}) B^l B^m + \frac{1}{2\mu_0} \delta^{ij} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right) \\
 &= -\epsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} B^i B^j + \frac{1}{2\mu_0} \delta^{ij} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \\
 &\equiv -\epsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} B^i B^j + \delta^{ij} w .
 \end{aligned} \tag{1.113}$$

1.4.2 Energie-Impuls-Satz

Aus der Definition (1.109) des Energie-Impuls-Tensors erhält man für dessen 4-Divergenz

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \left[(\partial_\mu F^{\mu\alpha}) F_\alpha^\nu + F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \partial^\nu (F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} F^{\alpha\beta}) \right] \\
 &= j^\alpha F_\alpha^\nu + \frac{1}{\mu_0} \left[F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} (F^{\rho\sigma} \partial^\nu F^{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\rho\sigma}) \right] ,
 \end{aligned}$$

wobei wir die Maxwell-Gleichung (1.82) und die Produktregel der Differentiation benutzt haben. Man erkennt, dass die letzten beiden Terme in der Klammer nach Umbenennen der Summationsindizes $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\rho\sigma)$ identisch sind,

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu T^{\mu\nu} &= -F^{\nu\alpha} j_\alpha + \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_\alpha^\nu + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \right) \\
 &= -F^{\nu\alpha} j_\alpha + \frac{1}{\mu_0} \left[F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_\alpha^\nu - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} (\partial^\alpha F^{\beta\nu} + \partial^\beta F^{\nu\alpha}) \right] ,
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Jacobi-Identität (1.56) benutzt haben. Durch Vertauschen und geschicktes Umbenennen von Indizes erkennt man, dass der Term in der eckigen Klammer verschwindet,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} (\partial^\alpha F^{\beta\nu} + \partial^\beta F^{\nu\alpha}) &= \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\alpha F^{\beta\nu} - \frac{1}{2} F_{\beta\alpha} \partial^\beta F^{\nu\alpha} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} (\partial^\alpha F^{\beta\nu} - \partial^\alpha F^{\nu\beta}) \\
 &\equiv F_{\alpha\beta} \partial^\alpha F^{\beta\nu} \equiv F^{\mu\alpha} \partial_\mu F_\alpha^\nu ,
 \end{aligned}$$

nach Umbenennen der Summationsindizes $\alpha \rightarrow \mu$, $\beta \rightarrow \alpha$ und wechselseitigem Herauf- und Herunterziehen von paarweise gleichen Indizes.

Als Endergebnis erhalten wir also

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^{\nu\alpha} j_\alpha . \tag{1.114}$$

Dies ist der sog. **Energie-Impuls-Satz**. In den folgenden Abschnitten werden wir dieses Resultat eingehender diskutieren.

1.4.3 Energiesatz

Setzen wir den Index $\nu = 0$ in Gl. (1.114), so erhalten wir den **Energiesatz**, auch unter dem Namen **Poyntingsches Theorem** bekannt:

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu 0} &= \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) \\ &= -F^{0\alpha} j_\alpha \equiv -F^{0i} j_i = -F^{i0} j^i = -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j},\end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (1.39), (1.110) und (1.111) benutzt haben. Nach Multiplikation mit c folgt

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.115)$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Form wie die Kontinuitätsgleichung für die 4-Ladungsstromdichte, allerdings mit einem **Quell-** bzw. **Verlustterm**, $-\vec{j} \cdot \vec{E}$. Was bedeutet dieser Term? Er hat die Dimension

$$[\vec{j} \cdot \vec{E}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{C V}}{\text{m}^3 \text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{s}},$$

also Energiedichte pro Zeit. Andererseits ist $\text{J/s} = \text{W}$, die Einheit der Leistung. Also hat $[\vec{j} \cdot \vec{E}]$ die Dimension **Leistungsdichte**, W/m^3 . Der Energiesatz (1.115) besagt also, dass die Energie des elektromagnetischen Feldes keine Erhaltungsgröße wie die elektrische Ladung darstellt, sondern dass Energie **verlorengeht** (wegen des Vorzeichens von $-\vec{j} \cdot \vec{E}$), indem das elektromagnetische Feld **Arbeit** an den elektrischen Ladungen, gegeben durch die **Ladungsstromdichte** $\vec{j}$, **verrichtet**.

Der Verlust an Energie für das elektromagnetische Feld führt andererseits zu einem **Zugewinn** an Energie der elektrischen Ladungen. Diese Energie ist **mechanische** Energie, da die Ladungen z.B. durch das elektromagnetische Feld beschleunigt werden und sich demzufolge schneller bewegen. Die **gesamte pro Zeiteinheit gewonnene** mechanische Energie, also das **Negative** der von den elektromagnetischen Felder an den Ladungen **verrichteten mechanischen Leistung**, ergibt sich aus dem Integral der Leistungsdichte $\vec{j} \cdot \vec{E}$ über den gesamten Raum,

$$-P_{\text{mech}} \equiv \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = \int_V d^3\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.116)$$

1.4.4 Coulomb-Kraft

7.11.2023

Gesetzt den Fall, es handelt sich nur um eine einzelne **Punktladung** q , an der Arbeit verrichtet wird. Dann ist die Ladungsstromdichte $\vec{j}(t, \vec{r}) = \rho(t, \vec{r}) \vec{v}(t, \vec{r})$ fast überall null, es trägt nur der Ort $\vec{r}_q$, an der sich die Punktladung momentan (zum Zeitpunkt t_q) befindet, zum Integral über den gesamten Raum in Gl. (1.116) bei. Wir können also das Volumenintegral auf einen infinitesimalen Raumbereich um $\vec{r}_q$ beschränken (im Laufe der Zeit müssen wir diesen Raumbereich mit der Ladung mitbewegen), vgl. Abb. 1.2.

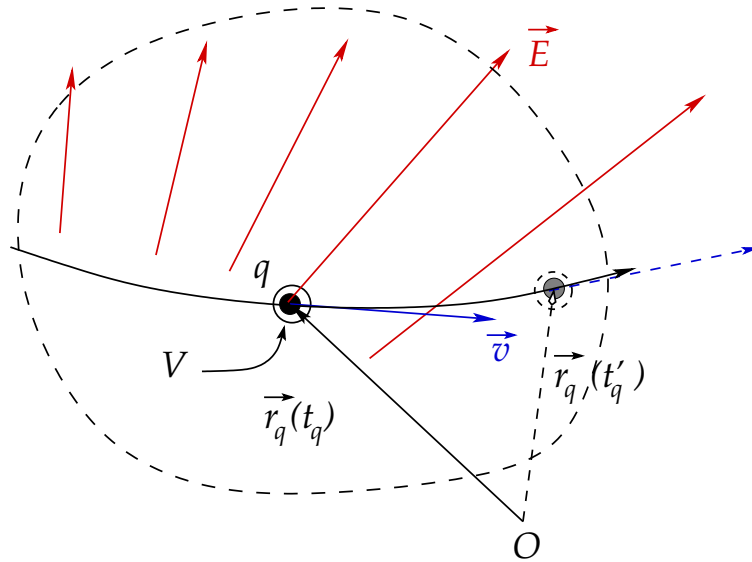


Abbildung 1.2: Einschränkung des Volumenintegrals der mechanischen Leistung um eine sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ im elektrischen Feld $\vec{E}$ bewegendes Punktladung q . Das Volumen muss mit der Ladung mitgeführt werden, so dass es diese auch zu einem späteren Zeitpunkt $t'_q > t_q$ vollständig umschließt.

Wenn der Raumbereich hinreichend klein ist, so können wir annehmen, dass das elektrische Feld $\vec{E}(t, \vec{r})$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}(t, \vec{r})$ in diesem Raumbereich konstant bleiben, so dass wir diese Größen vor das Integral ziehen dürfen,

$$-P_{\text{mech}} = \vec{E} \cdot \vec{v} \int_V d^3\vec{r} \rho \equiv q \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (1.117)$$

wobei wir die **totale Ladung** q als Integral über die **Ladungsdichte** geschrieben haben,

$$q \equiv \int_V d^3\vec{r} \rho. \quad (1.118)$$

Wir erinnern uns nun an die Definition der mechanischen Leistung aus der Vorlesung “Theoretische Physik I”, Gl. (2.138),

$$P_{\text{mech}} = -\vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Durch Vergleich mit Gl. (1.117) erkennen wir, dass die Größe

$$\vec{F}_C \equiv q \vec{E} \quad (1.119)$$

die Bedeutung einer Kraft hat. Es handelt sich um die sog. **Coulomb-Kraft**, die das elektrische Feld $\vec{E}$ auf eine Ladung q ausübt.

1.4.5 Impulssatz

Für $\nu = i$ resultiert aus Gl. (1.114) der **Impulssatz**,

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu i} &= \partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial S^i}{\partial t} - \epsilon_0 \partial_j (E^j E^i) - \frac{1}{\mu_0} \partial_j (B^j B^i) - g^{ij} \partial_j w \\ &= -F^{i\alpha} j_\alpha = -F^{i0} j_0 - F^{ij} j_j = -E^i \rho - \epsilon^{ijk} B^k j^j ,\end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (1.39), (1.40), (1.111) und (1.113), sowie $\delta^{ij} \equiv -g^{ij}$ benutzt haben. Schreiben wir $-g^{ij} \partial_j \equiv -g^{i\mu} \partial_\mu = -\partial^i \equiv \partial_i$, so lautet diese Gleichung in Vektornotation:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} - \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} \right] + \vec{\nabla} w = - \left(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \right) . \quad (1.120)$$

Die Einheit von $[\vec{S}/c^2]$ ist

$$\left[\frac{\vec{S}}{c^2} \right] = \frac{\text{A m}}{\text{V s}} \frac{\text{V}}{\text{m}} \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{V A}}{\text{m}^2} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{m}^2 \text{s}^3} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}} \frac{1}{\text{m}^3} ,$$

wobei wir $\text{VA} = \text{J/s}$ und $\text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ benutzt haben. Es handelt sich also um eine Größe mit der Einheit **Impulsdichte**. Der Impulssatz (1.120) beschreibt also die zeitliche Änderung der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes. Der Impuls ist, wie auch die Energie, keine Erhaltungsgröße, sondern nimmt aufgrund des **Quell-** bzw. **Verlustterms** $-(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$ ab. Die Dimension dieses Terms ist

$$[\rho \vec{E}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^4} = \frac{\text{N m}}{\text{m}^4} = \frac{\text{N}}{\text{m}^3} ,$$

also **Kraftdichte**. Dies ist sinnvoll, da gemäß der Newtonschen Grundgleichung die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Kraft ist, die auf einen Körper ausgeübt wird. Dividieren wir die Newtonsche Grundgleichung durch das Volumen, so folgt, dass die zeitliche Änderung der **Impulsdichte** gleich der **Kraftdichte** ist.

Die rechte Seite $-(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$ von Gl. (1.120) ist also die Kraftdichte, die das elektromagnetische Feld auf die elektrischen Ladungen ausübt und deretwegen sich seine Impulsdichte $\vec{S}/c^2$ zeitlich verringert. Gemäß dem 3. Newtonschen Axiom ("Actio = Reactio") werden die elektrischen Ladungen dann aber durch die Kraftdichte $+(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$ beschleunigt. Die **mechanische** Kraft, die vom elektromagnetischen Feld auf elektrische Ladungen ausgeübt wird und aufgrund der sich der **mechanische Impuls** zeitlich ändert, ergibt sich daraus durch Integration über den gesamten Raum,

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} = \vec{F}_{\text{mech}} = \int_V d^3\vec{r} \left(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \right) . \quad (1.121)$$

1.4.6 Lorentz-Kraft

Wir betrachten wieder den Fall, dass es sich bei den elektrischen Ladungen um eine einzelne Punktladung q handelt. Dieselben Argumente, die wir schon bei der Herleitung

von Gl. (1.117) angewendet haben, führen ausgehend von Gl. (1.121) nun auf

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \equiv \vec{F}_L, \quad (1.122)$$

die sog. **Lorentz-Kraft**. Der erste Term in der Lorentz-Kraft entspricht der **Coulomb-Kraft** (1.119). Positive Ladungen $q > 0$ werden also in Richtung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ beschleunigt.

Der zweite Term in Gl. (1.122) beschreibt den Einfluß der magnetischen Induktion $\vec{B}$ auf sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegende Ladungen. Entsprechend der Definition des Kreuzprodukts wirkt die Kraft senkrecht zur von $\vec{v}$ und $\vec{B}$ aufgespannten Ebene, vgl. Abb. 1.3.

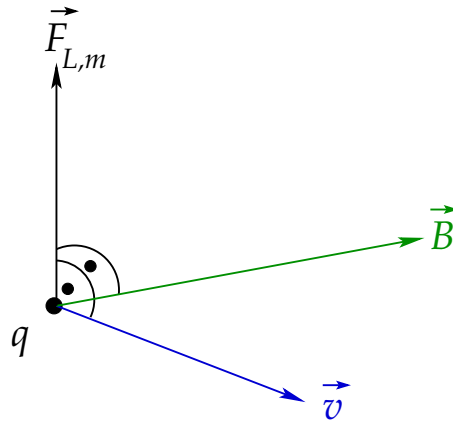


Abbildung 1.3: Richtung des magnetischen Anteils der Lorentz-Kraft für positive Ladungen $q > 0$.

Die von der Lorentz-Kraft geleistete Arbeit pro Zeiteinheit, bzw. mechanische Leistung ist

$$-P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = q \left[\vec{E} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \equiv q \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{F}_C \cdot \vec{v} \equiv -P_{\text{mech}}, \quad (1.123)$$

wobei wir Gl. (1.119) ausgenutzt haben. Dieser Ausdruck ist identisch mit der Leistung (1.117). Lediglich die Coulomb-Kraft leistet Arbeit an den elektrischen Ladungen, der magnetische Anteil der Lorentz-Kraft leistet **keine** Arbeit, da er **senkrecht** zur Geschwindigkeit steht, vgl. Abb. 1.3.

1.4.7 4-Lorentz-Kraft und 4-Lorentz-Kraftdichte

Wir erinnern uns an Gl. (6.72) der Vorlesung “Theoretische Physik II”, welche den Zusammenhang zwischen einer 3-Kraft $\vec{F}$, ihrer mechanischen Leistung $\vec{F} \cdot \vec{v}$ und der relativistischen Verallgemeinerung zu einer 4-Kraft (K^μ) angibt, und wenden diese auf die Lorentz-Kraft (1.122) und ihre Leistung (1.123) an. Dies ergibt die **relativistische Verallgemeinerung der Lorentz-Kraft**,

$$(K_L^\mu) = \gamma \left(\frac{\vec{F}_L \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F}_L \right)^T.$$

Benutzen wir Gl. (1.123), so ergibt sich für die zeitliche Komponente

$$K_L^0 = q \frac{\vec{E}}{c} \cdot \gamma \vec{v} \equiv q F^{j0} u^j = q F^{0j} u_j \equiv q F^{0\nu} u_\nu, \quad (1.124)$$

wobei wir $u^j = \gamma v^j$ ausgenutzt haben, s. Gl. (1.72). Ganz analog berechnen wir für die räumlichen Komponenten

$$K_L^i = q \left[c\gamma \frac{E^i}{c} + \epsilon^{ijk} (\gamma v^j) B^k \right] \equiv q (F^{i0} u^0 - F^{ij} u^j) = q (F^{i0} u_0 + F^{ij} u_j) \equiv q F^{i\nu} u_\nu. \quad (1.125)$$

In 4-Schreibweise zusammengefaßt ergeben die Glgen. (1.124) und (1.125) die **4-Lorentz-Kraft**

$$K_L^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (1.126)$$

Ersetzen wir den 4-Ladungsstrom $q u_\nu$ durch die 4-Ladungsstrom**dichte** j_ν , so erhalten wir daraus die **4-Lorentz-Kraftdichte**,

$$k_L^\mu \equiv F^{\mu\nu} j_\nu. \quad (1.127)$$

Der Energie-Impuls-Satz (1.114) lautet damit

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -k_L^\nu.$$

Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes ändern sich aufgrund der Tatsache, dass sie auf elektrische Ladungen Kräfte ausüben, die an diesen Arbeit verrichten.

1.5 Punktladungen

1.5.1 Das Konzept der Punktladung

In Abschnitt 1.4.4 hatten wir eine **Punktladung** q betrachtet, die sich auf einer Trajektorie $\vec{r}_q(t)$ bewegt, vgl. Abb. 1.2. Die zur Punktladung gehörende **Ladungsdichte** $\rho(t, \vec{r})$ hat die Eigenschaft (1.118), d.h., dass das Raumintegral der Ladungsdichte über ein Volumen V , welches die Punktladung einschließt, den Betrag q hat,

$$q = \int_V d^3\vec{r} \rho(t, \vec{r}). \quad (1.128)$$

Dabei kann das Volumen V **infinitesimal** klein sein. Es ist auf den ersten Blick überraschend, dass der Wert des Integrals nicht von der Größe des Volumens V abhängt, aber das liegt daran, dass die Ladungsdichte $\rho(t, \vec{r})$ lediglich an einem **einzigen Punkt**, dem Ort $\vec{r}_q(t)$ der Ladung **von null verschieden ist**.

Normalerweise hängt der Wert eines Integrals über einen gewissen Raumbereich aber nicht davon ab, welchen Wert der Integrand an einem einzelnen Punkt hat. In der Regel kann man sogar Punkte vom Integrationsbereich ausschließen, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert. In der **Maßtheorie** spricht man davon, dass Punkte **Mengen vom Maß null** darstellen. Diese Betrachtungen sind richtig, sofern der Integrand an besagten

Punkt einen **endlichen** Wert annimmt. Nehmen wir z.B. an, die Ladungsdichte in Gl. (1.128) ist nicht nur bei $\vec{r}_q(t)$ von null verschieden, sondern im gesamten Volumen V_* , welches $\vec{r}_q(t)$ umschließt. Dort nehme sie einen konstanten Wert an und verschwinde außerhalb,

$$\rho(t, \vec{r}) = \begin{cases} \rho_* = \text{const.} < \infty, & \vec{r} \in V_*, \\ 0, & \vec{r} \notin V_*. \end{cases}$$

Dann ist der Wert des Integrals in Gl. (1.128)

$$q = \int_{V_*} d^3\vec{r} \rho(t, \vec{r}) = \int_{V_*} d^3\vec{r} \rho_* = \rho_* V_* .$$

Lassen wir nun $V_* \rightarrow 0$ gehen, so verschwindet das Integral und damit auch die Ladung q .

Dies ist sicher unphysikalisch, denn die Punktladung q existiert und hat einen von null verschiedenen Wert. Der einzige Ausweg ist, der Ladungsdichte $\rho(t, \vec{r})$ bei kleiner werdendem V_* einen immer größeren Wert ρ_* zuzuordnen, so dass sie im Grenzübergang $V_* \rightarrow 0$ am Ort der Ladung $\vec{r}_q(t)$ einen **unendlich großen** Wert $\rho_* \rightarrow \infty$ annimmt. Dabei wird das Produkt $\rho_* V_*$ stets konstant gehalten und gleich der gesamten im Volumen V_* befindlichen Ladung q gesetzt, vgl. Abb. 1.4. In der obigen Grenzwertbetrachtung wäre dann

$$\lim_{\rho_* \rightarrow \infty} \lim_{V_* \rightarrow 0} \rho_* V_* = q \neq 0 .$$

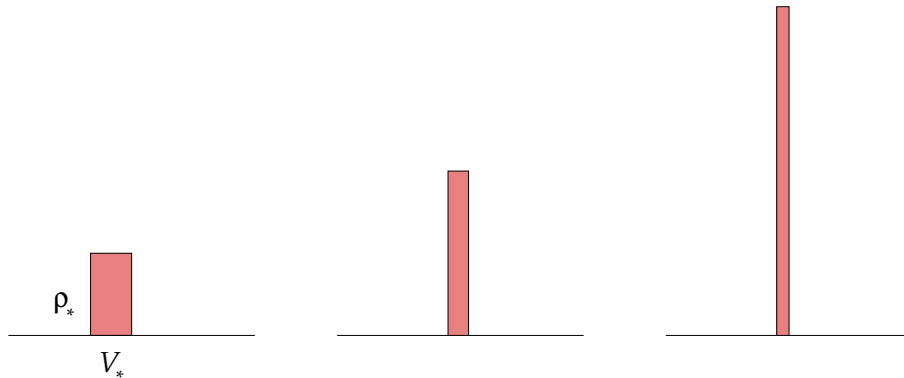


Abbildung 1.4: Veranschaulichung des Grenzübergangs $V_* \rightarrow 0$, $\rho_* \rightarrow \infty$. Die Fläche $\rho_* V_*$ des Quadrats bleibt konstant. Sie entspricht in drei Raumdimensionen der gesamten im Volumen V_* befindlichen Ladung q .

Diese Betrachtung kann man mathematisch formalisieren. Wir schreiben für die **Ladungsdichte einer Punktladung**

$$\rho(t, \vec{r}) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) , \quad (1.129)$$

wobei

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \equiv \delta(x - x_q(t)) \delta(y - y_q(t)) \delta(z - z_q(t))$$

die dreidimensionale **Diracsche δ –Funktion** darstellt.

Die Diracsche δ –Funktion $\delta(x)$ ist keine Funktion im eigentlichen Sinne sondern eine sog. **Distribution**. Sie ist durch folgende Eigenschaften definiert

$$\delta(x - a) = 0 \quad \forall x \neq a \in \mathbb{R}, \quad (1.130)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \delta(x - a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ 0 & \text{falls } a < \alpha \text{ oder } \beta < a. \end{cases} \quad (1.131)$$

In der Tat berechnen wir mit Gl. (1.129) das Integral in Gl. (1.128) wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \rho(t, \vec{r}) &= q \int_V d^3\vec{r} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \\ &= q \int_V dx dy dz \delta(x - x_q(t)) \delta(y - y_q(t)) \delta(z - z_q(t)) \equiv q, \end{aligned}$$

sofern $\vec{r}_q(t) \in V$. Dabei haben wir Eigenschaft (1.131) für jedes der drei Integrale über die Raumkoordinaten x, y, z benutzt.

1.5.2 Diracsche δ –Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge

Wie kann man sich die funktionale Form der δ –Funktion vorstellen? Einen guten ersten Anhaltspunkt liefert Abb. 1.4, in der wir ein Quadrat konstanter Fläche q betrachten und die Seite mit der Länge ρ_* immer länger und gleichzeitig die Seite mit der Länge V immer kürzer gemacht haben. Es gibt aber auch andere Varianten, die δ –Funktion durch einen ähnlichen Grenzübergang zu erhalten. Wünschenswert wäre natürlich, dass die in Frage kommenden Funktionen stetig differenzierbar sind (die quadratförmige Funktion aus Abb. 1.4 ist dies nicht).

Wir betrachten eine sog. **Lorentz–Kurve**

$$L_{\eta}(x - a) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{(x - a)^2 + \eta^2}, \quad \eta > 0, \quad (1.132)$$

vgl. Abb. 1.5. Das Maximum der Lorentz–Kurve liegt offensichtlich beim Minimum des Nenners, also bei $x = a$. Die Höhe des Maximums ist

$$L_{\eta}(0) = \frac{1}{\pi\eta}.$$

Für kleiner werdendes η wird das Maximum also immer höher,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} L_{\eta}(0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\eta} \rightarrow \infty,$$

vgl. Abb. 1.6. Der halbe Wert des Maximums, $1/(2\pi\eta)$ wird für folgende x –Werte angenommen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\eta} &= \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{(x - a)^2 + \eta^2} \\ \iff 2\eta^2 &= (x - a)^2 + \eta^2 \\ \iff (x - a)^2 &= \eta^2 \\ \implies x &= a \pm \eta. \end{aligned}$$

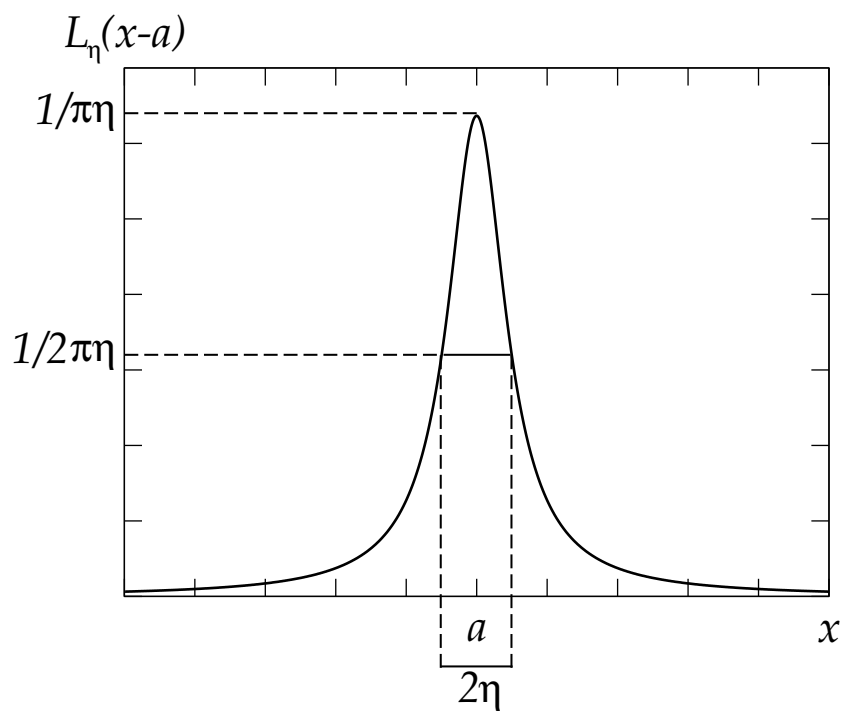


Abbildung 1.5: Die Lorentz-Kurve.

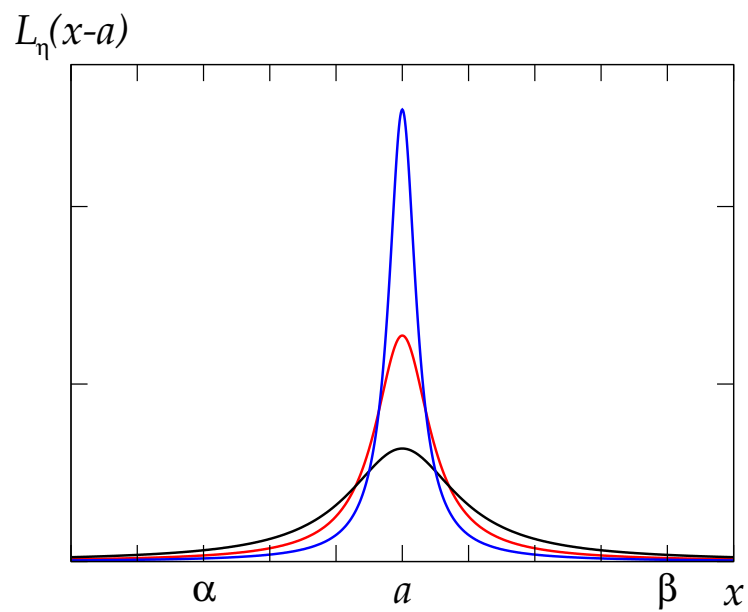


Abbildung 1.6: Lorentz-Kurven für kleiner werdendes η .

Die Breite der Kurve bei der halben Höhe, die sog. **Halbwertsbreite** (engl. “full width at half maximum”, FWHM) ist daher 2η . Für kleiner werdendes η wird die Lorentz-Kurve also immer schmaler, so dass

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} L_\eta(x - a) = 0 \quad \forall x \neq a, \quad (1.133)$$

Die Fläche unter der Lorentz-Kurve in einem Intervall $[\alpha, \beta]$ ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx L_\eta(x - a) = \frac{\eta}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{1}{(x - a)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{\beta - a}{\eta} - \arctan \frac{\alpha - a}{\eta} \right).$$

Falls $\alpha < a < \beta$, so ist das Argument des ersten arctan positiv und das des zweiten negativ. Im Limes $\eta \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \arctan \frac{\beta - a}{\eta} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \arctan \frac{\alpha - a}{\eta} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{falls } \alpha < a < \beta.$$

Falls $a < \alpha$, sind die Argumente beider arctan positiv und der Limes $\eta \rightarrow 0$ liefert jeweils $+\pi/2$. Für $\beta < a$ sind beide Argumente negativ und der Limes $\eta \rightarrow 0$ liefert jeweils $-\pi/2$. Zusammengefaßt erhalten wir

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} dx L_\eta(x - a) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 0, & \text{falls } \beta < a, \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = 0, & \text{falls } a < \alpha. \end{cases}$$

Mit anderen Worten, das Integral über die Lorentz-Kurve liefert im Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ den Wert 1, falls das Zentrum (Maximum) der Kurve im Integrationsbereich liegt, und ansonsten den Wert null,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} dx L_\eta(x - a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ 0, & \text{falls } a < \alpha \text{ oder } \beta < a. \end{cases} \quad (1.134)$$

Die beiden Eigenschaften (1.133) und (1.134) sind die **gleichen**, die auch die δ -Funktion erfüllt, s. Glgen. (1.130), (1.131). Wir haben also die δ -Funktion $\delta(x - a)$ als **Grenzwert einer Funktionenfolge**, nämlich der der Lorentz-Kurven $L_\eta(x - a)$ für $\eta \rightarrow 0$ dargestellt,

$$\delta(x - a) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} L_\eta(x - a).$$

1.5.3 Eigenschaften der Diracschen δ -Funktion

10.11.2023

In diesem Abschnitt diskutieren wir einige wichtige Eigenschaften der δ -Funktion.

(i) Sei $f(x)$ eine stetige Funktion in der Umgebung von a . dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx f(x) \delta(x - a) = \begin{cases} f(a), & \text{falls } \alpha < a < \beta, \\ 0, & \text{falls } a < \alpha \text{ oder } \beta < a. \end{cases} \quad (1.135)$$

Aufgrund der Eigenschaft (1.130) der δ -Funktion kann nur der Wert der Funktion $f(x)$ bei $x = a$, also $f(a)$ eine Rolle spielen. Die δ -Funktion selektiert also diesen Wert. Aufgrund der Eigenschaft (1.131) läßt sie das Integral zusammenbrechen; $f(a)$ bleibt als multiplikativer Faktor übrig.

- (ii) Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen x_i , $f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$. Dann gilt

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) . \quad (1.136)$$

Den Beweis findet man z.B. in Ref. [1], Übungsaufgabe 1.7.3.

Spezialfälle:

$$(a) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) , \quad (1.137)$$

$$(b) \quad \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] . \quad (1.138)$$

- (iii) Es gilt aufgrund von Eigenschaft (1.135)

$$g(x) \delta(x - a) = g(a) \delta(x - a) , \quad (1.139)$$

und insbesondere

$$x \delta(x) = 0 . \quad (1.140)$$

- (iv) Das Integral

$$\Theta(x) \equiv \int_{-\infty}^x du \delta(u) = \begin{cases} 1 , & \text{für } x > 0 , \\ 0 , & \text{für } x < 0 , \end{cases} \quad (1.141)$$

definiert die sog. **Stufen-** oder **Heaviside-Funktion**, vgl. Abb. 1.7.

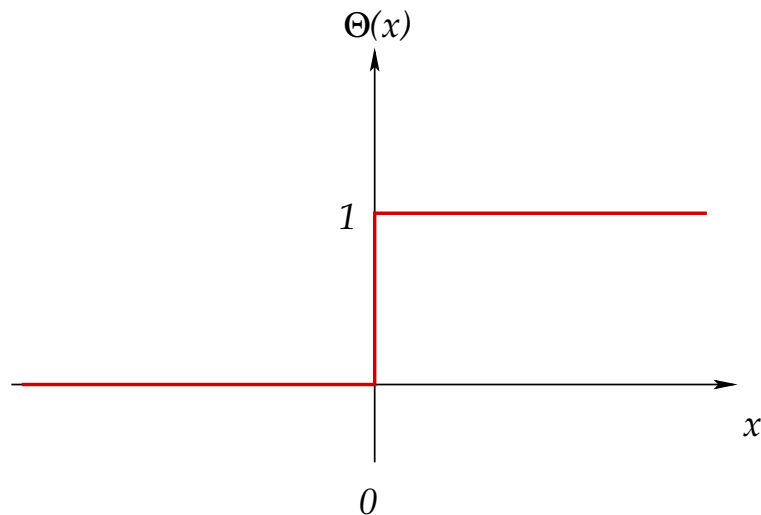


Abbildung 1.7: Die Stufen- bzw. Heaviside-Funktion.

- (v) Die **Ableitung** der δ -Funktion ist über ihr Integral definiert. Mit Hilfe partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} dx f(x) \delta'(x-a) &= f(x) \delta(x-a)|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} dx f'(x) \delta(x-a) \\ &= 0 - f'(a) = -f'(a),\end{aligned}$$

also

$$f(x) \delta'(x-a) = -f'(x) \delta(x-a) \equiv -f'(a) \delta(x-a). \quad (1.142)$$

- (vi) Die **Ableitung der Stufenfunktion** ist die δ -Funktion,

$$\frac{d}{dx} \Theta(x-a) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x-a} du \delta(u) = \delta(x-a), \quad (1.143)$$

wobei wir die Differentiationsregeln für Parameterintegrale angewendet haben.

- (vii) **Mehrdimensionale δ -Funktion in krummlinigen Koordinaten** (u, v, w). Beim Koordinatenwechsel gilt nach Gl. (1.128) der Vorlesung “Theoretische Physik I” für das infinitesimale Volumenelement

$$d^3\vec{r} = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw,$$

wobei der erste Faktor die sog. **Funktionaldeterminante** ist. Wie lautet nun die δ -Funktion in krummlinigen Koordinaten? Wir machen den Ansatz

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0),$$

wobei $\gamma(u, v, w)$ eine noch zu bestimmende Funktion der neuen, krummlinigen Koordinaten (u, v, w) ist. Falls der Punkt $\vec{r}_0$ im Volumen V liegt, gilt

$$\begin{aligned}1 &= \int_V d^3\vec{r} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \int_V du dv dw \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) \\ &= \gamma(u_0, v_0, w_0) \left. \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|_{\vec{r}_0},\end{aligned}$$

wobei wir die Eigenschaft (1.135) der δ -Funktion ausgenutzt haben. Diese Gleichung läßt sich nun nach der Funktion γ auflösen,

$$\gamma(u_0, v_0, w_0) = \left. \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right|_{\vec{r}_0}. \quad (1.144)$$

Beispiele:

- (a) **Kugelkoordinaten** (r, ϑ, φ) . Die Funktionaldeterminante ist (vgl. Gl. (1.170) der Vorlesung “Theoretische Physik I”)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin \vartheta ,$$

also folgt

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \vartheta_0} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) .$$

- (b) **Zylinderkoordinaten** (ρ, φ, z) . Die Funktionaldeterminante lautet in diesem Fall (vgl. Gl. (1.149) der Vorlesung “Theoretische Physik I”)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho ,$$

also folgt

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0) .$$

1.6 Elektrodynamik in Integralform

1.6.1 Flächenintegrale

Aus der Vorlesung “Theoretische Physik I” sind uns Linien- und Volumenintegrale bekannt. Als dritten Typ mehrdimensionaler Integrale lernen wir nun die sog. **Flächenintegrale** kennen. Ganz ähnlich wie Raumkurven lassen sich auch zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen Raum mit Hilfe einer **Parameterdarstellung** festlegen,

$$S = \{ \vec{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3 , u, v \in D \} . \quad (1.145)$$

Dabei ist D der Definitionsbereich der Parameter u, v . Man beachte, dass wir im Gegensatz zu Kurven, die durch eine einzige Variable parametrisiert werden können (vgl. Abschnitt 1.2.1 der Vorlesung “Theoretische Physik I”), nun **zwei** Parameter, u, v , benötigen.

Die Konstruktion von zweidimensionalen Flächen im dreidimensionalen Raum kann man sich wie in Abb. 1.8 gezeigt vorstellen. Man fixiert zunächst u und variiert v . Dies ergibt eine Raumkurve, parametrisiert durch die Variable v . Dann vergrößert man $u \rightarrow u + du$ und variiert erneut v . Dies ergibt eine zweite Raumkurve usw., so dass man eine Kurvenschar erhält. Eine zweite Kurvenschar erhält man, indem man v fixiert und u variiert, dann $v \rightarrow v + dv$ setzt und erneut u variiert usw. Die beiden Kurvenscharen spannen die Fläche S auf.

Es gilt offenbar

$$d\vec{a} = \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv , \quad (1.146)$$

$$d\vec{b} = \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du , \quad (1.147)$$

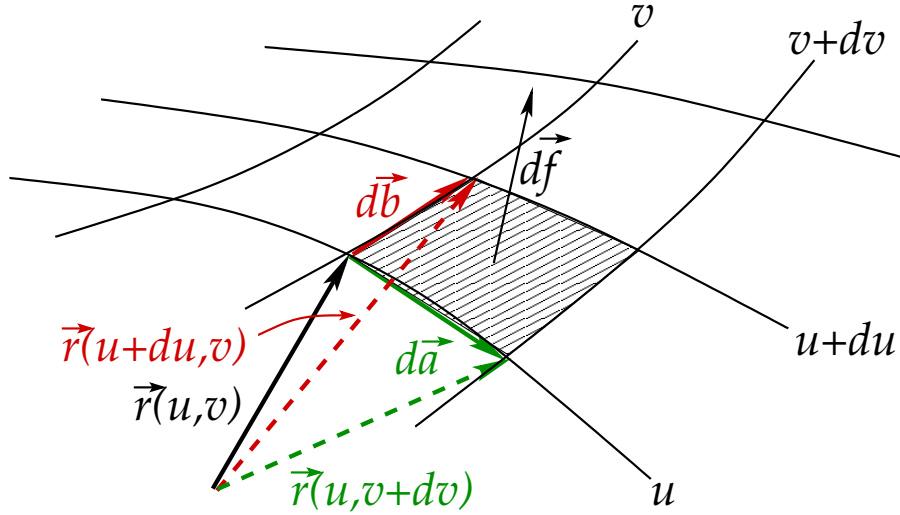


Abbildung 1.8: Parameterdarstellung einer Fläche.

wobei wir jeweils im zweiten Schritt die Definition der partiellen Ableitungen $\partial \vec{r} / \partial v$ bzw. $\partial \vec{r} / \partial u$ benutzt haben. Das Kreuzprodukt der Vektoren $d\vec{a}$, $d\vec{b}$ definiert einen Vektor,

$$d\vec{f} \equiv d\vec{a} \times d\vec{b}, \quad (1.148)$$

der senkrecht auf dem von $d\vec{a}$ und $d\vec{b}$ aufgespannten infinitesimalen Flächenelement df (in Abb. 1.8 schraffiert gezeichnet) steht. Bei Flächen S , die ein Volumen V umschließen, also **geschlossenen** Oberflächen, werden wir vereinbaren, dass $d\vec{f}$ von V aus gesehen stets nach **außen** zeigt.

Mit den Glgen. (1.146), (1.147) lautet Gl. (1.148)

$$d\vec{f} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) du dv. \quad (1.149)$$

Die Vektoren

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

spannen die sog. **Tangentialebene** zur Fläche S im Punkt $\vec{r}(u, v)$ auf. Der **Normalenvektor** auf dem bei $\vec{r}(u, v)$ befindlichen Flächenelement df ist gegeben durch

$$\vec{n}(\vec{r}) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|}. \quad (1.150)$$

Für Gl. (1.149) ergibt sich somit

$$d\vec{f} = \vec{n}(\vec{r}) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| du dv \equiv \vec{n}(\vec{r}) df, \quad (1.151)$$

wobei für den Betrag df gilt

$$df = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| du dv .$$

Beispiel: Kugeloberfläche

Wir parametrisieren die Kugeloberfläche zweckmäßigerweise in **Kugelkoordinaten**,

$$S = \{ \vec{r}(r = R, \vartheta, \varphi), 0 \leq \vartheta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi \} ,$$

wobei $R = \text{const.}$ der Radius der Kugel ist. Mit

$$\vec{r} = R(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^T$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} &= R(\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta)^T \equiv R \vec{e}_\vartheta , \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= R(-\sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, 0)^T \equiv R \sin \vartheta (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T \equiv R \sin \vartheta \vec{e}_\varphi , \end{aligned}$$

wobei wir die Definition der Einheitsvektoren $\vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ aus Gl. (1.172) der Vorlesung “Theoretische Physik I” übernommen haben. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi \equiv R^2 \sin \vartheta \vec{e}_r ,$$

also

$$\begin{aligned} \vec{n}(\vec{r}) &= \vec{e}_r , \\ df &= R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi , \\ d\vec{f} &= R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r . \end{aligned} \tag{1.152}$$

Die einzelnen Größen sind in Abb. 1.9 graphisch dargestellt.

Gegeben sei nun ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$. Der **Fluß** von $\vec{a}(\vec{r})$ durch die Fläche S ist definiert als

$$\varphi_S[\vec{a}] \equiv \int_S d\vec{f} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \equiv \int_S df \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{a}(\vec{r}) . \tag{1.153}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist ein **Flächenintegral** über die Fläche S . Wie ist dieses Integral definiert? Gegeben sei eine Fläche S , die wir in kleine (nicht notwendigerweise gleich große) Teilflächen Δf_i mit Normalenvektor $\vec{n}(\vec{r}_i) \equiv \Delta \vec{f}_i / \Delta f_i$ um geeignete Positionen $\vec{r}_i \in S$ unterteilen, s. Abb. 1.10.

Der Fluß von $\vec{a}(\vec{r})$ durch die Teilfläche Δf_i an der Stelle $\vec{r}_i$ ist durch das Skalarprodukt von $\vec{a}(\vec{r}_i)$ mit dem der Fläche zugeordneten Vektor $\Delta \vec{f}_i$ gegeben,

$$\varphi_{\Delta f_i}(\vec{a}(\vec{r}_i)) \equiv \Delta \vec{f}_i \cdot \vec{a}(\vec{r}_i) \equiv \Delta f_i \vec{n}(\vec{r}_i) \cdot \vec{a}(\vec{r}_i) .$$

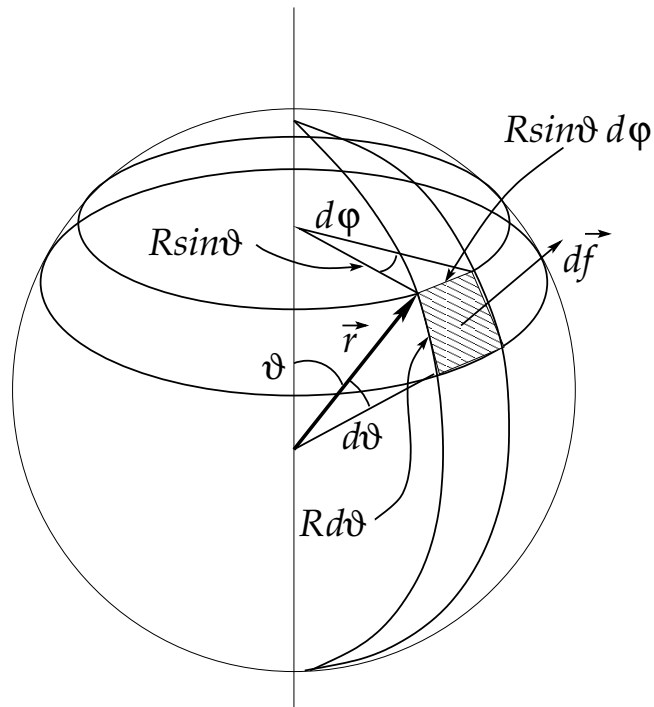


Abbildung 1.9: Parameterdarstellung der Kugeloberfläche.

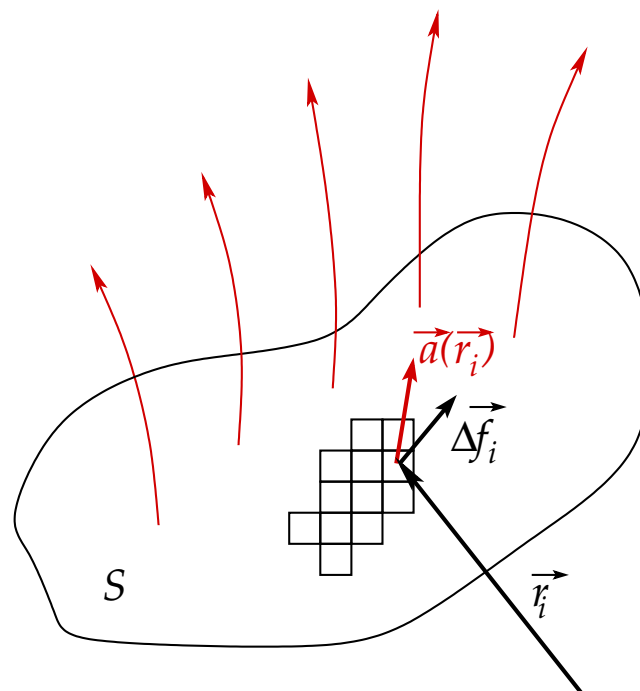


Abbildung 1.10: Zur Definition des Flächenintegrals.

Der gesamte Fluß durch die Fläche S ergibt sich als Summe der Flüsse durch die einzelnen Teilflächen,

$$\varphi_S[\vec{a}] = \sum_i \varphi_{\Delta f_i}(\vec{a}(\vec{r}_i)) = \sum_i \Delta \vec{f}_i \cdot \vec{a}(\vec{r}_i) = \sum_i \Delta f_i \vec{n}(\vec{r}_i) \cdot \vec{a}(\vec{r}_i) .$$

Das Flächenintegral aus Gl. (1.153) ist nun als Grenzwert dieses Ausdrucks für $\Delta f_i \rightarrow 0$ zu verstehen,

$$\varphi_S[\vec{a}] = \lim_{\Delta f_i \rightarrow 0} \sum_i \varphi_{\Delta f_i}(\vec{a}(\vec{r}_i)) \equiv \int_S d\vec{f} \cdot \vec{a}(\vec{r}) .$$

Flächenintegrale über **geschlossene** Oberflächen $S(V)$ eines Volumens V bezeichnet man gesondert mit folgendem Symbol:

$$\varphi_{S(V)}[\vec{a}] \equiv \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \equiv \oint_{S(V)} df \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.154)$$

Wie bereits oben erwähnt, zeigt der Normalenvektor $\vec{n}(\vec{r})$ vom Volumen V gesehen stets nach außen.

Beispiel: Fluß eines Zentralfeldes durch Kugeloberfläche

Wir betrachten das **Zentralfeld**

$$\vec{a}(\vec{r}) = a(r) \vec{e}_r .$$

Benutzen wir $d\vec{f}$ aus dem vorangegangenen Beispiel, Gl. (1.152), so ergibt sich wegen $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$

$$\varphi_S[\vec{a}] = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin \vartheta a(R) = a(R) R^2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2 a(R) ,$$

wobei wir $x = \cos \vartheta$ substituiert haben.

14.11.2023

1.6.2 Satz von Gauß

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Integralsätze der Theoretischen Physik, dem **Satz von Gauß**. Wir betrachten zunächst eine nützliche Identität, die sog. **Integraldarstellung der Divergenz**. Sei $\vec{a}(\vec{r})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und ΔV ein kleines Volumenelement. Dann gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\varphi_{S(\Delta V)}[\vec{a}]}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \cdot \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.155)$$

Beweis:

Wir betrachten zunächst die rechte Seite von Gl. (1.155). Da ΔV gegen null gehen soll, spielt die exakte Form dieses Volumens keine Rolle. Der Einfachheit halber betrachten wir daher ein quaderförmiges Volumen $\Delta V \equiv \Delta x \Delta y \Delta z$ mit Mittelpunkt in $\vec{r}_0$, s. Abb. 1.11.

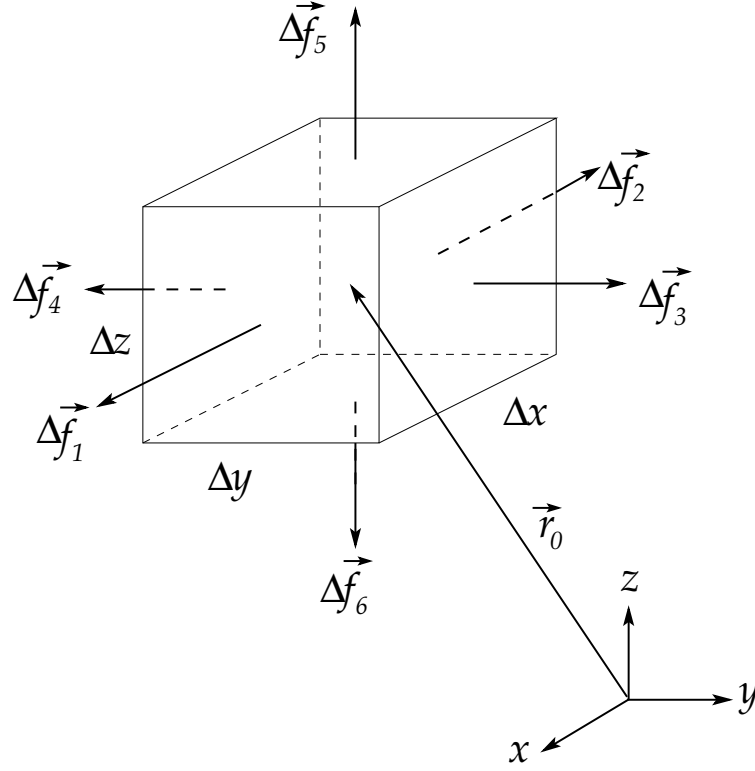


Abbildung 1.11: Zur Integraldarstellung der Divergenz.

Für die auf den Seitenflächen des Volumens senkrecht stehenden Vektoren gilt ganz offensichtlich

$$\begin{aligned}\Delta \vec{f}_1 &= \Delta y \Delta z \vec{e}^x \equiv -\Delta \vec{f}_2, \\ \Delta \vec{f}_3 &= \Delta x \Delta z \vec{e}^y \equiv -\Delta \vec{f}_4, \\ \Delta \vec{f}_5 &= \Delta x \Delta y \vec{e}^z \equiv -\Delta \vec{f}_6.\end{aligned}$$

Für die infinitesimalen Flächenvektoren $d\vec{f}_i$, die im Oberflächenintegral auf der rechten Seite von Gl. (1.155) auftreten, gelten analoge Gleichungen, wenn man die Seitenlängen Δx , Δy , Δz durch die infinitesimalen Längen dx , dy , dz ersetzt. Damit folgt z.B. auf der zu $d\vec{f}_1$ gehörenden Seitenfläche

$$d\vec{f}_1 \cdot \vec{a}(\vec{r}) = dy \, dz \, a^x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)$$

und entsprechend auf der gegenüberliegenden Seitenfläche

$$d\vec{f}_2 \cdot \vec{a}(\vec{r}) = -dy \, dz \, a^x \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right).$$

Für das Oberflächenintegral auf der rechten Seite von Gl. (1.155) folgt damit

$$\begin{aligned} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \cdot \vec{a}(\vec{r}) &= \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} \int_{z_0-\Delta z/2}^{z_0+\Delta z/2} dy dz \left[a^x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - a^x \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \\ &+ \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} \int_{z_0-\Delta z/2}^{z_0+\Delta z/2} dx dz \left[a^y \left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - a^y \left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \\ &+ \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} dx dy \left[a^z \left(x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{2} \right) - a^z \left(x, y, z_0 - \frac{\Delta z}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nach Definition der partiellen Ableitung gilt im Limes $\Delta x \rightarrow 0$

$$a^x \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) - a^x \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \equiv \frac{\partial a^x}{\partial x}(x_0, y, z) \Delta x,$$

so dass wir das Oberflächenintegral weiter vereinfachen können,

$$\begin{aligned} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \cdot \vec{a}(\vec{r}) &= \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} \int_{z_0-\Delta z/2}^{z_0+\Delta z/2} dy dz \Delta x \frac{\partial a^x}{\partial x}(x_0, y, z) \\ &+ \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} \int_{z_0-\Delta z/2}^{z_0+\Delta z/2} dx dz \Delta y \frac{\partial a^y}{\partial y}(x, y_0, z) \\ &+ \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} dx dy \Delta z \frac{\partial a^z}{\partial z}(x, y, z_0). \end{aligned}$$

Im Limes $\Delta V \rightarrow 0$ kann man die Integranden der Flächenintegrale durch ihren Wert bei $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ersetzen und vor die Integrale ziehen,

$$\begin{aligned} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \cdot \vec{a}(\vec{r}) &= \frac{\partial a^x}{\partial x}(\vec{r}_0) \Delta x \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} \int_{z_0-\Delta z/2}^{z_0+\Delta z/2} dy dz \\ &+ \frac{\partial a^y}{\partial y}(\vec{r}_0) \Delta y \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} \int_{z_0-\Delta z/2}^{z_0+\Delta z/2} dx dz \\ &+ \frac{\partial a^z}{\partial z}(\vec{r}_0) \Delta z \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} dx dy \\ &\equiv \left(\frac{\partial a^x}{\partial x} + \frac{\partial a^y}{\partial y} + \frac{\partial a^z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \Delta V. \end{aligned}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch ΔV und nehmen den Grenzwert $\Delta V \rightarrow 0$ (den wir implizit schon im Verlauf des Beweises benutzt haben), so folgt Gl. (1.155), q.e.d.

Gleichung (1.155) läßt sich ganz entsprechend auch für andere Differentialoperatoren erweitern, z.B.

$$\vec{\nabla} \varphi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \varphi(\vec{r}), \quad (1.156)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{r}), \quad (1.157)$$

wobei $\varphi(\vec{r})$ ein skalarcs Feld ist. Der Beweis verläuft analog.

Nun betrachten wir ein Volumen beliebiger Größe V . Dieses teilen wir in kleine Teilvolumina ΔV_i auf, s. Abb. 1.12.

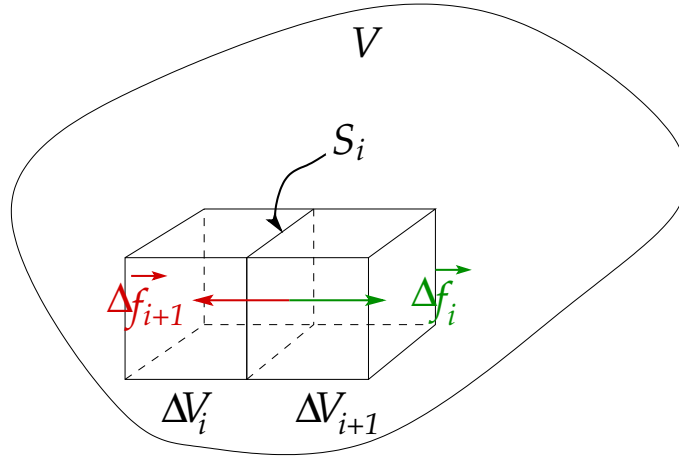


Abbildung 1.12: Aufteilung eines Volumens V in Teilvolumina ΔV_i .

Betrachten wir nun die Grenzfläche S_i zwischen ΔV_i und ΔV_{i+1} . Aufgrund von $\Delta \vec{f}_i = -\Delta \vec{f}_{i+1}$ ist der Fluß, der aus ΔV_i durch diese Fläche heraus und in ΔV_{i+1} hineinströmt, umgekehrt gleich groß wie der, der aus ΔV_{i+1} durch diese Fläche heraus und in ΔV_i hineinströmt,

$$\varphi_{S_i}[\vec{a}] = \Delta \vec{f}_i \cdot \vec{a} \Big|_{S_i} = - \Delta \vec{f}_{i+1} \cdot \vec{a} \Big|_{S_i} ,$$

denn $\vec{a}$ nimmt auf der Grenzfläche S_i dieselben Werte an, unabhängig davon, ob wir das Skalarprodukt mit $\Delta \vec{f}_i$ oder $\Delta \vec{f}_{i+1}$ bilden. In der Summe der Oberflächenintegrale über ΔV_i und ΔV_{i+1} würden sich diese Beiträge also gerade gegenseitig wegheben, so dass die Summe der Integrale identisch mit dem Integral über die Summe der Teilvolumina ist,

$$\oint_{S(\Delta V_i)} d\vec{f} \cdot \vec{a} + \oint_{S(\Delta V_{i+1})} d\vec{f} \cdot \vec{a} = \oint_{S(\Delta V_i + \Delta V_{i+1})} d\vec{f} \cdot \vec{a} .$$

Dieses Argument kann man auf die Summe **aller** Teilvolumina ΔV_i des Volumens V erweitern, so dass wegen $\sum_i \Delta V_i \equiv V$

$$\sum_i \oint_{S(\Delta V_i)} d\vec{f} \cdot \vec{a} \equiv \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{a} . \quad (1.158)$$

Andererseits gilt mit Gl. (1.155) für die linke Seite dieser Gleichung im Limes $\Delta V_i \rightarrow 0$

$$\sum_i \oint_{S(\Delta V_i)} d\vec{f} \cdot \vec{a} = \sum_i \Delta V_i \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \equiv \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} . \quad (1.159)$$

Der Vergleich von Gl. (1.158) mit (1.159) ergibt den **Satz von Gauß**,

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{a} . \quad (1.160)$$

Entsprechend zeigt man die Verallgemeinerung von Glgen. (1.156) und (1.157) für beliebige Volumina V ,

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \oint_{S(V)} d\vec{f} \varphi(\vec{r}), \quad (1.161)$$

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = \oint_{S(V)} d\vec{f} \times \vec{a}(\vec{r}) \equiv \oint_{S(V)} d\vec{f} \vec{n}(\vec{r}) \times \vec{a}(\vec{r}), \quad (1.162)$$

Diese Resultate lassen sich auch auf **vierdimensionale Raum-Zeit-Volumina** Ω verallgemeinern. Z.B. lautet die vierdimensionale Version des Satzes von Gauß mit einem beliebigen 4-Vektorfeld $A \equiv (a^\mu)$

$$\int_\Omega d^4X \partial_\mu a^\mu = \oint_{\Sigma(\Omega)} d\sigma_\mu a^\mu \equiv \oint_{\Sigma(\Omega)} d\sigma n_\mu a^\mu, \quad (1.163)$$

wobei $d\sigma_\mu \equiv d\sigma n_\mu$ der zum Flächenelement $d\sigma$ gehörende Vektor ist; n_μ ist der **vierdimensionale Normalenvektor** auf der Oberfläche $\Sigma(\Omega)$ des Raum-Zeit-Volumens Ω . Entsprechend lassen sich auch die Resultate (1.161) und (1.162) auf vier Raum-Zeit-Dimensionen verallgemeinern.

Der Satz von Gauß (1.163) für vierdimensionale Raum-Zeit-Volumina Ω erleichtert den Beweis der Eichinvarianz der Wirkung der Elektrodynamik aus Abschnitt 1.3.2. Wir können nämlich für den zweiten Term in Gl. (1.91) schreiben

$$\int_\Omega d^4X j^\mu \partial_\mu \chi \equiv \int_\Omega d^4X [\partial_\mu (j^\mu \chi) - \chi \partial_\mu j^\mu] = \oint_{\Sigma(\Omega)} d\sigma_\mu j^\mu \chi,$$

wobei wir den Satz von Gauß (1.163) und die Kontinuitätsgleichung (1.88) benutzt haben. Vorausgesetzt, die 4-Stromdichte j^μ (oder die skalare Funktion χ) verschwindet auf der Oberfläche $\Sigma(\Omega)$ des vierdimensionalen Raum-Zeit-Volumens Ω , dann ist auch die rechte Seite dieser Gleichung null und die Wirkung der Elektrodynamik invariant unter Eichtransformationen, $S'_{ED} = S_{ED}$.

1.6.3 Kontinuitätsgleichung in Integralform

Als Anwendung des Satzes von Gauß betrachten wir die Kontinuitätsgleichung (1.88). Wir integrieren diese über ein beliebiges, aber zeitlich konstantes Volumen V ,

$$\int_V d^3\vec{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \equiv - \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{j},$$

wobei wir auf der rechten Seite den Satz von Gauß (1.160) verwendet haben. Die rechte Seite ist offenbar identisch mit dem **gesamten Ladungsstrom** durch die Oberfläche $S(V)$ des Volumens V . Die linke Seite können wir für zeitlich konstante Volumina auch wie folgt schreiben,

$$\int_V d^3\vec{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3\vec{r} \rho \equiv \frac{\partial Q}{\partial t},$$

wobei wir die **gesamte** im Volumen V befindliche Ladung mit

$$Q \equiv \int_V d^3\vec{r} \rho \quad (1.164)$$

bezeichnet haben. Die **Kontinuitätsgleichung in Integralform**,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{j}, \quad (1.165)$$

besagt also, dass die **zeitliche Änderung** der in einem Volumen V befindlichen **Ladung** identisch ist mit dem **Ladungsstrom** durch die Oberfläche $S(V)$ dieses Volumens. Da das Volumen beliebig war, bedeutet dies, dass die elektrische Ladung eine **Erhaltungsgröße** sein muss. Dies ist aber auch die Grundaussage der Kontinuitätsgleichung.

1.6.4 Satz von Stokes

Wir kommen nun zu einem weiteren wichtigen Integralsatz der Theoretischen Physik, dem **Satz von Stokes**. Wir führen zunächst eine weitere Größe ein, die sog. **Zirkulation** eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entlang einer geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$,

$$Z_{\mathcal{C}}[\vec{a}] \equiv \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}). \quad (1.166)$$

Als Beispiele betrachten wir für $\mathcal{C}$ einen Kreis und (a) ein Vektorfeld mit **maximaler** Zirkulation entlang $\mathcal{C}$, s. Abb. 1.13(a), sowie (b) ein Vektorfeld mit **minimaler** Zirkulation, s. Abb. 1.13(b).

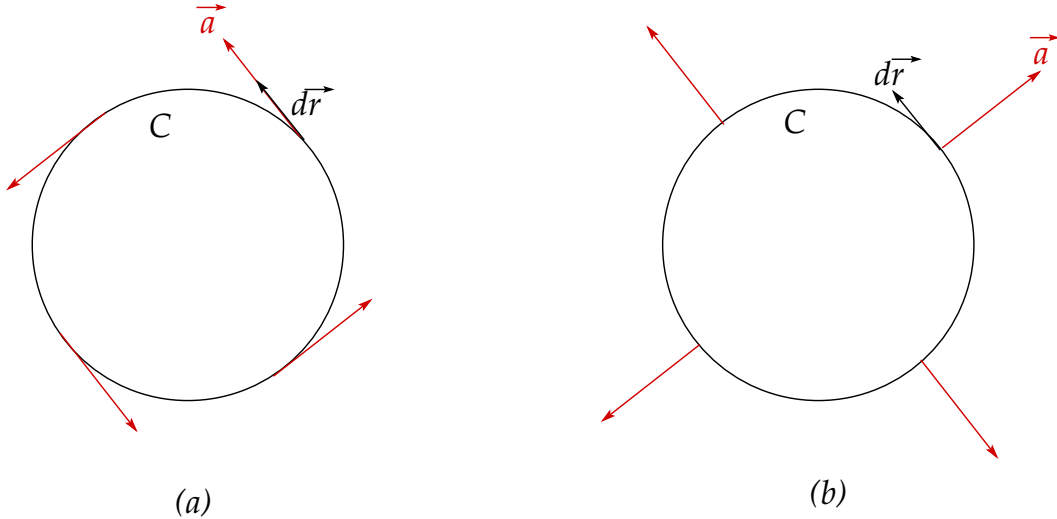


Abbildung 1.13: (a) Vektorfeld mit maximaler und (b) mit minimaler Zirkulation.

Im ersten Fall liegt $\vec{a}$ stets **tangential** an $\mathcal{C}$ an, so dass $d\vec{r}$ und $\vec{a}(\vec{r})$ **parallele** Vektoren sind,

$$d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \equiv ds |\vec{a}(\vec{r})|,$$

wobei $ds \equiv |d\vec{r}|$. Im zweiten Fall steht $\vec{a}$ stets **senkrecht** zur Kurve $\mathcal{C}$, so dass

$$d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \equiv 0 .$$

Die Zirkulation dieses Vektorfelds verschwindet also.

Als nützliche Identität beweisen wir nun die sog. **Integraldarstellung der Rotation**,

$$\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{Z_{\mathcal{C}(\Delta F)}[\vec{a}]}{\Delta F} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\mathcal{C}(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) , \quad (1.167)$$

wobei ΔF die von $\mathcal{C}(\Delta F)$ umschlossene Fläche und $\vec{n}$ der Normalenvektor auf ΔF ist.

Beweis:

Da $\Delta F \rightarrow 0$, ist die Form des Flächenelements irrelevant. Wir betrachten daher der Einfachheit halber ein quadratisches Flächenelement $\Delta F \equiv \Delta x \Delta y$ parallel zur (xy) -Ebene mit Mittelpunkt in $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, vgl. Abb. 1.14.

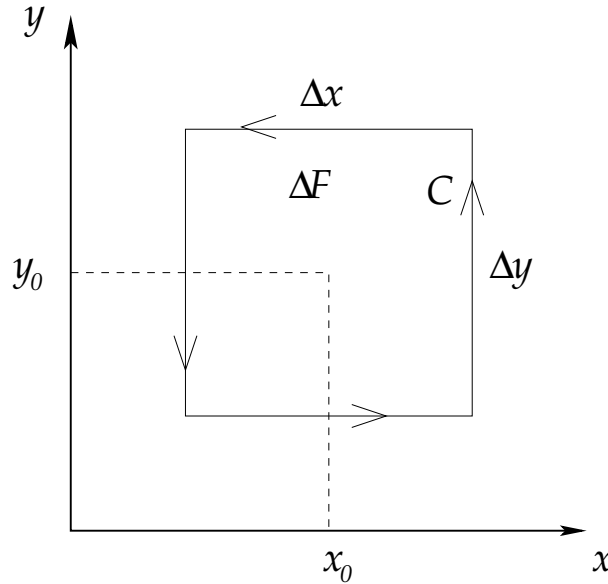


Abbildung 1.14: Zur Integraldarstellung der Rotation.

Auf den beiden Teilstücken parallel zur x -Achse gilt

$$d\vec{r} \cdot \vec{a} \left(x, y_0 \pm \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \equiv \mp dx a^x \left(x, y_0 \pm \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) ,$$

wobei das Vorzeichen die Richtung angibt, in der das entsprechende Teilstück durchlaufen wird. Entsprechend gilt für die beiden Teilstücke parallel zur y -Achse

$$d\vec{r} \cdot \vec{a} \left(x_0 \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) \equiv \pm dy a^y \left(x_0 \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) .$$

Für die Zirkulation von $\vec{a}(\vec{r})$ um das Flächenelement ΔF erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} Z_{C(\Delta F)}[\vec{a}] &= \oint_{C(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \\ &= \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} dx \left[a^x \left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) - a^x \left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \right] \\ &\quad + \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} dy \left[a^y \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) - a^y \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) \right] . \end{aligned}$$

Mit der Definition der partiellen Ableitung gilt im Limes $\Delta y \rightarrow 0$

$$a^x \left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) - a^x \left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) = - \frac{\partial a^x}{\partial y}(x, y_0, z_0) \Delta y ,$$

und entsprechend

$$a^y \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) - a^y \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z_0 \right) = \frac{\partial a^y}{\partial x}(x_0, y, z_0) \Delta x .$$

Wir erhalten also für die Zirkulation

$$\begin{aligned} Z_{C(\Delta F)}[\vec{a}] &= - \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} dx \frac{\partial a^x}{\partial y}(x, y_0, z_0) \Delta y + \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} dy \frac{\partial a^y}{\partial x}(x_0, y, z_0) \Delta x \\ &= - \frac{\partial a^x}{\partial y}(\vec{r}_0) \Delta y \int_{x_0-\Delta x/2}^{x_0+\Delta x/2} dx + \frac{\partial a^y}{\partial x}(\vec{r}_0) \Delta x \int_{y_0-\Delta y/2}^{y_0+\Delta y/2} dy \\ &= \left(\frac{\partial a^y}{\partial x} - \frac{\partial a^x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \\ &\equiv \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \Delta F , \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Integranden vor die Integrale gezogen haben, da diese im Limes $\Delta F \rightarrow 0$ als konstant und gleich ihrem Wert bei $\vec{r}_0$ betrachtet werden können. Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass der Normalenvektor auf der Fläche ΔF in z -Richtung zeigt, $\vec{n} \equiv \vec{e}^z$. Dividieren wir beide Seiten durch ΔF und nehmen den Limes $\Delta F \rightarrow 0$, so ergibt sich Gl. (1.167), q.e.d.

17.11.2023

Wie im Fall der Integraldarstellung der Divergenz ergeben sich auch hier Verallgemeinerungen auf andere Differentialoperatoren, die wir ohne Beweis angeben,

$$\vec{n} \times \vec{\nabla} \varphi = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C(\Delta F)} d\vec{r} \varphi(\vec{r}) , \quad (1.168)$$

$$(\vec{n} \times \vec{\nabla}) \times \vec{a} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C(\Delta F)} d\vec{r} \times \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.169)$$

Wir betrachten nun Flächen S beliebiger Größe. Diese teilen wir in kleine Teilflächen ΔF_i auf, s. Abb. 1.15.

Obwohl S keine ebene Fläche sein muss, kann man die Teilflächen ΔF_i so klein wählen, dass sie jede für sich als eben betrachtet werden können. Benachbarte Flächen müssen

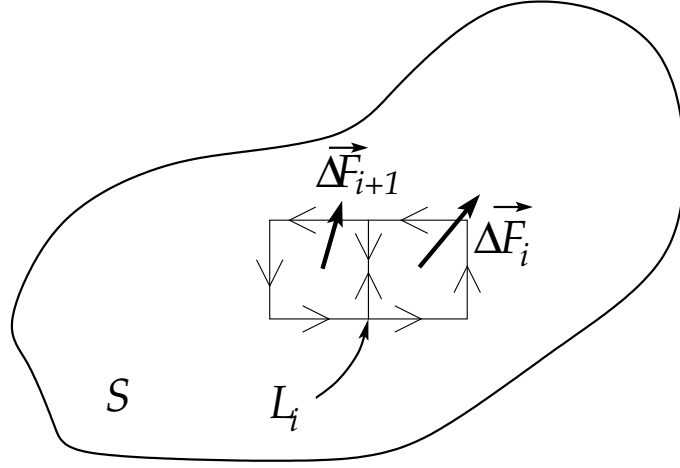


Abbildung 1.15: Aufteilung einer Fläche S in Teilflächen ΔF_i .

aber nicht gleich orientiert sein, d.h. $\Delta \vec{F}_i$ muss nicht in die gleiche Richtung wie $\Delta \vec{F}_{i+1}$ zeigen.

Bei der Zirkulation um das Flächenelement ΔF_i wird das Wegstück L_i in umgekehrter Richtung durchlaufen wie bei der Zirkulation um das Element ΔF_{i+1} . In der Summe der Zirkulationen um diese beiden Flächenelemente hebt sich dieser Beitrag also gerade weg und es gilt

$$\oint_{C(\Delta F_i)} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) + \oint_{C(\Delta F_{i+1})} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \oint_{C(\Delta F_i + \Delta F_{i+1})} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) .$$

Dieses Resultat läßt sich auf die gesamte Fläche $S \equiv \sum_i \Delta F_i$ verallgemeinern,

$$\sum_i \oint_{C(\Delta F_i)} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \oint_{C(S)} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.170)$$

Die linke Seite läßt sich aber mit Gl. (1.167) im Limes $\Delta F_i \rightarrow 0$ auch schreiben als

$$\begin{aligned} \sum_i \oint_{C(\Delta F_i)} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) &= \sum_i \Delta F_i \vec{n}(\vec{r}_i) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}_i)] \\ &\equiv \int_S dF \vec{n}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})] = \int_S d\vec{F} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})] . \end{aligned} \quad (1.171)$$

Der Vergleich von Gl. (1.170) mit (1.171) ergibt den **Satz von Stokes**

$$\int_S d\vec{F} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})] = \oint_{C(S)} d\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.172)$$

Die Glgen. (1.168) und (1.169) verallgemeinern sich entsprechend zu

$$\int_S d\vec{F} \times \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \oint_{C(S)} d\vec{r} \varphi(\vec{r}) , \quad (1.173)$$

$$\int_S (d\vec{F} \times \vec{\nabla}) \times \vec{a}(\vec{r}) = \oint_{C(S)} d\vec{r} \times \vec{a}(\vec{r}) . \quad (1.174)$$

1.6.5 Maxwell–Gleichungen in Integralform

Als Anwendung der Sätze von Gauß und Stokes betrachten wir nun die **Maxwell–Gleichungen in Integralform**. Die Maxwell–Gleichungen lauten (vgl. Glgen. (1.83), (1.84), (1.85) und (1.86))

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.175)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.176)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1.177)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.178)$$

Integrieren wir Gl. (1.175) über ein beliebiges Volumen V , so folgt mit dem Satz von Gauß, Gl. (1.160)

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{B} = \varphi_{S(V)}[\vec{B}] = 0, \quad (1.179)$$

der Fluß der magnetischen Induktion durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet. Dies bedeutet natürlich **nicht**, dass er **überall** auf der Oberfläche null ist, sondern lediglich, dass **genausoviel** Fluß in das Volumen V **eindringt** wie auch wieder **herauskommt**, s. Abb. 1.16. Dies bedeutet auch, dass die magnetische Induktion $\vec{B}$ **keine Quellen** oder **Senken** besitzt. Diese Aussage ist äquivalent zum Verschwinden des Quellenfelds von $\vec{B}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Eine weitere äquivalente Aussage ist, dass es **keine magnetischen Monopole**, d.h. keine “einpolygonen” Magnete gibt.

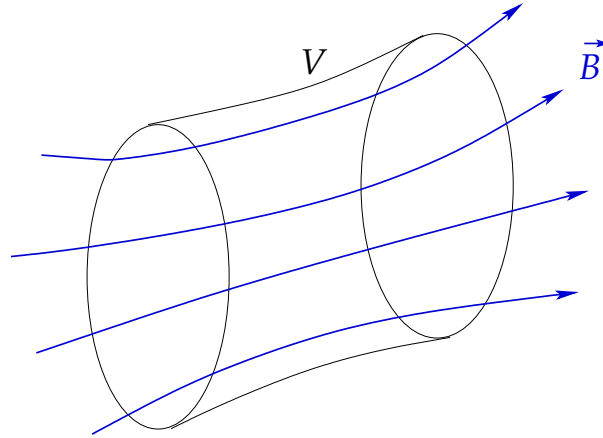


Abbildung 1.16: Zum magnetischen Fluß durch ein Volumen V .

Wir integrieren nun Gl. (1.176) über eine beliebige, zeitlich konstante Fläche,

$$\int_S d\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \oint_{C(S)} d\vec{r} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S d\vec{f} \cdot \vec{B} \equiv \oint_{C(S)} d\vec{r} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \varphi_S[\vec{B}]}{\partial t} = 0,$$

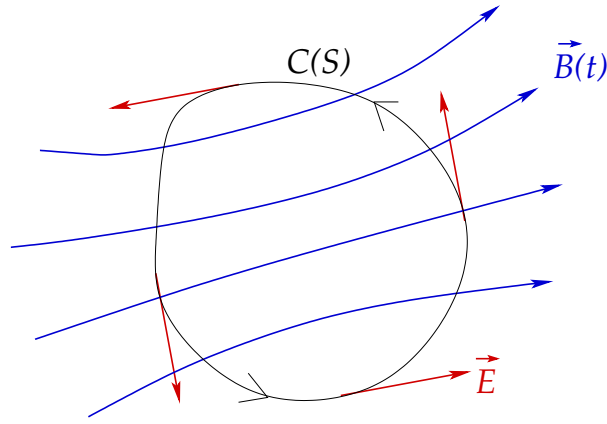


Abbildung 1.17: Zum Faradayschen Induktionsgesetz.

wobei wir für den ersten Term den Satz von Stokes (1.172) benutzt haben. Umgestellt ergibt diese Gleichung

$$-\frac{\partial \varphi_S[\vec{B}]}{\partial t} = \oint_{C(S)} d\vec{r} \cdot \vec{E} \equiv Z_{C(S)}[\vec{E}] . \quad (1.180)$$

Dies ist das **Faradaysche Induktionsgesetz**. Es besagt, dass die zeitliche Änderung des Flusses der magnetischen Induktion durch eine Fläche S ein elektrisches Feld entlang des Randes $C(S)$ dieser Fläche induziert, s. Abb. 1.17.

Wir integrieren Gl. (1.177) über ein beliebiges Volumen V ,

$$\int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{E} \equiv \varphi_{S(V)}[\vec{E}] = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r} \rho \equiv \frac{Q}{\epsilon_0} , \quad (1.181)$$

wobei wir den Satz von Gauß und Gl. (1.164) für die gesamte im Volumen V befindliche elektrische Ladung benutzt haben. Dies bedeutet, dass elektrische Ladungen die **Quellen** des elektrischen Feldes sind, bzw. dass der **Fluss des elektrischen Feldes** durch die Oberfläche eines Volumens V bis auf einen Faktor $1/\epsilon_0$ identisch mit der **im Volumen befindlichen Ladung** Q ist, s. Abb. 1.18.

Zum Schluß integrieren wir noch Gl. (1.178) über eine beliebige, zeitlich konstante Fläche S ,

$$\begin{aligned} \int_S d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &\equiv \oint_{C(S)} d\vec{r} \cdot \vec{B} = Z_{C(S)}[\vec{B}] = \mu_0 \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \int_S d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &\equiv \mu_0 (I + I_{\text{Maxwell}}) , \end{aligned} \quad (1.182)$$

wobei wir den zweiten Term auf der linken Seite von Gl. (1.178) auf die rechte Seite gebracht und den Satz von Stokes (1.172) für den verbleibenden Term auf der linken Seite benutzt haben. Ferner haben wir den **elektrischen Strom**

$$I \equiv \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j} \quad (1.183)$$

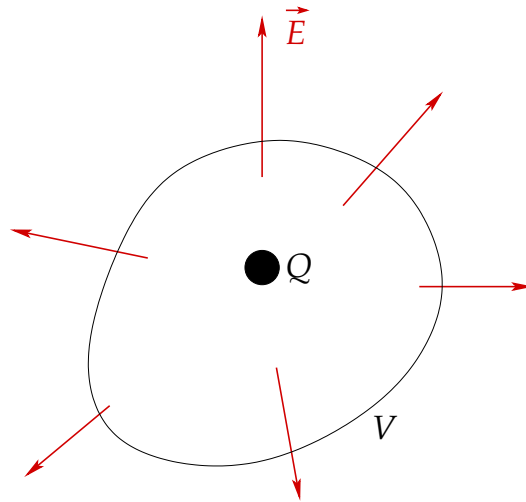


Abbildung 1.18: Elektrische Ladungen als Quellen des elektrischen Feldes.

durch die Fläche S und den sog. **Maxwellschen Verschiebungsstrom**

$$I_{\text{Maxwell}} \equiv \epsilon_0 \int_S d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.184)$$

definiert. Gleichung (1.182) ist das sog. **Ampèresche Gesetz**. Es besagt, dass **elektrische Ströme** durch eine Fläche S ein **Magnetfeld** entlang des Randes dieser Fläche induzieren, vgl. Abb. 1.19.

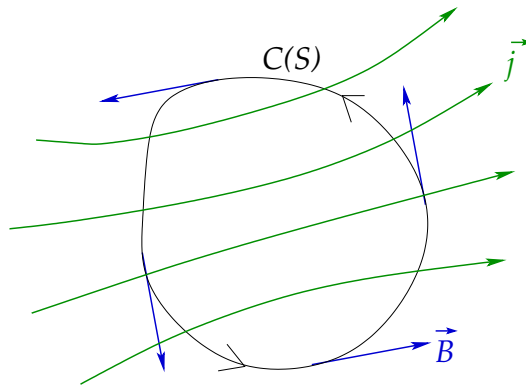


Abbildung 1.19: Zum Ampèreschen Gesetz.

Aber was hat es mit dem zusätzlichen Term, dem Maxwellschen Verschiebungsstrom, auf sich? Um die Notwendigkeit dieses Terms zu verstehen, betrachten wir die in Abb. 1.20 dargestellte Situation. Der Plattenkondensator C sei aufgeladen, d.h. es baut sich aufgrund der Ladungsdifferenz zwischen den Platten ein elektrisches Feld auf. Der Kondensator werde nun über einen Leiterdraht entladen. Das Abfließen der elektrischen Ladungen durch den Draht verursacht einen elektrischen Strom I . Gleichzeitig baut sich das elektrische Feld im Innern des Kondensators ab, $\partial|\vec{E}|/\partial t < 0$.

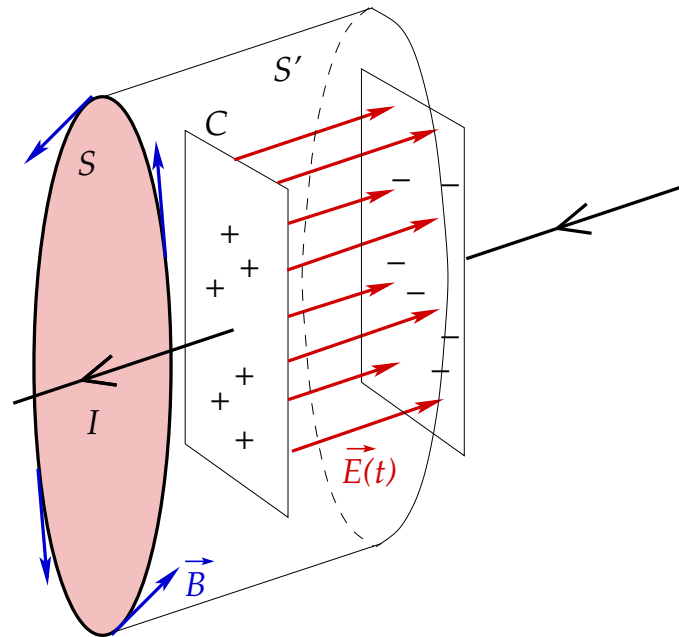


Abbildung 1.20: Zum Maxwellschen Verschiebungsstrom.

Wir legen nun einen geschlossenen Zylinder (z.B. in Form einer “Konservendose”) wie in Abb. 1.20 gezeigt in die Versuchsanordnung. Den Zylinder denken wir uns nun zerlegt in eine der beiden Seitenflächen, S (in Abb. 1.20 rot gefärbt, der “Deckel” der Dose), und der Mantelfläche plus der anderen Seitenfläche, S' (die “geöffnete Konservendose” ohne Deckel). Wir betrachten nun zwei unterschiedliche Situationen:

- (a) S' wird entfernt. Der Leiterdraht durchdringt S , also wird nach dem Ampèreschen Gesetz ein Magnetfeld $\vec{B}$ entlang des Randes der Fläche induziert.
- (b) S wird entfernt. Es fließt **kein** Strom I durch die Fläche S' , wohl aber durchdringt das elektrische Feld $\vec{E}$ (und damit insbesondere seine zeitliche Ableitung $\partial \vec{E} / \partial t$) den “Boden” der “Konservendose” S' .

Der Rand der Fläche S ist mit dem Rand der Fläche S' identisch, also muss auch das induzierte Magnetfeld in den beiden Fällen identisch sein. Der Maxwellsche Verschiebungsstrom trägt dem Fall (b) Rechnung: nun wird aufgrund der zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes ein Magnetfeld induziert, welches genauso groß ist wie das aufgrund des Stromes I im Fall (a).

Wir überprüfen noch die Richtung des vom Verschiebungsstrom induzierten Magnetfeldes. Per Konvention zeigt der elektrische Strom immer in Richtung des Flusses **positiver** Ladungen. Ebenfalls per Konvention zeigt das elektrische Feld immer weg von **positiven** und hin zu **negativen** elektrischen Ladungen. Das elektrische Feld zeigt somit in **entgegengesetzte** Richtung wie der Strom, s. Abb. 1.20. Aufgrund des Abfließens der Ladungen von den Kondensatorplatten wird das elektrische Feld jedoch **schwächer**, die zeitliche **Änderung** des elektrischen Feldes zeigt demnach in **dieselbe** Richtung wie der

Strom. Wenn wir noch annehmen, dass das Flächenelement $d\vec{f}$ auf dem “Boden” der Dose S' in die gleiche Richtung wie auf dem Deckel S zeigt, ist $I|_S \equiv I_{\text{Maxwell}}|_{S'}$ und das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ ist auf dem Rand von S bzw. S' identisch.

1.6.6 Energie-Impulssatz in Integralform

Als weitere Anwendung des Satzes von Gauß betrachten wir den Energiesatz (1.115). Bringen wir die Divergenz des Poynting-Vektors auf die rechte und die mechanische Leistungsdichte auf die linke Seite und integrieren über ein beliebiges, zeitlich konstantes Volumen V , so folgt mit dem Satz von Gauß (1.160)

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3\vec{r} w + \int_V d^3\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{E} \\ &\equiv \frac{\partial E_{\text{Feld}}}{\partial t} + \frac{\partial E_{\text{mech}}}{\partial t} = - \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{S} \equiv -\varphi_{S(V)}[\vec{S}] , \end{aligned} \quad (1.185)$$

wobei wir die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes im Volumen V mit

$$E_{\text{Feld}} \equiv \int_V d^3\vec{r} w \quad (1.186)$$

bezeichnet haben. Die Aussage des Energiesatzes (1.185) ist nun, dass die Summe aus mechanischer und Feldenergie im Volumen V in dem Maße abnimmt, wie Energie durch die Oberfläche von V strömt. Dieser Energiestrom ist physikalisch betrachtet **elektromagnetische Strahlung** durch die Oberfläche $S(V)$.

In ähnlicher Weise kann man auch den Impulssatz (1.120) interpretieren. Durch Umstellen der Terme und Integration über ein beliebiges, zeitlich konstantes Volumen V erhält man komponentenweise

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial S^i}{\partial t} + \rho E^i + \epsilon^{ijk} j^j B^k \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3\vec{r} \frac{S^i}{c^2} + F_{\text{mech}}^i \\ &\equiv \frac{\partial P_{\text{Feld}}^i}{\partial t} + \frac{\partial P_{\text{mech}}^i}{\partial t} = - \int_V d^3\vec{r} \partial_j T^{ij} = - \oint_{S(V)} d\vec{f}^j T^{ij} , \end{aligned} \quad (1.187)$$

wobei wir Gl. (1.121) benutzt und den Gesamtimpuls des elektromagnetischen Feldes im Volumen V als Integral über die Impulsdichte,

$$\vec{P}_{\text{Feld}} \equiv \int_V d^3\vec{r} \frac{\vec{S}}{c^2} , \quad (1.188)$$

definiert haben. Die Aussage des Impulssatzes (1.187) ist, dass die Summe aus mechanischem und Feldimpuls im Volumen V in dem Maße abnimmt, wie Impuls von der Oberfläche $S(V)$ abgestrahlt wird.

1.6.7 Greensche Theoreme

Die sog. **Greenschen Theoreme**, bzw. **Greenschen Sätze** oder **Greenschen Identitäten** sind direkte Konsequenzen des Satzes von Gauß (1.160). Gegeben seien zwei zweimal stetig differenzierbare skalare Felder $\varphi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ und ein beliebiges Volumen V . Dann gilt

$$\int_V d^3\vec{r} \left(\varphi \Delta\psi + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi \right) = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla}\psi \right) \varphi, \quad (1.189)$$

$$\int_V d^3\vec{r} (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \left(\varphi \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\varphi \right), \quad (1.190)$$

$$\int_V d^3\vec{r} \Delta\psi = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla}\psi. \quad (1.191)$$

Beweis:

Wir definieren zunächst das stetig differenzierbare Vektorfeld

$$\vec{a} \equiv \varphi \vec{\nabla}\psi.$$

Seine Divergenz lautet

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \varphi \Delta\psi + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi.$$

Für dieses Vektorfeld lautet der Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \int_V d^3\vec{r} \left(\varphi \Delta\psi + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi \right) \\ &= \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{a} = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla}\psi \right) \varphi. \end{aligned}$$

Dies ist schon die erste Greensche Identität (1.189).

Zum Beweis der zweiten, Gl. (1.190) vertauschen wir in der ersten Identität (1.189) die Rolle der Felder φ , ψ ,

$$\int_V d^3\vec{r} \left(\psi \Delta\varphi + \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\varphi \right) = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi \right) \psi,$$

und ziehen dies von Gl. (1.189) ab,

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \left(\varphi \Delta\psi + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi - \psi \Delta\varphi - \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\varphi \right) &= \int_V d^3\vec{r} (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) \\ &= \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \left(\varphi \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\varphi \right). \end{aligned}$$

Die dritte Identität (1.191) folgt schließlich aus der ersten, indem wir $\varphi = 1$ setzen, q.e.d.

1.6.8 Helmholtzscher Zerlegungssatz

Der **Helmholtzsche Zerlegungssatz** für Vektorfelder wird uns letztlich helfen, das Paradoxon aufzulösen, dass die Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84), (1.85) und (1.86) acht partielle Differentialgleichungen für die sechs unabhängigen Komponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und der magnetischen Induktion $\vec{B}$ darstellen: es wird sich herausstellen, dass die Maxwell-Gleichungen in der Tat nur Information über diese sechs Komponenten liefern und nichts Zusätzliches, welches zu einer Überbestimmtheit führen würde.

Als erstes beweisen wir jedoch eine wichtige Identität:

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (1.192)$$

wobei $\Delta_r \equiv \sum_i \partial^2 / \partial (x^i)^2$ der Laplace-Operator bezüglich der Koordinaten $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$ des **ungestrichenen** Ortsvektors $\vec{r}$ ist.

Beweis:

Wir bemerken zunächst, dass

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(|\vec{r} - \vec{r}'|) \equiv \frac{\partial}{\partial (x^i - x^{i'})} f(|\vec{r} - \vec{r}'|) \equiv \frac{\partial}{\partial u^i} f(u) = -\frac{\partial}{\partial x^{i'}} f(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (1.193)$$

gilt, wobei f eine beliebige Funktion des Betrags u des Abstandsvektors $\vec{u} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ ist. Damit gilt

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv \Delta_u \frac{1}{u} . \quad (1.194)$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

(i) $\vec{r} \neq \vec{r}'$: Dies bedeutet, dass $\vec{u} \neq 0$. Dann gilt

$$\Delta_u \frac{1}{u} = \vec{\nabla}_u \cdot \vec{\nabla}_u \frac{1}{u} = \vec{\nabla}_u \cdot \left(-\frac{1}{u^2} \frac{\vec{u}}{u} \right) ,$$

wobei wir Gl. (1.75), $\vec{\nabla}_u u = \vec{u}/u$, aus der Vorlesung “Theoretische Physik I” benutzt haben. Wir berechnen weiter,

$$\Delta_u \frac{1}{u} = -\vec{\nabla}_u \cdot \frac{\vec{u}}{u^3} = \frac{3}{u^4} \frac{\vec{u}}{u} \cdot \vec{u} - \frac{3}{u^3} = \frac{3}{u^3} (\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u - 1) \equiv 0 , \quad (1.195)$$

wobei wir die Produktregel und ein weiteres Resultat aus der Vorlesung “Theoretische Physik I”, $\vec{\nabla}_u \cdot \vec{u} \equiv 3$, benutzt haben. Da auch die rechte Seite von Gl. (1.192) für $\vec{r} \neq \vec{r}'$ verschwindet, ist diese Gleichung für diesen Fall bewiesen. Wir müssen nur noch den zweiten Fall betrachten:

(ii) $\vec{r} = \vec{r}'$. In diesem Fall ist $\vec{u} = 0$ und die obige Rechnung ist so nicht gültig. Da die rechte Seite von Gl. (1.192) aber formal auch nicht wohldefiniert ist (sie ist unendlich), betrachten wir stattdessen ihr Integral über ein vorgegebenes Volumen V :

$$-4\pi \int_V d^3\vec{r} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} -4\pi , & \text{falls } \vec{r}' \in V , \\ 0 , & \text{sonst} . \end{cases} \quad (1.196)$$

Andererseits gilt für das Volumenintegral über die linke Seite von Gl. (1.192)

$$\int_V d^3\vec{r} \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_V d^3\vec{u} \Delta_u \frac{1}{u} ,$$

wobei wir die Integrationsvariable $\vec{u} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ substituiert und das Resultat (1.194) benutzt haben.

Falls $\vec{r}' \notin V$, d.h. das Volumen V enthält nicht den Ursprung $\vec{u} = 0$, so verschwindet das Integral, weil aufgrund von Gl. (1.195) aus Teil (i) des Beweises der Integrand überall im Integrationsvolumen null ist.

Falls $\vec{r}' \in V$, also der Nullpunkt $\vec{u} = 0$ im Integrationsvolumen V enthalten ist, deformiert man das Integrationsvolumen so, dass es einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung entspricht. Dies ist immer möglich, da der Integrand überall mit Ausnahme des Ursprungs verschwindet, s. Teil (i) des Beweises. Also spielt es keine Rolle, welche Form das Integrationsvolumen hat, da der Integrand im fraglichen Bereich null ist. Das Greensche Theorem (1.191) ergibt dann mit Gl. (1.152) und $\vec{u}/u \equiv \vec{e}_u \equiv \vec{e}_r$

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{u} \Delta_u \frac{1}{u} &= \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla}_u \frac{1}{u} \Big|_{u=R} = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \left(-\frac{\vec{e}_u}{u^2} \right)_{u=R} \\ &= - \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \frac{1}{R^2} = -4\pi . \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also

$$\int_V d^3\vec{r} \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \begin{cases} -4\pi , & \text{falls } \vec{r}' \in V , \\ 0 , & \text{sonst} . \end{cases} \quad (1.197)$$

Der Vergleich mit Gl. (1.196) ergibt die Behauptung, q.e.d.

Zerlegungssatz:

Sei $\vec{a}(\vec{r})$ ein im ganzen Raum definiertes Vektorfeld, das einschließlich seiner Ableitungen im Unendlichen hinreichend schnell gegen null strebt. Dieses Feld läßt sich stets in einen **longitudinalen** und einen **transversalen** Anteil zerlegen,

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \vec{a}_t(\vec{r}) , \quad (1.198)$$

mit

$$\vec{a}_\ell(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}) , \quad \alpha(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (1.199)$$

$$\vec{a}_t(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\beta}(\vec{r}) , \quad \vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (1.200)$$

Die Raumintegrale sind dabei über den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ zu nehmen.

Bemerkungen:

(i) Da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}_\ell \equiv 0 \implies \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}_\ell + \vec{\nabla} \times \vec{a}_t \equiv \vec{\nabla} \times \vec{a}_t . \quad (1.201)$$

(ii) Da die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet, gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}_t \equiv 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}_\ell + \vec{\nabla} \cdot \vec{a}_t \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a}_\ell . \quad (1.202)$$

Beweis des Zerlegungssatzes:

Mit der Identität (vgl. Gl. (1.91) aus der Vorlesung “Theoretische Physik I”)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

berechnen wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla}_r \times \left[\vec{\nabla}_r \times \left(\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \Delta_r \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int d^3\vec{r}' \vec{a}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{a}(\vec{r}') \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int d^3\vec{r}' \vec{a}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int d^3\vec{r}' \vec{a}(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int d^3\vec{r}' \left[\vec{\nabla}_{r'} \cdot \left(\frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{a}(\vec{r}') \right] + \vec{a}(\vec{r}) , \quad (1.203) \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Glgen. (1.192) und (1.193) ausgenutzt haben. Den ersten Term berechnen wir mit Hilfe des Satzes von Gauß (1.160),

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_{r'} \cdot \left(\frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \equiv \oint_{S(\mathbb{R}^3)} d\vec{f}' \cdot \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 ,$$

da nach Voraussetzung $\vec{a}(\vec{r})$ im Unendlichen (der Oberfläche $S(\mathbb{R}^3)$ von $\mathbb{R}^3$) hinreichend schnell abfallen soll. Den zweiten Term in Gl. (1.203) identifizieren wir mit der Definition (1.199) des skalaren Feldes $\alpha(\vec{r})$ als

$$\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_r \int d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{a}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}_r \alpha(\vec{r}) \equiv -\vec{a}_\ell(\vec{r}) .$$

Das vorläufige Endresultat lautet also

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \vec{\nabla}_r \times \left[\vec{\nabla}_r \times \left(\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] .$$

Den Term in eckigen Klammern werten wir mit Gl. (1.193) wie folgt aus

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_r \times \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \int d^3\vec{r}' \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{a}(\vec{r}') \\ &= - \int d^3\vec{r}' \left(\vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{a}(\vec{r}') \\ &= - \int d^3\vec{r}' \left[\vec{\nabla}_{r'} \times \left(\frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{a}(\vec{r}') \right] .\end{aligned}$$

Den ersten Term wandeln wir mit der Verallgemeinerung (1.162) des Satzes von Gauß in ein Oberflächenintegral um,

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_{r'} \times \left(\frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \oint_{S(\mathbb{R}^3)} d\vec{f}' \times \frac{\vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 ,$$

da $\vec{a}(\vec{r})$ im Unendlichen hinreichend schnell abfallen soll. Der zweite Term lautet mit der Definition (1.200) des Vektorfeldes $\vec{\beta}(\vec{r})$

$$\int d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{a}(\vec{r}') \equiv 4\pi \vec{\beta}(\vec{r}) .$$

Mit der Definition (1.200) des transversalen Anteils $\vec{a}_t(\vec{r})$ haben wir als Endresultat

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \vec{\nabla}_r \times \vec{\beta}(\vec{r}) \equiv \vec{a}_\ell(\vec{r}) + \vec{a}_t(\vec{r}) , \quad \text{q.e.d.}$$

24.11.2023

Eindeutigkeit der Zerlegung:

Die Zerlegung (1.198) ist auch **eindeutig**, d.h. falls $\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ das **Quellenfeld** von $\vec{a}(\vec{r})$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r})$, und das **Wirbelfeld** von $\vec{a}(\vec{r})$, $\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})$, bekannt sind, dann ist $\vec{a}(\vec{r})$ über die Glgen. (1.198), (1.199) und (1.200) eindeutig bestimmt.

Nehmen wir an, es gebe zwei Vektorfelder $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, die die gleichen Quellen- und Wirbelfelder haben,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{a}_1 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a}_2 , \\ \vec{\nabla} \times \vec{a}_1 &= \vec{\nabla} \times \vec{a}_2 .\end{aligned}$$

Für das Differenzfeld

$$\vec{D} \equiv \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

gilt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}_1 - \vec{\nabla} \cdot \vec{a}_2 \equiv 0 , \quad \vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{a}_1 - \vec{\nabla} \times \vec{a}_2 \equiv 0 .$$

Da das Wirbelfeld von $\vec{D}$ verschwindet, können wir $\vec{D}$ als Gradient eines skalaren Feldes ψ darstellen,

$$\vec{D} \equiv \vec{\nabla}\psi ,$$

das aufgrund der Quellenfreiheit von $\vec{D}$ die Laplace-Gleichung (1.107) erfüllt,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \Delta\psi \equiv 0 .$$

Da $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und damit auch $\vec{D}$ hinreichend schnell im Unendlichen abfallen sollen, gilt dies auch für die skalare Funktion ψ . Die erste Greensche Identität (1.189) lautet mit $\varphi = \psi$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \left[\psi \Delta\psi + \left(\vec{\nabla}\psi \right)^2 \right] = \oint_{S(\mathbb{R}^3)} d\vec{f} \cdot \left(\psi \vec{\nabla}\psi \right) = 0 ,$$

da ψ im Unendlichen hinreichend schnell abfallen soll. Wegen $\Delta\psi = 0$ liefert diese Gleichung dann aber auch

$$\int d^3\vec{r} \left(\vec{\nabla}\psi \right)^2 = 0 .$$

Da der Integrand positiv definit ist, kann dies nur erfüllt sein, wenn

$$\vec{\nabla}\psi \equiv \vec{D} = 0 ,$$

also ist $\vec{a}_1 \equiv \vec{a}_2$, q.e.d.

Eindeutigkeit der Maxwell-Gleichungen:

Wir wollen zum Abschluß den Helmholtzschen Zerlegungssatz (1.198) anwenden, um die Eindeutigkeit der Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84), (1.85) und (1.86) zu besprechen.

Jedes Vektorfeld $\vec{a}$ hat **drei** unabhängige Komponenten oder Freiheitsgrade, die man mit Hilfe des Zerlegungssatzes (1.198) in einen longitudinalen Anteil $\vec{a}_\ell$ und einen transversalen Anteil $\vec{a}_t$ zerlegt. Der longitudinale Anteil $\vec{a}_\ell$ läßt sich aufgrund von Gl. (1.199) als Gradientenfeld **einer** skalaren Funktion α darstellen, entspricht also lediglich **einem unabhängigen** Freiheitsgrad. Damit $\vec{a}$ nicht überbestimmt ist, kann der transversale Anteil $\vec{a}_t$ also nur **zwei** unabhängige Freiheitsgrade besitzen. Obwohl $\vec{a}_t$ also durch das Wirbelfeld eines Vektorfeldes $\vec{\beta}$ ausgedrückt werden kann und $\vec{\beta}$ eigentlich drei Komponenten besitzt, können diese nicht alle unabhängig voneinander sein. Die Tatsache, dass $\vec{a}_t$ quellenfrei ist, liefert im Prinzip eine zusätzliche Bedingung, mit deren Hilfe eine der drei Komponenten von $\vec{\beta}$ eliminiert werden kann. Das Vektorfeld $\vec{\beta}$ bzw. der transversale Anteil $\vec{a}_t$ von $\vec{a}$ besitzen also nur **zwei unabhängige** Komponenten.

Wir zerlegen nun entsprechend Gl. (1.198) das elektrische Feld $\vec{E}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$ in ihre longitudinalen und transversalen Anteile,

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_\ell + \vec{E}_t , \quad \vec{B} \equiv \vec{B}_\ell + \vec{B}_t .$$

Die Maxwell-Gleichung (1.83) liefert aufgrund von Gl. (1.202) **eine** Bedingung für den **longitudinalen** Anteil von $\vec{E}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\ell = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (1.204)$$

Die Maxwell-Gleichung (1.85) liefert entsprechend **eine** Bedingung für den **longitudinalen** Anteil von $\vec{B}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\ell = 0 . \quad (1.205)$$

In der Maxwell-Gleichung (1.86) tritt aufgrund von Gl. (1.201) lediglich der **transversale** Anteil von $\vec{E}$ auf,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_\ell}{\partial t} - \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}. \quad (1.206)$$

Der longitudinale Anteil $\vec{B}_\ell$ ist im Prinzip schon durch Gl. (1.205) bestimmt. Obwohl es sich also bei dieser Gleichung formal um eine vektorielle Gleichung mit drei Komponenten handelt, werden lediglich **zwei** Freiheitsgrade des $\vec{E}$ -Feldes, nämlich die von $\vec{E}_t$, mit **zwei** Freiheitsgraden des $\vec{B}$ -Feldes, denen von $\vec{B}_t$, verknüpft.

Letztlich betrachten wir die Maxwell-Gleichung (1.84), die wir aufgrund von Gl. (1.201) wie folgt schreiben können,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{B}_t = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}_\ell}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} \right) + \mu_0 \vec{j}. \quad (1.207)$$

Der longitudinale Anteil $\vec{E}_\ell$ von $\vec{E}$ ist im Prinzip schon durch Gl. (1.204) bestimmt. Für vorgegebene Ladungsstromdichte $\vec{j}$ verknüpft diese Gleichung also lediglich **zwei** Freiheitsgrade des $\vec{B}$ -Feldes, die von $\vec{B}_t$, mit **zwei** Freiheitsgraden des $\vec{E}$ -Feldes, denen von $\vec{E}_t$. Insgesamt liefern die beiden Vektorgleichungen (1.206), (1.207), die auf den ersten Blick sechs Gleichungen darstellen, lediglich **vier unabhängige** Bedingungen, um die **vier** unabhängigen Freiheitsgrade von $\vec{E}_t$, $\vec{B}_t$ festzulegen. Insgesamt erhalten wir also mit den Gln. (1.204), (1.205) **sechs unabhängige** Gleichungen, um die **sechs** Freiheitsgrade der Vektorfelder $\vec{E}$, $\vec{B}$ festzulegen. Die Maxwell-Gleichungen bestimmen elektrisches Feld und magnetische Induktion also **eindeutig**, das Gleichungssystem ist **nicht überbestimmt**.

1.7 Lösung partieller Differentialgleichungen

Die Maxwell-Gleichungen (1.175) – (1.178) sind **lineare partielle Differentialgleichungen**, entweder vom **homogenen Typ** wie Gln. (1.175) und (1.176) oder vom **inhomogenen Typ** wie Gln. (1.177) und (1.178). In diesem Abschnitt werden wir die Lösung solcher linearer partieller Differentialgleichungen ganz allgemein diskutieren. Für **lineare homogene partielle Differentialgleichungen** bietet sich an, diese zunächst einer **Fourier-Transformation** zu unterziehen, die die in diesen Gleichungen auftretenden **Differentialoperatoren in der Raum-Zeit** durch **Frequenz und Wellenzahlen** ersetzt und damit aus den Differentialgleichungen **algebraische Gleichungen** macht. Nach Bestimmung der Lösung im sog. **Fourier-Raum**, also in Abhängigkeit von Frequenz und Wellenzahl, transformiert man diese Lösung mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation wieder zurück in die Raum-Zeit, um die ursprünglich gesuchte Lösung zu erhalten.

Die allgemeine Lösung einer **linearen inhomogenen partiellen Differentialgleichung** setzt sich zusammen aus der **allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung** und einer **speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung**. Um letztere zu bestimmen, bietet sich die sog. **Methode der**

Greenschen Funktionen an. Hier sucht man zunächst die zum jeweiligen Differentialoperator gehörende Greensche Funktion. Diese wird aus der entsprechenden Differentialgleichung für die Greensche Funktion ebenfalls mit Hilfe einer Fourier-Transformation bestimmt.

1.7.1 Vollständige Funktionensysteme

Um die mathematischen Details der Fourier-Transformation zu verstehen, diskutieren wir zunächst das Konzept der **vollständigen Funktionensysteme**. Betrachten wir einen Satz von komplexwertigen Funktionen $U_1(x), U_2(x), \dots, U_N(x)$ mit

$$\begin{aligned} U_i : \mathbb{R} \supset [a, b] &\longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{C} \\ [a, b] \ni x &\mapsto U_i(x) \in \mathcal{M} . \end{aligned}$$

Der Satz kann dabei endlich ($N < \infty$) oder unendlich ($N \rightarrow \infty$) sein. Im letzteren Fall sprechen wir von einem **Funktionensystem**. Folgende Begriffe sind für die U_i von Bedeutung.

(i) **Orthonormalität:**

Zwei Funktionen $U_n(x), U_m(x)$ heißen **orthonormal**, falls

$$\int_a^b dx U_n^*(x) U_m(x) = \delta_{nm} , \quad (1.208)$$

wobei U_n^* die zu U_n komplex konjugierte Funktion ist. Dies ist analog zur Orthonormalität zweier kartesischer Einheitsvektoren in einem N -dimensionalen reellen Vektorraum,

$$\vec{e}_n \cdot \vec{e}_m = \sum_{i=1}^N e_{n,i} e_{m,i} = \delta_{nm} .$$

In der Tat kann die linke Seite von Gl. (1.208) als **Skalarprodukt für Funktionen** $U_n(x), U_m(x)$ aufgefaßt werden.

(ii) **Vollständigkeit:**

Für gegebenes $M \leq N$ definieren wir die Funktion

$$f_M(x) = \sum_{i=1}^M c_i U_i(x) , \quad (1.209)$$

mit komplexwertigen Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$. Offensichtlich ist die Funktion $f_M(x)$ eine **Linearkombination** der Funktionen U_i . Sie hat damit denselben Definitions- und Wertebereich wie die Funktionen U_i . Wir betrachten nun eine beliebige andere Funktion $f(x)$ mit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \supset [a, b] &\longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{C} \\ [a, b] \ni x &\mapsto f(x) \in \mathcal{M} , \end{aligned}$$

also ebenfalls mit demselben Definitions- und Wertebereich wie die Funktionen U_i . Es stellt sich die Frage, inwieweit die Funktion f_M eine **Approximation** der Funktion f ist. Dazu müssen wir ein geeignetes Maß für die **Abweichung** der Funktion f_M von der Funktion f definieren. Zweckmäßig ist z.B. das **mittlere Fehlerquadrat**

$$\begin{aligned}
 Q_M &\equiv \int_a^b dx |f(x) - f_M(x)|^2 = \int_a^b dx [f^*(x) - f_M^*(x)] [f(x) - f_M(x)] \\
 &= \int_a^b dx f^*(x) f(x) - \sum_{i=1}^M c_i \int_a^b dx f^*(x) U_i(x) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^M c_i^* \int_a^b dx U_i^*(x) f(x) + \sum_{i,j=1}^M c_i^* c_j \int_a^b dx U_i^*(x) U_j(x) \\
 &= \int_a^b dx f^*(x) f(x) - \sum_{i=1}^M c_i \int_a^b dx f^*(x) U_i(x) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^M c_i^* \int_a^b dx U_i^*(x) f(x) + \sum_{i=1}^M c_i^* c_i , \tag{1.210}
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt angenommen haben, dass die Funktionen U_i **orthonormal** sind.

Die **bestmögliche** Approximation f_M der Funktion f ist nun diejenige, die das mittlere Fehlerquadrat Q_M **minimiert**. Dies kann man durch geschickte Wahl der Koeffizienten c_i in Gl. (1.209) erreichen. Die Bedingung, dass Q_M als Funktion der c_i ein Minimum annimmt, lautet

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{dQ_M}{dc_j} = - \int_a^b dx f^*(x) U_j(x) + c_j^* , \quad 1 \leq j \leq M , \\
 0 &= \frac{dQ_M}{dc_j^*} = - \int_a^b dx U_j^*(x) f(x) + c_j , \quad 1 \leq j \leq M ,
 \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl, oder auch eine komplexe Zahl und die zu ihr komplex konjugierte Zahl, unabhängige Variablen sind. Die notwendige Bedingung dafür, dass das Fehlerquadrat Q_M minimiert wird, lautet also

$$c_i = \int_a^b dx U_i^*(x) f(x) , \quad c_i^* = \int_a^b dx f^*(x) U_i(x) , \quad 1 \leq i \leq M , \tag{1.211}$$

Mit dieser Wahl der Koeffizienten lautet das minimale Fehlerquadrat

$$Q_{M,\min} = \int_a^b dx f^*(x) f(x) - \sum_{i=1}^M c_i^* c_i .$$

Da andererseits per Definition $Q_{M,\min} \geq 0$, gilt

$$\sum_{i=1}^M |c_i|^2 \leq \int_a^b dx |f(x)|^2 . \tag{1.212}$$

Dies ist die sog. **Besselsche Ungleichung**.

Nehmen wir nun an, wir hätten die Koeffizienten $c_1, \dots, c_M$ in der Form (1.211) angepaßt, also für gegebenes M die bestmögliche Approximation f_M der Funktion f gefunden. Es ist dann intuitiv klar, dass wir bei Hinzunahme einer weiteren Funktion U_{M+1} bei geeigneter Wahl des entsprechenden Koeffizienten c_{M+1} das Fehlerquadrat weiter minimieren können, $Q_{M+1} \leq Q_M$ (falls das nicht möglich sein sollte, kann man immer noch $c_{M+1} = 0$ setzen, um den Fehler wenigstens nicht zu verschlechtern).

Entsprechend läßt sich bei Hinzunahme noch weiterer Funktionen das Fehlerquadrat weiter verkleinern. Generell erwarten wir, dass die Approximation der Funktion f immer besser wird, je größer M ist, also je mehr Funktionen U_i zur Approximation zur Verfügung stehen. Falls $M \rightarrow \infty$, besteht die berechtigte Hoffnung, dass man die Funktion f **exakt** als Linearkombination der Funktionen U_i darstellen kann,

$$f(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i(x) . \quad (1.213)$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn das Funktionensystem $U_1, U_2, \dots$ **vollständig** ist.

Um den Begriff der **Vollständigkeit** eines Funktionensystems zu definieren, benötigen wir eine weitere

Definition: Die Reihe der in Gl. (1.209) definierten Funktionen f_M **konvergiert im Mittel** gegen die Funktion f ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f_M(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] ,$$

falls

$$\lim_{M \rightarrow \infty} Q_M = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b dx |f(x) - f_M(x)|^2 = 0 .$$

Nun können wir den Begriff der Vollständigkeit definieren.

Definition: Ein Funktionensystem orthonormaler Funktionen $U_1, U_2, \dots$ heißt **vollständig**, falls für **jede** Funktion f die Reihe der Funktionen f_M im Mittel gegen f konvergiert. Dann ist die Funktion f durch Gl. (1.213) gegeben.

Die Koeffizienten c_i in der Entwicklung (1.213) von f nach einem vollständigen Funktionensystem bestimmt man formal durch Multiplikation dieser Gleichung mit $U_j^*(x)$ und Integration über x . Die Orthonormalität der Funktionen U_j, U_i liefert dann

$$\int_a^b dx U_j^*(x) f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_a^b dx U_j^*(x) U_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{ji} = c_j . \quad (1.214)$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (1.211) und bestätigt, dass wir das Fehlerquadrat in der Approximation der Funktion f durch die Entwicklung (1.213) minimiert,

bzw. in diesem Fall sogar zum Verschwinden gebracht haben. In diesem Fall gilt also unter Benutzung von Gl. (1.214)

$$0 = \lim_{M \rightarrow \infty} Q_M = \int_a^b dx \left| f(x) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i(x) \right|^2 = \int_a^b dx |f(x)|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 ,$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \int_a^b dx |f(x)|^2 . \quad (1.215)$$

Dies ist die sog. **Parsevalsche Gleichung**, die den Spezialfall der Besselschen Ungleichung (1.212) für $M \rightarrow \infty$ repräsentiert. Die Vollständigkeit des Funktionensystems der U_i wird dadurch zum Ausdruck gebracht, dass nun das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzt wird.

Setzen wir Gl. (1.214) in Gl. (1.213) ein,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b dy U_i^*(y) f(y) U_i(x) = \int_a^b dy f(y) \left[\sum_{i=1}^{\infty} U_i^*(y) U_i(x) \right] ,$$

so erkennen wir, dass linke und rechte Seite nur dann übereinstimmen, wenn die Funktionen U_i die sog. **Vollständigkeitsrelation** erfüllen,

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_i^*(y) U_i(x) \equiv \delta(x - y) . \quad (1.216)$$

28.11.2023

Wir merken noch an, dass die Entwicklung (1.213) völlig analog zur Zerlegung eines beliebigen Vektors $\vec{a}$ nach den kartesischen Einheitsvektoren eines N -dimensionalen reellen Vektorraums ist,

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N a_i \vec{e}_i .$$

Dabei ist das vollständige Funktionensystem der U_i mit der Basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ zu identifizieren, und die Koeffizienten c_i in der Entwicklung (1.213) mit den Komponenten a_i des Vektors $\vec{a}$ in dieser Basis. Diese berechnen sich bekanntlich aus dem Skalarprodukt

$$a_i \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{a} .$$

Entsprechend läßt sich die linke Seite von Gl. (1.214) als Skalarprodukt der Funktionen U_j und f auffassen, vgl. auch die Diskussion zu Gl. (1.208). Die Parsevalsche Gleichung ist auch einfach zu interpretieren. Ihre rechte Seite ist das Skalarprodukt der Funktion f mit sich selbst und die linke Seite die Summe über die Quadrate der "Komponenten". Für einen Vektor $\vec{a}$ in einem N -dimensionalen reellen Vektorraum liest sich dies

$$\sum_{i=1}^N a_i^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} ,$$

was identisch mit der Definition des Skalarprodukts ist.

In den folgenden beiden Abschnitten werden wir zwei wichtige Beispiele für vollständige Funktionensysteme besprechen.

1.7.2 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Wir betrachten den Raum der reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Ein vollständiges Funktionensystem bezüglich dieses Raums sind die **trigonometrischen Funktionen**,

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.217)$$

Wir prüfen zunächst die **Orthonormalität** des Funktionensystems (1.217):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx U_0(x) U_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \equiv 1, \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx U_0(x) U_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) \equiv 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx U_0(x) V_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \equiv 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx U_n(x) U_m(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos^2(nx) = 1, & \text{falls } n = m \end{cases} \\ &\equiv \delta_{nm} \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx V_n(x) V_m(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin^2(nx) = 1, & \text{falls } n = m \end{cases} \\ &\equiv \delta_{nm} \\ \int_{-\pi}^{\pi} dx U_n(x) V_m(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) \sin(mx) = 0, \end{aligned} \quad (1.218)$$

wobei wir eine Reihe von elementaren Integralidentitäten ausgenutzt haben [9].

Das Funktionensystem (1.217) ist **vollständig**, weil man **jede** auf $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion in eine **Fourier-Reihe** entwickeln kann,

$$f(x) = a_0 U_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n U_n(x) + b_n V_n(x)] = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] . \quad (1.219)$$

Es ist intuitiv klar, warum man sowohl Cosinus- als auch Sinusfunktionen benötigt: der Cosinus ist eine **gerade** Funktion seines Arguments, d.h. $\cos[n(-x)] = +\cos(nx)$,

während der Sinus eine **ungerade** Funktion ist, $\sin[n(-x)] = -\sin(nx)$. Mit den Cosinus-Funktionen kann man also lediglich gerade und mit den Sinus-Funktionen ungerade Funktionen darstellen. Für beliebige Funktionen benötigt man beide. Die Funktion $U_0 = \text{const.}$ benötigt man schließlich, um auch **konstante** Funktionen darstellen zu können.

Die **Fourier-Koeffizienten** berechnet man mit Hilfe der Orthonormalitätsrelationen (1.218),

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) , \\ a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(nx) , \\ b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(nx) . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen läßt sich auch ein hinsichtlich des Raums der auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ **komplexwertigen** Funktionen vollständiges Funktionensystem konstruieren. Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(x) &\equiv U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} , \\ \tilde{U}_n(x) &\equiv \frac{U_n(x) + i V_n(x)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\cos(nx) + i \sin(nx)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} , \quad n = 1, 2, \dots , \\ \tilde{U}_n^*(x) &\equiv \frac{U_n(x) - i V_n(x)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\cos(nx) - i \sin(nx)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} , \quad n = 1, 2, \dots , \end{aligned}$$

wobei wir die **Euler-Gleichung** $e^{ix} \equiv \cos x + i \sin x$ benutzt haben. Diese drei Gleichungen lassen sich auch in der Form

$$\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots , \quad (1.220)$$

zusammenfassen. Man zeigt mit Hilfe der Orthonormalitätsrelationen (1.218) für die trigonometrischen Funktionen, dass die Funktionen $\tilde{U}_n$ die Orthonormalitätsrelation

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \tilde{U}_n^*(x) \tilde{U}_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(m-n)x} = \delta_{nm} \quad (1.221)$$

erfüllen. Die **komplexe** Fourier-Reihendarstellung einer beliebigen komplexwertigen Funktion lautet

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \tilde{U}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} , \quad (1.222)$$

mit **komplexwertigen** Koeffizienten

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} dx \tilde{U}_n^*(x) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x) . \quad (1.223)$$

Die **Vollständigkeitsrelation** (1.216) für die Funktionen $\tilde{U}_n$ lautet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_n^*(y) \tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(x-y)} = \delta(x-y) . \quad (1.224)$$

Diese Betrachtungen lassen sich durch Reskalieren $x \rightarrow x\pi/L$ auf Intervalle **beliebiger** Größe $[-L, L]$ verallgemeinern. Wir betrachten das orthonormale Funktionensystem

$$\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp\left(i\frac{n\pi}{L}x\right) , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \quad (1.225)$$

und die Fourier-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \tilde{U}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{n\pi}{L}x\right) . \quad (1.226)$$

Die Fourier-Koeffizienten lauten

$$c_n = \int_{-L}^L dx \tilde{U}_n^*(x) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx \exp\left(-i\frac{n\pi}{L}x\right) f(x) . \quad (1.227)$$

Die Vollständigkeitsrelation (1.224) nimmt die Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_n^*(y) \tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{n\pi}{L}(x-y)\right] = \delta(x-y) \quad (1.228)$$

an.

Wir sind nun in der Lage, die Fourier-Entwicklung auf Funktionen, die auf dem gesamten $\mathbb{R}$ definiert sind, zu verallgemeinern. Dazu lassen wir $L \rightarrow \infty$ gehen. Voraussetzung ist allerdings, dass man sich auf sog. **quadratintegrable** Funktionen f beschränkt, d.h. Funktionen f , für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 < \infty .$$

Um die obigen Resultate auf quadratintegrable Funktionen zu übertragen, muss man zunächst beachten, dass die **diskreten** Werte

$$k_n \equiv \frac{n\pi}{L} , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

die sich um $\Delta k = \pi/L$ unterscheiden, in ein **Kontinuum** von Werten übergehen,

$$\left\{ k_n \equiv \frac{n\pi}{L} , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \rightarrow \{k \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R} .$$

Die Funktionen $\tilde{U}_n(x)$ werden dann **kontinuierliche** Funktionen der Variable k , $\tilde{U}(x, k)$. Wir müssen ihre Normierung neu bestimmen, da der alte Normierungsfaktor der $\tilde{U}_n(x)$, Gl. (1.225), für $L \rightarrow \infty$ gegen null geht. Wir betrachten dazu die Vollständigkeitsrelation

(1.228) und führen die Summation über n durch die Identität $1 \equiv (L/\pi)\Delta k \rightarrow (L/\pi)dk$ in ein Integral über k von $-\infty$ bis ∞ über,

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_n^*(y) \tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{L}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \exp\left(-i\frac{n\pi}{L}y\right) \exp\left(i\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky} e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{U}^*(y, k) \tilde{U}(x, k) .\end{aligned}\tag{1.229}$$

Die korrekt normierten Funktionen lauten also

$$\tilde{U}(x, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} .\tag{1.230}$$

Ihre Orthonormalität folgt aus der Vollständigkeitsrelation (1.229) durch Umbenennen der Variablen, $k \rightarrow x$, $x \rightarrow k$, $y \rightarrow q$,

$$\delta(k-q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ixq}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ixk}}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{U}^*(x, q) \tilde{U}(x, k) .\tag{1.231}$$

Auch die Fourier-Koeffizienten c_n werden **kontinuierliche** Funktionen der Variable k ,

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{U}^*(x, k) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) .\tag{1.232}$$

Die Fourier-Reihe (1.226) wird zum **Fourier-Integral**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \tilde{U}(x, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} .\tag{1.233}$$

Diese Gleichung ist bemerkenswert symmetrisch zu Gl. (1.232). Es tritt kein weiterer Normierungsfaktor auf, wie man zunächst vermuten würde, wenn man versucht, Gl. (1.226) ähnlich wie die Vollständigkeitsrelation (1.229) für kontinuierliche k zu verallgemeinern. Es gilt nämlich mit Gl. (1.232) und der Vollständigkeitsrelation (1.229)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \tilde{U}(x, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dy \tilde{U}^*(y, k) f(y) \tilde{U}(x, k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{U}^*(y, k) \tilde{U}(x, k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y) \equiv f(x) ,\end{aligned}$$

wie es nach Gl. (1.233) sein muss.

Es ist nicht weiter schwierig, das vollständige Orthonormalsystem der Funktionen (1.230) auf ein in der dreidimensionalen Raumzeit $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3\} \equiv \mathbb{R}^3$ vollständiges orthonormales Funktionensystem zu erweitern. Dazu interpretieren wir x als die x -Komponente des

Ortsvektors $\vec{r}$ und k als die x -Komponente des **3-Wellenzahl-** oder **3-Wellenvektors** $\vec{k}$. Die Wellenzahl hat dementsprechend die Dimension $[k] = 1/\text{m}$ (damit das Argument der Exponentialfunktion dimensionslos wird). Die Verallgemeinerung von Gl. (1.230) ist dann das **Produkt** entsprechender Funktionen für **jede Raumrichtung**,

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\vec{r}, \vec{k}) &\equiv \tilde{U}(x, k^x) \tilde{U}(y, k^y) \tilde{U}(z, k^z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik^x x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik^y y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik^z z} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.\end{aligned}\quad (1.234)$$

Ihre Vollständigkeitsrelation lautet in Analogie zu Gl. (1.229)

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &\equiv \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk^x e^{ik^x(x-x')} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk^y e^{ik^y(y-y')} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk^z e^{ik^z(z-z')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \int d^3\vec{k} \tilde{U}^*(\vec{r}', \vec{k}) \tilde{U}(\vec{r}, \vec{k}) \\ \iff (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &= \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} ,\end{aligned}\quad (1.235)$$

wobei die erste Identität in der ersten Zeile als Definition der **3-dimensionalen Delta-Funktion** zu verstehen ist. Die Orthonormalitätsrelation für die Funktionen (1.234) lautet in Analogie zu Gl. (1.231)

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{r} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} = \int d^3\vec{r} \tilde{U}^*(\vec{r}, \vec{k}) \tilde{U}(\vec{r}, \vec{k}') \\ \iff (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') &= \int d^3\vec{r} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}}.\end{aligned}\quad (1.236)$$

Nun können wir das System der Funktionen (1.234) auch auf ein im **Minkowski-Raum** $\{t \in \mathbb{R}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3\} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ vollständiges orthonormales Funktionensystem erweitern. Dazu benennen wir in Gl. (1.230) die Variable x in t , wobei t die **Zeit** ist, und k in $-\omega$ um, wobei ω die **Kreisfrequenz** (mit Dimension $[\omega] = 1/\text{s}$) ist. Das negative Vorzeichen ist Konvention, die sich im Folgenden als vorteilhaft herausstellen wird:

$$\tilde{U}(t, -\omega) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.237)$$

Auch diese Funktionen erfüllen eine Vollständigkeitsrelation,

$$\delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{U}^*(t', -\omega) \tilde{U}(t, -\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}, \quad (1.238)$$

sowie eine Orthogonalitätsrelation,

$$\delta(\omega - \omega') = \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{U}^*(t, -\omega) \tilde{U}(t, -\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t}. \quad (1.239)$$

Nun kombinieren wir die Funktionen (1.234) und (1.237) zu einem vollständigen System orthonormierter Funktionen im Minkowski-Raum,

$$\begin{aligned}\tilde{U}(X, K) &\equiv \tilde{U}(t, \vec{r}; \omega, \vec{k}) = \tilde{U}(t, -\omega) \tilde{U}(\vec{r}, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i[(\omega/c) ct - \vec{k} \cdot \vec{r}]} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-iK \cdot X},\end{aligned}\quad (1.240)$$

wobei wir den **4-Wellenvektor**

$$K = (k^\mu) = (k^0, \vec{k})^T \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)^T \quad (1.241)$$

benutzt haben, um das **4-Skalarprodukt**

$$K \cdot X = k^\mu x_\mu = k^0 x_0 - \vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c} ct - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (1.242)$$

auszudrücken. Bei den Funktionen $\tilde{U}(X, K)$ handelt es sich um (geeignet normierte) sog. **ebene Wellen**, die wir in Abschnitt 4.1.2 noch genauer diskutieren werden. Da der Exponent das Lorentz-invariante Skalarprodukt $K \cdot X$ enthält, sind die Funktionen (1.240) ebenfalls **Lorentz-invariant**. Ihre Vollständigkeitsrelation lautet in Analogie zu Gl. (1.235)

$$\begin{aligned}\delta^{(4)}(X - X') &\equiv \delta(x_0 - x'_0) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(ct - ct') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \frac{1}{c} \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\frac{\omega}{c} e^{-i(\omega/c)(ct-ct')} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 e^{-ik^0(x_0-x'_0)} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4K e^{-iK \cdot (X - X')} = \int d^4K \tilde{U}^*(X', K) \tilde{U}(X, K) \\ \Longleftrightarrow \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(X - X') &= \int d^4K e^{-iK \cdot (X - X')},\end{aligned}\quad (1.243)$$

wobei die erste Identität in der ersten Zeile als Definition der **4-dimensionalen Delta-Funktion** zu verstehen ist und wir von der ersten zur zweiten Zeile von der Identität (1.137) Gebrauch gemacht haben. Die Orthonormalitätsrelation für die Funktionen (1.240)

lautet in Analogie zu Gl. (1.236)

$$\begin{aligned}
\delta^{(4)}(K - K') &\equiv \delta(k_0 - k'_0) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') = \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \\
&= c \delta(\omega - \omega') \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} c \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \int d^3\vec{r} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 e^{i(k_0 - k'_0)x^0} \int d^3\vec{r} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4X e^{i(K - K') \cdot X} \\
&= \int d^4K \tilde{U}^*(X, K) \tilde{U}(X, K') \\
\iff (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K - K') &= \int d^4X e^{i(K - K') \cdot X} .
\end{aligned} \tag{1.244}$$

Auch hier haben wir von der ersten zur zweiten Zeile von der Relation (1.137) Gebrauch gemacht.

1.7.3 Lineare homogene partielle Differentialgleichungen

1.12.2023

Gegeben sei eine lineare homogene partielle Differentialgleichung vom Typ

$$\hat{\mathcal{D}}(X) \psi(X) = 0 , \tag{1.245}$$

wobei $\hat{\mathcal{D}}(X)$ ein beliebiger **Differentialoperator** ist, der Ableitungen $\partial^\nu \equiv \partial/\partial x_\nu$ nach den Raum-Zeit-Koordinaten x_ν enthält. Ein Beispiel ist der d'Alembert-Operator (1.93),

$$\square = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

In Analogie zu Gl. (1.233) entwickeln wir die Lösung $\varphi(X)$ nach dem vollständigen Orthonormalsystem von Funktionen (1.240),

$$\psi(X) = \int d^4Q \tilde{\psi}(Q) \tilde{U}(X, Q) , \tag{1.246}$$

und setzen diese Entwicklung in Gl. (1.245) ein,

$$0 = \hat{\mathcal{D}}(X) \psi(X) = \hat{\mathcal{D}}(X) \int d^4Q \tilde{\psi}(Q) \tilde{U}(X, Q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4Q \tilde{\psi}(Q) \hat{\mathcal{D}}(X) e^{-iQ \cdot X} . \tag{1.247}$$

Die Wirkung einer partiellen Ableitung ∂^ν im Differentialoperator $\hat{\mathcal{D}}(X)$ auf die Exponentialfunktion ist dergestalt, dass sie einen Faktor $-iq^\nu$ als Vorfaktor generiert,

$$\partial^\nu e^{-iQ \cdot X} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} e^{-iq^\mu x_\mu} = -iq^\nu e^{-iq^\mu x_\mu} , \tag{1.248}$$

d.h. jede partielle Ableitung ∂^ν in $\hat{\mathcal{D}}(X)$ wird durch einen Faktor $-iq^\nu$ ersetzt. Z.B. ist die Wirkung des d'Alembert-Operators auf die Exponentialfunktion

$$\square e^{-iq \cdot X} = \partial^\nu g_{\nu\lambda} \partial^\lambda e^{-iq^\mu x_\mu} = g_{\nu\lambda} (-iq^\nu) (-iq^\lambda) e^{-iq^\mu x_\mu} = -q^\nu q_\nu e^{-iq^\mu x_\mu} \equiv -Q^2 e^{-iq \cdot X} . \quad (1.249)$$

Der Differentialoperator $\hat{\mathcal{D}}(X)$ wird entsprechend durch einen **algebraischen** Faktor $\tilde{\mathcal{D}}(Q)$ ersetzt,

$$0 = \hat{\mathcal{D}}(X) \psi(X) = \int d^4Q \tilde{\psi}(Q) \tilde{\mathcal{D}}(Q) \tilde{U}(X, Q) , \quad (1.250)$$

z.B. im Fall des d'Alembert-Operators $\hat{\mathcal{D}}(X) \equiv \square \rightarrow -Q^2 \equiv \tilde{\mathcal{D}}(Q)$. Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $\tilde{U}^*(X, K)$, integrieren über d^4X und benutzen die Orthogonalitätsrelation (1.244), so erhalten wir

$$0 = \int d^4Q \tilde{\psi}(Q) \tilde{\mathcal{D}}(Q) \int d^4X \tilde{U}^*(X, K) \tilde{U}(X, Q) = \int d^4Q \tilde{\psi}(Q) \tilde{\mathcal{D}}(Q) \delta^{(4)}(K - Q) = \tilde{\psi}(K) \tilde{\mathcal{D}}(K) . \quad (1.251)$$

Damit haben wir die Differentialgleichung (1.245) in eine **algebraische** Gleichung im Fourier-Raum transformiert. Da die Entwicklungskoeffizienten $\tilde{\psi}(K)$ i.a. nicht verschwinden, müssen wir fordern, dass der 4-Wellenvektor K einen Wert annimmt, der die Gleichung

$$\tilde{\mathcal{D}}(K) = \tilde{\mathcal{D}}(\omega, \vec{k}) = 0 \quad (1.252)$$

erfüllt. Dies ist eine Gleichung, die die vier Komponenten des 4-Wellenvektors K miteinander verknüpft. In der Regel betrachtet man dann die Frequenz $\omega = ck^0$ als Funktion des 3-Wellenvektors $\vec{k}$, welches eine sog. **Dispersionsrelation** darstellt. Falls $\tilde{\mathcal{D}}(K)$ ein Polynom n -ter Ordnung in ω ist, gibt es im allgemeinen n Lösungen dieser Gleichung, die wir mit dem Index i durchnummerieren,

$$\omega_i = \omega_i(\vec{k}) , \quad i = 1, 2, \dots . \quad (1.253)$$

Im Fall des d'Alembert-Operators gibt es zwei Lösungen,

$$\tilde{\mathcal{D}}(K) = -K^2 = -k_0^2 + \vec{k}^2 = -(\omega/c)^2 + \vec{k}^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_\pm(\vec{k}) = \pm c |\vec{k}| . \quad (1.254)$$

Die allgemeine Lösung $\varphi(X)$ der homogenen Differentialgleichung (1.245) muss die Dispersionsrelation (1.252) erfüllen. Man macht daher folgenden Ansatz für die Entwicklungskoeffizienten $\tilde{\psi}(Q)$ in Gl. (1.246),

$$\tilde{\psi}(Q) = (2\pi)^2 c \sum_i a_i(\vec{q}) \delta(\omega - \omega_i(\vec{q})) , \quad (1.255)$$

wobei der Vorfaktor $(2\pi)^2 c$ reine Konvention ist. Damit nimmt die allgemeine Lösung die Form

$$\begin{aligned} \psi(X) &= (2\pi)^2 c \int d^4Q \sum_i a_i(\vec{q}) \delta(\omega - \omega_i(\vec{q})) \tilde{U}(X, Q) \\ &= \int d^3\vec{q} \sum_i a_i(\vec{q}) e^{-i[\omega_i(\vec{q})t - \vec{q} \cdot \vec{r}]} \end{aligned} \quad (1.256)$$

an. Man überprüft sehr leicht, dass dies die ursprüngliche Differentialgleichung (1.245) erfüllt,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{D}}(X) \psi(X) &= \int d^3 \vec{q} \sum_i a_i(\vec{q}) \hat{\mathcal{D}}(X) e^{-i[\omega_i(\vec{q})t - \vec{q} \cdot \vec{r}]} \\ &= \int d^3 \vec{q} \sum_i a_i(\vec{q}) \tilde{\mathcal{D}}(\omega_i(\vec{q}), \vec{q}) e^{-i[\omega_i(\vec{q})t - \vec{q} \cdot \vec{r}]} \\ &= 0 ,\end{aligned}\tag{1.257}$$

weil $\tilde{\mathcal{D}}(\omega_i(\vec{q}), \vec{q}) = 0$, da die $\omega_i(\vec{q})$ genau die Lösungen der Dispersionsrelation (1.252) sind.

Beispiel: Als Anwendungsbeispiel der Lösung (1.256) betrachten wir eine Quelle, die ein Signal $\psi(X)$ aussendet, welches Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\square \psi(X) = 0 \tag{1.258}$$

ist. Die Dispersionsrelationen sind dann, wie oben diskutiert, durch Gl. (1.254) gegeben. Wir nehmen an, dass das Signal monochromatisch mit der Wellenzahl q_* ist und in z -Richtung ausgesandt wird, d.h. der Wellenvektor ist $\vec{q}_* = (0, 0, q_*)^T$. Diese Annahmen legen die Fourier-Koeffizienten $a_{\pm}(\vec{q})$ in Gl. (1.256) eindeutig fest:

- (i) Die Tatsache, dass das Signal in die positive z -Richtung läuft, bedingt, dass $a_{-}(\vec{q}) \equiv 0$, denn die negative Lösung $\omega_{-}(\vec{q})$ entspricht Signalen, die (für positive Zeiten t) in die negative z -Richtung laufen.
- (ii) Da der Wellenvektor keine Komponenten in x - und y -Richtung hat und die z -Komponente gleich q_* ist, machen wir für den Fourier-Koeffizienten $a_{+}(\vec{q})$ den Ansatz

$$a_{+}(\vec{q}) = a_0 \delta(q^x) \delta(q^y) \delta(q^z - q_*) , \tag{1.259}$$

mit $a_0 = \text{const.}$.

Eingesetzt in Gl. (1.256) erhalten wir mit $\omega_{+}(\vec{q}) = cq_*$

$$\psi(X) = \int d^3 \vec{q} a_{+}(\vec{q}) e^{-i[\omega_{+}(\vec{q})t - \vec{q} \cdot \vec{r}]} = a_0 e^{iq_*(z - ct)} = a_0 \{ \cos[q_*(z - ct)] + i \sin[q_*(z - ct)] \} . \tag{1.260}$$

Wir nehmen an, dass nur der Realteil des Signals beobachtbar ist. Dann entspricht dieses Signal einer Welle, die mit Amplitude a_0 und Wellenzahl q_* mit Lichtgeschwindigkeit c in z -Richtung läuft.

1.7.4 Lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen und Greensche Funktionen

Gegeben sei eine lineare inhomogene partielle Differentialgleichung vom Typ

$$\hat{\mathcal{D}}(X) \varphi(X) = g(X) , \tag{1.261}$$

wobei $\hat{\mathcal{D}}(X)$ wiederum ein beliebiger **Differentialoperator** ist. Die **allgemeine** Lösung der Differentialgleichung (1.261) setzt sich zusammen aus der **allgemeinen** Lösung $\psi(X)$ der **homogenen** Differentialgleichung (1.245), die wir in Gl. (1.256) bestimmt haben, und aus einer **speziellen** Lösung $\varphi_{\text{spez}}(X)$ der **inhomogenen** Differentialgleichung (1.261). Diese bestimmen wir mit Hilfe der **Methode der Greenschen Funktionen**.

Die **Greensche Funktion** $\mathcal{G}(X, X')$ der Differentialgleichung (1.261) ist diejenige Funktion, die dieselbe Differentialgleichung mit einer δ -Funktion als Inhomogenität erfüllt,

$$\hat{\mathcal{D}}(X) \mathcal{G}(X, X') = a \delta^{(4)}(X - X') , \quad (1.262)$$

wobei $a = \text{const.}$ eine (letztlich irrelevante) Konstante ist.

Die Greensche Funktion $\mathcal{G}(X, X')$ kann man wieder durch Fourier-Transformation bestimmen. Zunächst impliziert die Abhängigkeit der rechten Seite von Gl. (1.262) von X und X' , dass auch die Greensche Funktion nur von der Differenz $X - X'$ abhängen kann, $\mathcal{G}(X, X') \equiv \mathcal{G}(X - X')$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir daher zunächst $X' = 0$ setzen, um die nachfolgenden Rechnungen zu vereinfachen. Die Fourier-Transformation der Greenschen Funktion lautet dann

$$\mathcal{G}(X) = \int d^4 K e^{-iK \cdot X} \tilde{\mathcal{G}}(K) , \quad (1.263)$$

wobei $\tilde{\mathcal{G}}(K)$ die Fourier-Transformierte der Greenschen Funktion $\mathcal{G}(X)$ ist. Wir setzen diese Gleichung auf der linken Seite von Gl. (1.262) ein und benutzen Gl. (1.243) auf der rechten Seite,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}(X) \mathcal{G}(X) &= \hat{\mathcal{D}}(X) \int d^4 K e^{-iK \cdot X} \tilde{\mathcal{G}}(K) = \int d^4 K \hat{\mathcal{D}}(X) e^{-iK \cdot X} \tilde{\mathcal{G}}(K) \\ &= \int d^4 K \tilde{\mathcal{D}}(K) e^{-iK \cdot X} \tilde{\mathcal{G}}(K) = \frac{a}{(2\pi)^4} \int d^4 K e^{-iK \cdot X} . \end{aligned} \quad (1.264)$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit $e^{iQ \cdot X}$ und integrieren über $d^4 X$. Unter Benutzung der Orthonormalitätsrelation (1.244) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int d^4 K d^4 X e^{-i(K-Q) \cdot X} \tilde{\mathcal{D}}(K) \tilde{\mathcal{G}}(K) &= \int d^4 K (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K - Q) \tilde{\mathcal{D}}(K) \tilde{\mathcal{G}}(K) \\ &= (2\pi)^4 \tilde{\mathcal{D}}(Q) \tilde{\mathcal{G}}(Q) \\ &= \frac{a}{(2\pi)^4} \int d^4 K d^4 X e^{-i(K-Q) \cdot X} = \frac{a}{(2\pi)^4} \int d^4 K (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K - Q) = a \\ &\iff \tilde{\mathcal{G}}(Q) = \frac{a}{(2\pi)^4 \tilde{\mathcal{D}}(Q)} . \end{aligned} \quad (1.265)$$

Bis auf die (irrelevante) Konstante $a/(2\pi)^4$ ist das Inverse der Fourier-transformierten Greenschen Funktion also das Inverse des Fourier-transformierten Differentialoperators. Wenn wir nun wieder $X \rightarrow X - X'$ setzen, ist die Lösung der Differentialgleichung (1.262) also gegeben durch

$$\mathcal{G}(X - X') = \frac{a}{(2\pi)^4} \int d^4 K e^{-iK \cdot (X - X')} \frac{1}{\tilde{\mathcal{D}}(K)} . \quad (1.266)$$

Dies ist noch nicht die komplette Lösung, da man zu $\mathcal{G}(X - X')$ immer eine Lösung $\mathcal{F}(X, X')$ der **homogenen** Differentialgleichung

$$\hat{\mathcal{D}}(X)\mathcal{F}(X, X') = 0 \quad (1.267)$$

dazuaddieren kann, weil diese in der ursprünglichen Differentialgleichung (1.262) aufgrund von Gl. (1.267) nicht auftaucht. Man beachte, dass $\mathcal{F}(X, X')$ nicht unbedingt nur von der Differenz $X - X'$ abhängen muss. Ein Beispiel dafür werden wir in Abschnitt 2.3.4 kennenlernen. Die **allgemeine** Lösung der Differentialgleichung (1.262) ist also letztlich gegeben durch

$$\mathcal{G}(X, X') = \frac{a}{(2\pi)^4} \int d^4K e^{-iK \cdot (X - X')} \frac{1}{\hat{\mathcal{D}}(K)} + \mathcal{F}(X, X') . \quad (1.268)$$

Weil $\mathcal{F}(X, X')$ nicht unbedingt nur von $X - X'$ abhängt, müssen wir auf der linken Seite auch $\mathcal{G}(X, X')$ anstelle von $\mathcal{G}(X - X')$ schreiben.

Die Berechnung des Integrals auf der rechten Seite von Gl. (1.268) liefert einen expliziten Ausdruck für die Greensche Funktion (sofern $\mathcal{F}(X, X')$ bekannt ist). Wir werden dies gleich anhand eines Beispiels durchführen. Zuerst aber geben wir eine spezielle Lösung $\varphi_{\text{spez}}(X)$ der inhomogenen Differentialgleichung (1.261) an. Sie läßt sich mit Hilfe der Greenschen Funktion $\mathcal{G}(X, X')$ folgendermaßen schreiben,

$$\varphi_{\text{spez}}(X) = \frac{1}{a} \int d^4X' \mathcal{G}(X, X') g(X') . \quad (1.269)$$

Beweis: Wir setzen diese Lösung in die Differentialgleichung (1.261) ein und benutzen Gl. (1.262)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}(X)\varphi_{\text{spez}}(X) &= \hat{\mathcal{D}}(X) \frac{1}{a} \int d^4X' \mathcal{G}(X, X') g(X') = \frac{1}{a} \int d^4X' \hat{\mathcal{D}}(X) \mathcal{G}(X, X') g(X') \\ &= \frac{1}{a} \int d^4X' a \delta^{(4)}(X - X') g(X') = g(X) , \quad \text{q.e.d.} . \end{aligned} \quad (1.270)$$

5.12.2023

Als Beispiel berechnen wir nun die Greensche Funktion, die zum **Laplace-Operator** gehört, d.h. welche die **Poisson-Gleichung** erfüllt, vgl. Gl. (1.104),

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (1.271)$$

Da der Laplace-Operator keine Zeitabhängigkeit enthält, hängt auch die Greensche Funktion nur von räumlichen Variablen ab. Gleiches gilt für die Delta-Funktion auf der rechten Seite. Der Vorfaktor ist reine Konvention, er entspricht der Wahl $a = -1/\epsilon_0$ in Gl. (1.262). Der Laplace-Operator lautet im Impulsraum, d.h. nach der Ersetzung $\partial/\partial x_i \rightarrow -ik^i$, $i = x, y, z$,

$$\hat{\mathcal{D}}(\vec{r}) \equiv \Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \longrightarrow (ik^x)^2 + (ik^y)^2 + (ik^z)^2 = -\vec{k}^2 \equiv \tilde{\mathcal{D}}(\vec{k}) . \quad (1.272)$$

Das 3-dimensionale Analogon zu Gl. (1.266) lautet damit

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int d^3 \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \frac{1}{\tilde{D}(\vec{k})} = \frac{1}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int d^3 \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \frac{1}{k^2} . \quad (1.273)$$

Das Impulsintegral löst man am geeignetsten in Kugelkoordinaten. Der Polarwinkel ϑ wird dabei so gewählt, dass sein Wert in Richtung von $\vec{r} - \vec{r}'$ null ist, d.h. $\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = k|\vec{r} - \vec{r}'| \cos \vartheta$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} G(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'| \cos \vartheta} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\xi e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'| \xi} , \end{aligned} \quad (1.274)$$

wobei wir im letzten Schritt $\xi = \cos \vartheta$ substituiert haben. Das ξ -Integral läßt sich elementar lösen,

$$\int_{-1}^1 d\xi e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'| \xi} = \frac{1}{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} (e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} - e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}) = \frac{2 \sin(k|\vec{r} - \vec{r}'|)}{k|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$

Das k -Integral erhalten wir aus einer Integraltafel [10],

$$\int_0^\infty dk \frac{2 \sin(k|\vec{r} - \vec{r}'|)}{k|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\pi}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$

Letztendlich erhalten wir

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (1.275)$$

Setzen wir Gl. (1.275) auf der linken Seite von Gl. (1.271) ein und benutzen Gl. (1.192), so erhalten wir

$$\Delta_r G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} [-4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')] = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') , \quad (1.276)$$

d.h. die rechte Seite von Gl. (1.271). Das Resultat (1.275) ist also konsistent mit Gl. (1.192). Berücksichtigt man, dass man immer eine Lösung $F(\vec{r}, \vec{r}')$ der Laplace-Gleichung $\Delta_r F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ zu $G(\vec{r}, \vec{r}')$ dazuzugaddieren darf, so ist die zum Laplace-Operator gehörende Greensche Funktion, bzw. die **Greensche Funktion der Poisson-Gleichung** allgemein durch

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (1.277)$$

gegeben.

2 Elektrostatik

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Grundlagen der Elektrodynamik diskutiert. In den nachfolgenden Kapiteln werden wir Anwendungen der Maxwell-Gleichungen diskutieren. Wir beginnen zunächst mit der **Elektrostatik**, d.h. solchen Probleme, bei denen das **magnetische Induktionsfeld verschwindet**, $\vec{B} = 0$, und darüberhinaus auch alle **Zeitableitungen null sind**, z.B. $\partial \vec{E} / \partial t = 0$.

Für statische Probleme ist darüberhinaus der Ladungs**strom** null

$$\vec{j} = 0 ; \quad (2.1)$$

es gibt allenfalls statische Ladungen und eine dazugehörige zeit**un**abhängige Ladungs**dichte**

$$\rho(t, \vec{r}) \equiv \rho(\vec{r}) \neq 0 .$$

2.1 Grundgleichungen der Elektrostatik

2.1.1 Poisson-Gleichung

Im Fall verschwindender magnetischer Induktion ist die Maxwell-Gleichung (1.85) trivial erfüllt. Wegen $\vec{B} = 0$ und $\partial \vec{E} / \partial t = 0$, sowie Gl. (2.1) ist auch die Maxwell-Gleichung (1.84) trivial erfüllt. Die verbleibenden Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.86) lauten für statische Probleme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 . \quad (2.3)$$

Die zweite Gleichung besagt, dass das elektrische Feld als Gradient einer skalaren Funktion darstellbar ist. Dies ist in Übereinstimmung mit Gl. (1.42), die für statische Probleme ($\partial \vec{A} / \partial t = 0$) lautet

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi . \quad (2.4)$$

Eingesetzt in Gl. (2.2) erhalten wir die **Poisson-Gleichung** (1.104),

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} , \quad (2.5)$$

die wir schon für allgemeine elektrodynamische Probleme im Falle der **Coulomb-Eichung** (1.103) erhalten hatten. Wir brauchen jetzt aber die Coulomb-Eichbedingung (1.103) nicht explizit zu fordern, da das Vektorpotential $\vec{A}$ in den Grundgleichungen (2.2), (2.3), (2.4) der Elektrostatik gar nicht mehr auftritt.

Die **Gesamtheit der elektrostatischen Probleme** reduziert sich also auf das Lösen der **Poisson–Gleichung** (2.5) für eine vorgegebene Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Da die Ladungsdichte als Inhomogenität auf der rechten Seite der Poisson–Gleichung **zeitunabhängig** ist, und der Laplace–Operator auf der linken Seite lediglich **Ortsableitungen** enthält, kann das skalare Potential auch nur eine Funktion des Ortes, nicht aber der Zeit sein,

$$\varphi(t, \vec{r}) \equiv \varphi(\vec{r}) .$$

Um die Lösung $\varphi(\vec{r})$ der Poisson–Gleichung (2.5) **eindeutig** zu bestimmen, muss man außer der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ noch **Randbedingungen** vorgeben.

2.1.2 Lösung der Poisson–Gleichung

Eine spezielle Lösung der Poisson–Gleichung lautet

$$\varphi_{\text{spez}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (2.6)$$

Beweis:

Dies folgt im Prinzip aus Gl. (1.269), welche sich im Falle der Poisson–Gleichung (2.5) zu

$$\varphi_{\text{spez}}(\vec{r}) = -\epsilon_0 \int d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \left(-\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right) \quad (2.7)$$

vereinfacht (man beachte, dass $a = -1/\epsilon_0$, s. Diskussion nach Gl. (1.271)). Mit der Green-schen Funktion (1.275),

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.8)$$

erhalten wir daraus

$$\varphi_{\text{spez}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad \text{q.e.d.} . \quad (2.9)$$

Bemerkung:

Gleichung (2.6) ist nicht die allgemeine Lösung der Poisson–Gleichung, da wir immer eine Lösung $\psi(\vec{r})$ der **Laplace–Gleichung** $\Delta\psi(\vec{r}) = 0$ zu Gl. (2.6) dazugaddieren können. Die Funktion $\varphi(\vec{r}) + \psi(\vec{r})$ erfüllt dann nämlich ebenfalls die Poisson–Gleichung, s. Diskussion in Abschnitt 1.7.4.

Beispiele:

(i) **Feld einer Punktladung:**

Die Ladungsdichte einer statischen Punktladung Q am Ort $\vec{r}_0$ ist gemäß Gl. (1.129)

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) .$$

Eingesetzt in die Lösung (2.6) der Poisson-Gleichung ergibt sich

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} . \quad (2.10)$$

Für den Fall, dass $\vec{r}_0 = 0$, vereinfacht sich dies zu

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} . \quad (2.11)$$

Die Abhängigkeit des skalaren Potentials einer Punktladung vom Abstand r ist also mit der des **Gravitationspotentials** identisch, vgl. Gl. (2.185) der Vorlesung “Theoretische Physik I”. Sie ist in Abb. 2.1 graphisch veranschaulicht.

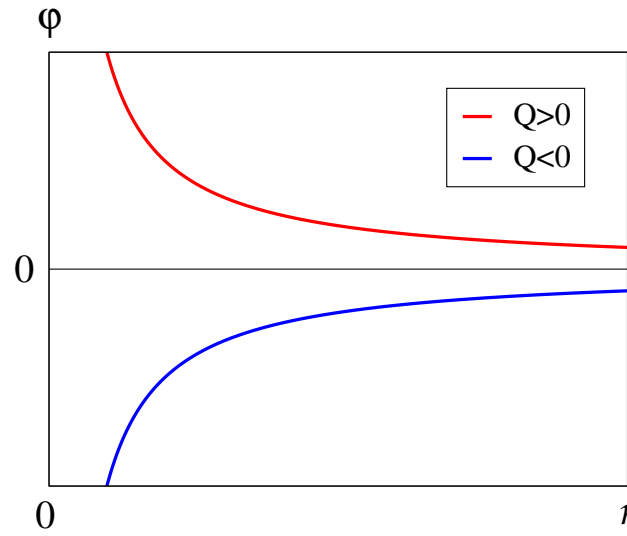


Abbildung 2.1: Skalares Potential einer Punktladung Q .

Das zugehörige elektrische Feld berechnen wir gemäß Gl. (2.4),

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}_r \varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \equiv -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_u \frac{1}{u} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{u^2} \frac{\vec{u}}{u} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} , \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei wir in den Zwischenschritten $\vec{u} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0$ definiert haben und die Relation $\vec{\nabla}_u u = \vec{u}/u$ benutzt haben. Für eine Punktladung Q im Ursprung gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r . \quad (2.13)$$

Dieses Feld ist in Abb. 2.2 im **Feldlinienbild** (vgl. Abb. 1.40 der Vorlesung “Theoretische Physik I”) dargestellt. Für positive Ladungen, $Q > 0$, zeigt das elektrische

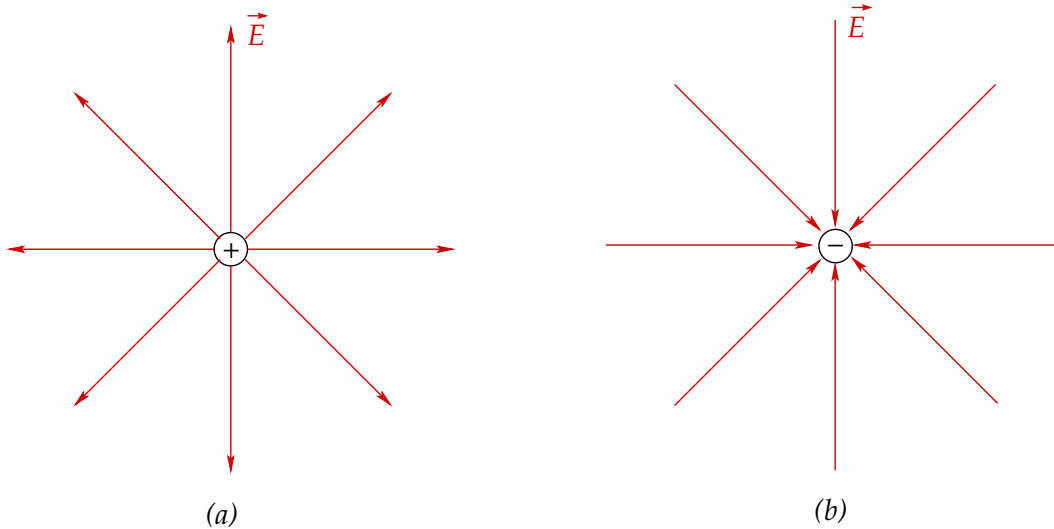


Abbildung 2.2: Elektrisches Feld einer Punktladung Q , (a) für $Q > 0$, (b) für $Q < 0$.

Feld von der Ladung weg (in $\vec{e}_r$ -Richtung), für negative, $Q < 0$, zeigt es zur Ladung hin (in $-\vec{e}_r$ -Richtung).

Die auf eine punktförmige Testladung q am Ort $\vec{r}$ durch dieses Feld ausgeübte **Coulomb-Kraft** (1.119) ist

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}. \quad (2.14)$$

Diese Gleichung ist auch als **Coulombsches Gesetz** bekannt. Wir erkennen, dass die Coulomb-Kraft dem **3. Newtonschen Axiom** genügt: die von der Testladung q am Ort $\vec{r}$ auf die Punktladung Q am Ort $\vec{r}_0$ ausgeübte Kraft ergibt sich ganz natürlich durch Vertauschen von $q \leftrightarrow Q$, $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}_0$,

$$\vec{F}_{Qq} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \equiv -\vec{F}_{qQ} \equiv -\vec{F}_C(\vec{r}).$$

Für $\vec{r}_0 = 0$ vereinfacht sich Gl. (2.14) zu

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r. \quad (2.15)$$

Wie bei der **Gravitationskraft** (vgl. Glgen. (2.25), (2.26) der Vorlesung “Theoretische Physik I”) handelt es sich um eine **Zentralkraft**. Die Rolle der Zentralmasse M übernimmt die Punktladung Q im Ursprung, die Rolle der sich im Gravitationsfeld von M bewegenden Masse m die Testladung q . Die Gravitationskonstante γ wird durch den Vorfaktor $1/(4\pi\epsilon_0)$ ersetzt. Im Unterschied zur Gravitationskraft, die stets **anziehend** wirkt, kann die Coulomb-Kraft aber sowohl **anziehend**, für $qQ < 0$, als auch **abstoßend**, für $qQ > 0$, wirken. Dieser Sachverhalt ist als Merksatz “ungleichnamige Ladungen ziehen sich an, gleichnamige stoßen sich ab” bekannt.

Die Coulomb-Kraft ist auch eine **konservative Kraft**, denn es existiert ein Potential

$$V_C(r) = q \varphi(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad (2.16)$$

das sog. **Coulomb-Potential**, aus dem sich die Kraft berechnen lässt,

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_C(r) = -q \vec{\nabla} \varphi(r) \equiv q \vec{E}(\vec{r}),$$

wobei wir Gl. (2.4) benutzt haben. Das Ergebnis ist natürlich konsistent mit Gl. (1.119). Für konservative Kräfte gilt die **Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals**

$$W_{21} \equiv V_C(\vec{r}_2) - V_C(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}_C(\vec{r}),$$

d.h. für die geleistete Arbeit spielt es keine Rolle, auf welchem Weg man von $\vec{r}_1$ zu $\vec{r}_2$ gelangt. Da die Ladung q lediglich ein multiplikativer Faktor in Gl. (1.119) darstellt, muss auch das Wegintegral

$$U_{21} \equiv \frac{W_{21}}{q} = \frac{1}{q} [V_C(\vec{r}_2) - V_C(\vec{r}_1)] \equiv \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.17)$$

unabhängig vom gewählten Weg sein. Die **Potentialdifferenz** $\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$ bezeichnet man auch als **Spannungsdifferenz** U_{21} , oder kurz **Spannung**. Aus der Vorlesung “Theoretische Physik I” wissen wir, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Wegunabhängigkeit des Integrals (2.17) die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes ist. Dies ist aber gerade durch die Maxwell-Gleichung (2.3) garantiert.

(ii) **Feld eines unendlich dünnen und langen, homogen geladenen Drahtes:**

Wir legen den Draht entlang der z -Achse, so dass für die Ladungsdichte gilt

$$\rho(\vec{r}) = \kappa \delta(x) \delta(y), \quad (2.18)$$

wobei κ die (konstante) **Ladungsdichte pro Längeneinheit** ist. Die beiden δ -Funktionen sorgen dafür, dass die Ladungsdichte nur bei $x = y = 0$, also entlang der z -Achse, d.h. entlang des Drahtes nicht verschwindet.

Für das skalare Potential (2.6) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0} \int dx' dy' dz' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \delta(x') \delta(y') \\ &= \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + u^2}} \\ &= \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} du \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + u^2}}. \end{aligned}$$

Hier haben $u \equiv z' - z$ substituiert, die Zylinderkoordinate $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ eingeführt und das Integral in zwei Teile aufgespalten, eines von $-\infty$ bis 0 und eines von 0

bis ∞ . Da der Integrand aber symmetrisch unter $u \rightarrow -u$ ist, sind beide Integrale gleich groß, also das gesamte Integral gleich zweimal dem von 0 bis ∞ .

Wie man sieht, hängt das Potential lediglich vom radialen Abstand $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Draht ab, und nicht von z oder vom Polarwinkel $\phi = \arctan(y/x)$. Dies muss aus Symmetriegründen auch so sein, da das Problem **translationsinvariant** entlang der z -Achse und **rotationssymmetrisch** um diese Achse ist.

Formal divergiert das verbleibende Integral an der oberen Integralgrenze logarithmisch, $du/u = d \ln u$, deswegen müssen wir es zunächst durch Einführen einer endlichen oberen Grenze **“regularisieren”**, die wir später gegen unendlich schicken,

$$\begin{aligned}\varphi(\rho) &= \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L du \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + u^2}} = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\sqrt{\rho^2 + L^2} + L \right) - \ln \rho \right] \\ &= \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + \rho^2}}{\rho} = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\rho/L)^2}}{\rho/L} \\ &= \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{2L}{\rho} + O\left(\frac{\rho^2}{L^2}\right) \right] \equiv \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \frac{2L}{\rho} .\end{aligned}\quad (2.19)$$

Hier haben wir das elementare Integral mit Hilfe einer Integraltafel gelöst und $\ln b - \ln a \equiv \ln(b/a)$ sowie die Taylor-Entwicklungen $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + O(x^2)$ und $\ln(2+x/2) = \ln[2(1+x/4)] = \ln 2 + \ln(1+x/4) = \ln 2 + x/4 + O(x^2)$ benutzt. Am Ergebnis (2.19) wird die logarithmische Divergenz klar ersichtlich.

Potentiale sind aber nur bis auf additive Konstanten bestimmt. Physikalisch meßbare Größen wie das elektrische Feld berechnen sich aus Ableitungen des Potentials, vgl. Gl. (2.4), bei denen solche Konstanten keine Rolle spielen. Es spricht also nichts dagegen, eine Konstante vom Ergebnis (2.19) abzuziehen, z.B. das Potential an einem vorgegebenen radialen Abstand $\rho_* = \text{const.}$,

$$\varphi_{\text{ren}}(\rho) \equiv \varphi(\rho) - \varphi(\rho_*) = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2L}{\rho} - \ln \frac{2L}{\rho_*} \right) \equiv -\frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_*} , \quad (2.20)$$

wobei wir $\ln(b/a) = -\ln(a/b)$ benutzt haben. Das **renormierte** Potential $\varphi_{\text{ren}}(\rho)$ ist von L unabhängig und endlich, vgl. Abb. 2.3. Der Nullpunkt liegt per Definition bei $\rho = \rho_*$, wobei ρ_* beliebig gewählt werden kann, aber endlich sein muss. Die **Regularisierung** und **Renormierung** von Unendlichkeiten ist ein gängiges Verfahren, welches insbesondere in der **Quantenfeldtheorie** Anwendung findet. Am Beispiel des unendlich langen geladenen Drahtes sehen wir, dass solches auch in der klassischen Feldtheorie nötig sein kann. Wir werden im Folgenden noch weitere Beispiele diskutieren.

8.12.2023

Wir berechnen nun das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{\text{ren}}(\rho) = \vec{e}^\rho \frac{\partial \varphi_{\text{ren}}(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \vec{e}^\rho , \quad (2.21)$$

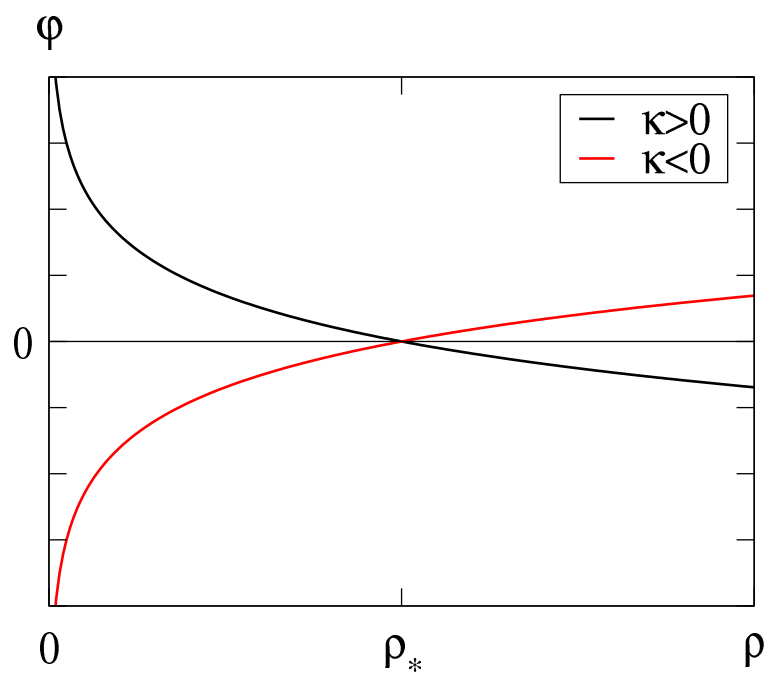


Abbildung 2.3: Renormiertes skalares Potential eines unendlich langen Drahtes, schwarze Kurve für $\kappa > 0$, rote Kurve für $\kappa < 0$.

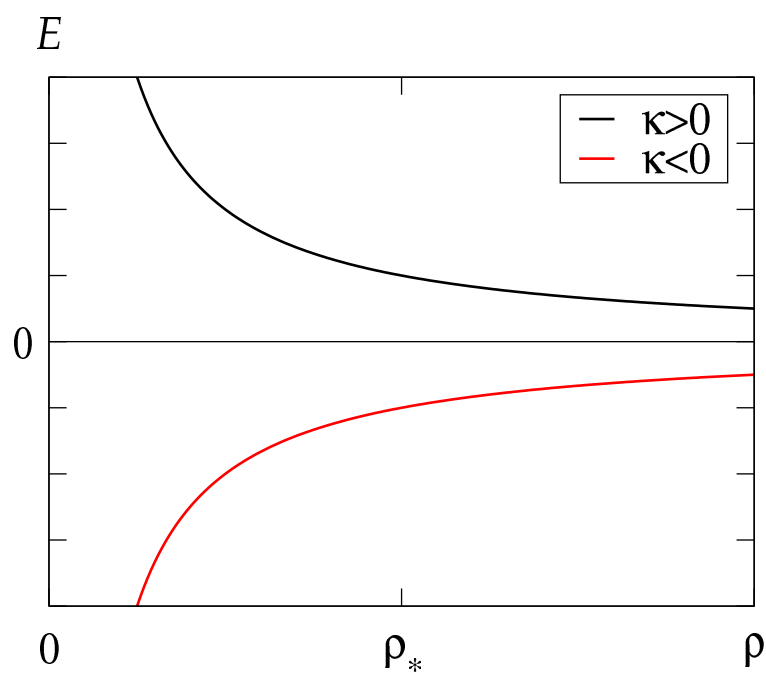


Abbildung 2.4: Elektrisches Feld eines unendlich langen Drahtes, schwarz für $\kappa > 0$, rot für $\kappa < 0$.

wobei wir $d \ln \rho / d\rho = 1/\rho$, den Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten,

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}^\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}^z \frac{\partial}{\partial z}$$

(vgl. Gl. (1.153) der Vorlesung “Theoretische Physik I”) und die Tatsache, dass das skalare Potential (2.20) von ϕ und z unabhängig ist, benutzt haben. Das elektrische Feld zeigt also in radiale Richtung (für $\kappa > 0$ vom Draht weg und für $\kappa < 0$ zum Draht hin) und fällt also mit wachsendem radialen Abstand vom Draht wie $1/\rho$ ab, vgl. Abb. 2.4.

(iii) **Feld einer unendlich dünnen, unendlich ausgedehnten, homogen geladenen Ebene:**

Wir legen die Ebene in die (xy) -Ebene bei $z = 0$, so dass die Ladungsdichte lautet

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(z) , \quad (2.22)$$

wobei σ die (konstante) **Ladungsdichte pro Flächeneinheit** ist. Gemäß Gl. (2.6) lautet das skalare Potential

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int dx' dy' dz' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \delta(z') \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} du dv \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}} , \end{aligned}$$

wobei wir $u \equiv x' - x$, $v \equiv y' - y$ substituiert und die Symmetrie des Integranden unter $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$ benutzt haben (was erlaubt, das Flächenintegral über die gesamte Ebene als viermal das Flächenintegral über den ersten Quadranten darzustellen).

Man erkennt, dass das Potential nicht von $\vec{r}$, sondern nur vom Abstand z von der geladenen Ebene abhängt. Dies muss aus Symmetriegründen so sein, da das Problem **invariant** gegenüber **Translationen** in der (xy) -Ebene ist.

Für das verbleibende Flächenintegral bietet sich eine Berechnung in Polarkoordinaten an,

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} d\rho \rho \int_0^{\pi/2} d\phi \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} d\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} ,$$

wobei das Integral über den Polarwinkel ϕ direkt ausführbar ist, da der Integrand nicht von ϕ abhängt. Das verbleibende Integral divergiert linear an der oberen Integralgrenze und muss, wie schon im vorangegangenen Beispiel, durch Einführung einer oberen Grenze **regularisiert** werden, die man später gegen unendlich schickt,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R d\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[R - |z| + O\left(\frac{z^2}{R}\right) \right] , \end{aligned}$$

wobei das Integral wegen $d\sqrt{\rho^2 + z^2} \equiv \rho d\rho / \sqrt{\rho^2 + z^2}$ elementar ausführbar ist und wir wieder die Taylor-Entwicklung $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + O(x^2)$ benutzt haben. Da das skalare Potential nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, können wir eine (unendlich große) Konstante von obigem Ergebnis abziehen, z.B. das Potential bei $z = 0$. Mit anderen Worten, wir **renormieren** das skalare Potential,

$$\varphi_{\text{ren}}(z) \equiv \varphi(z) - \varphi(0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow \infty} (R - |z| - R) \equiv -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|. \quad (2.23)$$

Das elektrische Feld berechnet sich zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{\text{ren}}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\partial |z|}{\partial z} \vec{e}^z \equiv \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \vec{e}^z, \quad (2.24)$$

wobei

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} +1, & z > 0, \\ -1, & z < 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

die sog. **Signum-** oder **Vorzeichenfunktion** ist.

Das elektrische Feld (2.24) einer unendlich ausgedehnten Ebene ist also **konstant**. Bei positiver Flächenladungsdichte, $\sigma > 0$, zeigt es von der Ebene weg und bei negativer, $\sigma < 0$, zur Ebene hin, vgl. Abb. 2.5.

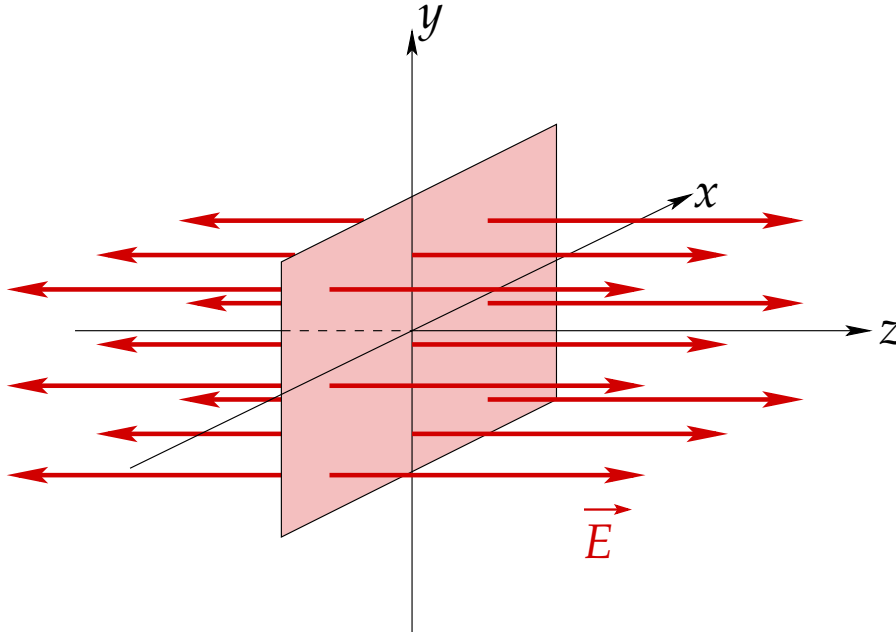


Abbildung 2.5: Elektrisches Feld einer unendlich ausgedehnten, geladenen Ebene, für positive Flächenladungsdichte $\sigma > 0$.

(iv) **Coulomb-Eichung:**

Mit dem Helmholtzschen Zerlegungssatz und der Lösung der Poisson-Gleichung

(2.6) sind wir in der Lage, die Bewegungsgleichung (1.108) für das Vektorpotential in Coulomb–Eichung in eine transparentere Form zu bringen. Zunächst bemerken wir, dass Gl. (2.6) die Poisson–Gleichung (2.5) selbst dann löst, wenn die Ladungsdichte und das skalare Potential eine Funktion der Zeit sind, d.h. die Poisson–Gleichung

$$\Delta_r \varphi(t, \vec{r}) = -\frac{\rho(t, \vec{r})}{\epsilon_0}$$

wird durch

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.26)$$

gelöst:

$$\begin{aligned} \Delta_r \varphi(t, \vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \Delta_r \frac{\rho(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(t, \vec{r}') \Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(t, \vec{r}') (-4\pi) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{\rho(t, \vec{r})}{\epsilon_0} . \end{aligned}$$

Der tiefere Grund ist, dass der Laplace–Operator keine Zeitableitungen enthält und die zusätzliche Zeitabhängigkeit der Ladungsdichte daher keine Auswirkung auf die Form (2.26) der Lösung hat. Die Zeitabhängigkeit der Ladungsdichte führt allerdings zu einer Zeitabhängigkeit des skalaren Potentials.

Wir berechnen nun mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (1.88)

$$\frac{\partial \varphi(t, \vec{r})}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\partial \rho(t, \vec{r}')}{\partial t} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(t, \vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$

Dies setzen wir in Gl. (1.108) ein,

$$\begin{aligned} \square \vec{A}(t, \vec{r}) &= \mu_0 \left[\vec{j}(t, \vec{r}) - \epsilon_0 \vec{\nabla}_r \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \\ &\equiv \mu_0 \left[\vec{j}(t, \vec{r}) - \vec{j}_\ell(t, \vec{r}) \right] \equiv \mu_0 \vec{j}_t(t, \vec{r}) , \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Definition des longitudinalen Anteils der Stromdichte,

$$\vec{j}_\ell(t, \vec{r}) \equiv \vec{\nabla}_r \left(-\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{j}(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) ,$$

vgl. Gl. (1.199), und im letzten Schritt den Helmholtzschen Zerlegungssatz (1.198) benutzt haben.

Die Bewegungsgleichungen für das skalare und das Vektorpotential in Coulomb–Eichung lassen sich also in die kompakte Form

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \\ \square \vec{A} &= \mu_0 \vec{j}_t , \end{aligned}$$

bringen. Die Bewegungsgleichung für das Vektorpotential ist, wie in der Lorenz–Eichung, vgl. Gl. (1.98), eine **inhomogene Wellengleichung**, allerdings ist die Inhomogenität nicht, wie in der Lorenz–Eichung, die **gesamte** Ladungsstromdichte $\vec{j}$, sondern lediglich ihr **transversaler** Anteil $\vec{j}_t$.

2.1.3 Elektrostatische Energie

Für den Fall verschwindender magnetischer Induktionsfelder, $\vec{B} = 0$, lautet die Energiedichte (1.110)

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 . \quad (2.27)$$

Die Gesamtenergie des elektrostatischen Feldes im **gesamten** Raum erhalten wir, wenn wir die Energiedichte über $\mathbb{R}^3$ integrieren, vgl. Gl. (1.186)

$$E_{\text{Feld}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \vec{E}^2(\vec{r}) . \quad (2.28)$$

Wir benutzen nun Gl. (2.4) und das Greensche Theorem (1.189) für $\psi = \varphi$,

$$\begin{aligned} E_{\text{Feld}} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right]^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \oint_{S(\mathbb{R}^3)} d\vec{f} \cdot \left[\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \Delta \varphi(\vec{r}) \right\} . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Das Oberflächenintegral verschwindet, weil vom Unendlichen aus betrachtet jede endliche Ladungsverteilung in guter Näherung als Punktladung im Ursprung betrachtet werden kann. Das skalare Potential einer solchen Punktladung ist durch Gl. (2.11) gegeben, so dass auf der Oberfläche einer Kugel um den Ursprung mit Radius R

$$d\vec{f} \cdot \left[\vec{\nabla} \varphi(R) \right] \varphi(R) \sim R^2 \frac{1}{R^2} \frac{1}{R} \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) .$$

Es bleibt also nur das Volumenintegral in Gl. (2.29) übrig, das wir mit der Poisson-Gleichung (2.5) wie folgt schreiben:

$$E_{\text{Feld}} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \left[-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \right] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \varphi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) . \quad (2.30)$$

Benutzen wir noch die Lösung (2.6) der Poisson-Gleichung, so lautet die elektrostatische Feldenergie

$$E_{\text{Feld}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (2.31)$$

Beispiel: Elektrostatische Energie zweier Punktladungen

Die Ladungsdichte zweier Punktladungen q_1, q_2 an den Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ lautet

$$\rho(\vec{r}) = q_1 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1) + q_2 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_2) .$$

Eingesetzt in Gl. (2.31) erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{\text{Feld}} &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[q_1^2 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_1) \right. \\ &\quad \left. + q_2^2 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_2) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_2) + 2q_1q_2 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_2) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2^2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_2|} + \frac{2q_1q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) \\ &\equiv E_{\text{Selbst},1} + E_{\text{Selbst},2} + E_{\text{WW}} , \end{aligned}$$

wobei

$$E_{\text{Selbst},i} \equiv \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_i^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_i|} \rightarrow \infty$$

die konstante, aber unendliche **Selbstenergie** der i -ten Ladung ist. Da Konstanten (ob endlich oder unendlich) bei Energien (die immer relativ gemessen werden) keine Rolle spielen, "renormieren" wir die Energie so, dass wir diese Konstanten von der Feldenergie E_{Feld} abziehen, so dass nur der Wechselwirkungsanteil E_{WW} verbleibt,

$$E_{\text{Feld,ren}} \equiv E_{\text{WW}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Diese Energie ist identisch mit der **Arbeit**, die Ladung q_1 im Feld der Ladung q_2 , die bei $\vec{r}_2$ sitzt, vom Unendlichen zum Ort $\vec{r}_1$ zu verschieben,

$$W_{1\infty} = q_1 [\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\infty)] = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \equiv E_{\text{WW}}.$$

Umgekehrt könnte man auch die Ladung q_2 im Feld der Ladung q_1 , die bei $\vec{r}_1$ sitzt, vom Unendlichen zum Ort $\vec{r}_2$ verschieben; dies ergibt dieselbe Arbeit.

12.12.2023

2.2 Einfache elektrostatische Probleme

2.2.1 Felder an Grenzflächen

Es stellt sich die Frage, wie sich das elektrische Feld an geladenen Grenzflächen verhält, vgl. Abb. 2.6.

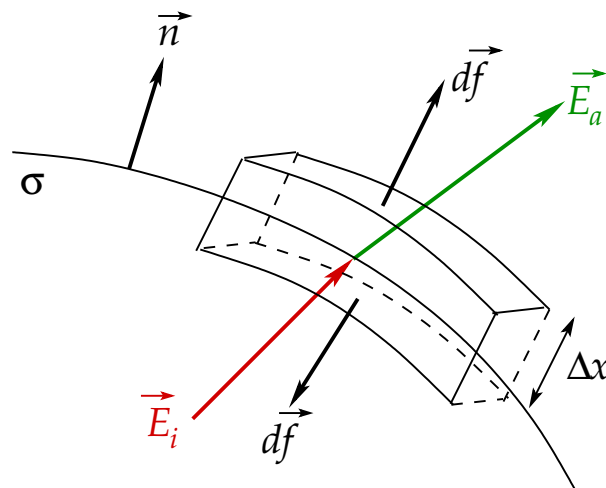


Abbildung 2.6: Elektrisches Feld beim Durchgang durch eine geladene Fläche und Gaußsches Kästchen.

Das auf die Fläche treffende elektrische Feld bezeichnen wir mit $\vec{E}_i$, das von der Fläche ausgehende mit $\vec{E}_a$. I.a. gilt $\vec{E}_i \neq \vec{E}_a$. Wir wollen im Folgenden den Zusammenhang zwischen $\vec{E}_i$ und $\vec{E}_a$ ermitteln. Dazu legen wir um die Fläche ein sog. **Gaußsches Kästchen**

mit dem Volumen $\Delta V = \Delta F \Delta x$. Die senkrecht zur Fläche stehende Kante Δx werden wir gegen null streben lassen. Der Satz von Gauß (1.160) liefert

$$\int_{\Delta V} d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \oint_{S(\Delta V)} d\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F \vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) ,$$

da $d\vec{f}$ auf der zu $\vec{E}_i$ gehörenden Oberfläche des Kästchens in umgekehrte Richtung zeigt wie auf der zu $\vec{E}_a$ gehörenden. Darüberhinaus haben wir angenommen, dass ΔF hinreichend klein ist, so dass $\vec{E}_i$ und $\vec{E}_a$ als konstant auf ΔF betrachtet werden können. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichung (2.2) gilt andererseits

$$\int_{\Delta V} d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Delta V} d^3\vec{r} \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta F ,$$

wobei σ die Flächenladungsdichte auf der Oberfläche ist. Der Vergleich der beiden Gleichungen ergibt also

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \quad (2.32)$$

Falls die Grenzfläche geladen ist, $\sigma \neq 0$, ist die **Normalkomponente** des elektrischen Feldes beim Durchgang durch die Grenzfläche also unstetig. Der Sprung des elektrischen Feldes entspricht genau der Flächenladungsdichte σ (dividiert durch ϵ_0).

Wir überprüfen Gl. (2.32) am Beispiel der geladenen Ebene aus dem vorangegangenen Abschnitt. Dort stand das elektrische Feld **senkrecht** auf der Ebene, es hat also **ausschließlich** eine Normalkomponente und keine Tangentialkomponente,

$$\vec{n} \cdot \vec{E} \equiv |\vec{E}| = E , \quad \vec{E} \equiv E \vec{n} .$$

Das Feld zeigt vor und hinter der Ebene in umgekehrte Richtungen, s. Gl. (2.24), also gilt für $\delta > 0$

$$E_a - E_i = E(z = \delta) - E(z = -\delta) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} ,$$

was mit Gl. (2.32) übereinstimmt.

Gleichung (2.32) macht lediglich eine Aussage über die **Normalkomponente** des elektrischen Feldes. Um die **Tangentialkomponente** zu untersuchen, betrachten wir eine sog. **Stokessche Fläche**, vgl. Abb. 2.7. Der Normalenvektor **auf** dieser Fläche (also aus der Bildebene von Abb. 2.7 herauszeigend) liegt **entlang** der geladenen Grenzfläche, es handelt sich um den zur Grenzfläche gehörenden **Tangentialvektor** $\vec{t}$. Für den zur Fläche ΔF gehörenden Normalenvektor gilt also

$$\Delta \vec{f} = \Delta F \vec{t} .$$

Für die Vektoren entlang des Randes der Fläche ΔF gilt

$$\Delta \vec{\ell}_a = \Delta \ell \vec{t} \times \vec{n} = -\Delta \vec{\ell}_i .$$

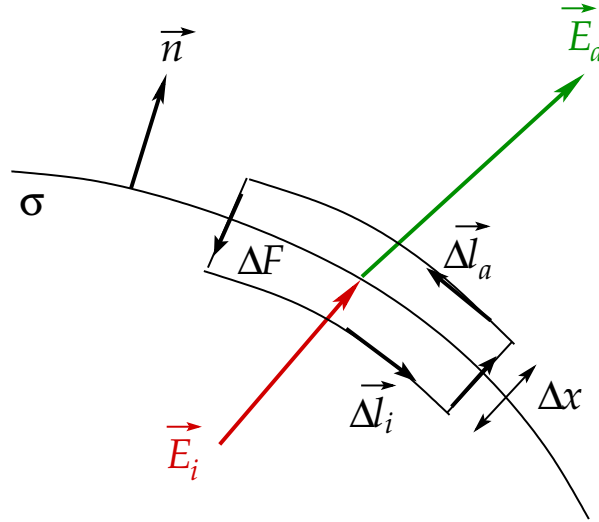


Abbildung 2.7: Stokessche Fläche.

Auch diese zeigen **tangential** zur Grenzfläche. Mit Hilfe des Satzes von Stokes (1.172) erhalten wir

$$\int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \oint_{C(\Delta F)} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \Delta\ell (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) ,$$

weil die Beiträge von den senkrecht zur Grenzfläche stehenden Wegstücken im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ verschwinden. Hier haben wir angenommen, dass $\Delta\ell$ hinreichend klein ist, so dass $\vec{E}_i$ und $\vec{E}_a$ als konstant auf $\Delta\ell$ betrachtet werden können. Andererseits gilt aufgrund der Maxwell-Gleichung (2.3)

$$\int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 .$$

Der Vergleich der beiden Gleichungen liefert

$$(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 0 , \quad (2.33)$$

die **Tangentialkomponente** des elektrischen Feldes geht **stetig** durch die Grenzfläche.

2.2.2 Plattenkondensator

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir den **Plattenkondensator**, d.h. ein System aus zwei gleich großen Platten der Fläche F , die im Abstand a parallel zueinander stehen, vgl. Abb. 2.8. Die Dicke d der Platten sei vernachlässigbar gegenüber ihrem Abstand a , der wiederum vernachlässigbar gegenüber ihrer räumlichen Ausdehnung $\sim \sqrt{F}$ sei. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass Randeffekte vernachlässigt werden können. Es gilt also

$$d \ll a \ll \sqrt{F} .$$

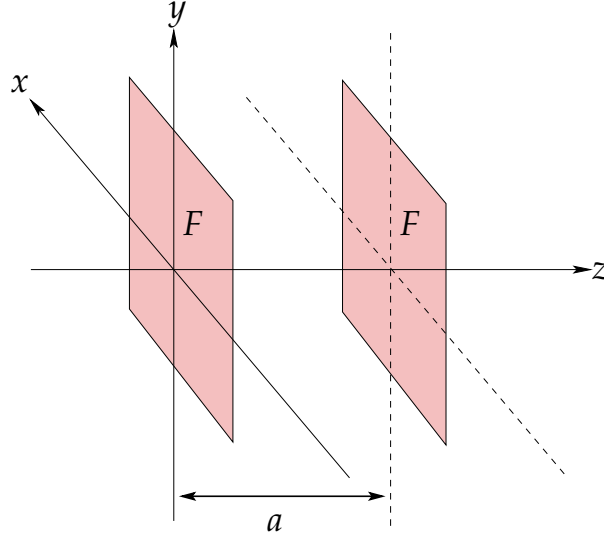


Abbildung 2.8: Der Plattenkondensator.

Die beiden Platten seien homogen geladen, mit identischem Betrag der Ladung, $|Q|$, allerdings umgekehrtem Vorzeichen; die Platte bei $z = 0$ sei positiv, $Q > 0$, und die bei $z = a$ negativ, $-Q < 0$, geladen. Die Flächenladungsdichte auf der positiv geladenen Platte ist

$$\sigma = \frac{Q}{F},$$

für die auf der negativ geladenen gilt entsprechendes mit umgekehrtem Vorzeichen. Die Platte bei $z = 0$ erzeugt ein elektrisches Feld

$$\vec{E}_+(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \vec{e}^z,$$

vgl. Gl. (2.24), während die Platte bei $z = a$ dementsprechend ein elektrisches Feld

$$\vec{E}_-(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z - a) \vec{e}^z$$

erzeugt. Der Sprung im elektrischen Feld bei beiden Platten ist

$$E_+(z = \delta) - E_+(z = -\delta) = E_-(z = a - \delta) - E_-(z = a + \delta) = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

wie von der Sprungbedingung (2.32) gefordert. Die Vorzeichen ergeben sich daraus, dass das elektrische Feld von der positiv geladenen Platte weg und zur negativ geladenen Platte hin zeigt.

Das gesamte elektrische Feld ist eine Überlagerung der von den Platten erzeugten elektrischen Felder,

$$E(z) = E_+(z) + E_-(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\operatorname{sgn}(z) - \operatorname{sgn}(z - a)] = \begin{cases} 0, & a < z, \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & 0 < z < a, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Offenbar ist das Feld nur **zwischen** den Platten von null verschieden, denn dort haben die beiden Signum-Funktionen unterschiedliches Vorzeichen, sie heben sich also nicht gegeneinander weg, wie im Außenraum des Plattenkondensators. Das elektrische Feld zeigt von der positiv geladenen Platte bei $z = 0$ zur negativ geladenen bei $z = a$, vgl. Abb. 2.9.

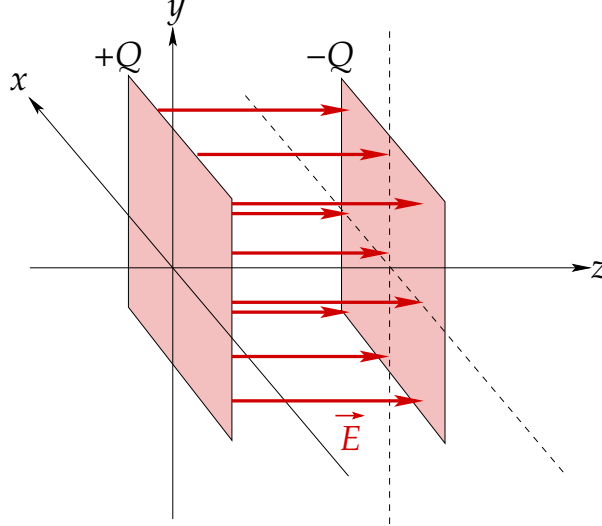


Abbildung 2.9: Das elektrische Feld des Plattenkondensators.

Das das elektrische Feld (2.34) generierende (renormierte) skalare Potential lautet offensichtlich (vgl. Gl. (2.23))

$$\varphi_{\text{ren}}(z) = \varphi_{+, \text{ren}}(z) + \varphi_{-, \text{ren}}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (|z| - |z - a|) = \begin{cases} -\frac{\sigma a}{2\epsilon_0}, & a < z, \\ -\frac{\sigma z}{\epsilon_0} + \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}, & 0 < z < a, \\ +\frac{\sigma a}{2\epsilon_0}, & z < 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Das skalare Potential besitzt also nur innerhalb des Kondensators eine nichttriviale Ortsabhängigkeit.

Die zwischen den beiden Kondensatorplatten herrschende Spannung ist

$$U = \varphi_{\text{ren}}(z = 0) - \varphi_{\text{ren}}(z = a) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} = \frac{Q a}{\epsilon_0 F}.$$

Zwischen Kondensatorladung Q und Spannung U besteht also eine Proportionalität,

$$Q = C U, \quad (2.36)$$

wobei die sog. **Kapazität** des Kondensators

$$C \equiv \epsilon_0 \frac{F}{a} \quad (2.37)$$

ist. Sie ist allein durch die Dimensionierung des Plattenkondensators (Fläche F , Abstand a) gegeben und hat die Einheit **Farad**,

$$[C] = 1 \text{ F} = 1 \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}} .$$

Die **Energiedichte** im Inneren des Plattenkondensators beträgt nach Gl. (1.110)

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} , \quad (2.38)$$

und die **Gesamtenergie** demzufolge

$$E_{\text{Feld}} = \int_V d^3\vec{r} w = w F a = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 F^2} F a = \frac{1}{2} Q^2 \frac{a}{\epsilon_0 F} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 . \quad (2.39)$$

2.3 Randwertprobleme

2.3.1 Poisson–Gleichung mit Randbedingungen

Eine nichttriviale Lösung (2.6) der Poisson–Gleichung setzt voraus, dass der Ort $\vec{r}$, an dem wir das skalare Potential $\varphi(\vec{r})$ bestimmen, **innerhalb** des Integrationsvolumens des Integrals auf der rechten Seite liegt, ansonsten verschwindet die δ –Funktion unter dem Integral. Dies erreicht man einfach dadurch, dass das Integrationsvolumen stets mit dem $\mathbb{R}^3$ gleichgesetzt wird. Dies ist deshalb immer möglich, weil die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ i.d.R. räumlich begrenzt ist, so dass man das Raumintegral ohne weiteres auf alle Bereiche ausdehnen kann, in denen $\rho(\vec{r}') \equiv 0$ ist. Für $r \rightarrow \infty$ kann man für die Lösung (2.6) der Poisson–Gleichung und das zugehörige elektrische Feld folgende Abschätzungen machen:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{1}{r} \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \longrightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) , \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}_r \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &\sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{e}_r}{r^2} \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2} \longrightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) . \end{aligned} \quad (2.41)$$

An diesen Gleichungen erkennt man noch einmal explizit, dass jede räumlich beschränkte Ladungsdichteverteilung vom Unendlichen aus betrachtet wie eine Punktladung aussieht.

Es gibt jedoch eine ganze Reihe von Problemen, in denen der betrachtete Raumbereich V **endlich** ist und man sucht das skalare Potential an allen Raumpunkten **innerhalb** von V . Die Poisson–Gleichung (2.5) läßt sich auch für diesen Fall lösen, allerdings muss man neben der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ in V **entweder** das skalare Potential, φ , **oder** die **Normalkomponente** des elektrischen Feldes, $\vec{E} \cdot \vec{n}$, auf der **Oberfläche** $S(V)$ kennen.

Dies definiert ein sog. **Randwertproblem**, welches wir im Folgenden näher erläutern werden.

15.12.2023

Wir benutzen zunächst die Greensche Identität (1.190) für die spezielle Wahl $\psi(\vec{r}') \equiv 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$,

$$\begin{aligned} & \oint_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} \varphi(\vec{r}') \right] \\ &= \int_V d^3\vec{r}' \left[\varphi(\vec{r}') \Delta_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Delta_{r'} \varphi(\vec{r}') \right] \\ &= -4\pi \int_V d^3\vec{r}' \varphi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (1.192) (mit $\Delta_r f(|\vec{r} - \vec{r}'|) \equiv \Delta_{r'} f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$) und Gl. (2.5) benutzt haben. Das erste Integral liefert bis auf Vorfaktoren die gesuchte Lösung $\varphi(\vec{r})$. Wenn wir die Gleichung nach $\varphi(\vec{r})$ auflösen und außerdem noch Gl. (2.4) und die Identität $\vec{\nabla}_{r'} |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \equiv +(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ benutzen, so erhalten wir

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (2.42)$$

Bei vorgegebener Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ für $\vec{r}' \in V$ und vorgegebenen $\varphi(\vec{r}')$ bzw. $\vec{E}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}_{r'} \varphi(\vec{r}')$ für $\vec{r}' \in S(V)$, also auf der **Oberfläche** von V , ist das skalare Potential für $\vec{r} \in V$, also **innerhalb** des betrachteten Raumbereichs, bestimmbar.

Der erste Term in Gl. (2.42) ist identisch mit Gl. (2.6). Es tritt aber nun mit dem Oberflächenintegral ein zusätzlicher Term auf. Wir überprüfen, dass er im Grenzfall $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ verschwindet. Für $\vec{r}' \in S(\mathbb{R}^3)$, d.h. also $r' \rightarrow \infty$, gilt mit den Glgen. (2.40) und (2.41)

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}') \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &\sim \frac{1}{r'} \frac{\vec{e}_{r'} \cdot \vec{r}'}{r'^3} = \frac{1}{r'^3}, \\ \frac{\vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &\sim \frac{1}{r'^2} \frac{1}{r'} = \frac{1}{r'^3}. \end{aligned}$$

Weil $df' \sim r'^2$, verschwindet das Oberflächenintegral also wie $1/r'$ für $r' \rightarrow \infty$ und wir erhalten wieder die ursprüngliche Lösung (2.6) der Poisson-Gleichung.

Eine wichtige Schlußfolgerung aus Gl. (2.42) ziehen wir für den Fall, dass der betrachtete Raumbereich V frei von Ladungen ist, $\rho(\vec{r}') \equiv 0$ für $\vec{r}' \in V$. In diesem Fall erfüllt $\varphi(\vec{r})$ die **Laplace-Gleichung** (1.107) mit der Lösung

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\vec{n}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad \text{für } \rho(\vec{r}') = 0. \quad (2.43)$$

Das skalare Potential ist also vollständig durch seine Werte $\varphi(\vec{r}')$ bzw. die seiner Normalableitung $\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} \varphi(\vec{r}') \equiv -\vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$ **auf dem Rand** $S(V)$ bestimmt.

2.3.2 Klassifizierung von Randbedingungen

Wir werden sehen, dass man nicht **sowohl** $\varphi(\vec{r}')$ **als auch** $\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \varphi(\vec{r}') \equiv -\vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$ auf dem Rand vorgeben muss, es genügt, **entweder** $\varphi(\vec{r}')$ **oder** $\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \varphi(\vec{r}')$ zu kennen. Man unterscheidet demzufolge

(i) **Dirichletsche Randbedingungen:**

φ ist auf $S(V)$ gegeben.

(ii) **Neumannsche Randbedingungen:**

$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi$ ist auf $S(V)$ gegeben.

Man kann auch **gemischte** Randbedingungen betrachten, bei denen **stückweise** entweder Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen vorgegeben sind.

Eindeutigkeit der Lösung:

Wir zeigen nun zunächst, dass für **vorgegebene Randbedingungen** die Lösung (2.42) der Poisson-Gleichung bis auf eine Konstante **eindeutig** bestimmt ist. Wir nehmen an, es gäbe zwei Lösungen $\varphi_1(\vec{r})$, $\varphi_2(\vec{r})$ dieser Gleichung,

$$\Delta \varphi_{1,2}(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0},$$

wobei die Randbedingungen für die beiden Lösungen identisch sind, d.h.

$$\varphi_1(\vec{r}) \equiv \varphi_2(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in S(V) \quad (\text{Dirichlet})$$

oder

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi_1(\vec{r}) \equiv \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi_2(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in S(V) \quad (\text{Neumann}).$$

Die **Differenzfunktion**

$$\psi(\vec{r}) \equiv \varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})$$

erfüllt dann offensichtlich die **Laplace-Gleichung**

$$\Delta \psi(\vec{r}) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\psi(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \in S(V) \quad (\text{Dirichlet}), \quad (2.44)$$

bzw.

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \in S(V) \quad (\text{Neumann}). \quad (2.45)$$

Das erste Greensche Theorem (1.189) lautet für $\varphi = \psi$:

$$\int_V d^3\vec{r} \left[\psi \Delta \psi + \left(\vec{\nabla} \psi \right)^2 \right] = \oint_{S(V)} df \psi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi.$$

Die rechte Seite verschwindet für beide Typen von Randbedingungen. Da ψ die Laplace-Gleichung erfüllt, erhalten wir also die Bedingung

$$\int_V d^3\vec{r} \left(\vec{\nabla}\psi \right)^2 = 0 ,$$

die wegen der positiven Definitheit des Integranden nur für

$$\vec{\nabla}\psi = 0 \implies \psi = \text{const.}$$

erfüllt werden kann. Wir erhalten also das Resultat, dass sich die beiden Lösungen φ_1, φ_2 lediglich um eine **Konstante** C unterscheiden,

$$\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r}) + C \quad \forall \vec{r} \in V, \text{ q.e.d.} \quad (2.46)$$

Diese Konstante spielt natürlich für physikalisch beobachtbare Größen wie die elektrische Feldstärke keine Rolle. Für Dirichletsche Randbedingungen kann man sie noch genauer festlegen, wenn man benutzt, dass φ_1, φ_2 hinreichend oft stetig differenzierbar in V sind (Voraussetzung für die Greenschen Theoreme), mithin also auch stetig in V sind. Dies gilt natürlich auch für die Differenzfunktion ψ . Sie nimmt also auf dem Rand von V den gleichen (konstanten) Wert an wie in V . Gemäß Gl. (2.44) ist diese Konstante dann aber null, d.h. für **Dirichletsche Randbedingungen** gilt über Gl. (2.46) hinaus, dass

$$\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in V .$$

Für **Neumannsche Randbedingungen** läßt sich eine solche weitergehende Folgerung nicht ziehen, da nach Gl. (2.45) lediglich die **Ableitung** von ψ auf dem Rand $S(V)$ verschwindet. Dies erlaubt nach wie vor, dass sich φ_1 und φ_2 um eine Konstante unterscheiden.

Da sowohl die Vorgabe von Dirichletschen wie auch von Neumannschen Randbedingungen die Lösung (2.42) bis auf eine (unwesentliche) Konstante eindeutig bestimmt, muss man nicht **gleichzeitig** Randbedingungen für φ **und** $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\varphi$ fordern, es genügt, **entweder** Dirichletsche **oder** Neumannsche Randbedingungen festzulegen. Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, dass φ und $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\varphi$ nicht unabhängig voneinander, also auch nicht getrennt voneinander festlegbar sind. Dies würde zu Widersprüchen führen.

Welchen Typ von Randbedingungen man für ein gegebenes Problem wählt, hängt von der Problemstellung ab. Falls das skalare Potential φ auf dem Rand $S(V)$ bekannt ist, bieten sich Dirichletsche Randbedingungen an. Falls aber die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke $\vec{n} \cdot \vec{E}$ bekannt ist, wählt man zweckmäßigerweise Neumannsche Randbedingungen.

2.3.3 Randbedingungen und Greensche Funktionen

Wir wollen die Poisson-Gleichung (2.5) mit Randbedingungen nun zunächst formal lösen und benutzen hierzu die in Abschnitt 1.7.4 eingeführte Methode der Greenschen Funktionen. Die Differentialgleichung für die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung lautet, vgl. Gl. (1.271),

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (2.47)$$

Im Vergleich mit der Poisson–Gleichung (2.5) ist also offenbar lediglich die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ durch eine δ –Funktion ersetzt worden. Physikalisch interpretiert man dies so, dass die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ der Poisson–Gleichung **identisch** mit dem **skalaren Potential** $\varphi(\vec{r})$ einer **Punktladung** am Ort $\vec{r}'$ der Stärke $Q \equiv 1$ ist. Die allgemeine Lösung von Gl. (2.47) hatten wir bereits bestimmt, vgl. Gl. (1.277),

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') , \quad (2.48)$$

wobei $F(\vec{r}, \vec{r}')$ eine Funktion ist, welche in V die **Laplace–Gleichung**

$$\Delta_r F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

erfüllt. Es ist bereits erwähnt worden, dass eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (Poisson–Gleichung) nur bis auf eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (Laplace–Gleichung) eindeutig bestimmt ist. Daher kann eine Lösung $F(\vec{r}, \vec{r}')$ der Laplace–Gleichung stets zur Lösung der Poisson–Gleichung addiert werden. Diese Funktion ist zunächst beliebig wählbar. Diese Wahlfreiheit werden wir später ausnutzen, um spezielle Randbedingungen zu realisieren.

Für das Folgende werden wir lediglich fordern, dass $F(\vec{r}, \vec{r}')$ **symmetrisch** unter Vertauschung von $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ sein soll, $F(\vec{r}, \vec{r}') \equiv F(\vec{r}', \vec{r})$. Aus Gl. (2.48) lesen wir ab, dass dann auch die Greensche Funktion symmetrisch unter Vertauschung ihrer Argumente ist, $G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv G(\vec{r}', \vec{r})$. Damit gilt auch

$$\Delta_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') = \Delta_{r'} G(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') , \quad (2.49)$$

wobei wir Gl. (2.47) mit vertauschten Argumenten $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ sowie $\delta(x) \equiv \delta(-x)$ benutzt haben. Vergleichen wir die linke und rechte Seite von Gl. (2.49), so stellen wir fest, dass es keine Rolle spielt, ob wir beim Laplace–Operator in Gl. (2.47) nach $\vec{r}$ oder nach $\vec{r}'$ differenzieren.

Wir benutzen nun die Greensche Identität (1.190) für $\psi(\vec{r}') \equiv G(\vec{r}, \vec{r}')$,

$$\begin{aligned} & \int_V d^3\vec{r}' [\varphi(\vec{r}') \Delta_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta_{r'} \varphi(\vec{r}')] \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \varphi(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= \oint_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} \varphi(\vec{r}') \right] , \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt die Glgen. (2.5) und (2.49) benutzt haben. Für $\vec{r} \in V$ können wir diese Gleichung nun nach $\varphi(\vec{r})$ auflösen,

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \oint_{S(V)} df' \left[\varphi(\vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}') + G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \right] , \quad (2.50)$$

wobei wir im letzten Term noch Gl. (2.4) benutzt haben.

Gleichung (2.50) ist völlig äquivalent zu Gl. (2.42), aber nun haben wir die Möglichkeit, über die frei wählbare Funktion $F(\vec{r}, \vec{r}')$ (a) entweder den zweiten oder (b) den ersten Term im Oberflächenintegral zu eliminieren, so dass (a) lediglich Dirichletsche oder (b) Neumannsche Randbedingungen spezifiziert werden müssen.

(a) **Dirichletsche Randbedingungen:**

Falls $\varphi(\vec{r}')$ auf $S(V)$ vorgegeben ist, wählt man $F(\vec{r}, \vec{r}')$ so, dass der zweite Term im Oberflächenintegral verschwindet,

$$\oint_{S(V)} df' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \equiv 0 . \quad (2.51)$$

Dies kann man z.B. dadurch erreichen, dass die Greensche Funktion auf dem Rand verschwindet,

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') \equiv 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(V) . \quad (2.52)$$

Dann lautet die Lösung (2.50) der Poisson-Gleichung

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3\vec{r}' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \oint_{S(V)} df' \varphi(\vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} G_D(\vec{r}, \vec{r}') . \quad (2.53)$$

Da $\varphi(\vec{r}')$ auf $S(V)$ und $\rho(\vec{r}')$ in V bekannt sind, ist die Lösung des Problems auf die Bestimmung der Greenschen Funktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ zurückgeführt, wobei sie die Bedingung (2.51) erfüllen muss.

(b) **Neumannsche Randbedingungen:**

Falls $\vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$ auf $S(V)$ vorgegeben ist, so würde man in Analogie zum obigen Fall versuchen, $F(\vec{r}, \vec{r}')$ so zu wählen, dass der erste Term im Oberflächenintegral verschwindet,

$$\oint_{S(V)} df' \varphi(\vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') \equiv 0 ,$$

und würde dies dadurch zu erreichen suchen, dass man den Gradienten der Greenschen Funktion auf dem Rand null setzt,

$$\vec{\nabla}_{r'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') \equiv 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(V) .$$

Dies führt aber zu einem Widerspruch mit Gl. (2.47). Einerseits gilt für $\vec{r} \in V$

$$\int_V d^3\vec{r}' \Delta_{r'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \equiv -\frac{1}{\epsilon_0} .$$

Andererseits gilt mit dem dritten Greenschen Theorem (1.191)

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \equiv \int_V d^3\vec{r}' \Delta_{r'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = \oint_{S(V)} d\vec{f}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') .$$

Der Gradient der Greenschen Funktion kann also auf dem Rand nicht verschwinden, sonst ergibt das Oberflächenintegral nicht den Wert $-1/\epsilon_0$. Wir versuchen stattdessen den Ansatz

$$\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') \equiv -\frac{1}{\epsilon_0 F} \quad \forall \vec{r}' \in S(V) , \quad (2.54)$$

wobei F die gesamte Oberfläche von V ist. Dann gilt für den ersten Term im Oberflächenintegral in Gl. (2.50)

$$\oint_{S(V)} df' \varphi(\vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') \equiv -\frac{\varphi_0}{\epsilon_0}, \quad (2.55)$$

wobei

$$\varphi_0 \equiv \frac{1}{F} \oint_{S(V)} df' \varphi(\vec{r}') = \text{const.}$$

der konstante **Mittelwert** des skalaren Potentials auf der Oberfläche $S(V)$ ist. Die Lösung (2.50) lautet nun

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi_0 = \int_V d^3\vec{r}' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \oint_{S(V)} df' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}'). \quad (2.56)$$

Da $\vec{E}(\vec{r}')$ auf $S(V)$ und $\rho(\vec{r}')$ in V bekannt sind, reduziert sich auch in diesem Fall das Problem auf die Bestimmung der Greenschen Funktion $G_N(\vec{r}, \vec{r}')$. Diese Funktion muss nun die Bedingung (2.54) erfüllen.

2.3.4 Methode der Spiegelladungen

19.12.2023

Als Anwendung der Methode der Greenschen Funktionen auf Randwertprobleme der Elektrostatik besprechen wir nun die sog. **Methode der Spiegel- oder Bildladungen**. Das typische elektrostatische Problem, bei dem diese Methode zur Anwendung kommt, ist die Berechnung des skalaren Potentials $\varphi(\vec{r})$, das von einer gewissen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ vor einer (im Idealfall unendlich) ausgedehnten, leitenden und geerdeten Platte erzeugt wird. O.B.d.A. liege die Platte in der (xy) -Ebene und die Ladungsverteilung sei bei $z > 0$, vgl. Abb. 2.10. Gesucht wird das skalare Feld in der unendlichen Halbebene $V = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3; z \geq 0\}$.

Wir müssen zunächst die Randbedingungen festlegen. Die Tatsache, dass die Platte leitend und geerdet ist, bedeutet, dass das skalare Potential $\varphi(\vec{r})$ **auf der Platte** einen **konstanten** Wert annimmt. Denn wenn dem nicht so wäre, dann bestünde eine **Potentialdifferenz** bzw. eine **Spannung** zwischen zwei Punkten $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ auf der Platte, $\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \equiv U_{21} \neq 0$, also ein **nichtverschwindender** Gradient $\vec{\nabla}\varphi \neq 0$ bei $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$. Aufgrund von Gl. (2.4) existiert dort auch ein **elektrisches Feld** $\vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\varphi \neq 0$. Dieses erzeugt aufgrund von Gl. (1.119) eine **Coulomb-Kraft** $\vec{F}_C = q\vec{E}$ auf die bei $\vec{r}$ befindlichen Ladungen q , welches zum **Ladungsfluß** führt. Da die Platte leitend und geerdet ist, verschieben sich die Ladungen so lange, bis auf sie **keine** Kraft mehr wirkt, sie sich also im **elektrostatischen Gleichgewicht** befinden. Dann sind aber **sämtliche** Potentialdifferenzen auf der Platte **ausgeglichen**, mithin das skalare Potential auf der Platte konstant.

Wir können o.B.d.A. den Wert des skalaren Potential auf der Platte gleich null setzen,

$$\varphi(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} = (x, y, 0)^T. \quad (2.57)$$

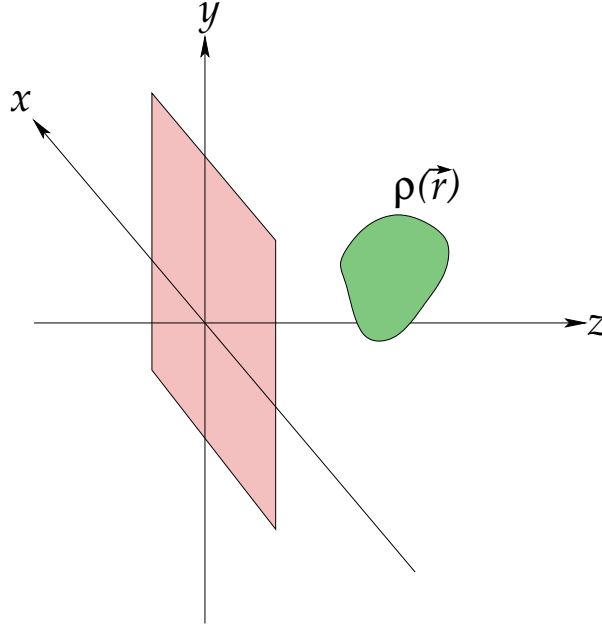


Abbildung 2.10: Typische Situation bei einem Randwertproblem.

Im Unendlichen, also $\forall z > 0$ und $x, y \rightarrow \pm\infty$, verschwindet das skalare Potential aufgrund der Tatsache, dass jede endliche Ladungsverteilung bei endlichem $\vec{r}'$ dort wie eine Punktladung aussieht, vgl. Gl. (2.40),

$$\lim_{x,y \rightarrow \pm\infty} \varphi(\vec{r}) = 0 \quad \forall z > 0. \quad (2.58)$$

Das Potential geht dort stetig in seinen Wert bei $z = 0$, also auf der Platte, über. Die Glgen. (2.57) und (2.58) legen die Randbedingungen des Problems vollständig fest. Sie sind offensichtlich vom **Dirichletschen Typ**.

Die Greensche Funktion hat gemäß Gl. (2.48) die Form

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F_D(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (2.59)$$

wobei die Funktion $F_D(\vec{r}, \vec{r}')$ die Laplace-Gleichung

$$\Delta_r F_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

und die Greensche Funktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ die Bedingung (2.51),

$$\oint_{S(V)} df' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \equiv 0,$$

erfüllen. Wie im vorangegangenen Abschnitt besprochen, realisieren wir letztere Bedingung durch die Wahl

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') \equiv 0 \quad \forall \vec{r}' \in S(V), \quad (2.60)$$

vgl. Gl. (2.52), also durch das Verschwinden der Greenschen Funktion auf der leitenden Platte und im Unendlichen.

Wir betrachten zunächst die leitende Platte bei $z' = 0$. Wie schon oben diskutiert, kann man den ersten Term in der Greenschen Funktion (2.59) als skalares Potential $\varphi(\vec{r}')$ einer Punktladung der Stärke $Q = 1$ interpretieren, die sich am Punkt $\vec{r} \in V$ befindet. Um die Greensche Funktion bei $z' = 0$ zum Verschwinden zu bringen, wählen wir die Funktion $F_D(\vec{r}, \vec{r}')$ so, dass sie dem skalaren Potential $\varphi_B(\vec{r}')$ einer Punktladung mit **umgekehrter Ladung**, also der Stärke $Q = -1$, entspricht, die sich am Punkt $\vec{r}_B = (x, y, -z)^T$ befindet, also am an der (xy) -Ebene **gespiegelten** Punkt $\vec{r}$:

$$F_D(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{r}'|} . \quad (2.61)$$

Genau dann heben sich das skalare Potential der Ladung $Q = 1$ bei $\vec{r}$ und das der Ladung $Q = -1$ bei $\vec{r}_B$ auf der Platte bei $z' = 0$ gegenseitig auf:

$$\begin{aligned} G_D(\vec{r}; x', y', 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \\ &- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (-z)^2}} \\ &\equiv 0 , \end{aligned}$$

für beliebige $\vec{r} \in V$ und $\vec{r}' \equiv (x', y', 0)^T$, d.h. auf der Platte. Die Bedingung (2.60) ist also auf der Platte ($z' = 0$) erfüllt.

Im Unendlichen $|\vec{r}'| \rightarrow \infty$ verschwindet die Greensche Funktion (2.59) mit der Wahl (2.61) für die Funktion $F_D(\vec{r}, \vec{r}')$ ebenfalls. Also ist die Randbedingung (2.51) erfüllt.

Wir überprüfen noch, dass die durch Gl. (2.61) gegebene Funktion $F_D(\vec{r}, \vec{r}')$ die Laplace-Gleichung in V erfüllt. Wenden wir den Laplace-Operator auf $F_D(\vec{r}, \vec{r}')$ an, so folgt wegen $\partial^2/\partial z^2 \equiv \partial^2/\partial(-z)^2$ und mit Gl. (1.192)

$$\begin{aligned} \Delta_r F_D(\vec{r}, \vec{r}') &\equiv \Delta_{r_B} F_D(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-4\pi) \delta^{(3)}(\vec{r}_B - \vec{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(-z-z') \equiv 0 , \end{aligned}$$

weil $\vec{r}, \vec{r}' \in V$, und daher $z > 0$ **und** $z' > 0$ sind. Damit ist $-z - z'$ in V niemals null und die letzte δ -Funktion verschwindet. Die Funktion $F_D(\vec{r}, \vec{r}')$ erfüllt also in der Tat die Laplace-Gleichung in V .

Die Greensche Funktion (2.59) für dieses Problem lautet also

$$\begin{aligned} G_D(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) . \end{aligned} \quad (2.62)$$

An dieser Form sieht man auch sofort, dass $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ symmetrisch unter der Vertauschung $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$ ist. Man kann daher auch im zweiten Term in Gl. (2.62) $\vec{r}_B$ und $\vec{r}'$ durch $\vec{r}'_B \equiv$

$(x', y', -z')^T$ und $\vec{r}$ ersetzen und erhält die äquivalente Form

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|} \right). \quad (2.63)$$

Die Tatsache, dass man die Randbedingungen für diese Funktion durch Einführen einer an der (xy) -Ebene **gespiegelten** Ladung erfüllt, erklärt den Namen “Methode der Spiegelladungen”.

Um das elektrostatische Problem in V zu lösen, setzen wir die Greensche Funktion (2.63) in Gl. (2.53) ein. Aufgrund der Randbedingungen (2.57) und (2.58) verschwindet der zweite Term und wir erhalten

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_B|} \right). \quad (2.64)$$

Diese Gleichung hat eine einfache Interpretation: das skalare Potential des Randwertproblems ergibt sich durch Addition des durch die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ **innerhalb** von V erzeugten skalaren Potentials und eines skalaren Potentials, das durch eine bei $\vec{r}'_B$, also **außerhalb** von V , angesiedelte **Spiegelladungsverteilung** $-\rho(\vec{r}')$ erzeugt wird. Die Spiegelladungsverteilung hat die gleiche Form, aber umgekehrtes Vorzeichen wie die echte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$, vgl. Abb. 2.11.

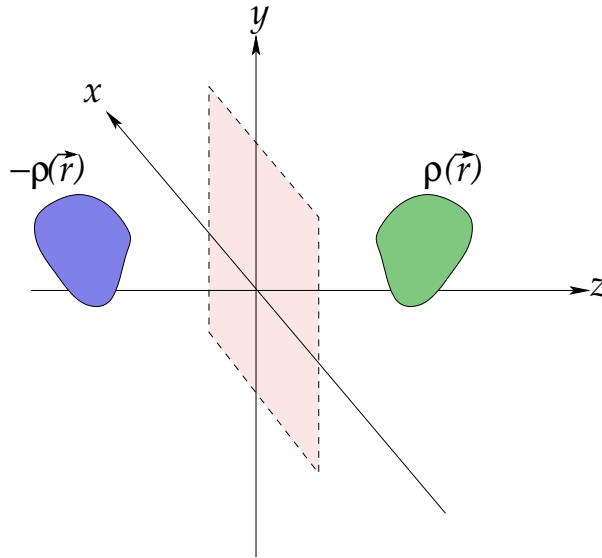


Abbildung 2.11: Zur Methode der Spiegelladungen.

Der Vorteil der Methode der Spiegelladungen ist, dass die Lösung (2.64) des **Randwertproblems** bis auf den Spiegelladungsterm die gleiche Form hat wie die Lösung (2.6) eines elektrostatischen Problems **ohne** Randbedingungen auf der Oberfläche $S(V)$, bzw. mit Randbedingungen im Unendlichen. Der Spiegelladungsterm ist also genau so konstruiert, dass er die Randbedingungen auf $S(V)$ ersetzt.

Beispiel: Punktladung über unendlich ausgedehnter, geerdeter Metallplatte

Diese Situation ist in Abb. 2.12 dargestellt. Das physikalische Randwertproblem, Abb. 2.12(a), wird durch ein Problem mit einer Spiegelladung, Abb. 2.12(b), ersetzt.

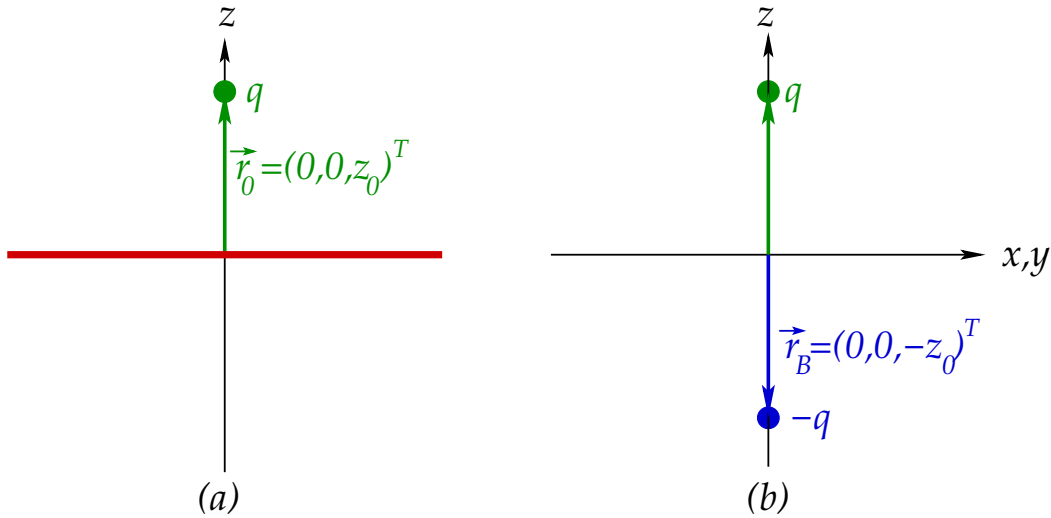


Abbildung 2.12: Punktladung über einer unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatte.

Die Ladungsverteilung in diesem einfachen Beispiel ist durch

$$\rho(\vec{r}') = q \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0)$$

gegeben, wobei $\vec{r}_0 \equiv (0, 0, z_0)^T$ ist; z_0 ist der Abstand der Ladung q von der Metallplatte. Eingesetzt in Gl. (2.64) erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

wobei wir $\vec{r}_B \equiv (0, 0, -z_0)^T$ benutzt haben, vgl. Abb. 2.12(b). Die Methode der Spiegelladungen ersetzt das Randwertproblem einer Punktladung am Ort $\vec{r}_0$ über einer unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatte durch ein Problem mit einer Punktladung bei $\vec{r}_0$ und einer bei $\vec{r}_B$ befindlichen Spiegelladung der Stärke $-q$. Ganz offensichtlich erfüllt das skalare Potential (2.65) die Randbedingungen (2.57) und (2.58).

Das zum skalaren Potential (2.65) gehörende elektrische Feld berechnet sich nach Gl. (2.4) zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x, y, z - z_0)^T}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{(x, y, z + z_0)^T}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} \right]. \quad (2.66)$$

Es steht **senkrecht** auf der Metallplatte,

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x, y, -z_0)^T}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}^3} - \frac{(x, y, z_0)^T}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}^3} \right] \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(0, 0, z_0)^T}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}^3} \equiv -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}^3} \vec{e}^z. \quad (2.67)\end{aligned}$$

Dies erklärt sich sofort daraus, dass die elektrische Feldstärke als Gradient des skalaren Potentials, vgl. Gl. (2.4), stets senkrecht auf einer Äquipotentialfläche (in diesem Fall die Metallplatte mit $\varphi(\vec{r}) \equiv 0$) stehen muss. Der Feldlinienverlauf ist schematisch für $q > 0$ in Abb. 2.13 abgebildet.

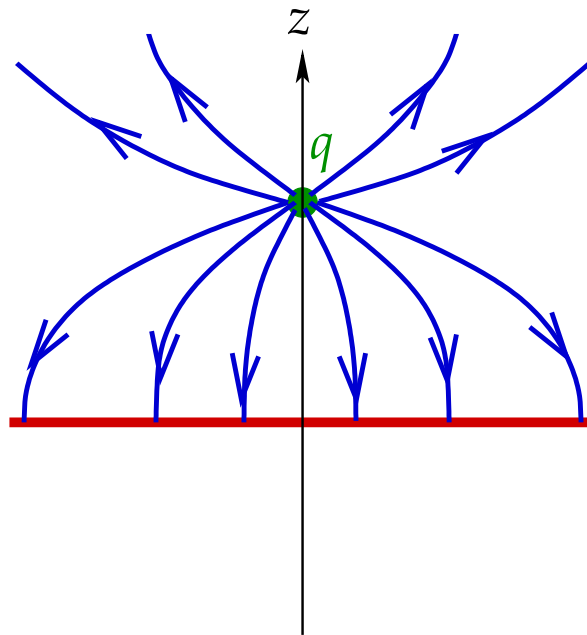


Abbildung 2.13: Feldlinienverlauf einer Punktladung $q > 0$ über einer unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatte.

Feldlinien der elektrischen Feldstärke haben ihren Ursprung stets auf positiven Ladungen $q > 0$ und enden auf negativen Ladungen $q < 0$. Im betrachteten Fall enden die auf der Punktladung entspringenden Feldlinien auf der Metallplatte. Wir erwarten also, dass diese eine **negative** Flächenladungsdichte $\sigma < 0$ trägt. Diese wird durch die Punktladung $q > 0$ über der Platte induziert oder, wie man sagt, **influenziert**. Es handelt sich um eine sog. **Influenzladung**.

Die Influenzladung lässt sich aus der Sprungbedingung (2.32) für die Normalkomponente des elektrischen Feldes bestimmen. Unterhalb der Metallplatte, für $z < 0$, verschwindet das elektrische Feld vollständig. Oberhalb, für $z > 0$, ist es durch Gl. (2.66) gegeben. Da es auf der Platte senkrecht steht, hat es dort lediglich eine Normalkomponente. Die

Sprungbedingung (2.32) impliziert damit eine Flächenladungsdichte

$$\sigma(x, y, 0) = \epsilon_0 E(x, y, 0) = -\frac{q}{2\pi} \frac{z_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}^3}, \quad (2.68)$$

wobei $E(x, y, 0)$ der (negative) Betrag der elektrischen Feldstärke (2.67) auf der Metallplatte ist. Wie erwartet, ist die Flächenladungsdichte **negativ**. Offensichtlich ist die Feldstärke und damit auch die influenzierte Flächenladungsdichte nicht konstant auf der Metallplatte: direkt **unterhalb** der Punktladung ($x = y = 0$) ist ihr Betrag **am größten** und fällt dann mit $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ wie $1/\sqrt{\rho^2 + z_0^2}^3$ ab. Außerdem nimmt ihr Maximum bei $x = y = 0$ mit zunehmendem Abstand z_0 der Punktladung von der Metallplatte wie $1/z_0^2$ ab. Die funktionale Form der Flächenladungsdichte als Funktion von ρ ist in Abb. 2.14 dargestellt.

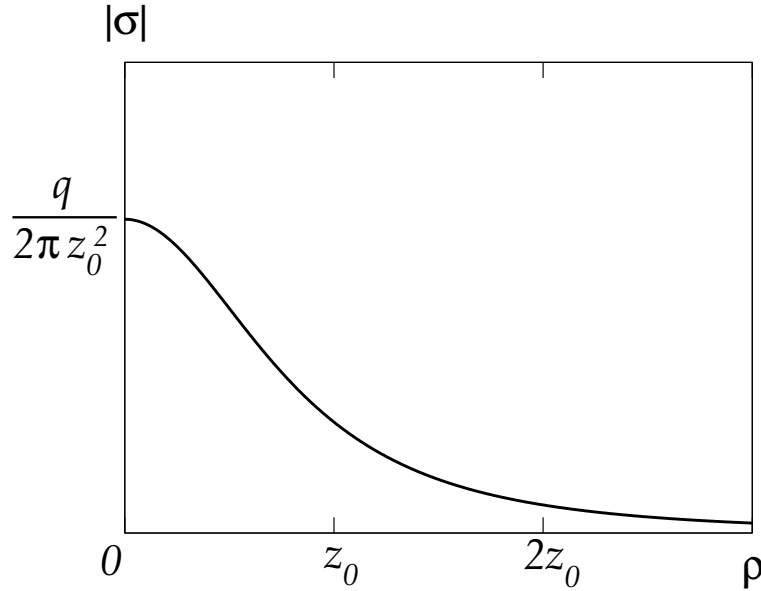


Abbildung 2.14: Betrag der von einer Punktladung q bei $(0, 0, z_0)^T$ auf einer unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatte in der (xy) -Ebene influenzierten Flächenladungsdichte als Funktion des radialen Abstands vom Ursprung.

Die gesamte Influenzladung erhalten wir durch Integration der Flächenladungsdichte über die (xy) -Ebene, wobei wir dabei zweckmäßigerweise Polarkoordinaten verwenden,

$$\begin{aligned} q_{\text{Infl}} &= \int dx dy \sigma(x, y, 0) = -\frac{q z_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty d\rho \rho \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}^3} \\ &= -q z_0 \int_0^\infty d\rho \left(-\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}} \right) = q z_0 \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}} \Big|_0^\infty = -q. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die gesamte Influenzladung auf der Platte ist also identisch mit der Bildladung bei $\vec{r}_B$.

Da die Influenzladung auf der Platte das umgekehrte Vorzeichen wie die Punktladung trägt, besteht eine **anziehende** Kraft zwischen Ladung und Platte, die sog. **Bildkraft**. Um zu berechnen, welche Kraft die Influenzladungsverteilung auf der Metallplatte auf die Punktladung bei $\vec{r}_0$ ausübt, ist es am einfachsten, wenn man ausnutzt, dass die Wirkung der Influenzladung auf der Platte bei $z = 0$ mit der der Bildladung bei $\vec{r}_B$ identisch ist. Dann ist die Bildkraft einfach durch die Coulomb-Kraft zwischen zwei Punktladungen mit Abstand $|\vec{r}_0 - \vec{r}_B| = 2z_0$ gegeben,

$$\vec{F}_B = \frac{q(-q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2z_0)^2} \vec{e}^z = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z_0^2} \vec{e}^z. \quad (2.70)$$

Wie bei entgegengesetzten Ladungen nicht anders zu erwarten, zeigt diese zur Platte hin.

9.1.2024

2.4 Multipolentwicklung

In diesem Abschnitt beleuchten wir die Lösung der Poisson- bzw. der Laplace-Gleichung von einem etwas mathematischeren Blickwinkel. Diese Lösung läßt sich häufig dadurch vereinfachen, dass man die gesuchte Lösungsfunktion zunächst nach einem vollständigen Satz von anderen, bekannten Funktionen entwickelt und dann die Koeffizienten dieser Entwicklung bestimmt. Viele Probleme der Theoretischen Physik weisen eine sphärische Symmetrie auf. Für solche ist ein bestimmtes Funktionensystem, die sog. **Kugelflächenfunktionen**, zur Entwicklung der Lösungsfunktion besonders geeignet. Dies führt dann letztlich zur sog. **Multipolentwicklung**. Die Kugelflächenfunktionen spielen auch bei der Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom in der Quantenmechanik eine tragende Rolle.

2.4.1 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten und Kugelflächenfunktionen

Wie die trigonometrischen Funktionen (1.217) oder die komplexen Exponentialfunktionen (1.220) bilden die Kugelflächenfunktionen ein weiteres vollständiges Funktionensystem, das insbesondere bei Problemen mit Kugelsymmetrie zur Anwendung kommt. Betrachten wir beispielsweise die Laplace-Gleichung (1.107) und schreiben diese in **Kugelkoordinaten**,

$$\Delta\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} \right] \Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0, \quad (2.71)$$

wobei wir Gl. (1.176) der Vorlesung "Theoretische Physik I" benutzt und den Winkelanteil des Laplace-Operators als

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} \equiv \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.72)$$

geschrieben haben. Dann läßt sich die Laplace-Gleichung offenbar in der Form

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r, \vartheta, \varphi) = -\Delta_{\vartheta, \varphi} \Phi(r, \vartheta, \varphi) \quad (2.73)$$

schreiben. Zur Lösung dieser Gleichung machen wir nun einen sog. **Separationsansatz**,

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) \equiv R(r) \Omega(\vartheta, \varphi) , \quad (2.74)$$

wobei die Funktion $R(r)$ der sog. **Radialanteil** der Lösung ist, der lediglich von der Radialvariable r abhängen soll, und $\Omega(\vartheta, \varphi)$ der **Winkelanteil** der Lösung ist, der lediglich von Polar- und Azimutwinkel ϑ und φ abhängen soll. Setzen wir den Separationsansatz (2.74) in Gl. (2.73) ein, so erhalten wir

$$\Omega(\vartheta, \varphi) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) = -R(r) \Delta_{\vartheta, \varphi} \Omega(\vartheta, \varphi) ,$$

wobei wir auf der linken Seite den Anteil der Lösung, der nicht von r abhängt, und auf der rechten Seite den, der nicht von ϑ, φ abhängt, vor den jeweiligen Differentialoperator gezogen haben. Da die Funktion $R(r)$ lediglich von einer Variable abhängt, können die partiellen Ableitungen durch gewöhnliche ersetzt werden. Nach Division durch $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Omega(\vartheta, \varphi) (\neq 0)$, da wir nach nichttrivialen Lösungen $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ der Laplace-Gleichung suchen) erhalten wir

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) = -\frac{1}{\Omega(\vartheta, \varphi)} \Delta_{\vartheta, \varphi} \Omega(\vartheta, \varphi) . \quad (2.75)$$

Wir erkennen nun den Vorteil des Separationsansatzes: die linke Seite dieser Gleichung hängt **ausschließlich** von r und die rechte **ausschließlich** von ϑ, φ ab. Damit linke und rechte Seite für **beliebige** r, ϑ, φ identisch sind, **müssen** sie **konstant** sein, also

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) = C \iff \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) = C R(r) , \quad (2.76)$$

und

$$\frac{1}{\Omega(\vartheta, \varphi)} \Delta_{\vartheta, \varphi} \Omega(\vartheta, \varphi) = -C \iff \Delta_{\vartheta, \varphi} \Omega(\vartheta, \varphi) = -C \Omega(\vartheta, \varphi) , \quad (2.77)$$

mit **derselben** Konstanten C . Wir betrachten zunächst Gl. (2.77) und machen einen **weiteren** Separationsansatz,

$$\Omega(\vartheta, \varphi) \equiv \Theta(\vartheta) Z(\varphi) , \quad (2.78)$$

um die ϑ - von der φ -Abhängigkeit zu trennen,

$$\begin{aligned} Z(\varphi) \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + C \right] \Theta(\vartheta) &= -\Theta(\vartheta) \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2}{d\varphi^2} Z(\varphi) \\ \iff \frac{1}{\Theta(\vartheta)} \left[\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + C \sin^2 \vartheta \right] \Theta(\vartheta) &= -\frac{1}{Z(\varphi)} \frac{d^2}{d\varphi^2} Z(\varphi) \equiv D , \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $D \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist identisch mit

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} Z(\varphi) + D Z(\varphi) = 0 , \quad (2.79)$$

d.h. der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators. Die Lösung dieser Bewegungsgleichung ist bekannt, $Z(\varphi) \sim e^{\pm i\sqrt{D}\varphi}$, allerdings ist die Konstante D nicht festgelegt.

Zur Konstruktion der allgemeinen Lösung müßte man im Prinzip über alle möglichen Werte von $D \in \mathbb{R}$ integrieren, $Z(\varphi) \sim \int dD z(D) e^{i\sqrt{D}\varphi}$, mit einer noch zu bestimmenden Koeffizientenfunktion $z(D)$. Dies ist hier aber nicht notwendig, da der Winkel φ auf dem **kompakten** Intervall $[0, 2\pi]$ definiert ist. Daher greift all das im Abschnitt 1.7.2 Gesagte über auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ vollständige Funktionensysteme. Die allgemeine Lösung von Gl. (2.79) kann wie in Gl. (1.213) als Entwicklung nach einem vollständigen Funktionensystem angegeben werden. Für das Intervall $[0, 2\pi]$ (das äquivalent zum Intervall $[-\pi, \pi]$ ist) bieten sich die Basisfunktionen (1.220) an. Die **allgemeine** Lösung von Gl. (2.79) hat dementsprechend die Form

$$Z(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m e^{im\varphi}, \quad (2.80)$$

sie ist also eine Linearkombination der Funktionen $\tilde{U}_m(x)$ aus Gl. (1.220) mit **diskreten** Werten $m \in \mathbb{Z}$. Für eine **spezielle** Lösung von Gl. (2.79) genügt es, den Wert der Konstanten $D = m^2$ zu setzen. Wir werden später, wenn wir die **allgemeine** Lösung von Gl. (2.77) konstruieren, über alle Werte von m summieren.

Da auch der Winkel ϑ auf einem endlichen Intervall, nämlich $[0, \pi]$, definiert ist, läßt sich auch die Lösung der Differentialgleichung (2.77) nach einem vollständigen Funktionensystem entwickeln. Auch hier nimmt die Konstante $C \in \mathbb{R}$ nicht kontinuierliche Werte, sondern lediglich die **diskreten** Werte $C \equiv \ell(\ell + 1)$ mit $\ell = 0, 1, 2, \dots$ an. (Warum es genau diese diskreten Werte sind, werden wir im Detail erst in einer späteren Vorlesung klären können.)

Mit $D \equiv m^2$ und $C \equiv \ell(\ell + 1)$ sucht man also zunächst die Lösungen der Differentialgleichung

$$\left[\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right) + \ell(\ell + 1) \sin^2 \vartheta - m^2 \right] \Theta(\vartheta) = 0.$$

Man erkennt, dass diese Gleichung nach Substitution $x = \cos \vartheta$, so dass

$$\frac{d}{d\vartheta} \equiv -\sin \vartheta \frac{d}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx},$$

und mit $\Theta(\vartheta) \equiv P(x)$ in die sog. **verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung** übergeht,

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right] P(x) + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0. \quad (2.81)$$

Weil $\vartheta \in [0, \pi]$, ist $x \in [-1, 1]$. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind die **zugeordneten Legendre-Polynome**,

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x), \quad (2.82)$$

wobei $m \geq 0$ und

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad (2.83)$$

die sog. **Legendre-Polynome** sind. Sie sind Lösungen der **gewöhnlichen Legendreschen Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right] P(x) + \ell(\ell+1)P(x) = 0, \quad (2.84)$$

also der verallgemeinerten Legendreschen Differentialgleichung für den Fall $m = 0$.

Man überzeugt sich durch explizites Berechnen, dass die Legendre-Polynome $P_\ell(x)$ Polynome vom Grad ℓ in x sind, d.h. x^ℓ ist die höchste auftretende Potenz von x . Explizit lauten die ersten Legendre-Polynome

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots \end{aligned}$$

Bei den zugeordneten Legendre-Polynomen (2.82) wird die höchste Potenz ℓ durch die m -te Ableitung um m reduziert, $P_\ell^m(x)$ ist also ein Polynom der Ordnung $\ell - m$. Es ist daher klar, dass m höchstens den Wert ℓ annehmen kann, ansonsten leitet man eine Konstante ab, was null ergibt. Neben den Polynomen zu positivem m gibt es auch solche zu negativem m , die gemäß

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x)$$

mit denen mit positivem m verknüpft sind. Daher durchläuft m die Werte

$$m = -\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell. \quad (2.85)$$

Die Legendre-Polynome und die zugeordneten Legendre-Polynome erfüllen die **Orthogonalitätsrelationen**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_k(x) &= \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell k}, \\ \int_{-1}^1 dx P_\ell^m(x) P_k^m(x) &= \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \delta_{\ell k}, \end{aligned}$$

sie sind also ursprünglich nicht normiert, was man aber durch Hinzunahme entsprechender Faktoren erreichen kann. Die Legendre-Polynome bilden darüberhinaus auf dem Intervall $[-1, 1]$ ein **vollständiges Funktionensystem** mit der **Vollständigkeitsrelation**

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) P_\ell(x) P_\ell(y) = \delta(x - y).$$

Wir kommen nun zur **allgemeinen** Lösung der Differentialgleichung (2.77). Setzen wir die gerade besprochenen Ergebnisse in den Separationsansatz (2.78) ein, so muss eine **spezielle** Lösung zu gegebenem ℓ, m die Form

$$\Omega(\vartheta, \varphi) \sim P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

haben. Die **normierten** speziellen Lösungen heißen **Kugelflächenfunktionen**,

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} . \quad (2.86)$$

Die Kugelflächenfunktionen für negative m sind mit denen für positive m über die Relation

$$Y_{\ell, -m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \quad (2.87)$$

verknüpft. Die Kugelflächenfunktionen zu niedrigem ℓ , m lauten explizit

$$\begin{aligned} Y_{00}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , \\ Y_{11}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} , \\ Y_{10}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta , \\ Y_{22}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} , \\ Y_{21}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} , \\ Y_{20}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1) . \end{aligned} \quad (2.88)$$

Für $Y_{1,-1}$, $Y_{2,-2}$, $Y_{2,-1}$ benutze man Gl. (2.87). Die Kugelflächenfunktionen bilden ein **vollständiges Funktionensystem** auf der **Einheitskugel** $0 \leq \vartheta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Die **Orthonormalitätsrelation** lautet

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{\ell' m'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m} , \quad (2.89)$$

und die **Vollständigkeitsrelation** ist

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') . \quad (2.90)$$

Für spätere Zwecke geben wir noch das **Additionstheorem**

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\cos \alpha) \quad (2.91)$$

an, wobei α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}' = r'(\cos \varphi' \sin \vartheta', \sin \varphi' \sin \vartheta', \cos \vartheta')^T$ und $\vec{r} = r(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^T$ ist, d.h. mit $\cos x \cos y + \sin x \sin y \equiv \cos(x-y)$,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r' r} = \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta' \cos \vartheta . \quad (2.92)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind spezielle Lösungen der Differentialgleichung (2.77),

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) . \quad (2.93)$$

Diese Gleichung hat die Form einer **Eigenwertgleichung**. Man sagt, die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$ sind **Eigenfunktionen** des Differentialoperators $\Delta_{\vartheta,\varphi}$ zum **Eigenwert** $-\ell(\ell+1)$. Da m alle $2\ell+1$ Werte in den Grenzen (2.85) annehmen kann, ohne an dieser Gleichung etwas zu ändern, ist der Eigenwert $-\ell(\ell+1)$ genau $(2\ell+1)$ -fach **entartet**.

Für die allgemeine Lösung von Gl. (2.77) müssen wir noch über alle ℓ und, zu gegebenem ℓ , über m in den Grenzen (2.85) summieren,

$$\Omega(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \omega_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) . \quad (2.94)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\omega_{\ell m}$ berechnet man gemäß

$$\omega_{\ell m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \Omega(\vartheta, \varphi) . \quad (2.95)$$

Wir sind nun in der Lage, die **allgemeine Lösung** der Laplace-Gleichung (2.71) in Form einer **Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen** anzugeben. Der Separationsansatz (2.74) zusammen mit Gl. (2.94) liefert

$$\begin{aligned} \Phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Omega(\vartheta, \varphi) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} R(r) \omega_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \\ &\equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} R_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) , \end{aligned} \quad (2.96)$$

wobei wir $R_{\ell m}(r) \equiv R(r) \omega_{\ell m}$ definiert haben. Gleichung (2.96) wird auch als **Entwicklungssatz** bezeichnet. Die Koeffizienten $R_{\ell m}(r)$ berechnet man aufgrund von Gl. (2.95) gemäß

$$R_{\ell m}(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \Phi(r, \vartheta, \varphi) . \quad (2.97)$$

12.1.2024

Die Funktion $R(r)$ in Gl. (2.96) kann noch näher festgelegt werden, wenn man die **Radialgleichung** (2.76) löst. Diese lautet mit $C = \ell(\ell+1)$

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0 . \quad (2.98)$$

Diese Differentialgleichung kann vereinfacht werden, indem wir

$$R(r) = \frac{1}{r} u(r)$$

substituieren. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \frac{u(r)}{r} &= \frac{d}{dr} \left[r \frac{du(r)}{dr} - u(r) \right] = \frac{du(r)}{dr} + r \frac{d^2 u(r)}{dr^2} - \frac{du(r)}{dr} \\ &\equiv r \frac{d^2 u(r)}{dr^2} \end{aligned}$$

Die Funktion $u(r)$ erfüllt dann die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u(r) = 0. \quad (2.99)$$

Wir suchen also eine Funktion von r , die bei zweimaligem Ableiten bis auf einen Faktor $\ell(\ell+1)$ um zwei Potenzen von r reduziert wird. Letzteres ist eine Eigenschaft der Potenzfunktion, wir machen also den **Potenzansatz**

$$u(r) \sim r^\beta.$$

Eingesetzt in Gl. (2.99) ergibt sich

$$\beta(\beta-1)r^{\beta-2} = \ell(\ell+1)r^{\beta-2},$$

d.h.

$$\beta^2 - \beta - \ell(\ell+1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \ell(\ell+1)} = \frac{1}{2} \pm \left(\ell + \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} \ell+1 \\ -\ell \end{cases}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.99) lautet also

$$u(r) = A r^{\ell+1} + B r^{-\ell},$$

und damit lautet die allgemeine Lösung der Radialgleichung (2.98)

$$R(r) = A r^\ell + B r^{-(\ell+1)}.$$

Also lautet die **allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung** in Kugelkoordinaten als **Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen**

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-(\ell+1)}) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad (2.100)$$

wobei wir $A_{\ell m} \equiv A \omega_{\ell m}$, $B_{\ell m} \equiv B \omega_{\ell m}$ definiert haben.

2.4.2 Multipolentwicklung

Ohne Angabe spezieller Randbedingungen lautet das skalare Potential $\Phi(\vec{r})$, das von einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ erzeugt wird, vgl. Gl. (2.6),

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.101)$$

Diese Lösung kann man ebenfalls nach Kugelflächenfunktionen zerlegen. Dazu machen wir folgende Zwischenbetrachtung. Den Betrag des längeren der beiden Vektoren $\vec{r}$, $\vec{r}'$ bezeichnen wir mit $r_>$ und den Betrag des kürzeren mit $r_<$. Den Winkel zwischen den beiden Vektoren bezeichnen wir mit α , so dass Gl. (2.92) gilt. Dann kann man die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ in eine Potenzreihe nach $r_</r_>$ entwickeln,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2 r r' \cos \alpha + r'^2}} = \frac{1}{r_> \sqrt{1 - 2 \frac{r_<}{r_>} \cos \alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{r_>} \left\{ 1 + \frac{r_<}{r_>} \cos \alpha + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \alpha - 1) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 + O \left[\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^3 \right] \right\} \\ &\equiv \frac{1}{r_>} \left[P_0 + P_1(\cos \alpha) \frac{r_<}{r_>} + P_2(\cos \alpha) \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 + \dots \right] \\ &\equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos \alpha) . \end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass die Entwicklungskoeffizienten dieser Potenzreihe gerade die **Legendre-Polynome** (2.83) sind. Benutzen wir nun noch das Additionstheorem (2.91), so gilt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) . \quad (2.102)$$

Eingesetzt in Gl. (2.101) ergibt sich

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') . \quad (2.103)$$

Nehmen wir an, dass die Ladungsverteilung räumlich begrenzt ist und jeder ihrer Punkte $\vec{r}'$ näher am Ursprung liegt als der Punkt $\vec{r}$, an dem wir das Potential berechnen. Dies entspricht der Betrachtung der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ **aus der Ferne**, vgl. Abb. 2.15.

Dann ist immer $|\vec{r}| = r \equiv r_>$ und $|\vec{r}'| = r' \equiv r_<$ und wir können Gl. (2.103) weiter vereinfachen,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) , \quad (2.104)$$

wobei die Koeffizienten

$$q_{\ell m} \equiv \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r'^\ell Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') , \quad \text{bzw.} \quad q_{\ell m}^* \equiv \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r'^\ell Y_{\ell m}(\vartheta', \varphi') \quad (2.105)$$

die sog. **sphärischen Multipolmomente** der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ sind. Gemäß seiner Definition stellt $q_{\ell m}$ den mit r'^ℓ gewichteten **Anteil** der Kugelflächenfunktion $Y_{\ell m}^*$ an der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ dar. Gleichung (2.104) ist die gesuchte Entwicklung des skalaren Potentials nach Kugelflächenfunktionen, mit den sphärischen Multipolmomenten

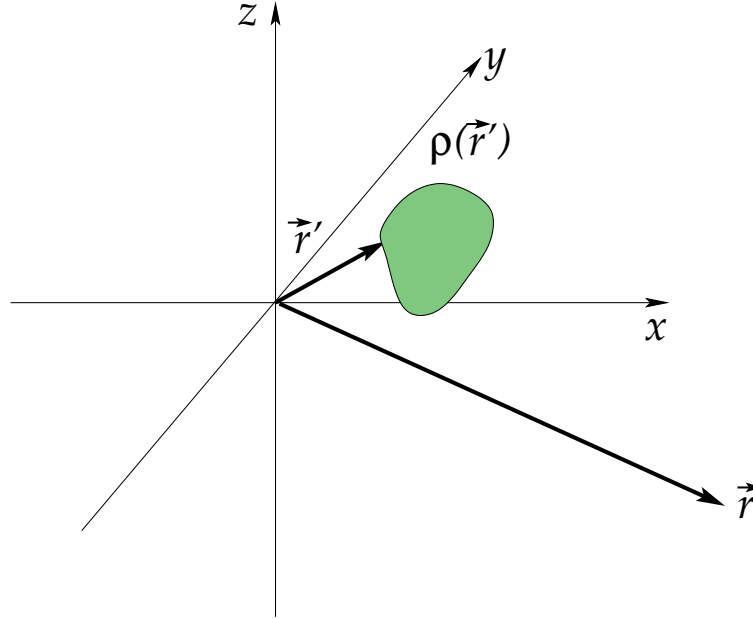


Abbildung 2.15: Eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$, die man bei $\vec{r}$ betrachtet, mit $|\vec{r}| > |\vec{r}'| \forall \vec{r}'$, die zur Ladungsverteilung gehören.

(dividiert durch $\epsilon_0(2\ell + 1)r^{\ell+1}$) als Entwicklungskoeffizienten. Aufgrund von Gl. (2.87) gilt

$$q_{\ell m}^* = (-1)^m q_{\ell, -m}, \quad (2.106)$$

man braucht für gegebenes ℓ also nicht $2\ell + 1$ verschiedene Multipolmomente zu berechnen, sondern lediglich $\ell + 1$ (die zu negativem m erhält aus denen zu positivem m durch komplexes Konjugieren).

Wir berechnen die ersten Multipolmomente:

1. Monopolmoment, $\ell = m = 0$.

Mit Gl. (2.88) gilt

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \equiv \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}. \quad (2.107)$$

Das Monopolmoment ist also bis auf einen Faktor $1/\sqrt{4\pi}$ mit der Gesamtladung Q der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ identisch.

2. Dipolmoment, $\ell = 1, m = 0, \pm 1$.

Mit Gl. (2.88) gilt

$$\begin{aligned} q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r' \cos \vartheta' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') z' \equiv \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p^z, \\ q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r' \sin \vartheta' e^{-i\varphi'} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') (x' - iy') \\ &\equiv -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p^x - ip^y) = -q_{1,-1}^*, \end{aligned} \quad (2.108)$$

wobei wir das **kartesische Dipolmoment**

$$\vec{p} \equiv \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \quad (2.109)$$

definiert haben.

3. Quadrupolmoment, $\ell = 2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

Mit Gl. (2.88) gilt

$$\begin{aligned} q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r'^2 (3 \cos^2 \vartheta' - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') (3 z'^2 - r'^2) \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33} , \\ q_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r'^2 \sin \vartheta' \cos \vartheta' e^{-i\varphi'} \\ &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') z' (x' - iy') \equiv -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - i Q_{23}) \equiv -q_{2,-1}^* , \\ q_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') r'^2 \sin^2 \vartheta' e^{-2i\varphi'} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') (x' - iy')^2 \\ &\equiv \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2i Q_{12} - Q_{22}) \equiv q_{2,-2}^* , \end{aligned} \quad (2.110)$$

wobei wir das **kartesische Quadrupolmoment**

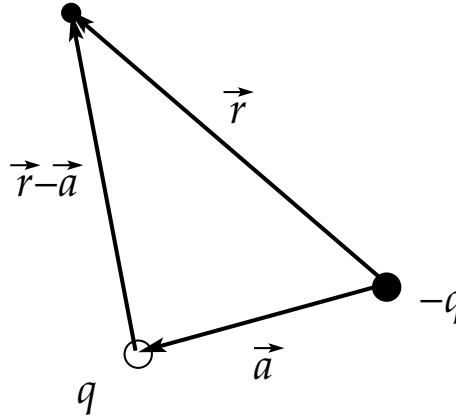
$$Q_{ij} \equiv \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') (3 x'^i x'^j - r'^2 \delta^{ij}) \quad (2.111)$$

definiert haben. Man beachte, dass

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \left[3 \sum_{i=1}^3 (x'^i)^2 - r'^2 \sum_{i=1}^3 1 \right] = 0 . \quad (2.112)$$

Wir setzen die Ergebnisse (2.107), (2.108) und (2.110) für die niedrigsten Multipole in Gl. (2.104) ein und erhalten mit Gl. (2.88), sowie $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$ und der Identität (2.112) nach längerer Rechnung (die wir als Übungsaufgabe stellen)

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{q_{00}}{r} Y_{00}(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{3r^2} [q_{11} Y_{11}(\vartheta, \varphi) + q_{10} Y_{10}(\vartheta, \varphi) + q_{11}^* Y_{11}^*(\vartheta, \varphi)] \right. \\ &\quad + \frac{1}{5r^3} [q_{22} Y_{22}(\vartheta, \varphi) + q_{21} Y_{21}(\vartheta, \varphi) + q_{20} Y_{20}(\vartheta, \varphi) + q_{21}^* Y_{21}^*(\vartheta, \varphi) + q_{22}^* Y_{22}^*(\vartheta, \varphi)] \\ &\quad \left. + O(r^{-4}) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots \right) . \end{aligned} \quad (2.113)$$

Abbildung 2.16: Zwei entgegengesetzt geladene Punktladungen im Abstand a .

Diese Gleichung kann man wie folgt interpretieren. Für sehr große Abstände dominiert der **Monopolterm** (da er am langsamsten mit $r \rightarrow \infty$ abfällt). Die ausgedehnte Ladungsverteilung erscheint wie eine **Punktladung** der Stärke Q . Dieses Ergebnis hatten wir schon früher erhalten, vgl. Diskussion zu Gl. (2.40). Falls die Gesamtladung der Ladungsverteilung jedoch **verschwindet**, $Q \equiv 0$, dann stammt der dominante Beitrag zum skalaren Potential bei großen Abständen vom **Dipolterm**. Falls auch das Dipolmoment $\vec{p} \equiv 0$ ist, dann ist der dominante Beitrag der des **Quadrupolterms**.

Beispiel: Dipolfeld

Wir betrachten zwei im Abstand a befindliche Punktladungen mit entgegengesetzter Ladung, vgl. Abb. 2.16. Die Ladungsverteilung ist

$$\rho(\vec{r}') = q \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - q \delta^{(3)}(\vec{r}') .$$

Damit verschwindet die Gesamtladung,

$$Q = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') = q \int d^3\vec{r}' [\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - \delta^{(3)}(\vec{r}')] \equiv 0 ,$$

solange sowohl der Ursprung als auch der Punkt $\vec{a}$ im Integrationsbereich liegen. Das kartesische Dipolmoment (2.109) dagegen ist

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = q \int d^3\vec{r}' \vec{r}' [\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - \delta^{(3)}(\vec{r}')] \equiv q \vec{a} .$$

Die Ladungsverteilung hat auch ein kartesisches Quadrupolmoment,

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int d^3\vec{r}' (3x'^i x'^j - r'^2 \delta^{ij}) \rho(\vec{r}') \\ &= q \int d^3\vec{r}' (3x'^i x'^j - r'^2 \delta^{ij}) [\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - \delta^{(3)}(\vec{r}')] \\ &= q (3a^i a^j - a^2 \delta^{ij}) . \end{aligned}$$

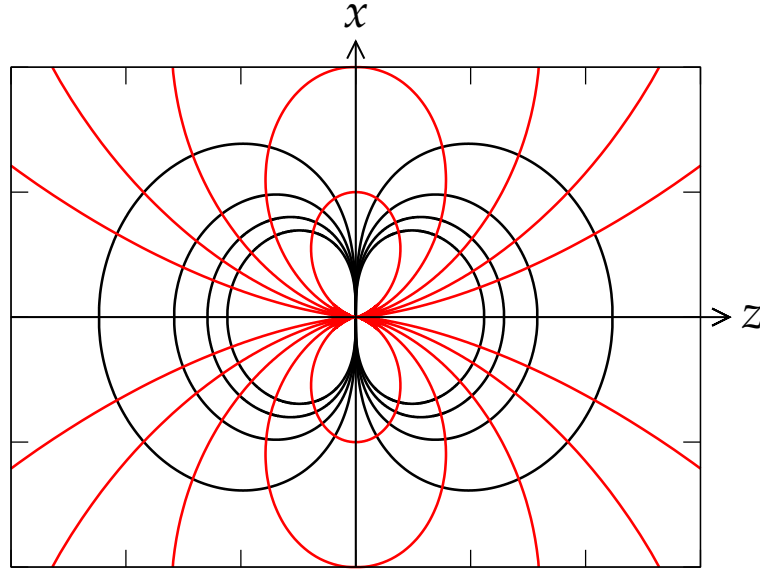


Abbildung 2.17: Äquipotentialflächen (schwarz) und elektrische Feldlinien (rot) für ein Dipolfeld in der (zx) -Ebene. Der Dipol zeigt in Richtung der z -Achse.

Das skalare Potential (2.113) in der Multipolentwicklung lautet also

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (3a^i a^j - a^2 \delta^{ij}) \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 - a^2 r^2}{2r^5} + \dots \right].\end{aligned}$$

Für große Abstände, $|\vec{r}| \gg |\vec{a}|$, dominiert der Dipolterm,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \left[1 + O\left(\frac{a}{r}\right) \right] \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Die Äquipotentialflächen eines Dipolfelds für ein Dipolmoment $\vec{p} = qa\vec{e}^z$ sind in Abb. 2.17 gezeigt. Das elektrische Feld eines Dipols berechnet sich zu

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{a}}{r^3} \right]. \quad (2.114)$$

Der Feldlinienverlauf ist ebenfalls in Abb. 2.17 dargestellt.

Beispiel: Quadrupolfeld

Wir betrachten drei Ladungen, die entlang einer Geraden im Abstand a aufgereiht sind, vgl. Abb. 2.18. Die beiden äußeren Ladungen seien vom Betrag q , während die mittlere vom Betrag $-2q$ ist. Die Ladungsverteilung ist

$$\rho(\vec{r}') = q \left[\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - 2\delta^{(3)}(\vec{r}') + \delta^{(3)}(\vec{r}' + \vec{a}) \right].$$

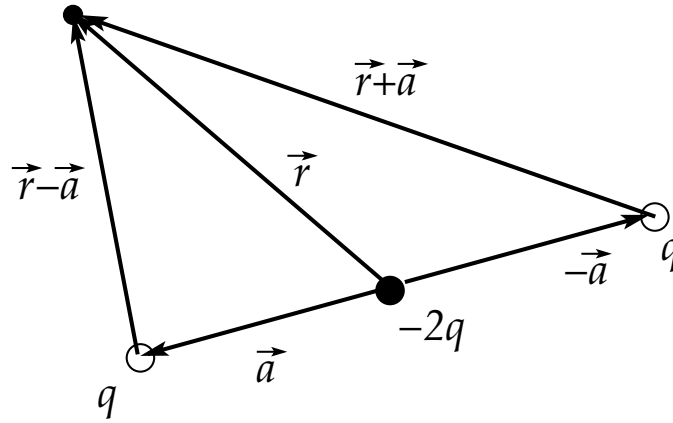


Abbildung 2.18: Drei Ladungen entlang einer Geraden.

Damit verschwindet die Gesamtladung,

$$Q = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') = q \int d^3\vec{r}' [\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - 2\delta^{(3)}(\vec{r}') + \delta^{(3)}(\vec{r}' + \vec{a})] \equiv 0 ,$$

solange sowohl der Ursprung als auch die Punkte $\pm\vec{a}$ im Integrationsbereich liegen. Das kartesische Dipolmoment (2.109) verschwindet ebenfalls,

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = q \int d^3\vec{r}' \vec{r}' [\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - 2\delta^{(3)}(\vec{r}') + \delta^{(3)}(\vec{r}' + \vec{a})] \\ &= q(\vec{a} - 2\vec{0} - \vec{a}) \equiv 0 . \end{aligned}$$

Die Ladungsverteilung hat aber ein kartesisches Quadrupolmoment,

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int d^3\vec{r}' (3x'^i x'^j - r'^2 \delta^{ij}) \rho(\vec{r}') \\ &= q \int d^3\vec{r}' (3x'^i x'^j - r'^2 \delta^{ij}) [\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) - 2\delta^{(3)}(\vec{r}') + \delta^{(3)}(\vec{r}' + \vec{a})] \\ &= 2q(3a^i a^j - a^2 \delta^{ij}) . \end{aligned}$$

Das skalare Potential (2.113) in der Multipolentwicklung lautet also

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (3a^i a^j - a^2 \delta^{ij}) \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots \right] \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 - a^2 r^2}{r^5} , \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Näherung für große Abstände, $|\vec{r}| \gg |\vec{a}|$, gemacht haben,

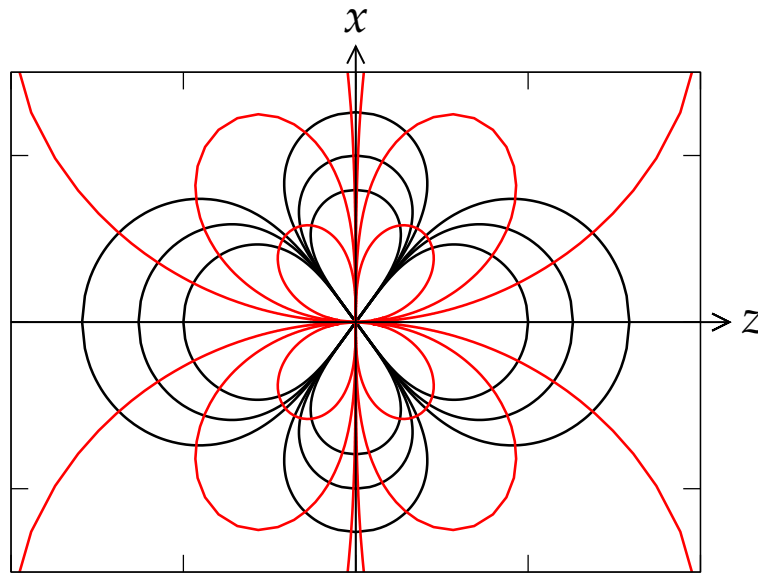


Abbildung 2.19: Äquipotentialflächen (schwarz) und elektrische Feldlinien (rot) für ein Quadrupolfeld in der (zx) -Ebene. Die Ladungen des Quadrupols sind entlang der z -Achse aufgereiht.

wo der Quadrupolterm dominiert. Das zugehörige elektrische Feld ist

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &\simeq -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 - a^2 r^2}{r^5} \\ &= \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{5(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 - a^2 r^2}{r^7} \vec{r} - 2 \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{a} \right].\end{aligned}$$

Die Äquipotentialflächen und die elektrischen Feldlinien des Quadrupolfelds sind für $\vec{a} = a \vec{e}^z$ in Abb. 2.19 dargestellt.

3 Magnetostatik

16.1.2024

In diesem Kapitel diskutieren wir die **Magnetostatik**. Die Magnetostatik geht über die Elektrostatik hinaus, indem sie jetzt zusätzlich zu einer nichtverschwindenden, aber zeitunabhängigen Ladungsdichte,

$$\rho(t, \vec{r}) \equiv \rho(\vec{r}) \neq 0, \quad (3.1)$$

auch eine **nichtverschwindende, zeitunabhängige Ladungsstromdichte** zulässt,

$$\vec{j}(t, \vec{r}) \equiv \vec{j}(\vec{r}) \neq 0. \quad (3.2)$$

Diese Bedingung ist weniger restriktiv als die in der Elektrostatik geforderte Gl. (2.1), bei der die Ladungsstromdichte nicht nur zeitunabhängig, sondern gleich null sein sollte.

Wie aus der Diskussion der Maxwell-Gleichung (1.84) zu erwarten, induziert eine nichtverschwindende Ladungsstromdichte ein nichtverschwindendes **magnetisches Induktionsfeld**,

$$\vec{B}(t, \vec{r}) \equiv \vec{B}(\vec{r}) \neq 0, \quad (3.3)$$

das ebenfalls **zeitunabhängig ist**. Nach wie vor induziert die Ladungsdichte (3.1) ein zeitunabhängiges elektrisches Feld,

$$\vec{E}(t, \vec{r}) \equiv \vec{E}(\vec{r}) \neq 0. \quad (3.4)$$

Es verschwinden also wie in der Elektrostatik alle Zeitableitungen, $\partial \vec{E} / \partial t = \partial \vec{B} / \partial t \equiv 0$.

3.1 Grundgleichungen der Magnetostatik

3.1.1 Gesetz von Biot-Savart

Die Grundgleichungen der Magnetostatik folgen aus den Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84), (1.85) und (1.86) durch Anwendung der Bedingungen (3.1) – (3.4),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (3.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (3.8)$$

Wir machen drei wesentliche Beobachtungen:

- (i) Die Gleichungen (3.5) und (3.8) für das elektrische Feld $\vec{E}$ und die Gleichungen (3.6) und (3.7) für das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ **entkoppeln** voneinander. Man kann also $\vec{E}$ und $\vec{B}$ **separat** betrachten.

- (ii) Die Gleichungen (3.5) und (3.8) sind identisch mit den Grundgleichungen (2.2) und (2.3) der Elektrostatik. Zur Berechnung des elektrischen Feldes kann man also die Methoden aus dem vorangegangenen Kapitel anwenden. Das elektrische Feld muss daher im Folgenden nicht weiter betrachtet werden.
- (iii) Wegen der Entkopplung (i) von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ genügt es, sich für die Berechnung von $\vec{B}$ auf die Glgen. (3.6) und (3.7) zu beschränken. Gemäß Gl. (3.6) erzeugt eine Ladungsstromdichte $\vec{j}$ ein **Wirbelfeld** des magnetischen Induktionsfelds. Andererseits besagt Gl. (3.7), dass das magnetische Induktionsfeld **kein Quellenfeld** besitzt.

Die Beobachtung (iii) läßt sich mit dem **Helmholtzschen Zerlegungssatz** (1.198) folgendermaßen interpretieren. Der Zerlegungssatz besagt, dass

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_\ell(\vec{r}) + \vec{B}_t(\vec{r}) , \quad (3.9)$$

mit

$$\vec{B}_\ell(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) , \quad (3.10)$$

$$\vec{B}_t(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \times \left(\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) . \quad (3.11)$$

Setzen wir Gl. (3.7) unter dem Integral in Gl. (3.10) ein, so erkennen wir, dass $\vec{B}_\ell(\vec{r}) \equiv 0$. Das magnetische Induktionsfeld hat also lediglich eine transversale Komponente,

$$\vec{B}(\vec{r}) \equiv \vec{B}_t(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) , \quad (3.12)$$

wobei wir Gl. (3.6) unter dem Integral in Gl. (3.11) eingesetzt haben. Aus dieser Gleichung liest man mit Hilfe der Relation

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} ,$$

vgl. Gl. (1.45), sofort das **3-Vektorpotential** ab,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (3.13)$$

Dieses Resultat kann man auch aus Gl. (3.6) erhalten. Man setze dort $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ein, benutze die Identität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ sowie die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, was zu der Bewegungsgleichung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.14)$$

führt. Diese löst man auf analoge Weise wie die Poisson-Gleichung (2.5) in Abschnitt 2.1.2. Das Vektorpotential (3.13) ist damit das Analogon zur Lösung $\varphi(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung der Elektrostatik für eine vorgegebene Ladungsdichte ρ ,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (3.15)$$

wie man durch Vergleich der Glgen. (3.13) und (3.15) sehr schön sieht. Mit Hilfe der Identität

$$\vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{a} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.16)$$

läßt sich der Ausdruck (3.12) für das magnetische Induktionsfeld weiter vereinfachen, wenn wir den Nabla-Operator $\vec{\nabla}_r$ unter das Integral ziehen und beachten, dass $\vec{j}(\vec{r}')$ für diesen Operator wie ein konstanter Vektor $\vec{a}$ wirkt,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (3.17)$$

Dies ist das sog. **Gesetz von Biot-Savart**. Es stellt für eine vorgegebene Ladungsstromdichte $\vec{j}$ bereits die Lösung des magnetostatischen Problems dar. Genau wie das Vektorpotential (3.13) das Analogon zum skalaren Potential (3.15) darstellt, so ist das Gesetz von Biot-Savart für das magnetische Induktionsfeld das Analogon zur elektrischen Feldstärke, die aus Gl. (3.15) folgt,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_r \varphi(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei wir von der Identität

$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (3.19)$$

vgl. Gl. (2.12), Gebrauch gemacht haben. Die Analogie zwischen $\vec{B}$ und $\vec{E}$ wird durch Vergleich der beiden Ausdrücke (3.17) und (3.18) unmittelbar ersichtlich.

Beispiel: Magnetisches Induktionsfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Wir betrachten einen unendlich langen, und in erster Näherung unendlich dünnen, stromdurchflossenen Leiter entlang der z -Achse. Die Ladungsstromdichte ist

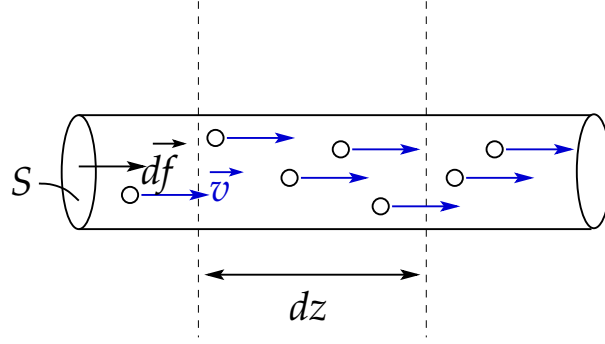
$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) = \kappa \delta(x) \delta(y) v \vec{e}^z, \quad (3.20)$$

wobei κ die (konstante) Ladungsdichte pro Längeneinheit, vgl. Gl. (2.18), und $\vec{v}(\vec{r}) \equiv v \vec{e}^z$ die (konstante) Geschwindigkeit der Ladungsträger ist. Das Produkt $\kappa v \equiv I$ ist der **Strom** der Ladungen, die durch den Leiter fließen. Dies folgt aus der Definition (1.183) des elektrischen Stroms, für den wir mit der Stromdichte (3.20) erhalten

$$I = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j} = \kappa v \int_S dx dy \delta(x) \delta(y) \equiv \kappa v, \quad (3.21)$$

vgl. Abb. 3.1. Aus Abb. 3.1 können wir eine alternative Definition des Stromes ablesen. Die Ladungsdichte pro Längeneinheit entspricht der **Zahl der Ladungsträger** dQ pro Längeneinheit dz ,

$$\kappa \equiv \frac{dQ}{dz},$$


Abbildung 3.1: Zur Definition des elektrischen Stroms I .

also ist

$$I = \kappa v = \frac{dQ}{dz} \frac{dz}{dt} \equiv \frac{dQ}{dt}, \quad (3.22)$$

der elektrische Strom ist die pro Zeiteinheit dt durch den Leiter fließende Ladung dQ . Eine dritte Definition erhalten wir aus Gl. (3.21), wenn wir annehmen, dass die Stromdichte $\vec{j}$ über die Querschnittsfläche S des Leiters konstant ist,

$$I = \int_S df \vec{e}^z \cdot \vec{j} \equiv j S, \quad (3.23)$$

also ist der Betrag der Stromdichte j gerade der Strom pro Leiterquerschnittsfläche, $j = I/S$.

Mit der Stromdichte (3.20) können wir nun das magnetische Induktionsfeld (3.17) berechnen. Wir benutzen zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten. Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems können wir dabei o.B.d.A. den Polarwinkel $\varphi = 0$ setzen. Dann lautet der Vektor

$$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \vec{e}^\rho + (z - z') \vec{e}^z,$$

vgl. Abb. 3.2 (die Radialvariable ρ ist hier und im Folgenden nicht mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ zu verwechseln). Sodann eliminieren die beiden δ -Funktionen in der Stromdichte (3.20) die Integration über dx' und dy' , so dass

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \kappa v}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \vec{e}^z \times \frac{\rho \vec{e}^\rho + (z - z') \vec{e}^z}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}^3}.$$

Mit $\vec{e}^z \times \vec{e}^\rho \equiv \vec{e}^\varphi$ und Gl. (3.20) erhalten wir also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \vec{e}^\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}^3} \equiv \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}^\varphi, \quad (3.24)$$

wobei wir $z' - z \equiv \rho u$ substituiert und das elementare Integral [9]

$$\int_{-L}^L du \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \Big|_{-L}^L = 2 \frac{L}{\sqrt{1 + L^2}} \longrightarrow 2 \quad (L \rightarrow \infty)$$

benutzt haben. Das magnetische Induktionsfeld zeigt also in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}^\varphi$, vgl. Abb. 3.2. Es ist proportional zum Strom I , der durch den Leiter fließt, und nimmt wie $\sim 1/\rho$ mit zunehmendem Abstand ρ vom Leiter ab.

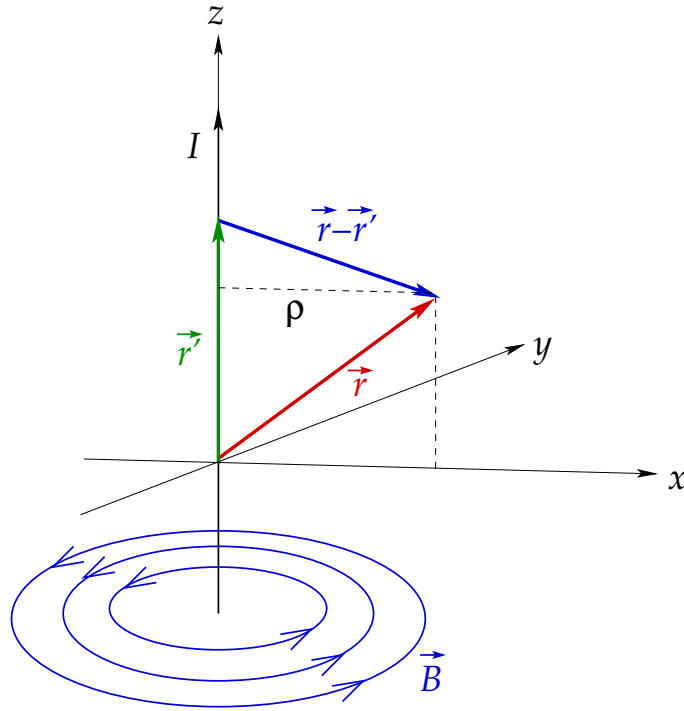


Abbildung 3.2: Magnetisches Induktionsfeld eines stromdurchflossenen Leiters.

3.1.2 Kontinuitätsgleichung

Für den Fall zeitlich konstanter Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, vgl. Gl. (3.1), also $\partial\rho/\partial t \equiv 0$, lautet die Kontinuitätsgleichung (1.88)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.25)$$

die Ladungsstromdichte besitzt also kein Quellenfeld. Mit Hilfe des Satzes von Gauß leiten wir daraus sofort ab, dass

$$0 = \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{j}, \quad (3.26)$$

d.h. der durch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V einströmende Ladungsstrom muß auch wieder hinausströmen, es kann innerhalb von V keine Quellen (oder Senken) des Ladungsstroms geben.

Eine unmittelbare Konsequenz aus dieser Tatsache ist die sog. **Kirchhoffsche Knotenregel**: an einem Leiterknoten ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme,

$$\sum_{i=1}^N I_{i,\text{zu}} = \sum_{j=1}^M I_{j,\text{ab}}. \quad (3.27)$$

Dies beweist man, indem man das Volumen V in Gl. (3.26) um den Knoten herumlegt,

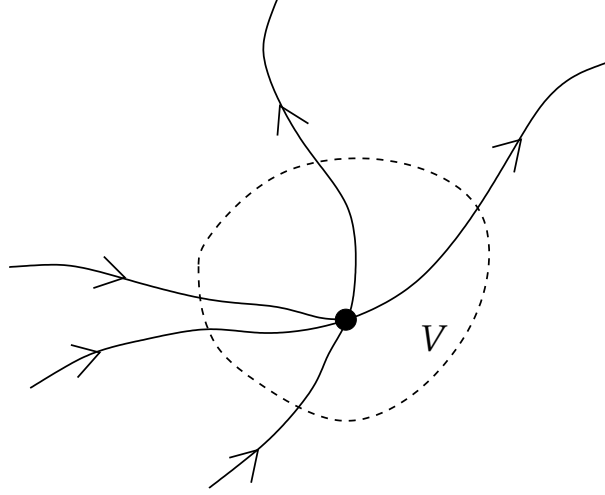


Abbildung 3.3: Zur Kirchhoffschen Knotenregel.

vgl. Abb. 3.3, so dass

$$0 = \oint_{S(V)} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} d\vec{f} \cdot \vec{j} + \sum_{j=1}^M \int_{S_j} d\vec{f} \cdot \vec{j} \equiv - \sum_{i=1}^N I_{i,\text{zu}} + \sum_{j=1}^M I_{j,\text{ab}} , \quad (3.28)$$

wobei wir im ersten Schritt ausgenutzt haben, dass Ströme lediglich durch die Leiterquerschnittsflächen S_i in das Volumen V ein- und durch die Leiterquerschnittsflächen S_j aus dem Volumen V abfließen können, aber nichts durch irgendeinen anderen Teil der Oberfläche $S(V)$ fließt. Im zweiten Schritt haben wir die Definition (1.183) des Stromes durch eine Leiterquerschnittsfläche benutzt, sowie die Konvention angewendet, dass $d\vec{f}$ immer von der Oberfläche $S(V)$ weg zeigen soll (also in Richtung der **abfließenden** Ströme). Bringt man nun noch den ersten Term auf der rechten Seite auf die linke Seite, folgt Gl. (3.27).

3.2 Ampèresches Gesetz

Auf eine Ladung q , die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und einem magnetischen Induktionsfeld $\vec{B}$ bewegt, wirkt die **Lorentz-Kraft**

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) , \quad (3.29)$$

vgl. Gl. (1.122). Zur Berechnung der Lorentz-Kraft auf eine Ladungsdichte ρ bzw. Ladungsstromdichte $\vec{j}$ kann man Gl. (1.127) für die räumlichen Komponenten der Lorentz-Kraft**dichte** benutzen,

$$\vec{k}_L = \vec{e}^i F^{i\mu} j_\mu = \vec{e}^i (F^{i0} c \rho - F^{ik} j^k) = \vec{e}^i (\rho E^i + \epsilon^{ikl} j^k B^l) = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} , \quad (3.30)$$

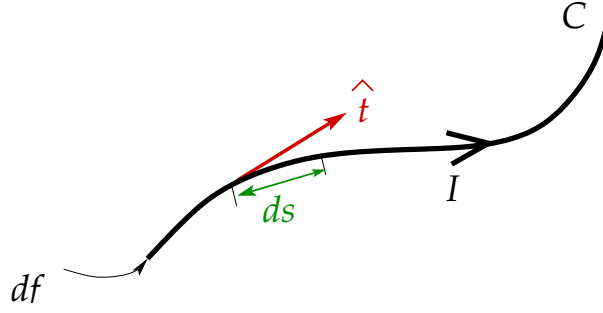


Abbildung 3.4: Zur Definition des Stromfadens.

wobei wir $F^{i0} = E^i/c$ und $F^{ik} = -\epsilon^{ikl}B^l$ benutzt haben, vgl. Glgen. (1.39) und (1.40). Die dazugehörige Lorentz-Kraft ergibt sich durch Integration über den dreidimensionalen Raum,

$$\vec{F}_L = \int d^3\vec{r} \vec{k}_L(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \left[\rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right]. \quad (3.31)$$

In Abwesenheit elektrischer Felder vereinfacht sich dies zu

$$\vec{F}_L = \int d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (3.32)$$

19.1.2024

Dies ist die Kraft, die auf eine Ladungsstromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ in Anwesenheit eines magnetischen Induktionsfeldes $\vec{B}(\vec{r})$ ausgeübt wird. Letzteres kann natürlich aufgrund des Gesetzes von Biot-Savart (3.17) durch eine **andere** Ladungsstromdichte $\vec{j}(\vec{r}')$ erzeugt worden sein. Setzen wir Gl. (3.17) in Gl. (3.32) ein, so erhalten wir

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \vec{j}_1(\vec{r}) \times \left[\vec{j}_2(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right], \quad (3.33)$$

wobei wir die Ladungsstromdichten zur besseren Unterscheidung mit Indizes “1” und “2” gekennzeichnet haben.

Wir betrachten nun den speziellen Fall, bei dem die Ladungsstromdichten $\vec{j}_1(\vec{r})$, $\vec{j}_2(\vec{r}')$ auf zwei sog. **Stromfäden** $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ beschränkt sind. Ein Stromfaden ist die Idealisierung eines unendlichen dünnen Leiterdrahtes. Es gilt, vgl. Abb. 3.4,

$$d^3\vec{r} \vec{j} = df ds j \hat{t} = I \hat{t} ds = I d\vec{r}, \quad (3.34)$$

wobei df die infinitesimale Leiterquerschnittsfläche, ds ein infinitesimales Längenelement entlang des Stromfadens, $\hat{t}$ der Tangentialvektor entlang des Stromfadens (zeigt in dieselbe Richtung wie die Ladungsstromdichte $\vec{j}$) und $d\vec{r} \equiv \hat{t} ds$ der entlang des Stromfadens gerichtete infinitesimale Ortsvektor ist. Hierbei haben wir die Definition (3.23) des Stromes benutzt, wobei $S \equiv df$ gesetzt wurde, so dass $I = j df$.

Wir ersetzen nun die Volumenintegrale in Gl. (3.33) mit Hilfe von Gl. (3.34) durch **Kurvenintegrale** entlang der beiden Stromfäden $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$,

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \int_{\mathcal{C}_2} d\vec{r}_1 \times \left(d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right). \quad (3.35)$$

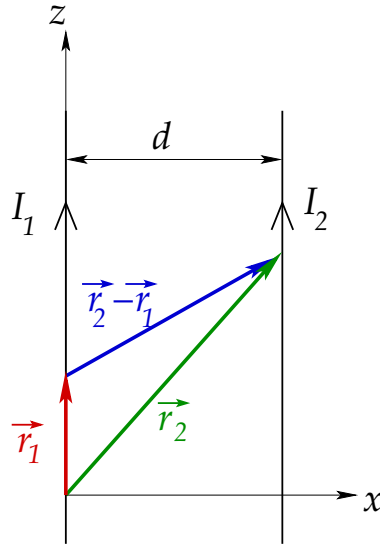


Abbildung 3.5: Zur Berechnung der Kraft zwischen zwei parallelen Leitern.

Dies ist das sog. **Ampèresche Gesetz**. Es beschreibt die wechselseitige Kraft, die zwei stromdurchflossene Stromfäden aufeinander ausüben.

Beispiel: Kraft zwischen zwei geraden, stromdurchflossenen Leitern

Wir betrachten zwei unendlich lange, gerade, stromdurchflossene Leiter parallel zur z -Achse, die einen Abstand d zueinander haben, vgl. Abb. 3.5. Das Ampèresche Gesetz lautet für diesen speziellen Fall

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \vec{e}^z \times \left(\vec{e}^z \times \frac{-d\vec{e}^x - (z_2 - z_1)\vec{e}^z}{\sqrt{d^2 + (z_2 - z_1)^2}^3} \right).$$

Mit $\vec{e}^z \times \vec{e}^x = \vec{e}^y$ und $\vec{e}^z \times \vec{e}^y = -\vec{e}^x$ erhalten wir nach Ausführen der Kreuzprodukte

$$\vec{F}_{12} = \vec{e}^x \frac{\mu_0 I_1 I_2 d}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \frac{1}{\sqrt{d^2 + (z_2 - z_1)^2}^3}.$$

Das Integral über z_2 ist vom selben Typ wie in Gl. (3.24), so dass gilt

$$\vec{F}_{12} = \vec{e}^x \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1.$$

Dieses Resultat divergiert aufgrund der Tatsache, dass es sich um unendlich lange Drähte handelt. Wir können aber auch die Kraft ausrechnen, die der Draht 2 auf ein infinitesimales Weglängenelement dz_1 des ersten Drahtes ausübt. Das Resultat ist

$$\frac{d\vec{F}_{12}}{dz_1} = \vec{e}^x \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

Die Kraft zwischen den Drähten wirkt also anziehend, falls die Ströme gleichgerichtet fließen, und abstoßend, falls sie in umgekehrte Richtung fließen.

3.3 Ohmsches Gesetz

3.3.1 Herleitung des Ohmschen Gesetzes

Aufgrund der Coulomb–Kraft (2.14) werden Ladungen in elektrischen Feldern $\vec{E}$ beschleunigt. Dies führt zu einer nichtverschwindenden Ladungsstromdichte $\vec{j}$. In sog. **Ohmschen Leitern** ist der vom elektrischen Feld erzeugte Ladungsstrom **linear** proportional zu diesem und zeigt in dieselbe Richtung,

$$\vec{j}(\vec{r}) = \tilde{\sigma}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) . \quad (3.36)$$

Die Proportionalitätskonstante $\tilde{\sigma}(\vec{r})$ heißt **elektrische Leitfähigkeit**. Falls eine andere Proportionalität als eine lineare besteht, so nennt man den Leiter **nicht-ohmsch**. Der Kehrwert $\tilde{\rho}(\vec{r}) \equiv \tilde{\sigma}^{-1}(\vec{r})$ der elektrischen Leitfähigkeit heißt **spezifischer elektrischer Widerstand**, so dass

$$\vec{j}(\vec{r}) \tilde{\rho}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) . \quad (3.37)$$

Wir integrieren Gl. (3.37) von einem Punkt $\vec{r}_1$ zu einem Punkt $\vec{r}_2$ entlang eines Stromfadens,

$$\int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \tilde{\rho}(\vec{r}) = - \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \equiv U_{12} , \quad (3.38)$$

wobei U_{12} die **Spannungsdifferenz** zwischen den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ auf dem Stromfaden ist. Auf der linken Seite benutzen wir, dass die Ladungsstromdichte $\vec{j}$ in Richtung von $d\vec{r}$ zeigt, so dass $\vec{j} \cdot d\vec{r} \equiv j ds$. Außerdem sei sie über den gesamten Stromfaden hinweg konstant, $j \equiv I/S$, wobei S die Querschnittsfläche des Stromfadens ist, vgl. Gl. (3.23), so dass

$$U_{12} = I \int_1^2 ds \frac{\tilde{\rho}(\vec{r})}{S} \equiv I R_{12} . \quad (3.39)$$

Das Integral R_{12} auf der rechten Seite bezeichnet man als **elektrischen Widerstand**. Er ist keine (ortsabhängige) Materialkonstante, wie etwa die elektrische Leitfähigkeit oder der spezifische elektrische Widerstand, sondern hängt bei gegebenem $\tilde{\rho}(\vec{r})$ von der Länge des Stromfadens und von seinem Querschnitt ab. Gemeinhin wird Gl. (3.39) in der Form

$$U = R I \quad (3.40)$$

geschrieben und als **Ohmsches Gesetz** bezeichnet. Der elektrische Widerstand hat die Einheit **Ohm**,

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \Omega .$$

3.3.2 Mikroskopische Betrachtung zur elektrischen Leitfähigkeit

Die Tatsache, dass $\vec{j} \sim \vec{E}$, vgl. Gl. (3.36), ist bei genauerem Hinsehen ein wenig überraschend. Ladungen q werden in elektrischen Feldern $\vec{E}$ **beschleunigt**, d.h. ihre Geschwindigkeit $\vec{v}$ muss **linear** mit der Zeit ansteigen. Dies würde aber bedeuten, dass auch die

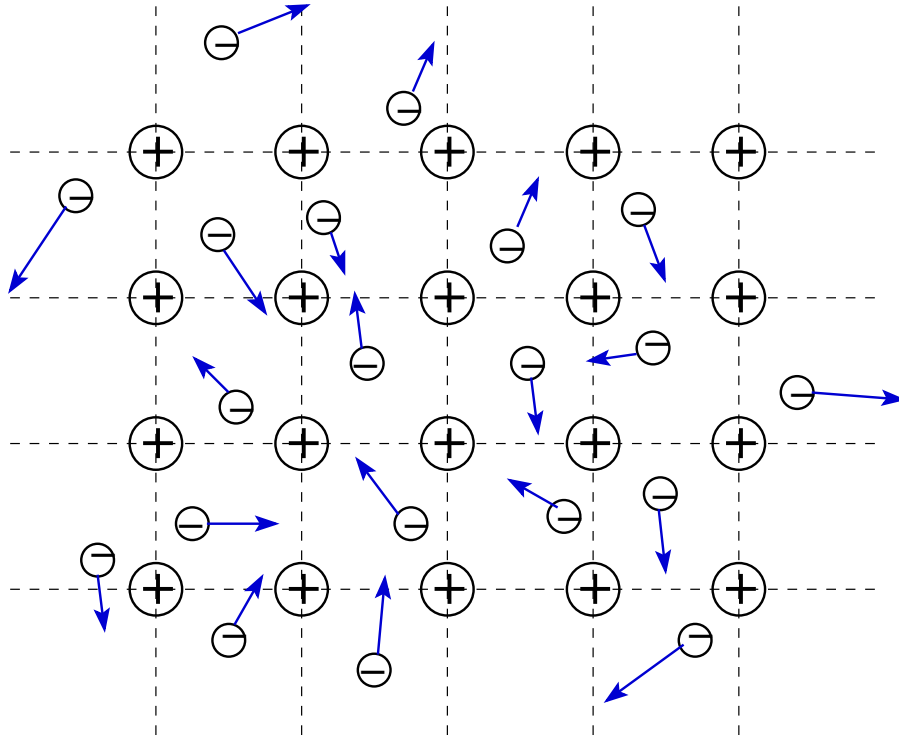


Abbildung 3.6: Elektronengas im Metall.

Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{v}$ linear mit der Zeit ansteigt, also **zeitabhängig** wird, $\vec{j} \equiv \vec{j}(t)$. Im Vakuum ist dies durchaus so, aber nicht in metallischen Leitern. Um dies zu verstehen, leiten wir mit Hilfe eines einfachen mikroskopischen Modells für einen elektrischen Leiter einen Ausdruck für die elektrische Leitfähigkeit her.

In einem elektrischen Leiter wie z.B. einem Metall überlappen die Valenzorbitale benachbarter Atome. Dadurch können die Elektronen in diesen Orbitalen nahezu ungehindert von einem Atom zu einem benachbarten wechseln. Die überlappenden Valenzorbitale bilden das sog. **Leitungsband**. In diesem bewegen sich Elektronen bis auf Stöße untereinander und mit den Atomrümpfen wechselwirkungsfrei, sie bilden ein **Elektronengas**, vgl. Abb. 3.6.

Die Elektronen bewegen sich mit Geschwindigkeiten $\vec{v}_{i,\text{zuf}}$, die zufällig orientiert sind, so dass ihre mittlere Geschwindigkeit null ergibt,

$$\vec{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{i,\text{zuf}} = 0, \quad (3.41)$$

wobei N die Gesamtzahl der Elektronen darstellt.

Wird nun ein äußeres elektrisches Feld angelegt, so werden die Elektronen aufgrund der Coulomb-Kraft beschleunigt,

$$\dot{\vec{v}}_C = \frac{1}{m} \vec{F}_C = -\frac{e}{m} \vec{E},$$

wobei m die Masse der Elektronen und $-e$ ihre Ladung ist. Zur zufälligen Geschwindigkeit $\vec{v}_{i,\text{zuf}}$ des i -ten Elektrons im Gas addiert sich also eine gerichtete Geschwindigkeitskomponente $\vec{v}_C(t) = -(e/m) \vec{E} t$, die linear proportional zur Zeit ansteigt, wie wir dies aus der zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Vorüberlegung auch erwartet haben. Die Gesamtgeschwindigkeit lautet also

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_{i,\text{zuf}} - \frac{e}{m} \vec{E} t . \quad (3.42)$$

Nach einer gewissen Zeit stößt das Elektron aber mit einem anderen oder einem Atomrumpf zusammen. Dieser Stoß sorgt dafür, dass die Geschwindigkeit des Elektrons wieder zufällig orientiert wird. Die gerichtete Komponente aufgrund des elektrischen Feldes muss sich erst wieder aufbauen, so dass bis zum nächsten Stoß die Geschwindigkeit des Elektrons wieder durch Gl. (3.42) gegeben ist, wobei t jetzt als **Zeitspanne** zu interpretieren ist, die seit dem vorangegangenen Stoß vergangen ist.

Um diese Überlegungen weiter voranzutreiben, können wir natürlich nicht die einzelnen Trajektorien der Elektronen verfolgen, um ihre jeweiligen Geschwindigkeiten zu ermitteln. Wir können aber weitergehende Aussagen treffen, wenn wir das Verhalten der Elektronen **im Mittel** betrachten. Dazu sind einige Überlegungen notwendig, auf die wir zu einem späteren Zeitpunkt im Rahmen der Vorlesung "Theoretische Physik V: Statistische Mechanik und Thermodynamik" in größerer Detailliertheit zurückkommen werden.

Wir bezeichnen mit $P(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron eine Zeitspanne t überlebt ohne zu stoßen. Offenbar ist $P(0) = 1$, denn für $t \rightarrow 0$ hat das Elektron einfach keine Zeit gehabt, einen Stoß zu erfahren, es überlebt also mit Sicherheit ohne zu stoßen. Auf der anderen Seite geht $P(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, denn es wird für das Elektron für längere Zeitspannen immer schwieriger, ohne Stoß davonzukommen.

Wir bezeichnen mit Γdt die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron eine Kollision zwischen t und $t + dt$ erfährt, also ist Γ die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, dass das Elektron einen Stoß erfährt, bzw. die sog. **Stoßrate**. Wir nehmen an, die Stoßrate sei eine Konstante, also unabhängig von der Geschwindigkeit der Elektronen und der Historie der Stöße, die das Elektron erfahren hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron im Zeitintervall dt **keinen** Stoß erfährt, ist dann $1 - \Gamma dt$.

Nun können wir die Funktion $P(t)$ bestimmen. Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron eine Zeitspanne $t + dt$ ohne Stoß überlebt, das Produkt der Wahrscheinlichkeit, eine Zeitspanne t überlebt zu haben, mit der Wahrscheinlichkeit, im Intervall dt keinen weiteren Stoß zu erfahren,

$$P(t + dt) = P(t) (1 - \Gamma dt) .$$

Eine Taylor-Entwicklung der linken Seite führt auf eine Differentialgleichung für $P(t)$,

$$P(t) + \frac{dP}{dt} dt = P(t) - P(t) \Gamma dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dP}{dt} = -\Gamma P ,$$

mit der Lösung

$$P(t) = e^{-\Gamma t} , \quad (3.43)$$

wobei wir mögliche konstante Vorfaktoren der Exponentialfunktion schon an die Anfangsbedingung $P(0) = 1$ angepaßt haben. Die Wahrscheinlichkeit $P(t)$, eine Zeitspanne t ohne Stoß zu überleben, nimmt also exponentiell ab.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron einen Stoß zwischen t und $t + dt$ erfährt, nachdem es die Zeitspanne t ohne Stoß überlebt hat, ist gegeben durch das Produkt von Γdt und $P(t)$,

$$\mathcal{P}(t)dt = P(t)\Gamma dt = e^{-\Gamma t}\Gamma dt .$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist korrekt normiert, denn es gilt

$$\int_0^\infty dt \mathcal{P}(t) = \int_0^\infty dt \Gamma e^{-\Gamma t} = \int_0^\infty dx e^{-x} = 1 . \quad (3.44)$$

Dies bedeutet, dass das Elektron mit Sicherheit **irgendwann** einen Stoß erfährt, wenn man lange genug wartet (notfalls bis $t \rightarrow \infty$). Wir sind nun in der Lage, die **mittlere Stoßzeit** τ des Elektrons zu berechnen. Sie ergibt sich als Mittelwert der oben betrachteten Zeitspanne t , die zwischen zwei Stößen vergeht. Der Mittelwert wird dabei mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathcal{P}(t)$ berechnet, denn diese gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass nach einer gewissen Zeit t der nächste Stoß stattfindet,

$$\tau \equiv \langle t \rangle = \int_0^\infty dt t \mathcal{P}(t) = \int_0^\infty dt t \Gamma e^{-\Gamma t} = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty dx x e^{-x} = \frac{1}{\Gamma} , \quad (3.45)$$

wobei wir ein elementares Integral benutzt haben [9]. Dieses Resultat ist nicht weiter überraschend: die mittlere Stoßzeit ist das Inverse der Stoßrate. Je höher die Stoßrate, also die Wahrscheinlichkeit, pro Zeitintervall einen Stoß zu erfahren, desto kürzer ist die Zeit zwischen den einzelnen Kollisionen, mithin die mittlere Stoßzeit. Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (3.43) ein, so sehen wir, dass die Wahrscheinlichkeit, ohne Stoß zu überleben, exponentiell mit der Zeitkonstanten τ abfällt.

Wir kehren nun zur Berechnung der Geschwindigkeit der Elektronen im Metall unter Einfluß eines elektrischen Feldes zurück. Wir mitteln den Ausdruck (3.42) über alle möglichen Zeitspannen t , die zwischen zwei Kollisionen vergehen können,

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \int_0^\infty dt \mathcal{P}(t) \vec{v}_i(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty dt \left(\vec{v}_{i,\text{zuf}} - \frac{e}{m} \vec{E} t \right) e^{-t/\tau} = \vec{v}_{i,\text{zuf}} - \frac{e}{m} \vec{E} \tau , \quad (3.46)$$

wobei wir die Glgen. (3.44) und (3.45) benutzt haben. Wir haben außerdem ausgenutzt, dass sich die zufällige Komponente der Geschwindigkeit während der Zeitspanne t zwischen Kollisionen nicht ändert. Mitteln wir zusätzlich noch über alle Elektronen im Metall, so ergibt sich mit Gl. (3.41) die mittlere Elektronengeschwindigkeit zu

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\vec{v}_{i,\text{zuf}} - \frac{e}{m} \vec{E} \tau \right) = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau . \quad (3.47)$$

Die Ladungsstromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ergibt sich daraus durch Multiplikation mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) \equiv -en(\vec{r})$, wobei $n(\vec{r})$ die **Teilchenzahldichte** der Elektronen ist. Falls $n(\vec{r}) = n \equiv \text{const.}$, gilt $n = N/V$, wobei N die Gesamtzahl der Elektronen im Metall und V dessen Volumen darstellen. Wir erhalten also

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \langle \vec{v} \rangle = \frac{e^2 n(\vec{r}) \tau}{m} \vec{E}(\vec{r}) , \quad (3.48)$$

woraus man durch Vergleich mit Gl. (3.36) sofort die elektrische Leitfähigkeit ablesen kann,

$$\tilde{\sigma}(\vec{r}) = \frac{e^2 n(\vec{r}) \tau}{m} . \quad (3.49)$$

Bei dieser Herleitung wurde angenommen, dass das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ nicht wesentlich über die Längenskala, auf der Elektronen Stöße erfahren, variiert, so dass man bei der Mittelung über Zeiten in Gl. (3.46) in guter Näherung $\vec{E} = \overrightarrow{const.}$ setzen konnte.

3.4 Magnetisches Moment

23.1.2024

Wir betrachten eine auf einen Raumbereich begrenzte Ladungsstromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$ aus einer Distanz $\vec{r}$, wobei $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$ für alle $\vec{r}'$, die zur Ladungsstromdichteverteilung gehören, vgl. Abb. 3.7.

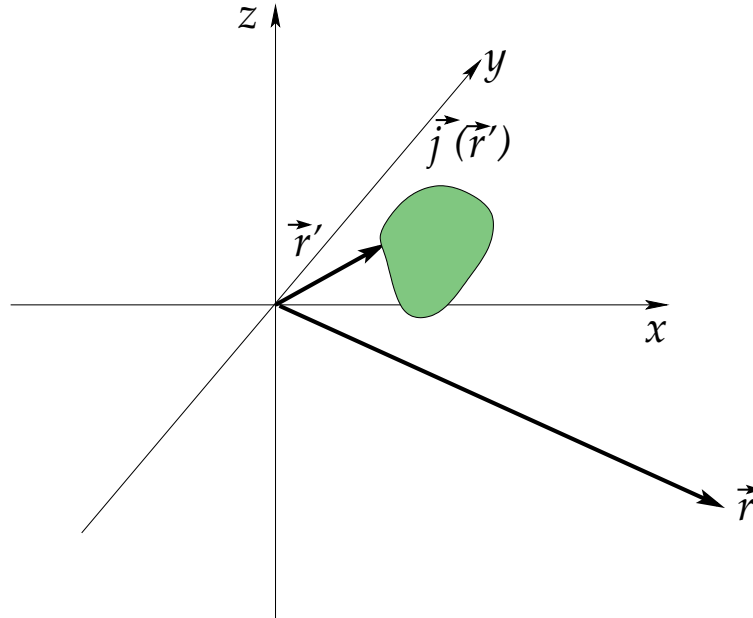


Abbildung 3.7: Eine Ladungsstromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$, die man bei $\vec{r}$ betrachtet, mit $|\vec{r}| > |\vec{r}'| \quad \forall \vec{r}'$, die zur Ladungsstromdichteverteilung gehören.

Das von der Ladungsstromdichte $\vec{j}(\vec{r}')$ erzeugte Vektorpotential lautet gemäß Gl. (3.13)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \end{aligned}$$

wobei wir die Multipolentwicklung (2.102) für den Faktor $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ benutzt haben. Explizit lauten die ersten beiden Terme dieser Entwicklung

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{r} Y_{00} Y_{00}^* \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \\ &+ \frac{\mu_0}{3r^2} \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') r' [Y_{11}(\vartheta, \varphi) Y_{11}^*(\vartheta', \varphi') + Y_{10}(\vartheta, \varphi) Y_{10}^*(\vartheta', \varphi') + Y_{11}^*(\vartheta, \varphi) Y_{11}(\vartheta', \varphi')] \\ &+ \dots \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' + \dots, \end{aligned} \quad (3.50)$$

wobei wir die Symmetrierelation (2.87), die expliziten Ausdrücke (2.88) für die Kugelflächenfunktionen, sowie Gl. (2.92) benutzt haben. Der erste Term stellt den **Monopolterm** für das Vektorpotential, der zweite den **Dipolterm** usw. dar.

Zur weiteren Auswertung dieses Ausdrucks beweisen wir das folgende

Theorem: Seien $f(\vec{r})$, $g(\vec{r})$ stetig differenzierbare skalare Funktionen von $\vec{r}$ und $\vec{j}(\vec{r})$ eine Ladungsstromdichte, die Gl. (3.25) erfüllt und im Unendlichen verschwindet. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \left(f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f \right) = 0. \quad (3.51)$$

Beweis: Es ist aufgrund von Gl. (3.25)

$$\vec{\nabla} \cdot (f g \vec{j}) = f g \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{\nabla} (f g) = \vec{j} \cdot (f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f) = f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f.$$

Also gilt mit dem Satz von Gauß

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \left(f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f \right) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot (f g \vec{j}) = \oint_{S(\mathbb{R}^3)} d\vec{f} \cdot (f g \vec{j}) \equiv 0,$$

da die Stromdichte im Unendlichen verschwinden soll, q.e.d.

Wir benutzen dieses Theorem nun für $f = 1$ und $g = x, y$ oder z , so dass $\vec{\nabla} g \equiv \vec{e}^x, \vec{e}^y$ oder $\vec{e}^z$. Das Resultat ist

$$\int d^3\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{e}^i \equiv \int d^3\vec{r} j^i \equiv 0, \quad i = x, y, z,$$

d.h. der Monopolbeitrag zum Vektorpotential **verschwindet**,

$$\int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \equiv 0.$$

Nun wenden wir das Theorem (3.51) für $f = x^i$, $g = x^k$ an, mit $x^i, x^k \in \{x, y, z\}$,

$$0 = \int d^3\vec{r} (x^i j^k + x^k j^i) \iff \int d^3\vec{r} x^i j^k = - \int d^3\vec{r} x^k j^i.$$

Damit berechnen wir für einen beliebigen Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$,

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{r}' j^i(\vec{r}') \vec{a} \cdot \vec{r}' &= a^k \int d^3\vec{r}' j^i(\vec{r}') x'^k = \frac{1}{2} a^k \int d^3\vec{r}' (j^i x'^k - j^k x'^i) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{kil} a^k \int d^3\vec{r}' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]^l = -\frac{1}{2} \epsilon^{ikl} a^k \int d^3\vec{r}' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]^l \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \vec{a} \times \int d^3\vec{r}' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \right\}^i, \end{aligned}$$

wobei wir von der ersten zur zweiten Zeile die Definition des Kreuzproduktes $(\vec{b} \times \vec{c})^l = \epsilon^{mnl} b^m c^n$ und $\epsilon^{kil} \epsilon^{mnl} = \delta^{km} \delta^{in} - \delta^{kn} \delta^{im}$ benutzt haben. Es gilt also die Vektoridentität

$$\int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \vec{a} \cdot \vec{r}' = -\frac{1}{2} \left\{ \vec{a} \times \int d^3\vec{r}' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \right\}. \quad (3.52)$$

Das **magnetische Moment** ist definiert als

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})]. \quad (3.53)$$

Mit dieser Definition und Gl. (3.52) lautet das Integral im Dipolterm in Gl. (3.50)

$$\int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' = -\vec{r} \times \vec{m} = \vec{m} \times \vec{r}.$$

Da der Monopolterm verschwindet, beginnt die Multipolentwicklung (3.50) für das Vektorpotential also mit dem Dipolterm und lautet

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (3.54)$$

Zur Berechnung des zugehörigen magnetischen Induktionsfelds sind folgende Identitäten hilfreich,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{a}\varphi) &= \varphi \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla}\varphi, \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot \vec{\nabla}\vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\vec{b} + \vec{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{b} - \vec{b} \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \end{aligned}$$

die man wie gehabt mit der Definition des Kreuzprodukts und der schon oben erwähnten Identität für den Levi-Civita-Tensor beweist. Damit und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\vec{m} = \overrightarrow{const.}$ berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) + \dots \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right] + \dots \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} [\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\vec{m} - \vec{m} \cdot \vec{\nabla}\vec{r} + \vec{m} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} - \vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{m}] + \frac{3}{r^5} (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r} \right\} + \dots \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^5} [(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m} r^2] \right\} + \dots \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right] + \dots \quad (3.55) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem elektrischen Dipolfeld (2.114), wenn wir dort $q\vec{a}/\epsilon_0$ durch $\mu_0 \vec{m}$ ersetzen. Das magnetische Induktionsfeld hat dann ebenfalls den in Abb. 2.17 gezeigten Feldlinienverlauf. Aus der Ferne betrachtet liefert der Dipolterm den dominanten Beitrag zum magnetischen Induktionsfeld. Höhere Multipole sind um mindestens eine Ordnung $|\vec{m}|/r$ unterdrückt.

Beispiel: Magnetisches Dipolmoment einer Punktladung

Die Ladungstromdichte für eine Punktladung q am Ort $\vec{R}(t)$, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ bewegt, lautet

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = q \vec{v}(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}(t)) .$$

Das magnetische Moment (3.53) ist dann

$$\vec{m} = \frac{q}{2} \int d^3\vec{r} [\vec{r} \times \vec{v}(t)] \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}(t)) = \frac{q}{2} \vec{R}(t) \times \vec{v}(t) \equiv \frac{q}{2m} \vec{L} \equiv g_L \vec{L} ,$$

mit dem Drehimpuls $\vec{L}$ und der Masse m der Ladung. Das Verhältnis g_L von magnetischem Moment zu Drehimpuls bezeichnet man als **gyromagnetisches Verhältnis**. Das klassische Resultat ist $g_L = q/(2m)$. Wir werden sehen, dass dies auch für den Bahndrehimpuls quantenmechanischer Teilchen Gültigkeit behält. Falls diese jedoch **Spin** $\vec{S}$ tragen, dann gilt (in ziemlich guter Näherung)

$$\vec{m}_S = g_S \vec{S} \simeq \frac{q}{m} \vec{S} ,$$

d.h. das zum Spin gehörende gyromagnetische Verhältnis ist (ziemlich genau) einen Faktor 2 größer als das zum Bahndrehimpuls gehörende.

4 Elektrodynamik

In diesem Kapitel wenden wir uns der **Elektrodynamik** zu. In diesem Fall werden keine zusätzlichen Annahmen gemacht, die die Maxwell-Gleichungen vereinfachen. Es ist also der vollständige Satz dieser Gleichungen zu betrachten. Wir besprechen zunächst die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im **Vakuum**, d.h. in Abwesenheit von Ladungsdichte und Ladungsstromdichte, $\rho(t, \vec{r}) = \vec{j}(t, \vec{r}) \equiv 0$, bevor wir uns der Erzeugung dieser Wellen aufgrund bewegter Ladungen, $\rho(t, \vec{r}) \neq 0$, $\vec{j}(t, \vec{r}) \neq 0$, zuwenden.

4.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

4.1.1 Homogene Wellengleichung

Wir wollen die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{B}(t, \vec{r})$ aus den Maxwell-Gleichungen im **Vakuum** bestimmen, also in Raumbereichen, wo die Ladungsdichte und die Ladungsstromdichte verschwinden,

$$\rho(t, \vec{r}) = 0, \quad \vec{j}(t, \vec{r}) = 0. \quad (4.1)$$

In diesem Fall lauten die Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84), (1.85) und (1.86)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Bilden wir die Rotation der letzten Gleichung (4.5) und benutzen

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E},$$

so erhalten wir

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}.$$

Benutzen wir auf der linken Seite die erste Maxwell-Gleichung (4.2) und auf der rechten Seite die zweite, Gl. (4.3), so erhalten wir

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \iff \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} \equiv \square \vec{E} = 0, \quad (4.6)$$

d.h. das elektrische Feld erfüllt die **homogene Wellengleichung** (1.101). Ganz analog erhalten wir, wenn wir die Rotation der zweiten Maxwell-Gleichung (4.3) bilden und die dritte bzw. vierte Maxwell-Gleichung, Gl. (4.4) bzw. Gl. (4.5), benutzen, dass auch das magnetische Induktionsfeld die homogene Wellengleichung erfüllt,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} \equiv \square \vec{B} = 0 . \quad (4.7)$$

Wir hatten schon in Kapitel 1, Gl. (1.98), gesehen, dass im Falle der Lorenz-Eichung das skalare Potential φ und das 3-Vektorpotential $\vec{A}$ in Abwesenheit von Ladungen homogene Wellengleichungen erfüllen. Offenbar gilt dies im Vakuum auch für die elektromagnetischen Felder selbst, die selbstverständlich von der Wahl der Eichung unabhängig sind.

Man sieht anhand der Glgen. (4.6), (4.7) desweiteren, dass nicht nur $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld voneinander entkoppeln, sondern außerdem noch **alle** Komponenten der jeweiligen Felder; jede einzelne erfüllt für sich bereits die homogene Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi(t, \vec{r}) \equiv \square \psi(t, \vec{r}) = 0 . \quad (4.8)$$

Das allgemeine Verfahren zur Lösung dieser Gleichung mit Hilfe einer Fourier-Transformation haben wir bereits in Abschnitt 1.7.3 besprochen. Wir kommen darauf in Abschnitt 4.40 zurück. Im nächsten Abschnitt wollen wir die Wellengleichung (4.8) mit einer anderen Methode lösen, welche tiefere Einblicke in die Struktur der Lösung ermöglicht.

4.1.2 Ebene Wellen

Zur Lösung der homogenen Wellengleichung machen wir den bereits bekannten **Separationsansatz**

$$\psi(t, \vec{r}) = \zeta(t) \xi(\vec{r})$$

und erhalten, nachdem wir räumliche und zeitliche Ableitungen auf unterschiedliche Seiten der Gleichung gebracht haben,

$$\frac{1}{\xi(\vec{r})} \Delta \xi(\vec{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\zeta(t)} \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) .$$

Beide Seiten der Gleichung können für beliebige $t, \vec{r}$ nur dann identisch sein, wenn sie gleich einer Konstanten $\kappa \in \mathbb{R}$ sind, d.h.

$$\Delta \xi(\vec{r}) = \kappa \xi(\vec{r}) , \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) = c^2 \kappa \zeta(t) . \quad (4.10)$$

Als Lösung der zweiten Gleichung bietet sich der Ansatz

$$\zeta(t) = e^{\alpha t}$$

an, welcher nach Einsetzen auf die Bedingung

$$\alpha^2 = c^2 \kappa$$

führt. Es gibt nun prinzipiell drei Möglichkeiten:

- (i) $\kappa > 0$. Dies führt auf exponentiell mit der Zeit ansteigende bzw. abfallende Lösungen $\psi(t, \vec{r}) \sim e^{\pm c\sqrt{\kappa}t}$. Dieser Fall ist aber als unphysikalisch zu verwerfen, da sich elektromagnetische Felder bekannterweise nicht so verhalten.
- (ii) $\kappa = 0$. Dies führt auf zeitunabhängige (konstante) Lösungen. Diese mag es zwar geben, sind aber für die Elektrodynamik nicht sonderlich interessant.
- (iii) $\kappa < 0$. Dies ist der physikalisch interessante Fall. Er führt auf

$$\alpha = \pm i c \sqrt{-\kappa} \equiv \pm i \omega ,$$

wobei wir eine neue Konstante $\omega \equiv c \sqrt{-\kappa} > 0$ eingeführt haben.

Eine Lösung der Differentialgleichung (4.10) lautet also

$$\zeta_{\pm}(t) = e^{\pm i \omega t} .$$

26.1.2024

Da die Differentialgleichung (4.9) in der Form ganz ähnlich der Differentialgleichung (4.10) ist, erwarten wir, dass physikalisch interessante Lösungen ebenfalls komplexe Exponentialfunktionen sein werden. Wir machen den Lösungsansatz

$$\xi(\vec{r}) = e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i(k^x x + k^y y + k^z z)} ,$$

mit einem zunächst beliebigen, konstanten 3-Vektor $\vec{k} = (k^x, k^y, k^z)^T$, $k^i \in \mathbb{R}$, $i = x, y, z$. In der Tat löst dieser Ansatz die Differentialgleichung (4.9),

$$\Delta e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} = - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \equiv -k^2 e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} = \kappa e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} ,$$

vorausgesetzt $\kappa \equiv -k^2 < 0$. Dies war aber auch gerade der physikalisch interessante Fall bei der Lösung der Differentialgleichung (4.10).

Eine Lösung der homogenen Wellengleichung (4.8) hat also die Form

$$\psi(t, \vec{r}) = A_+ e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + A_- e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} . \quad (4.11)$$

Durch Einsetzen in Gl. (4.8) findet man, dass

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi(t, \vec{r}) = \left(-\frac{1}{c^2} \omega^2 + k^2 \right) \psi(t, \vec{r}) = 0 , \quad (4.12)$$

d.h. ω und $\vec{k}$ müssen die sog. **Dispersionsrelation**

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{\pm} = \pm c k \equiv \pm \omega , \quad \omega \equiv c k , \quad (4.13)$$

erfüllen, vgl. Gl. (1.254). Lösungen der Form (4.11) heißen **ebene Wellen**.

Die ebenen Wellen (4.11) besitzen zwei Anteile, die sich im Laufe der Zeit unterschiedlich entwickeln. Wir betrachten zunächst den ersten Term,

$$\psi_+(t, \vec{r}) \equiv A_+ e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} .$$

Bei festgehaltenem $t = t_0$ sind Flächen im Raum, bei denen $\varphi_+(t_0, \vec{r})$ einen **konstanten** Wert annimmt, solche, bei denen die **Phase**

$$\varphi_+(t_0, \vec{r}) \equiv \omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} ,$$

bzw. solche, für die $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$ ist (weil $\omega t_0 = c k t_0 = \text{const.}$ für festes t_0 und vorgegebenes $\vec{k}$). Offenbar sind dies alle Punkte $\vec{r}$, die die gleiche Projektion $\vec{k} \cdot \vec{r}$ auf den vorgegebenen Vektor $\vec{k}$ besitzen, vgl. Abb. 4.1.

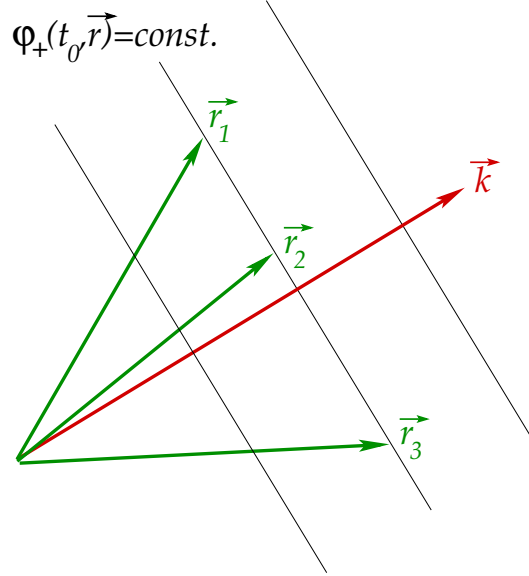


Abbildung 4.1: Wellenfronten, d.h. Flächen konstanter Phase für ebene Wellen.

Diese Flächen konstanter Phase bilden **Wellenfronten**, die **senkrecht** zum Vektor $\vec{k}$ stehen. Betrachten wir nun die zeitliche Entwicklung einer Wellenfront zu gegebener Phase $\varphi_+(t, \vec{r}) = \varphi_+^{(0)} = \text{const.}$. Dann gilt offenbar

$$\varphi_+^{(0)} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - k r_{\parallel} ,$$

wobei $r_{\parallel}$ die Komponente von $\vec{r}$ parallel zum Vektor $\vec{k}$ ist. Offenbar nimmt $r_{\parallel}$ für alle Punkte $\vec{r}$ auf der Wellenfront zu gegebener Phase $\varphi_+^{(0)} = \text{const.}$ den gleichen Wert an. Für alle diese Punkte gilt also die “Bewegungsgleichung”

$$r_{\parallel}^{(+)}(t) = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{k} = \frac{1}{k} \left(\omega t - \varphi_+^{(0)} \right) ,$$

d.h. die Wellenfront bewegt sich mit der sog. **Phasengeschwindigkeit**

$$u_+ \equiv \frac{dr_{\parallel}^{(+)}}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (4.14)$$

im Laufe der Zeit fort. Die **Ausbreitungsrichtung** der Wellenfront ist durch die Richtung von $\vec{k}$ gegeben, denn der Zuwachs $dr_{\parallel}^{(+)} = u_+ dt$ von $r_{\parallel}^{(+)}(t)$ ist für alle Punkte auf der Wellenfront der gleiche, vgl. Abb. 4.2.

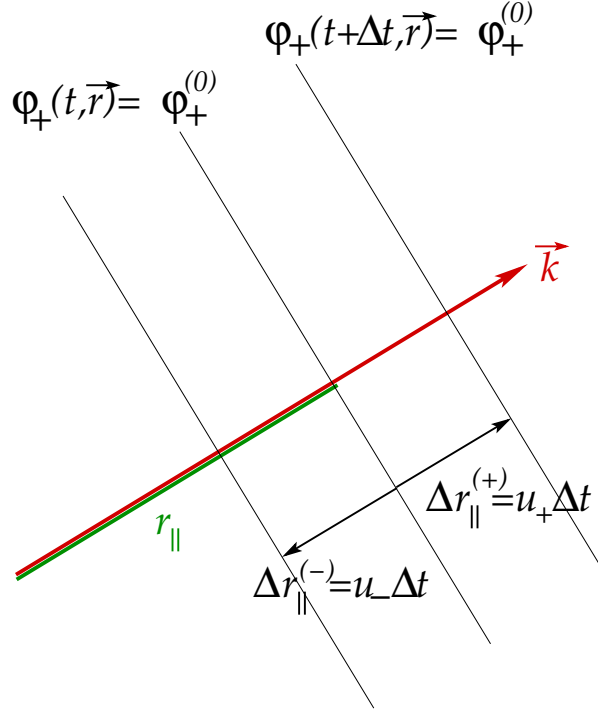


Abbildung 4.2: Zeitliche Entwicklung einer Wellenfront.

Aufgrund der Dispersionsrelation (4.13) gilt außerdem

$$u_+ = \frac{\omega}{k} \equiv c, \quad (4.15)$$

d.h. im **Vakuum** breiten sich elektromagnetische Wellen mit **Lichtgeschwindigkeit** aus. Wir betrachten nun den zweiten Anteil der ebenen Welle (4.11),

$$\psi_-(t, \vec{r}) = A_- e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

Auch hier sind Flächen konstanter Phase $\varphi_-(t, \vec{r}) = \omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} = \varphi_-^{(0)} = \text{const.}$ Wellenfronten, die für vorgegebenes $\vec{k}$ sogar die gleiche räumliche Orientierung besitzen wie die für konstante Phase $\varphi_+(t, \vec{r}) = \varphi_+^{(0)}$. Jedoch lautet ihre “Bewegungsgleichung” nun

$$r_{\parallel}^{(-)}(t) = \frac{1}{k} \left(-\omega t + \varphi_-^{(0)} \right),$$

d.h. sie breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit $u_- = dr_{\parallel}^{(-)}/dt = -\omega/k = -u_+ = -c$ aus. Anhand von Abb. 4.2 erkennt man, dass dies gleichbedeutend damit ist, dass sie sich mit der Phasengeschwindigkeit $u_+ = c$ in $(-\vec{k})$ -Richtung ausbreiten, also mit der gleichen Geschwindigkeit genau in die **entgegengesetzte** Richtung wie die Wellenfronten zu konstanter Phase $\varphi_+(t, \vec{r}) = \varphi_+^{(0)}$.

Ebene Wellen sind **periodisch** in Raum und Zeit:

- (i) Zu festem $t = t_0$ wiederholt sich die funktionale Form der Funktion $\psi_{\pm}(t_0, \vec{r})$ im räumlichen Abstand $\vec{r} + \Delta\vec{r}_n$,

$$\psi_{\pm}(t_0, \vec{r}_n) = \psi_{\pm}(t_0, \vec{r} + \Delta\vec{r}_n) ,$$

wobei

$$\vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_n = 2\pi n , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

Dies gilt, weil

$$e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r}_n)} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i2\pi n} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} .$$

Den Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenfronten mit demselben Funktionswert, $\psi_{\pm}(t_0, \vec{r}) = \psi_{\pm}(t_0, \vec{r} + \Delta\vec{r}_1)$, bezeichnet man als **Wellenlänge**,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} , \quad (4.16)$$

vgl. Abb. 4.3. Der Vektor $\vec{k}$ wird als **Wellenzahlvektor**, oder kurz, **Wellenvektor** bezeichnet.

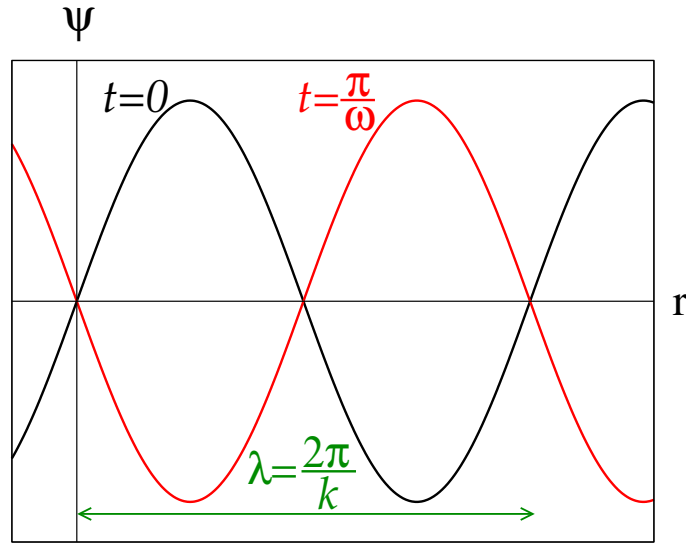


Abbildung 4.3: Ebene Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ (schwarz) und zum Zeitpunkt $t = T/2 = \pi/\omega$ (rot). Die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ entspricht dem Abstand zwischen zwei Wellenbergen bzw. -tälern.

- (ii) Zu festem $\vec{r} = \vec{r}_0$ wiederholt sich die funktionale Form der Funktion $\psi_{\pm}(t, \vec{r}_0)$ im zeitlichen Abstand Δt_n ,

$$\psi_{\pm}(t, \vec{r}_0) = \psi_{\pm}(t + \Delta t_n, \vec{r}_0) ,$$

wobei

$$\omega \Delta t_n = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dies gilt, weil

$$e^{i\omega(t+\Delta t_n)} = e^{i\omega t} e^{i\omega \Delta t_n} = e^{i\omega t} e^{i2\pi n} = e^{i\omega t}.$$

Den zeitlichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenfronten mit demselben Funktionswert, $\psi_{\pm}(t, \vec{r}_0) = \psi_{\pm}(t + \Delta t_1)$, bezeichnet man als **Periode** oder **Schwingungsdauer**,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.17)$$

In Abb. 4.3 ist eine ebene Welle zu einem Zeitpunkt $t = 0$ und wenn sie eine halbe Periode, $t = T/2 = \pi/\omega$, weiter in der Zeit fortgeschritten ist, eingezeichnet. Zu diesem Zeitpunkt ist gerade $\psi_{\pm}(T/2, \vec{r}) = -\psi_{\pm}(0, \vec{r})$. Es dauert eine weitere halbe Periode, $t = T/2 + T/2 = T$, bis die ebene Welle komplett mit der ursprünglichen zum Zeitpunkt $t = 0$ überlappt.

Das Inverse der Schwingungsdauer ist die **Frequenz**,

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (4.18)$$

und die Größe $\omega = 2\pi \nu$ bezeichnet man als **Kreisfrequenz**. Es gilt

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}. \quad (4.19)$$

Eine spezielle Lösung der Wellengleichung (4.6) für das elektrische Feld lautet also

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (4.20)$$

mit festen, vorgegebenen $\omega, \vec{k}$, die über die Dispersionsrelation (4.13) miteinander verknüpft sind, $\omega = ck$. Entsprechend lautet eine spezielle Lösung der Wellengleichung (4.7) für das magnetische Induktionsfeld

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{B}_0 e^{-i(\bar{\omega} t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (4.21)$$

mit festen, vorgegebenen $\bar{\omega}, \vec{k}$, die ebenfalls über die Dispersionsrelation (4.13) miteinander verknüpft sind, $\bar{\omega} = c\bar{k}$. Natürlich müssen $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{B}(t, \vec{r})$ auch die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen (4.2) – (4.5) erfüllen. Setzen wir die Lösungen (4.20), (4.21) z.B. in Gl. (4.5) ein, so erhalten wir die Bedingung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \bar{\omega} \vec{B}_0 e^{-i(\bar{\omega} t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (4.22)$$

Da dies für alle $t, \vec{r}$ gelten muss, muss die komplette Raum-Zeit-Abhängigkeit der Funktionen auf der linken und rechten Seite übereinstimmen. Dies geht nur, wenn

$$\omega \equiv \bar{\omega}, \quad \vec{k} \equiv \bar{\vec{k}}.$$

4 Elektrodynamik

Dann folgt aus Gl. (4.22)

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 . \quad (4.23)$$

Aus Gl. (4.2) erhalten wir die Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 . \quad (4.24)$$

Entsprechend erhalten wir aus Gl. (4.4)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = i \vec{k} \cdot \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 . \quad (4.25)$$

Letztlich folgt aus Gl. (4.3)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= i \vec{k} \times \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \Longrightarrow \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 &= -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die vier Bedingungen (4.23) – (4.26) implizieren, dass

$$\vec{k} \perp \vec{E}_0 , \quad \vec{k} \perp \vec{B}_0 , \quad \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0 , \quad (4.27)$$

die drei Vektoren $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ und $\vec{k}$ bilden also (in dieser Reihenfolge) ein **rechtshändiges Orthogonalsystem**, vgl. Abb. 4.4.

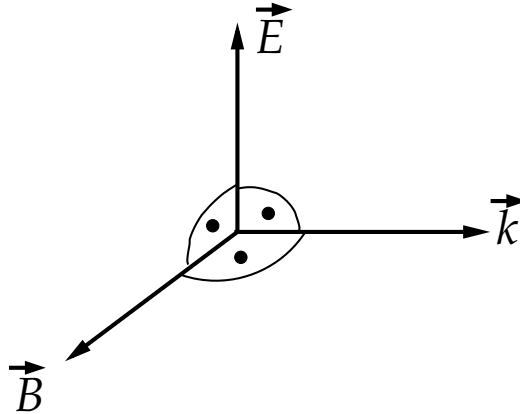


Abbildung 4.4: Elektrisches Feld, magnetisches Induktionsfeld und der Wellenvektor bilden ein rechtshändiges Orthogonalsystem.

Da sowohl $\vec{E}$ als auch $\vec{B}$ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ stehen, bezeichnet man elektromagnetische Wellen im Vakuum auch als **transversale Wellen**.

Sei z.B. $\vec{k} = k \vec{e}^z$. Dann ist aufgrund von Gl. (4.23)

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = -k E_0^y \vec{e}^x + k E_0^x \vec{e}^y = \omega \vec{B}_0 = \omega B_0^x \vec{e}^x + \omega B_0^y \vec{e}^y .$$

Daraus folgt für das elektrische Feld und die magnetische Induktion

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = (E_0^x \vec{e}^x + E_0^y \vec{e}^y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, \vec{r}) &= (B_0^x \vec{e}^x + B_0^y \vec{e}^y) e^{i(kz - \omega t)} = \left(-\frac{k}{\omega} E_0^y \vec{e}^x + \frac{k}{\omega} E_0^x \vec{e}^y \right) e^{i(kz - \omega t)} \\ &= \frac{1}{c} (-E_0^y \vec{e}^x + E_0^x \vec{e}^y) e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Wir können das Koordinatensystem immer so orientieren, dass $E_0^y \equiv 0$. Dann folgt mit $E_0^x \equiv E_0$

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= E_0 \vec{e}^x e^{i(kz - \omega t)}, \\ \vec{B}(t, \vec{r}) &= \frac{1}{c} E_0 \vec{e}^y e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned}$$

Der räumliche Verlauf der elektromagnetischen Felder für festes t ist in Abb. 4.5 dargestellt.

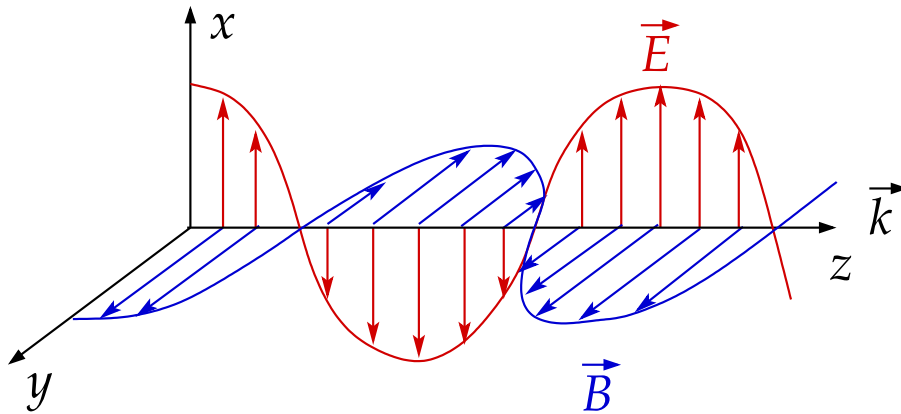


Abbildung 4.5: Orientierung des elektrischen Feldes und des magnetischen Induktionsfeldes für einen Wellenvektor $\vec{k} = k \vec{e}^z$ bei fester Zeit t .

4.1.3 Polarisation ebener Wellen

30.1.2024

Anhand von Gl. (4.29) sieht man, dass die Amplituden E_0^x , E_0^y des elektrischen Feldes die Amplituden der magnetischen Induktion vollständig festlegen. Wir betrachten daher im Folgenden nur das elektrische Feld, welches für $\vec{k} = k \vec{e}^z$ die folgende Form hat,

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= E^x(t, \vec{r}) \vec{e}^x + E^y(t, \vec{r}) \vec{e}^y, \\ E^x(t, \vec{r}) &= E_0^x e^{i(kz - \omega t)}, \\ E^y(t, \vec{r}) &= E_0^y e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Von physikalischer Bedeutung ist nur der **Realteil** von $\vec{E}(t, \vec{r})$. Um ihn zu bestimmen, müssen wir beachten, dass auch die Amplituden E_0^x , E_0^y i.a. **komplexe Zahlen** sind,

$$E_0^x = |E_0^x| e^{i\phi}, \quad E_0^y = |E_0^y| e^{i(\phi + \delta)},$$

wobei wir den **Unterschied** der Phase von E_0^y relativ zu E_0^x mit δ bezeichnet haben. Die Realteile der x - und y -Komponente von $\vec{E}(t, \vec{r})$ lauten dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} E^x(t, \vec{r}) &= |E_0^x| \cos(kz - \omega t + \phi), \\ \operatorname{Re} E^y(t, \vec{r}) &= |E_0^y| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta).\end{aligned}\quad (4.31)$$

Man unterscheidet nun gemäß dem Wert der relativen Phase δ mehrere Fälle:

(i) $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$.

Wegen $\cos(x \pm \pi) = \cos x \cos(\pm\pi) = -\cos x$ gilt

$$\operatorname{Re} E^y(t, \vec{r}) = |E_0^y| \cos(kz - \omega t + \phi \pm \pi) = -|E_0^y| \cos(kz - \omega t + \phi),$$

so dass

$$\operatorname{Re} \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0^{(\pm)} \cos(kz - \omega t + \phi), \quad (4.32)$$

wobei wir

$$\vec{E}_0^{(\pm)} \equiv |E_0^x| \vec{e}^x \pm |E_0^y| \vec{e}^y$$

definiert haben. Hier steht das obere Vorzeichen für den Fall $\delta = 0$ und das untere für den Fall $\delta = \pm\pi$. Der Amplitudenvektor $\vec{E}_0^{(\pm)}$ ist von Zeit und Ort unabhängig und hat die Länge

$$|\vec{E}_0^{(\pm)}| = \sqrt{|E_0^x|^2 + |E_0^y|^2}.$$

Das elektrische Feld schwingt also stets in einer **festen** Richtung, der sog. **Polarisationsrichtung**, die durch die Richtung von $\vec{E}_0^{(\pm)}$ vorgegeben ist. Sie ist um den Winkel $\pm\alpha$, mit

$$\tan \alpha = \frac{|E_0^y|}{|E_0^x|},$$

gegen die x -Achse geneigt, vgl. Abb. 4.6. In diesem Fall spricht man von einer **linear polarisierten Welle**.

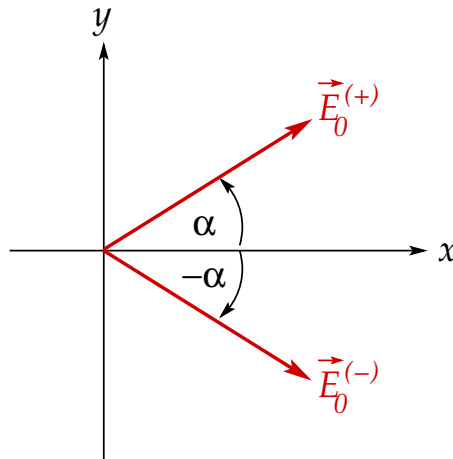


Abbildung 4.6: Polarisationsrichtungen bei linear polarisiertem Licht.

Der allgemeine Fall (4.28) kann als Linearkombination einer linear polarisierten Welle $\text{Re } E^x \vec{e}^x$ in x -Richtung und einer linear polarisierten Welle $\text{Re } E^y \vec{e}^y$ in y -Richtung aufgefaßt werden. Jede **beliebig polarisierte** ebene Welle läßt sich also als **Überlagerung zweier unabhängiger linear polarisierter** ebener Wellen darstellen.

(ii) $\delta = \pm\pi/2, |E_0^x| = |E_0^y| \equiv E_0.$

Wegen $\cos(x \pm \pi/2) = \cos x \cos(\pi/2) \mp \sin x \sin(\pi/2) = \mp \sin x$ gilt nun

$$\text{Re } E^y(t, \vec{r}) = |E_0^y| \cos\left(kz - \omega t + \phi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp E_0 \sin(kz - \omega t + \phi),$$

so dass

$$\text{Re } \vec{E}(t, \vec{r}) = E_0 [\cos(kz - \omega t + \phi) \vec{e}^x \mp \sin(kz - \omega t + \phi) \vec{e}^y], \quad (4.33)$$

wobei das obere Vorzeichen für den Fall $\delta = +\pi/2$ und das untere für den Fall $\delta = -\pi/2$ gilt.

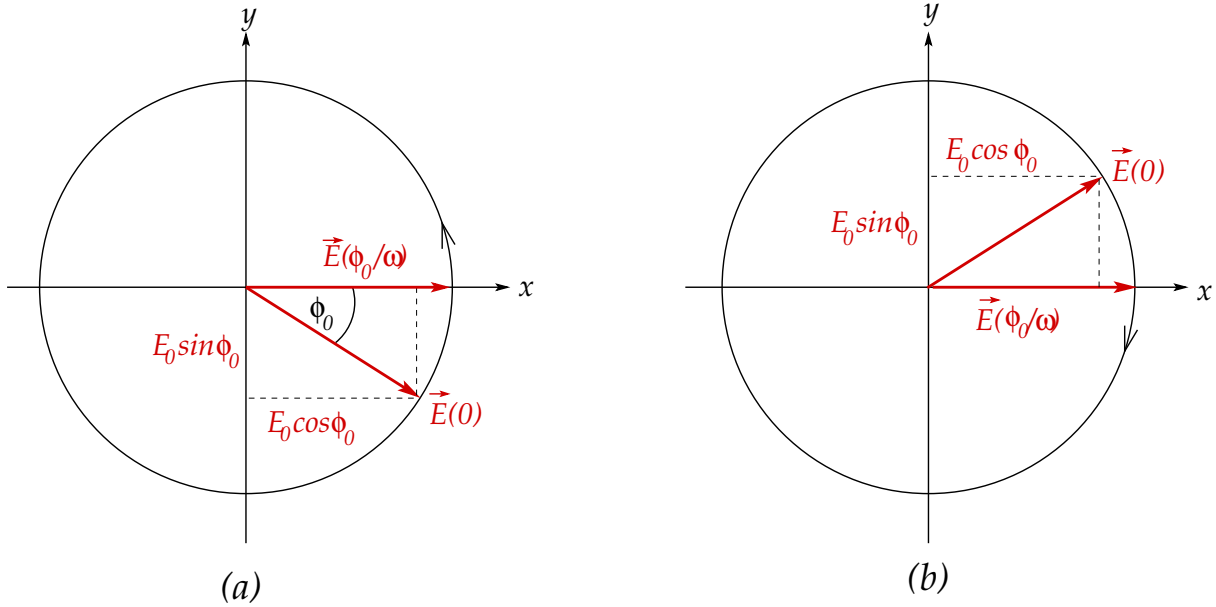


Abbildung 4.7: (a) Links- und (b) rechts-zirkular polarisiertes Licht.

Betrachten wir nun Gl. (4.33) für festes $z = z_0$, also für $kz_0 + \phi \equiv \phi_0 = \text{const.}$ Dann ist

$$\text{Re } \vec{E}(t, z_0) = E_0 [\cos(\omega t - \phi_0) \vec{e}^x \pm \sin(\omega t - \phi_0) \vec{e}^y]$$

gerade die **Parameterdarstellung eines Kreises** mit Radius E_0 . Dementsprechend spricht man von **zirkular polarisiertem Licht**. Für $\delta = \pi/2$ wird der Kreis mit Winkelgeschwindigkeit ω im mathematisch positiven, d.h. im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, während er für $\delta = -\pi/2$ im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, vgl. Abb. 4.7.

Im ersten Fall, für $\delta = \pi/2$, Abb. 4.7(a), spricht man von **links-zirkular** polarisiertem Licht, und im zweiten Fall, für $\delta = -\pi/2$, Abb. 4.7(b), von **rechts-zirkular** polarisiertem Licht. Der Wellenvektor $\vec{k} = k \vec{e}_z$ in Abb. 4.7 zeigt aus der Zeichenebene **heraus**, daher hat der Vektor des elektrischen Felds für **links-zirkular** polarisiertes Licht den Drehsinn einer **Rechtsschraube**. Man spricht von **positiver Helizität**. Umgekehrt hat der elektrische Feldstärkevektor für **rechts-zirkular** polarisiertes Licht den Drehsinn einer **Linksschraube** und man spricht von **negativer Helizität**.

(iii) $\delta = \pm\pi/2$, $|E_0^x| \neq |E_0^y|$.

Gleichung (4.31) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} E^x(t, \vec{r}) &= |E_0^x| \cos(kz - \omega t + \phi), \\ \operatorname{Re} E^y(t, \vec{r}) &= \mp |E_0^y| \sin(kz - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$1 = \left[\frac{\operatorname{Re} E^x(t, \vec{r})}{|E_0^x|} \right]^2 + \left[\frac{\operatorname{Re} E^y(t, \vec{r})}{|E_0^y|} \right]^2$$

Dies ist die **Normalform** der **Ellipsengleichung**, die Ellipse hat die Halbachsen $|E_0^x|$ und $|E_0^y|$, die in x - bzw. y -Richtung orientiert sind, vgl. Abb. 4.8. Man spricht von **elliptisch polarisiertem Licht**.

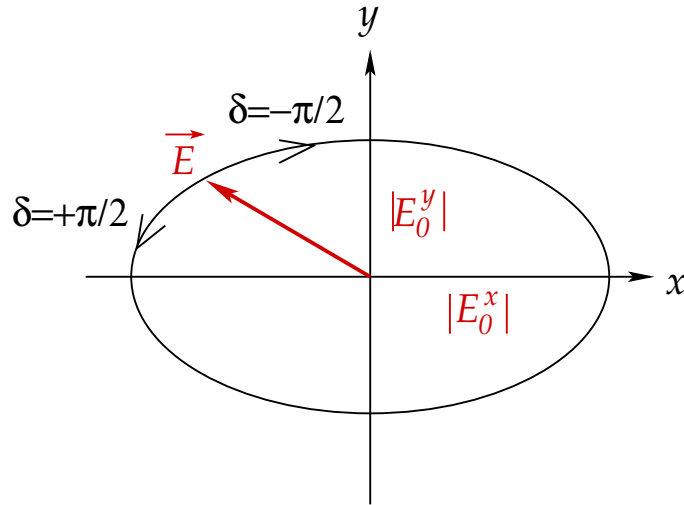


Abbildung 4.8: Elliptisch polarisiertes Licht für $\delta = \pm\pi/2$.

Mit den gleichen Argumenten wie beim zirkular polarisierten Licht kann man nun für $\delta = \pi/2$ feststellen, dass der Vektor des elektrischen Feldes die Ellipse im Gegenuhreigersinn durchläuft, bzw. für $\delta = -\pi/2$, dass er sie im Uhrzeigersinn durchläuft. Im ersten Fall spricht man von **linksdrehend** elliptisch polarisiertem Licht (positive Helizität), im zweiten von **rechtsdrehend** elliptisch polarisiertem Licht (negative Helizität).

(iv) δ beliebig, $|E_0^x| \neq |E_0^y|$.

Dies ist der allgemeine Fall **beliebiger Polarisation**. Man kann sich jedoch davon überzeugen, dass es sich auch in diesem Fall um **elliptisch polarisiertes Licht** handelt, dass jedoch nun die Ellipse gegenüber dem vorangegangenen Fall noch in der (xy) -Ebene gedreht ist, s. Abb. 4.9.

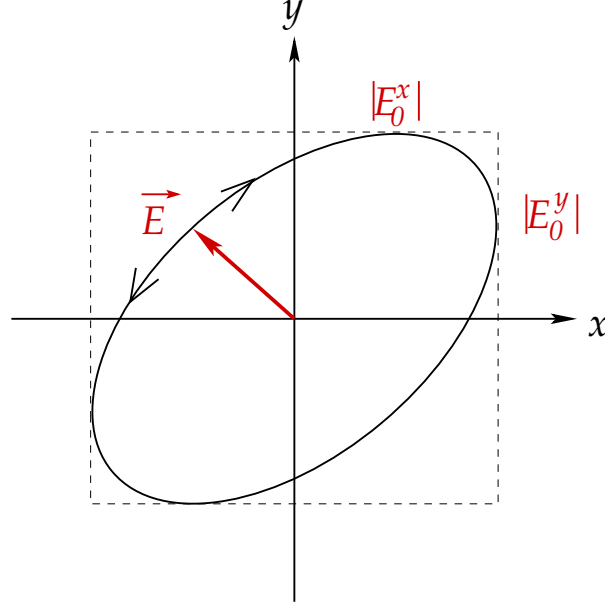


Abbildung 4.9: Elliptisch polarisiertes Licht für beliebiges δ .

Wir hatten schon gesehen, dass man beliebig polarisiertes Licht als Linearkombination zweier linear polarisierter Wellen darstellen kann. Es ist aber alternativ auch möglich, **beliebig polarisiertes Licht** als Linearkombination zweier **entgegengesetzt zirkular polarisierter** Wellen darzustellen. Dazu definieren wir die komplexwertigen Vektoren

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}^x \pm i \vec{e}^y) ,$$

so dass

$$\vec{e}^x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_+ + \vec{e}_-) , \quad \vec{e}^y = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\vec{e}_+ - \vec{e}_-) .$$

Damit gilt für den Amplitudenvektor in Gl. (4.28)

$$\vec{E}_0 = E_0^x \vec{e}^x + E_0^y \vec{e}^y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(E_0^x - i E_0^y) \vec{e}_+ + (E_0^x + i E_0^y) \vec{e}_-] .$$

Wir schreiben die komplexen Vorfaktoren der Vektoren $\vec{e}_{\pm}$ in Polardarstellung,

$$E_0^x \pm i E_0^y \equiv E_0^{(\pm)} e^{i\gamma_{\pm}} ,$$

wobei $E_0^{(\pm)} \in \mathbb{R}$, so dass für das raum-zeitabhängige elektrische Feld aus Gl. (4.28) gilt

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[E_0^{(-)} e^{i(kz - \omega t + \gamma_-)} \vec{e}_+ + E_0^{(+)} e^{i(kz - \omega t + \gamma_+)} \vec{e}_- \right] .$$

Um den physikalischen Anteil dieses Ausdrucks zu bestimmen, nehmen wir den Realteil,

$$\begin{aligned} \text{Re } \vec{E}(t, \vec{r}) &= \frac{1}{2} E_0^{(-)} [\cos(kz - \omega t + \gamma_-) \vec{e}^x - \sin(kz - \omega t + \gamma_-) \vec{e}^y] \\ &+ \frac{1}{2} E_0^{(+)} [\cos(kz - \omega t + \gamma_+) \vec{e}^x + \sin(kz - \omega t + \gamma_+) \vec{e}^y] . \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit Gl. (4.33) sehen wir, dass dies in der Tat eine Linearkombination aus zwei entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen mit den Amplituden $E_0^{(-)}$ und $E_0^{(+)}$ ist.

4.1.4 Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

Wir hatten die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\square \psi(X) = 0 \quad (4.34)$$

bereits in Abschnitt 1.7.3 diskutiert, sie lautet

$$\psi(X) = \int d^3\vec{k} \sum_{i=\pm} a_i(\vec{k}) e^{-i[\omega_i(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{r}]} , \quad (4.35)$$

vgl. Gl. (1.256), wobei

$$\omega_{\pm}(\vec{k}) = \pm c |\vec{k}| \equiv \pm \omega(k) , \quad (4.36)$$

vgl. Gl. (1.254).

$$\psi(X) = \psi(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \left\{ a_+(\vec{k}) e^{-i[\omega(k)t - \vec{k} \cdot \vec{r}]} + a_-(\vec{k}) e^{i[\omega(k)t + \vec{k} \cdot \vec{r}]} \right\} . \quad (4.37)$$

Der Integrand weist große Ähnlichkeit mit Gl. (4.11) auf. Wie dort auch gibt es zwei Anteile, die mit den Phasengeschwindigkeiten $\pm \omega(k)/k$ in $\vec{k}$ -Richtung laufen. Für die allgemeine Lösung (4.37) muss man aber noch über alle möglichen Wellenzahlen integrieren. Da die Amplitudenfunktionen nicht für alle $\vec{k}$ gleich sein müssen, hängen die Koeffizienten $a_{\pm}(\vec{k})$ nun ebenfalls von $\vec{k}$ ab.

Die Koeffizienten $a_{\pm}(\vec{k})$ lassen sich durch die Anfangsbedingungen für die Wellengleichung,

$$\psi_0(\vec{r}) \equiv \psi(0, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \left[a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} , \quad (4.38)$$

$$v_0(\vec{r}) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, \vec{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \omega(k) \left[a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} , \quad (4.39)$$

bestimmen. Offensichtlich lassen sich nämlich die rechten Seiten der Glgen. (4.38) und (4.39) als Fourier-Entwicklungen der Funktionen $\psi_0(\vec{r})$ und $v_0(\vec{r})$ auf dem Ortsraum interpretieren, mit den Fourier-Koeffizienten

2.2.2024

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k})] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{r} \psi_0(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k})] &= \frac{i}{\sqrt{2\pi^3} \omega(k)} \int d^3\vec{r} v_0(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich durch Addition bzw. Subtraktion nach $a_{\pm}(\vec{k})$ auflösen,

$$a_{\pm}(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r} \left[\psi_0(\vec{r}) \pm \frac{i}{\omega(k)} v_0(\vec{r}) \right] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (4.40)$$

Setzen wir dies in die Lösung (4.37) der homogenen Wellengleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi(t, \vec{r}) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \int d^3\vec{r}' \left\{ e^{i\omega(k)t} \left[\psi_0(\vec{r}') - \frac{i}{\omega(k)} v_0(\vec{r}') \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega(k)t} \left[\psi_0(\vec{r}') + \frac{i}{\omega(k)} v_0(\vec{r}') \right] \right\} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}.\end{aligned} \quad (4.41)$$

Wir definieren die Funktion

$$D(t, \vec{r}) \equiv -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{1}{\omega(k)} [e^{i\omega(k)t} - e^{-i\omega(k)t}] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (4.42)$$

Ihre Zeitableitung ist

$$\dot{D}(t, \vec{r}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} D(t, \vec{r}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} [e^{i\omega(k)t} + e^{-i\omega(k)t}] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (4.43)$$

Damit läßt sich Gl. (4.41) schreiben als

$$\psi(t, \vec{r}) = \int d^3\vec{r}' [\dot{D}(t, \vec{r} - \vec{r}') \psi_0(\vec{r}') + D(t, \vec{r} - \vec{r}') v_0(\vec{r}')] . \quad (4.44)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung, ausgedrückt durch die dazugehörigen Anfangsbedingungen und die Funktion $D(t, \vec{r})$.

Wir können die Funktion $D(t, \vec{r})$ physikalisch interpretieren, indem wir sie explizit berechnen. Dazu bemerken wir, dass die $\vec{r}$ -Abhängigkeit dieser Funktion lediglich im Skalarprodukt $\vec{k} \cdot \vec{r}$ auf der rechten Seite von Gl. (4.42) auftritt. Dieses ist aber rotationsinvariant, so dass wir für die $\vec{k}$ -Integration annehmen können, dass $\vec{r}$ in z -Richtung zeigt, $\vec{r} = (0, 0, r)^T$. Dann läßt sich die $\vec{k}$ -Integration bequem in Kugelkoordinaten ausführen.

Mit der Substitution $x \equiv \cos \vartheta_k$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
D(t, \vec{r}) &= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{\omega(k)} [e^{i\omega(k)t} - e^{-i\omega(k)t}] \int_{-1}^1 dx e^{ikr x} \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{c} (e^{ickt} - e^{-ickt}) \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 cr} \int_0^\infty dk (e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)} - e^{-ik(r-ct)} + e^{-ik(r+ct)}) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 cr} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}) \\
&= -\frac{1}{4\pi cr} [\delta(r+ct) - \delta(r-ct)] ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Orthonormalitätsrelation (1.229) in der Form

$$2\pi \delta(r \pm ct) \equiv \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(r \pm ct)}$$

benutzt haben. Da sowohl $r \equiv |\vec{r}| \geq 0$ als auch $c > 0$ sind, gilt

$$\begin{aligned}
D(t, \vec{r}) &= \frac{1}{4\pi cr} \begin{cases} \delta(r-ct) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \\ -\delta(r+ct) & , \quad t < 0 \end{cases} \\
&\equiv \frac{1}{4\pi cr} \delta(r - c|t|) \operatorname{sgn}(t) ,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

mit der schon bekannten Vorzeichenfunktion, deren Definitionsbereich wir um $t = 0$, mit der Zuordnung $\operatorname{sgn}(0) = 0$, erweitert haben. Die Funktion $D(t, \vec{r})$ liefert also für gegebenes t lediglich auf einer **Kugelschale** um den Ursprung mit Radius $r = c|t|$ einen Beitrag.

Betrachten wir nun den zweiten Term in Gl. (4.44). Er lässt sich wie folgt interpretieren. Wir betrachten einen bestimmten Ort $\vec{r}'$ zum Zeitpunkt $t = 0$, an dem die Anfangsbedingung $v_0(\vec{r}')$ gegeben ist. Dieser Anfangswert wird nun mit fortschreitender Zeit $t > 0$ auf einer Kugelschale mit Mittelpunkt in $\vec{r}'$ und Radius $|\vec{r} - \vec{r}'| = ct$, also einer sich mit t linear vergrößernden Kugelschale um $\vec{r}'$, weitertransportiert, vgl. Abb. 4.10. Der **gesamte** Beitrag des zweiten Terms in Gl. (4.44) zur Lösung $\psi(t, \vec{r})$ zum Zeitpunkt t am Ort $\vec{r}$ stellt eine **Überlagerung** dieser auf Kugelschalen weitertransportierten Anfangswerte $v_0(\vec{r}')$ dar, die von **allen** möglichen Orten $\vec{r}'$ ausgehen.

Es ist klar, dass zu **gegebenem** t lediglich Beiträge von Orten $\vec{r}'$ bei $\vec{r}$ einlaufen, die einen Abstand ct von $\vec{r}$ haben, sich also auf einer Kugelschale mit Radius ct um $\vec{r}$ befinden, s. Abb. 4.10. Bis zum Zeitpunkt t ist lediglich Information von Orten **innerhalb** dieser Kugelschale bei $\vec{r}$ eingelaufen. Es kann **keine** Information von Orten angekommen sein, die **außerhalb** liegen, für die also $|\vec{r} - \vec{r}'| > ct$ gilt. Die Kugelschale mit Radius ct um $\vec{r}$ stellt also den **Kausalitätshorizont** für den Ort $\vec{r}$ dar.

Der Beitrag des ersten Terms in Gl. (4.44) lässt sich ähnlich interpretieren, wenn man die Zeitableitung der Funktion $D(t, \vec{r} - \vec{r}')$, also de facto die Zeitableitung der δ -Funktion, gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| \pm ct) = \frac{\partial(|\vec{r} - \vec{r}'| \pm ct)}{\partial t} \frac{d\delta(|\vec{r} - \vec{r}'| \pm ct)}{d(|\vec{r} - \vec{r}'| \pm ct)} = \pm c \frac{\partial}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| \pm ct)$$

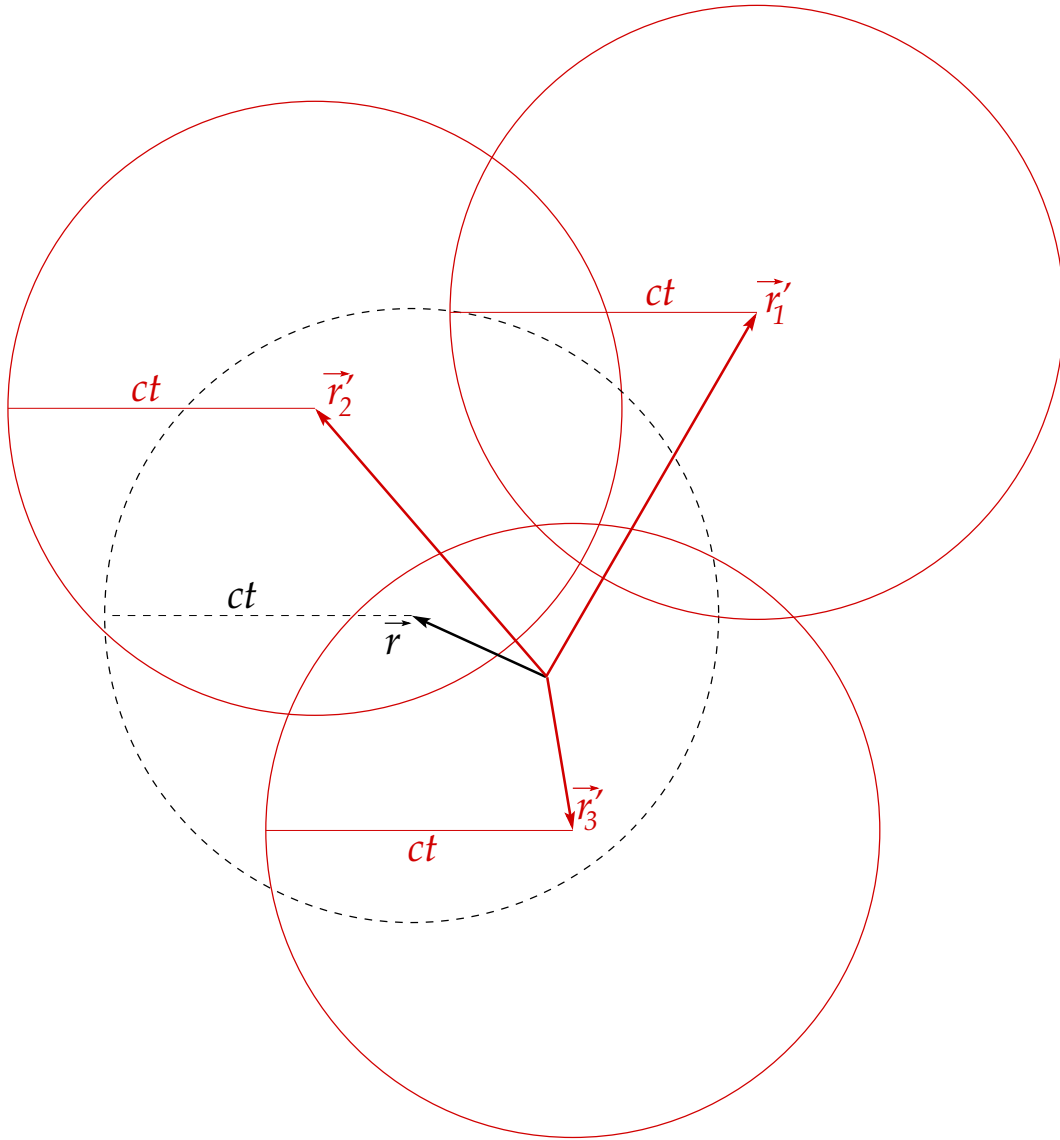


Abbildung 4.10: Kugelschalen mit Radius ct (rot) um exemplarische Punkte $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3$. Information kann den Punkt $\vec{r}$ nur von Punkten innerhalb des Kausalitätshorizonts (Kugelschale mit Radius ct um $\vec{r}$, schwarz gestrichelt) erreichen. Die Punkte $\vec{r}'_2$ und $\vec{r}'_3$ liegen zum Zeitpunkt t innerhalb des Kausalitätshorizontes von $\vec{r}$, der Punkt $\vec{r}'_1$ noch außerhalb.

in eine Ortsableitung umwandelt und dann partiell integriert.

4.1.5 Wellenpakete

Als Anwendung der allgemeinen Lösung (4.37) der homogenen Wellengleichung betrachten wir den Fall eindimensionaler Wellenausbreitung in z -Richtung,

$$a_{\pm}(\vec{k}) = (2\pi)^2 \delta(k^x) \delta(k^y) a_{\pm}(k) ,$$

und nehmen an, dass die Koeffizienten $a_{\pm}(k)$ lediglich in einem schmalen Bereich um $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}^z$ von null verschieden sind. In diesem Fall können wir die Dispersionsrelation $\omega(k)$ um den Wert k_0 entwickeln,

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots \quad (4.46)$$

Bei Lichtwellen sind in dieser Entwicklung wegen $\omega(k) = c k$ nur die ersten beiden Terme von null verschieden. Die erste Ableitung der Dispersionsrelation

$$v_g \equiv \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (4.47)$$

bezeichnet man aus Gründen, die gleich klar werden, als **Gruppengeschwindigkeit**. Für Lichtwellen gilt offensichtlich $v_g = c = \text{const.}$. Wir wollen im Nachfolgenden aber die Notation v_g beibehalten, da es auch Fälle gibt, bei denen v_g eine nicht-triviale Funktion von k ist, $v_g = v_g(k) \neq \text{const.}$.

Wir setzen nun die Entwicklung (4.46) unter Berücksichtigung, dass $\vec{k} = k \vec{e}^z$, $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}^z$ in den Exponenten der ebenen Wellen ein und vernachlässigen alle Terme, die quadratisch oder höher in $k - k_0$ sind,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega(k) t \simeq k_0 z + (k - k_0) z \pm [\omega(k_0) + v_g(k - k_0)] t = k_0 z \pm \omega(k_0) t + (k - k_0)(z \pm v_g t) .$$

Eingesetzt in die Lösung (4.37) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{r}) &= \psi_+(t, \vec{r}) + \psi_-(t, \vec{r}) , \\ \psi_{\pm}(t, \vec{r}) &\simeq e^{i[k_0 z \mp \omega(k_0) t]} \int_{-\infty}^{\infty} dk a_{\pm}(k) e^{i(k - k_0)(z \mp v_g t)} \\ &\equiv \Psi_{\pm}(z \mp v_g t) e^{i[k_0 z \mp \omega(k_0) t]} , \end{aligned} \quad (4.48)$$

6.2.2024

wobei wir die Funktion

$$\Psi_{\pm}(z \mp v_g t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a_{\pm}(k) e^{i(k - k_0)(z \mp v_g t)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dq a_{\pm}(k_0 + q) e^{i q (z \mp v_g t)} \quad (4.49)$$

definiert haben. Die Lösung (4.48) hat also die Form einer ebenen Welle mit der Frequenz $\omega(k_0)$ und der Wellenzahl k_0 , aber sie wird mit einer **raum-zeitabhängigen Amplitude** $\Psi_{\pm}(z \mp v_g t)$ **moduliert**, vgl. Abb. 4.11. Man bezeichnet eine solche Lösung als **Wellenpaket**.

Die Modulationsfunktion bewegt sich i.a. **nicht** mit der gleichen (Phasen-)Geschwindigkeit $u_{\pm} = \pm \omega(k_0)/k_0$ wie die ebene Welle, sondern mit der (Gruppen-)Geschwindigkeit v_g in $(\pm z)$ -Richtung. Konstante Werte der Modulationsfunktion führen nämlich auf die "Bewegungsgleichung"

$$z \mp v_g t = \text{const.} \quad \implies \quad z(t) = \pm v_g t + \text{const.} , \quad \frac{dz}{dt} = \pm v_g .$$

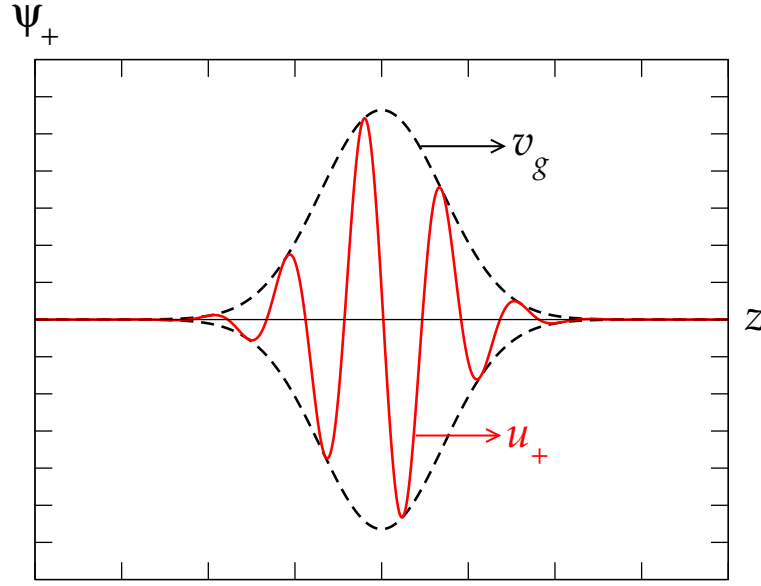


Abbildung 4.11: Wellenpaket $\psi_+(t, \vec{r})$ (rot). Die Modulationsfunktion $\Psi_+(z - v_g t)$ ist durch die gestrichelte Linie angedeutet. Die Phasengeschwindigkeit ist $u_+ = +\omega(k_0)/k_0$, die Gruppengeschwindigkeit $+v_g$.

Beispiel: Gaußsches Wellenpaket.

Wir nehmen als Gewichtsfunktion

$$a_{\pm}(k) = \frac{2}{\sigma_k \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{\sigma_k^2/4} \right] \equiv \frac{2}{\sigma_k \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{q^2}{\sigma_k^2/4} \right) . \quad (4.50)$$

Offensichtlich handelt es sich um eine **Gauß-Funktion** mit Mittelwert bei k_0 und der Breite σ_k , vgl. Abb. 4.12.

Die Normierung ist so gewählt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{\pm}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{2}{\sigma_k \sqrt{\pi}} e^{-4(k-k_0)^2/\sigma_k^2} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} = 1 , \quad (4.51)$$

wobei wir $u \equiv 2(k - k_0)/\sigma_k$ substituiert und ein elementares Integral [9] benutzt haben.

Wir bemerken, dass

$$\lim_{\sigma_k \rightarrow 0} a_{\pm}(k) = \delta(k - k_0) . \quad (4.52)$$

In diesem Fall wird die Modulationsfunktion konstant und das Wellenpaket geht in eine ebene Welle über,

$$\psi_{\pm}(t, \vec{r}) = e^{i[k_0 z \mp \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(k - k_0) e^{i(k-k_0)(z \mp v_g t)} = e^{i[k_0 z \mp \omega(k_0)t]} . \quad (4.53)$$

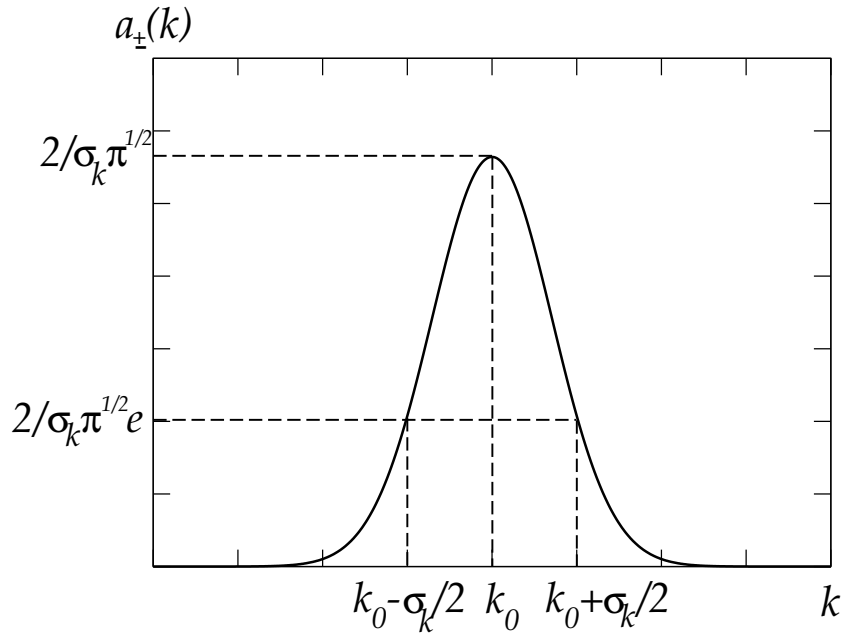


Abbildung 4.12: Gewichtsfunktion für ein Gaußsches Wellenpaket.

Wir setzen nun die Gaußsche Gewichtsfunktion (4.50) in die Modulationsfunktion (4.49) ein und machen eine quadratische Ergänzung im Exponenten,

$$\begin{aligned}
 -\frac{q^2}{\sigma_k^2/4} + i q(z \mp v_g t) &= -\frac{1}{\sigma_k^2/4} \left[q^2 - 2 i q(z \mp v_g t) \frac{\sigma_k^2}{8} \right] \\
 &= -\frac{1}{\sigma_k^2/4} \left[q - i(z \mp v_g t) \frac{\sigma_k^2}{8} \right]^2 - \frac{\sigma_k^2}{16} (z \mp v_g t)^2,
 \end{aligned}$$

so dass

$$\Psi_{\pm}(z \mp v_g t) = \exp \left[-\frac{\sigma_k^2}{16} (z \mp v_g t)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{2}{\sigma_k \sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_k^2/4} \left[q - i(z \mp v_g t) \frac{\sigma_k^2}{8} \right]^2 \right\}.$$

Es handelt sich bei dem Integral um ein **ins Komplexe** verschobenes Gauß-Integral. Man kann aber zeigen, dass diese Verschiebung nichts am Wert des Integrals ändert, es ist nach wie vor korrekt auf 1 normiert, vgl. Gl. (4.51). Das Ergebnis der Gaußschen Integration liefert also

$$\Psi_{\pm}(z \mp v_g t) = \exp \left[-\frac{\sigma_k^2}{16} (z \mp v_g t)^2 \right] \equiv \exp \left[-\frac{1}{\sigma_z^2/4} (z \mp v_g t)^2 \right].$$

Die Modulationsfunktion ist also wie die Gewichtsfunktion eine Gauß-Funktion, jetzt allerdings im **Ortsraum**. Der Mittelwert liegt bei $\pm v_g t$ und die Breite ist $\sigma_z = 8/\sigma_k$.

Offenbar ist die Modulationsfunktion umso breiter, je schmaler die Gewichtsfunktion ist, $\sigma_z \sigma_k = 8 = \text{const.}$, und umgekehrt. Für $\sigma_k \rightarrow 0$ hatten wir schon gesehen, dass die Gewichtsfunktion gegen die δ -Funktion strebt, Gl. (4.52), und damit die Modulationsfunktion gegen eine Konstante geht. Das Wellenpaket wird unendlich breit und konvergiert gegen die **unmodulierte** ebene Welle, vgl. Gl. (4.53).

Für $\sigma_k \rightarrow \infty$ dagegen strebt die Gewichtsfunktion gegen eine (verschwindend kleine) Konstante,

$$a(k) \simeq \frac{2}{\sigma_k \sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{(k - k_0)^2}{\sigma_k^2/4} + O(\sigma_k^{-4}) \right] \simeq \frac{2}{\sigma_k \sqrt{\pi}} \rightarrow 0 ,$$

alle Wellenvektoren werden mit demselben (verschwindend geringen) Gewicht überlagert, aber das Wellenpaket wird beliebig scharf an der Stelle $z = \pm v_g t$ im Ortsraum fokussiert,

$$\Psi_{\pm}(z \mp v_g t) \rightarrow \delta(z \mp v_g t) .$$

4.1.6 Aberration und Doppler-Effekt

Lichtwellen, die von einem bewegten Objekt ausgesendet werden, erscheinen je nach Bewegungsrichtung des Objektes in Frequenz $\nu = \omega/(2\pi) = c/\lambda$ und Wellenvektor $\vec{k}$, $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$, verschoben. Die Verschiebung der Frequenz bezeichnet man als **Doppler-Effekt**, die Verschiebung des Wellenvektors als **Aberration**. Beide Effekte lassen sich sehr einfach durch eine **Lorentz-Transformation** des 4-Wellenvektors ableiten.

Wir betrachten eine ebene Welle mit Kreisfrequenz ω und Wellenvektor $\vec{k}$, die von einer im Ursprung eines Systems Σ ruhenden Lichtquelle unter einem Winkel θ zur z -Achse ausgesendet wird und von einem im Ursprung des Systems Σ' ruhenden Beobachter gemessen wird. Das System Σ' bewege sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}^z$. Der Beobachter wird diese ebene Welle mit einer anderen Kreisfrequenz ω' und mit einem anderen Wellenvektor $\vec{k}'$ messen, welcher mit der z' -Achse den Winkel θ' einschließt, vgl. Abb. 4.13.

Die Lorentz-Transformation des 4-Wellenvektors lautet

$$k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} k^{\nu} ,$$

bzw. mit den Glgen. (1.35) und (1.241),

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k^z \right) , \quad (4.54)$$

$$k'^x = k^x ,$$

$$k'^y = k^y ,$$

$$k'^z = \gamma \left(k^z - \beta \frac{\omega}{c} \right) . \quad (4.55)$$

Andererseits entnehmen wir der Abb. 4.13

$$k^z = k \cos \theta \equiv \frac{\omega}{c} \cos \theta , \quad (4.56)$$

$$k'^z = k' \cos \theta' \equiv \frac{\omega'}{c} \cos \theta' , \quad (4.57)$$

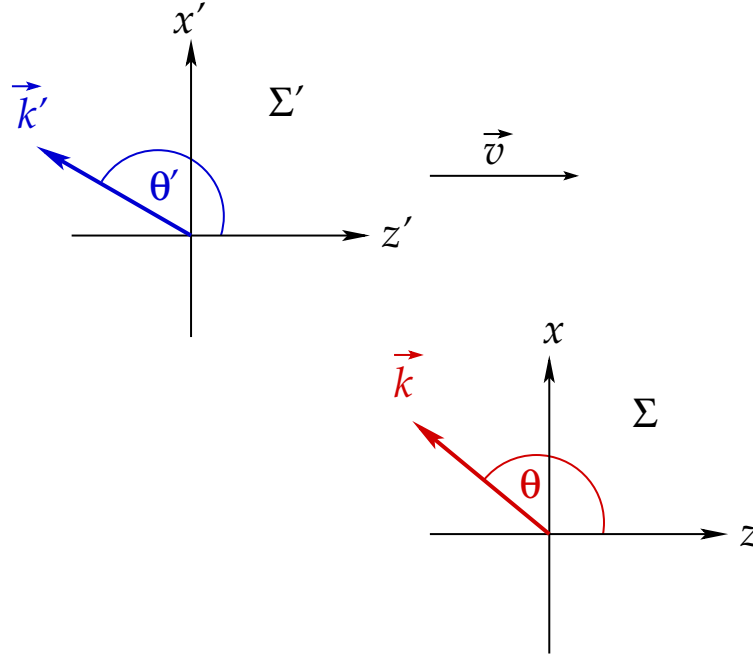


Abbildung 4.13: Messung von in Σ ausgesandten Lichtwellen in einem relativ dazu bewegten System Σ' .

wobei wir von der Dispersionsrelation $\omega = ck$, Gl. (4.13), Gebrauch gemacht haben. Setzen wir die erste Relation (4.56) in Gl. (4.54) ein, so erhalten wir

$$\omega' = \gamma \left(\omega - c\beta \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) = \omega \gamma (1 - \beta \cos \theta) , \quad (4.58)$$

bzw. ausgedrückt durch die Frequenzen ν' , ν ,

$$\nu' = \nu \gamma (1 - \beta \cos \theta) . \quad (4.59)$$

Mit der zweiten Relation (4.57), eingesetzt in Gl. (4.55), ergibt sich andererseits

$$\frac{\omega'}{c} \cos \theta' = \gamma \left(\frac{\omega}{c} \cos \theta - \beta \frac{\omega}{c} \right) = \frac{\omega}{c} \gamma (\cos \theta - \beta) , \quad (4.60)$$

bzw. ausgedrückt durch die Frequenz

$$\nu' \cos \theta' = \nu \gamma (\cos \theta - \beta) . \quad (4.61)$$

Man kann die Frequenzen ν' , ν aus den Glgen. (4.59), (4.61) eliminieren,

$$\cos \theta' = \frac{\nu}{\nu'} \gamma (\cos \theta - \beta) = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} , \quad (4.62)$$

bzw. nach $\cos \theta$ aufgelöst

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} . \quad (4.63)$$

Die Glgen. (4.62), (4.63) sind die sog. **Aberrationsgleichungen**. Sie geben an, wie der Winkel im System des Beobachters vom Winkel im System der Lichtquelle abhängt und umgekehrt. Abbildung 4.14 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen $\cos \theta$ und $\cos \theta'$.

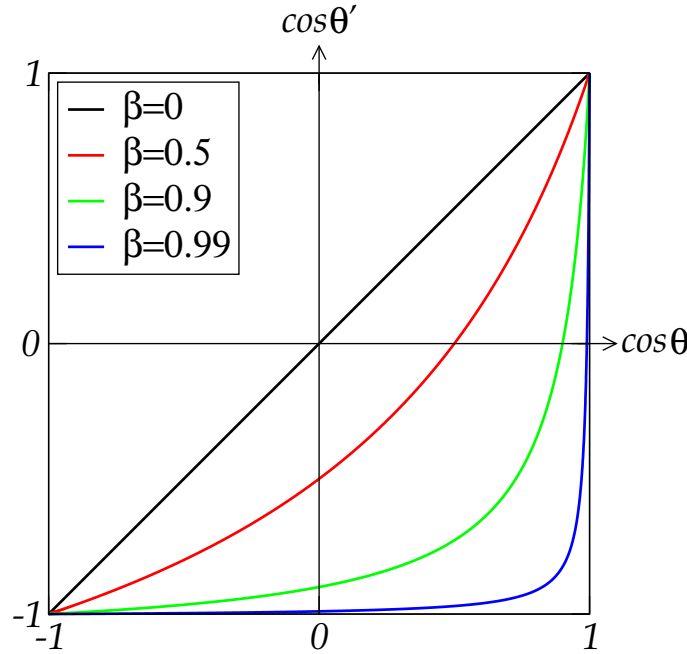


Abbildung 4.14: Zusammenhang zwischen $\cos \theta$ und $\cos \theta'$.

Aus Abb. 4.14 entnimmt man, dass $\forall \beta > 0$ der Winkel θ' stets **größer** ist als der Winkel θ . Z.B. wird Licht, welches in Σ unter 90° ausgesendet wird, in Σ' unter einem Winkel $\theta' > 90^\circ$ registriert, scheint also von **vorne** zu kommen. Im Moment des Vorbeiflugs des Beobachters an der Lichtquelle hat dies den Effekt, dass die Lichtquelle sich noch **vor** dem Beobachter zu befinden scheint, vgl. Abb. 4.15(a). Der Effekt wird umso drastischer, je größer die Geschwindigkeit des Beobachters ist. Je schneller man sich relativ zur Lichtquelle bewegt, desto stärker erscheint das Licht nach vorne fokussiert. Umgekehrt gilt, dass Licht in Σ' unter $\theta' = 90^\circ$ detektiert wird, also scheinbar direkt von der Seite kommt, wenn der Beobachter die Lichtquelle schon lange passiert hat, vgl. Abb. 4.15(b).

Mit der Aberration geht auch eine Frequenzverschiebung einher. Setzen wir die zweite Aberrationsgleichung (4.63) in Gl. (4.59) ein, um $\cos \theta$ zu eliminieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{\nu} &= \gamma \left(1 - \beta \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} \right) = \gamma \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta \cos \theta'} \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta \cos \theta'}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Die relative Änderung der Frequenz ν'/ν ist in Abb. 4.16 als Funktion von $\cos \theta'$ dargestellt. Man erkennt, dass das Licht für große θ' , also wenn man sich auf die Lichtquelle

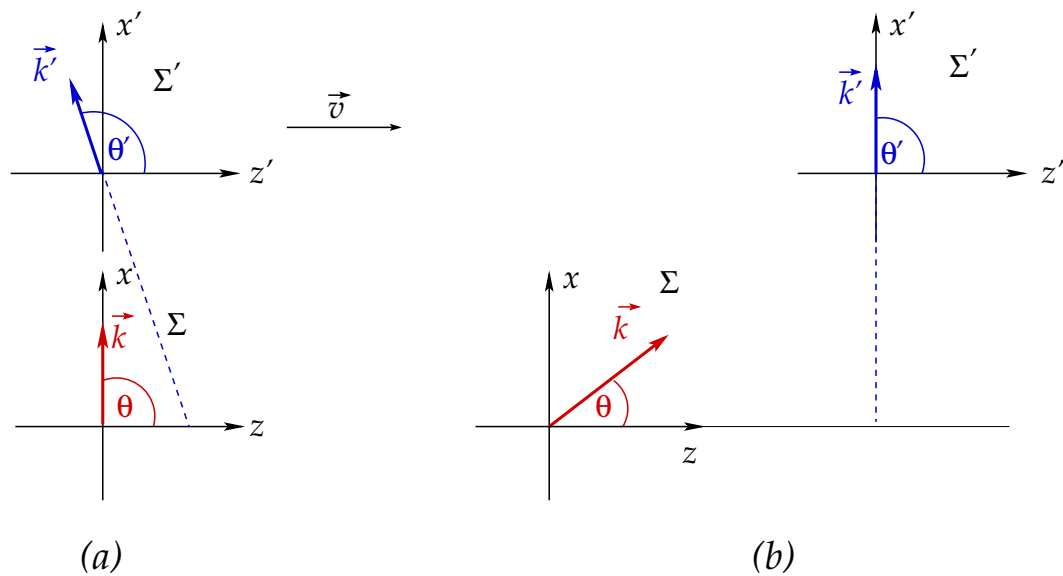


Abbildung 4.15: (a) Licht, das in Σ unter $\theta = 90^\circ$ ausgesendet wird, wird in Σ' unter $\theta' > 90^\circ$ registriert. Die Lichtquelle scheint noch vor dem Beobachter zu liegen, obwohl er sie gerade passiert. (b) Licht kommt scheinbar direkt von der Seite, unter $\theta' = 90^\circ$, obwohl man die Lichtquelle schon lange passiert hat, $\theta < 90^\circ$.

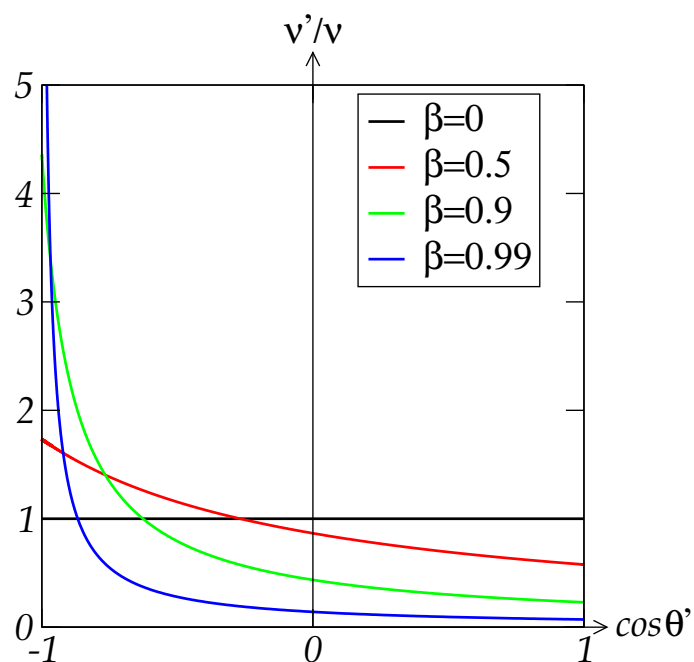


Abbildung 4.16: Frequenzverschiebung ν'/ν als Funktion von $\cos \theta'$.

zubewegt, zu **größeren** Frequenzen $\nu'/\nu > 1$ verschoben ist. Dies ist die sog. **Blauverschiebung**. Der Effekt ist am größten für den Wert $\cos \theta' = -1$; dort gilt

$$\frac{\nu'}{\nu}(\cos \theta' = -1) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2}} = \sqrt{\frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{(1 - \beta)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Wenn man sich von der Lichtquelle **wegbewegt**, also für kleine Winkel θ , so ist das Licht zu **kleineren** Frequenzen $\nu'/\nu < 1$ verschoben. Dies nennt man **Rotverschiebung**. Der Effekt ist am größten für $\cos \theta' = 1$; dort gilt

$$\frac{\nu'}{\nu}(\cos \theta' = 1) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2}} = \sqrt{\frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{(1 + \beta)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Insgesamt bezeichnet man diese Verschiebung der Frequenzen in Abhängigkeit der relativen Bewegung zur Lichtquelle als **Doppler-Effekt**. Man beachte, dass das Licht **auch** rotverschoben ist, wenn man es unter $\theta' = 90^\circ$ beobachtet. Dies ist der sog. **relativistische Doppler-Effekt**,

$$\frac{\nu'}{\nu}(\cos \theta' = 0) = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} < 1 \quad \forall \beta > 0.$$

Eigentlich würde man erwarten, dass sich transversal zur Boost-Richtung bewegendes Lichtwellen durch die Lorentz-Transformation unbeeinflusst bleiben. Dies ist zwar prinzipiell richtig, aber wie wir bei der Diskussion der Aberration gesehen haben, vgl. Abb. 4.15(b), wird Licht, das unter $\theta' = 90^\circ$ in Σ' beobachtet wird, eigentlich unter einem Winkel $\theta < 90^\circ$ in Σ emittiert. Der Wellenvektor $\vec{k}$ hat dann sehr wohl eine Komponente in Boost-Richtung, die durch die Lorentz-Transformation verändert wird.

4.2 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

4.2.1 Inhomogene Wellengleichung

9.2.2024

Wir kommen nun zur Lösung der Maxwell-Gleichungen im Fall nichtverschwindender, raum-zeitabhängiger Ladungsdichte und Ladungsstromdichte

$$\rho(t, \vec{r}) \neq 0, \quad \vec{j}(t, \vec{r}) \neq 0.$$

Dies ist der denkbar allgemeinste Fall. Es ist zweckmäßig, zunächst die Bewegungsgleichungen für die **Potentiale** $\varphi(t, \vec{r})$, $\vec{A}(t, \vec{r})$ zu lösen und daraus dann das elektrische Feld $\vec{E}(t, \vec{r})$ und das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}(t, \vec{r})$ zu berechnen. Natürlich sind die Potentiale nicht eindeutig bestimmt, man kann eine bestimmte **Eichung** wählen, um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen. Hier betrachten wir den Fall der **Lorenz-Eichung**, die Bewegungsgleichungen für die Potentiale sind also die **inhomogenen Wellengleichungen**

$$\square \varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(t, \vec{r}), \quad (4.65)$$

$$\square \vec{A}(t, \vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(t, \vec{r}), \quad (4.66)$$

vgl. Glgen. (1.98). Wir bemerken zunächst, dass die Gleichungen für $\varphi(t, \vec{r})$ und für die drei Komponenten von $\vec{A}(t, \vec{r})$ **entkoppeln**. Generell sind diese Gleichungen vom Typ

$$\square \psi(t, \vec{r}) = \sigma(t, \vec{r}) . \quad (4.67)$$

Wie in Abschnitt 1.7.4 besprochen, setzt sich die **allgemeine Lösung** einer **inhomogenen** linearen partiellen Differentialgleichung zusammen aus der **allgemeinen Lösung** der **homogenen** linearen partiellen Differentialgleichung und einer **speziellen Lösung** der **inhomogenen** Differentialgleichung. Die Lösung der homogenen Wellengleichung haben wir in Abschnitt 4.1.4 ausführlich diskutiert. Wir müssen uns also lediglich eine spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung beschaffen. Dazu benutzen wir wieder die **Methode der Greenschen Funktionen**, vgl. Abschnitt 1.7.4.

Die Differentialgleichung für die Greensche Funktion der Wellengleichung lautet, vgl. Gl. (1.262),

$$\square_X G(X, X') = c \delta^{(4)}(X - X') , \quad (4.68)$$

wobei wir die Konstante a in Gl. (1.262) gleich der Lichtgeschwindigkeit c gesetzt haben. Da wir an einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (4.67) interessiert sind, können wir außerdem annehmen, dass $G(X, X') \equiv G(X - X')$, also nur von der Differenz $X - X'$ der Argumente abhängt, vgl. Diskussion in Abschnitt 1.7.4. Wir benutzen im Folgenden wieder die nicht-kovariante Notation $G(X - X') \equiv G(t - t', \vec{r} - \vec{r}')$. Damit lautet eine spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung (4.67)

$$\psi(t, \vec{r}) = \int dt' d^3\vec{r}' G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') \sigma(t', \vec{r}') , \quad (4.69)$$

vgl. Gl. (1.269) (mit $a = c$ und $dx'_0 = c dt'$).

Wir bestimmen nun die Greensche Funktion $G(t - t', \vec{r} - \vec{r}')$. Dazu benutzen wir Gl. (1.266) mit $\tilde{D}(K) \equiv -K^2$, vgl. Gl. (1.254), also

$$\begin{aligned} G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') &\equiv G(X - X') \\ &= \frac{c}{(2\pi)^4} \int d^4K e^{-iK \cdot (X - X')} \frac{1}{-K^2} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^4} \int d\frac{\omega}{c} d^3\vec{k} e^{-i[(\omega/c)c(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] } \frac{1}{(\omega/c)^2 - \vec{k}^2} \\ &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d\omega d^3\vec{k} e^{-i[\omega(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] } \frac{1}{\omega^2 - c^2\vec{k}^2} . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Man beachte, dass man hier über **alle** Kreisfrequenzen ω und **alle** 3-Wellenvektoren $\vec{k}$ integriert, also auch solche, die **nicht** die Dispersionsrelation (1.254) erfüllen. Daher ist das Integral auf der rechten Seite **mit Ausnahme der Pole** $\omega_{\pm} = \pm ck = \pm\omega(k)$ des Integranden wohldefiniert. Wie man diese Pole umgeht, um einen insgesamt wohldefinierten Ausdruck zu erhalten, werden wir im Folgenden noch besprechen. Wir können mit Hilfe der Faktorisierung

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega^2(k)} = -\frac{1}{2\omega(k)} \left[\frac{1}{\omega + \omega(k)} - \frac{1}{\omega - \omega(k)} \right] \quad (4.71)$$

noch einen alternativen Ausdruck für das Resultat (4.70) erhalten,

$$G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \frac{c^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega(k)} \left[\frac{1}{\omega + \omega(k)} - \frac{1}{\omega - \omega(k)} \right] e^{-i[\omega(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')]}. \quad (4.72)$$

Die **allgemeine Lösung** der inhomogenen Differentialgleichung erhält man, indem man noch die allgemeine Lösung der **homogenen Wellengleichung** dazuaddiert. Als Greensche Funktion geschrieben lautet diese

$$G_{\text{hom}}(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\vec{k} \left\{ a_+(\vec{k}) e^{-i[\omega(k)(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')] } + a_-(\vec{k}) e^{i[\omega(k)(t-t') + \vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')] } \right\},$$

vgl. Gl. (4.37). Die Funktion $G_{\text{hom}}(t-t', \vec{r}-\vec{r}')$ zu Gl. (4.72) hinzu zu addieren, ist aber nicht erforderlich, da wir auch nur **eine spezielle** Lösung vom Typ (4.69) suchen.

Wir betrachten nun die ω -Integration in Gl. (4.72) etwas genauer. Offenbar besitzt der Integrand zwei **einfache Pole** auf der ω -Achse, bei $\pm\omega(k)$. Über diese darf man nicht einfach hinweg integrieren, es ist eine **Vorschrift zur Umgehung der Pole** nötig. Verschiedene Vorschriften sind denkbar, z.B. die Berechnung des ω -Integrals als **Hauptwertintegral**. Dies ist aber nicht die Vorschrift, die hier zur Anwendung kommt.

Zur Bestimmung der **korrekten** Vorschrift betrachten wir noch einmal Gl. (4.69). Diese Gleichung kann man so interpretieren, dass die Inhomogenität $\sigma(t', \vec{r}')$ eine **Störung** beim Raum-Zeit-Punkt $(t', \vec{r}')$ symbolisiert, die mit Hilfe der Greenschen Funktion $G(t-t', \vec{r}-\vec{r}')$ zum Raum-Zeit-Punkt $(t, \vec{r})$ propagiert wird. In der Tat bezeichnet man den Typ Greensche Funktion, den wir hier betrachten, in der Quantenfeldtheorie auch als **Propagator**. Um $\psi(t, \vec{r})$ zu bestimmen, müssen wir dann noch über alle möglichen Raum-Zeit-Punkte $(t', \vec{r}')$, an denen Störungen $\sigma(t', \vec{r}')$ auftreten, integrieren; diese überlagern sich also nach Propagation am Raum-Zeit-Punkt $(t, \vec{r})$. Vgl. hierzu auch Abb. 4.10.

Offenbar kann keine Information über die Störung $\sigma(t', \vec{r}')$ zu einem Zeitpunkt $t < t'$ zum Punkt $\vec{r}$ gelangt sein. Mit anderen Worten, die Propagation der Störung muss **kausal** erfolgen, zuerst erfolgt die Ursache (die Störung) bei $(t', \vec{r}')$, dann die Wirkung (die Störung wird propagiert). Dies erreicht man ganz einfach dadurch, dass man fordert, dass die Greensche Funktion für $t-t' < 0$ verschwindet. Dies definiert die sog. **retardierte Greensche Funktion**,

$$G_R(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \equiv G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \theta(t-t'). \quad (4.73)$$

Das Pendant ist die sog. **avancierte Greensche Funktion**, die für $t-t' > 0$ verschwindet,

$$G_A(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \equiv G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') \theta(t'-t). \quad (4.74)$$

Wegen $\theta(x) + \theta(-x) = 1$ gilt

$$G(t-t', \vec{r}-\vec{r}') = G_R(t-t', \vec{r}-\vec{r}') + G_A(t-t', \vec{r}-\vec{r}').$$

Die retardierte Greensche Funktion läßt sich nun durch eine bestimmte Vorschrift, wie die Pole bei $\pm\omega(k)$ zu umgehen sind, bestimmen. Wir verschieben den Integrationsweg um $+i\delta$ in die **obere Halbebene** der **komplexen ω -Ebene** oder, was im Endresultat das

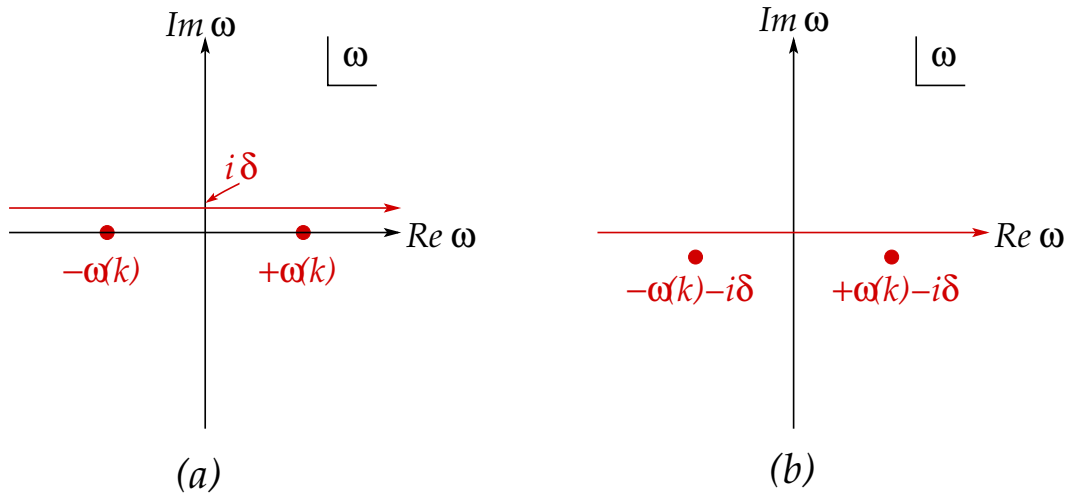


Abbildung 4.17: (a) Verschiebung des Integrationsweges (rot) um $+i\delta$. Der Integrationsweg verläuft parallel zur reellen ω -Achse. (b) Verschiebung der Pole um $-i\delta$. Der Integrationsweg verläuft entlang der reellen ω -Achse.

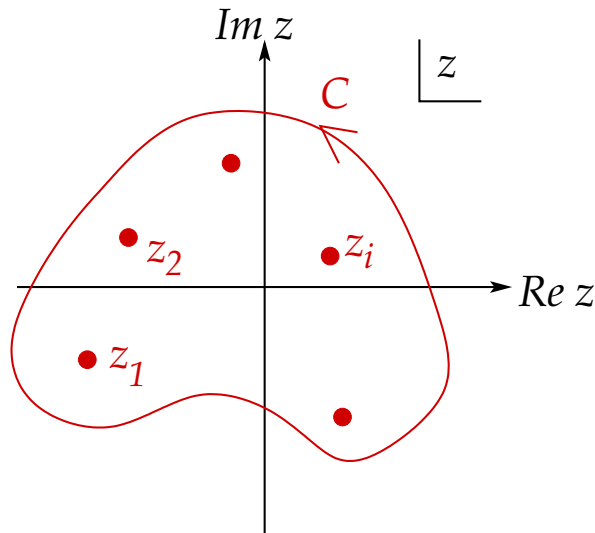


Abbildung 4.18: Zum Residuensatz.

gleiche Ergebnis liefert, wir verschieben beide Pole um $-i\delta$ in die **untere Halbebene** der komplexen ω -Ebene, vgl. Abb. 4.17. Im Folgenden werden wir allerdings nur Alternative (a) weiter diskutieren.

Das ω -Integral in Gl. (4.72) ist nun wohldefiniert und kann berechnet werden. Dies geschieht mit Hilfe des aus der **Funktionentheorie** bekannten **Residuensatzes**:

Sei C eine geschlossene, im mathematisch positiven Sinn orientierte Kurve in der komplexen z -Ebene und $F(z)$ eine mit Ausnahme von isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_n$

reguläre Funktion im Inneren von $\mathcal{C}$, vgl. Abb. 4.18. Dann gilt

$$\oint_{\mathcal{C}} dz F(z) = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(F, z_i) , \quad (4.75)$$

wobei $\text{Res}(F, z_i)$ das **Residuum** der Funktion $F(z)$ an der Stelle z_i ist.

Wir müssen für unsere Zwecke nur wissen, dass das Residuum einer komplexen Funktion $F(z) \equiv f(z)/g(z)$ an einer Stelle z_i sich wie folgt berechnet,

$$\text{Res}(F, z_i) \equiv \frac{f(z_i)}{g'(z_i)} , \quad (4.76)$$

wobei $f(z), g(z)$ reguläre Funktionen mit den Eigenschaften $f(z_i) \neq 0$ und $g(z_i) = 0, g'(z_i) \neq 0$ sind.

Angewendet auf das ω -Integral in Gl. (4.72) würden wir identifizieren

$$f(z) \longrightarrow f(\omega) \equiv e^{-i\omega(t-t')} , \quad g(z) \longrightarrow g(\omega) \equiv \omega^2 - \omega^2(k) ,$$

wobei wir die Faktorisierung (4.71) des Nenners rückgängig gemacht haben. Das Residuum des Integranden an den Nullstellen $\pm\omega(k)$ des Nenners $g(\omega)$ ist also

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, \pm\omega(k)\right) = \pm \frac{1}{2\omega(k)} e^{\mp i\omega(k)(t-t')} . \quad (4.77)$$

Um den Residuensatz anwenden zu können, müssen wir allerdings das ω -Integral, das parallel zur reellen ω -Achse verläuft, zu einem geschlossenen Konturintegral erweitern. Wir erreichen dies dadurch, dass wir einen Halbkreis zum Integral hinzuaddieren, der im Unendlichen verläuft. Natürlich muss der Beitrag des Halbkreises zum Integral verschwinden, damit wir den Wert des Integrals nicht verändern.

Damit dies der Fall ist, legen wir für $t - t' > 0$ den Halbkreis in die **untere** Halbebene, schließen die Kontur also in der unteren Halbebene, vgl. Abb. 4.19(a). Genau dann nämlich verschwindet die Funktion $f(\omega)$ auf diesem Halbkreis. Um dies einzusehen, parametrisieren wir auf dem Halbkreis $\omega = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, wobei der Winkel φ von 0 bis $-\pi$ läuft. Dann gilt

$$f(\omega) = e^{-iR \cos \varphi (t-t') + R \sin \varphi (t-t')} \sim e^{-R \sin(-\varphi) (t-t')} \longrightarrow 0 \quad (R \longrightarrow \infty, t - t' > 0) ,$$

da $\sin(-\varphi) > 0$ für $\varphi \in [-\pi, 0]$.

Für $t - t' < 0$ dagegen müssen wir die Kontur in der **oberen** Halbebene schließen, vgl. Abb. 4.19(b), denn dann gilt mit der gleichen Parametrisierung auf dem Halbkreis (jetzt läuft φ von 0 bis π)

$$f(\omega) = e^{-iR \cos \varphi (t-t') + R \sin \varphi (t-t')} \sim e^{-R \sin \varphi (t-t')} \longrightarrow 0 \quad (R \longrightarrow \infty, t - t' < 0) ,$$

da $\sin \varphi > 0$ für $\varphi \in [0, \pi]$.

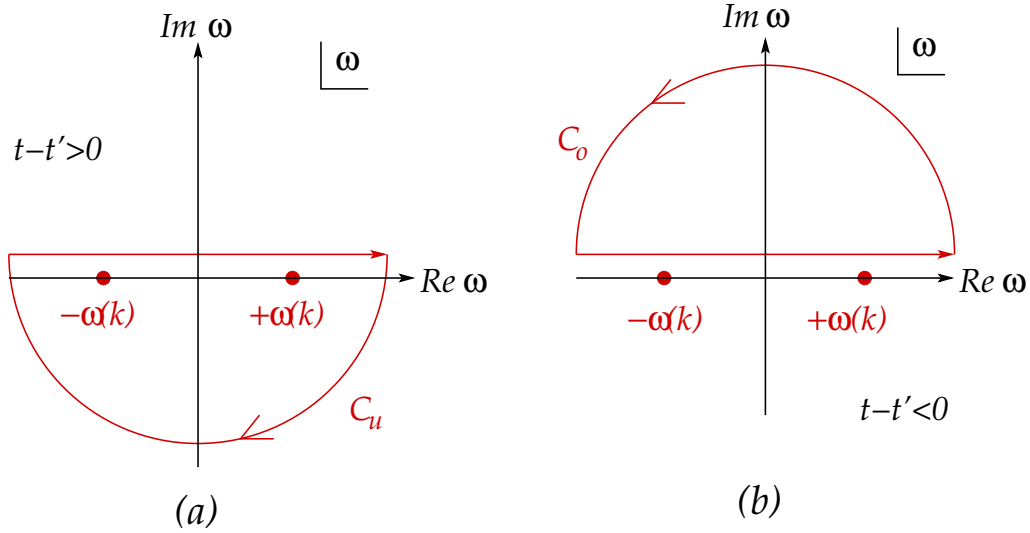


Abbildung 4.19: (a) $t - t' > 0$: Schließen des Integrationsweges in der unteren Halbebene.
 (b) $t - t' < 0$: Schließen des Integrationsweges in der oberen Halbebene.

Nun können wir den Residuensatz (4.75) auf das ω -Integral in Gl. (4.72) anwenden. Für $t - t' > 0$ gilt mit Gl. (4.77)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 - \omega^2(k)} e^{-i\omega(t-t')} &= \oint_{C_u} d\omega \frac{1}{\omega^2 - \omega^2(k)} e^{-i\omega(t-t')} \\
 &= -2\pi i \left[-\frac{e^{i\omega(k)(t-t')}}{2\omega(k)} + \frac{e^{-i\omega(k)(t-t')}}{2\omega(k)} \right] \\
 &= \frac{2\pi i}{2\omega(k)} \left[e^{i\omega(k)(t-t')} - e^{-i\omega(k)(t-t')} \right], \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

wobei das zusätzliche Vorzeichen in der zweiten Zeile daher rührt, dass die Kontur C_u im mathematisch **negativen** Sinn durchlaufen wird.

Für $t - t' < 0$ liefert der Residuensatz dagegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 - \omega^2(k)} e^{-i\omega(t-t')} = \oint_{C_o} d\omega \frac{1}{\omega^2 - \omega^2(k)} e^{-i\omega(t-t')} \equiv 0, \quad (4.79)$$

denn der Integrand hat innerhalb der Kontur C_o **keine** Singularitäten, vgl. Abb. 4.19(b).

Eingesetzt in Gl. (4.72) ergibt sich aufgrund der speziellen Vorschrift zur Umgehung der Pole, d.h. aufgrund der Wahl der Integrationskontur die **retardierte Greensche Funktion**,

$$\begin{aligned}
 G_R(t - t', \vec{r} - \vec{r}') &= -\frac{ic^2}{2(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{1}{\omega(k)} \left[e^{i\omega(k)(t-t')} - e^{-i\omega(k)(t-t')} \right] e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \theta(t - t') \\
 &\equiv c^2 D(t - t', \vec{r} - \vec{r}') \theta(t - t'), \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

wobei wir die Definition (4.42) der schon aus der Diskussion der homogenen Wellengleichung bekannten Funktion $D(t, \vec{r})$ benutzt und die Tatsache, dass die Konturintegration

für $t - t' < 0$ verschwindet, mit Hilfe der θ -Funktion berücksichtigt haben. Wir merken noch an, dass wir im Fall der **avancierten Greenschen Funktion** die Integrationskontur um $-i\delta$, also in die **untere** Halbebene verschieben müssen.

Durch Vergleich mit Gl. (4.73) überprüfen wir, dass wir mit Gl. (4.80) in der Tat die retardierte Greensche Funktion berechnet haben. Benutzen wir noch das Resultat (4.45) für die Funktion $D(t, \vec{r})$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} G_R(t - t', \vec{r} - \vec{r}') &= c^2 D(t - t', \vec{r} - \vec{r}') \theta(t - t') \\ &= \frac{c}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t - t')) \theta(t - t') \\ &= \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - t'\right) \theta(t - t') . \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die θ -Funktion eigentlich überflüssig ist, denn da $|\vec{r} - \vec{r}'|/c \geq 0$, liegt die Nullstelle des Arguments der δ -Funktion automatisch im Bereich, wo $t > t'$. Definieren wir noch die sog. **retardierte Zeit**

$$t_R \equiv t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} , \quad (4.81)$$

so schreibt sich das Resultat für die retardierte Greensche Funktion sehr kompakt als

$$G_R(t - t', \vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t_R - t') . \quad (4.82)$$

Die spezielle Lösung (4.69) der inhomogenen Wellengleichung lautet also

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{r}) &= \int dt' d^3\vec{r}' G_R(t - t', \vec{r} - \vec{r}') \sigma(t', \vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\sigma(t_R, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Die Interpretation dieses Resultats ist ganz ähnlich wie im Zusammenhang mit Gl. (4.44) erläutert, vgl. auch Abb. 4.10. Die retardierte Greensche Funktion **propagiert** Information über die Inhomogenität $\sigma(t', \vec{r}')$ auf Kugelschalen um $\vec{r}'$ mit Radius $c(t - t')$. Am Ort $\vec{r}$ trifft zum Zeitpunkt t Information über die Inhomogenität am Ort $\vec{r}'$ zur **retardierten Zeit** $t_R < t$ ein, also über den Wert der Inhomogenität zu einem früheren Zeitpunkt, denn die Geschwindigkeit der Informationsübertragung ist zwar sehr groß, nämlich die Lichtgeschwindigkeit c , aber eben dennoch nicht unendlich. Die spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung ist die Superposition aller $\sigma(t_R, \vec{r}')$, d.h. das Integral über alle möglichen Orte $\vec{r}'$, an denen sich die Inhomogenität $\sigma(t_R, \vec{r}')$ zum retardierten Zeitpunkt t_R befindet. Man beachte, dass letzterer über Gl. (4.81) von $\vec{r}'$ abhängt. Je weiter entfernt $\vec{r}'$ von $\vec{r}$ ist, desto früher der Zeitpunkt t_R .

Zum Abschluß geben wir noch die speziellen Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen für die elektromagnetischen Potentiale an,

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(t_R, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (4.84)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(t_R, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (4.85)$$

Man beachte, dass diese Ausdrücke – vielleicht abgesehen von der retardierten Zeit – relativ offensichtliche Verallgemeinerungen der Glgen. (3.13), (3.15) für die elektrostatischen bzw. magnetostatischen Potentiale darstellen. Aus den Glgen. (4.84), (4.85) berechnet man mit Hilfe der Glgen. (1.42), (1.45) das elektrische Feld und das magnetische Induktionsfeld.

4.2.2 Liénard–Wiechert–Potentiale

Wir betrachten nun eine Anwendung des im letzten Abschnitts Besprochenen, nämlich den Fall, bei dem die Ladungsdichte und Ladungsstromdichte der einer bewegten Punktladung der Stärke q entsprechen,

$$\rho(t', \vec{r}') = q \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{R}(t')) , \quad \vec{j}(t', \vec{r}') = q \vec{V}(t') \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{R}(t')) , \quad (4.86)$$

wobei $\vec{R}(t')$ der Ortsvektor der Ladung und $\vec{V}(t') = d\vec{R}(t')/dt'$ ihre Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t' sind. Betrachten wir den Ausdruck in der ersten Zeile von Gl. (4.83), wo noch nicht unter Ausnutzung der Delta-Funktion in Gl. (4.82) über t' integriert wurde, so sehen wir, dass die Delta-Funktion in der Zeit t' , die von der retardierten Greenschen Funktion stammt, nun mit der im Ort $\vec{r}'$, die in Gl. (4.86) auftritt, verknüpft wird,

$$\delta\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - t'\right) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{R}(t')) = \delta\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c} - t'\right) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{R}(t')) . \quad (4.87)$$

Der Wert von t' an der Nullstelle des Arguments der ersten Delta-Funktion ist nun nicht einfach durch Gl. (4.81) gegeben, da $\vec{R}(t')$ eine komplizierte Funktion von t' sein kann. Wir können daher das t' -Integral nicht so einfach wie im vorangegangenen Abschnitt auswerten, sondern müssen zunächst Gl. (1.136) anwenden, mit

$$\begin{aligned} f(t') &\equiv t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c} - t' \\ \Rightarrow \quad \frac{df(t')}{dt'} &= \frac{\vec{r} - \vec{R}(t')}{c|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \cdot \frac{d\vec{R}(t')}{dt'} - 1 \equiv \frac{\vec{r} - \vec{R}(t')}{c|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \cdot \vec{V}(t') - 1 . \end{aligned} \quad (4.88)$$

Aufgrund des Einheitsvektors $[\vec{r} - \vec{R}(t')]/|\vec{r} - \vec{R}(t')|$ können wir abschätzen, dass

$$-\frac{V(t')}{c} - 1 \leq \frac{df(t')}{dt'} \leq \frac{V(t')}{c} - 1 < 0$$

weil die Teilchengeschwindigkeit $V(t')$ stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Also ist $f(t')$ eine monoton fallende Funktion von t' und das Argument der ersten Delta-Funktion in Gl. (4.87) hat höchstens eine Nullstelle. Falls es keine Nullstelle gibt, sind die Potentiale $\varphi(t, \vec{r}) = \vec{A}(t, \vec{r}) = 0$, was der physikalisch uninteressante Fall ist. Die nichttriviale Nullstelle t_R von $f(t')$ ist die Lösung t_R der impliziten Gleichung

$$0 \equiv f(t_R) = t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|}{c} - t_R \quad \Longleftrightarrow \quad t_R = t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|}{c} . \quad (4.89)$$

Mit Gl. (1.136) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \delta\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c} - t'\right) &\equiv \delta(f(t')) = \frac{1}{|df(t')/dt'|} \delta(t' - t_R) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(t_R)}{c|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|} \cdot \vec{V}(t_R)} \delta(t' - t_R), \end{aligned} \quad (4.90)$$

und wir können sowohl das Zeit- wie auch das Raumintegral in Gl. (4.83) ausführen. Wählen wir $\psi(t, \vec{r}) \rightarrow \varphi(t, \vec{r})$, $\sigma(t', \vec{r}') \rightarrow \rho(t', \vec{r}')$ bzw. $\psi(t, \vec{r}) \rightarrow \vec{A}(t, \vec{r})$, $\sigma(t', \vec{r}') \rightarrow \vec{j}(t', \vec{r}')$, so erhalten wir mit den Glgen. (4.86) und (4.90)

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|\right) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{R}(t')) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| - \left(\vec{r} - \vec{R}(t_R)\right) \cdot \vec{V}(t_R)/c}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{r}) &= \frac{q\mu_0}{4\pi} \int dt' d^3\vec{r}' \frac{\vec{V}(t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|\right) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{R}(t')) \\ &= \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{V}(t_R)}{|\vec{r} - \vec{R}(t_R)| - \left(\vec{r} - \vec{R}(t_R)\right) \cdot \vec{V}(t_R)/c}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Dies sind die sog. **Liénard–Wiechert–Potentiale**, d.h. die elektromagnetischen Potentiale, die ein beliebig bewegtes geladenes Teilchen mit der Trajektorie $\vec{R}(t)$ generiert.

4.2.3 Energieverlust beschleunigter Ladungen

19.7.2024

Wir wollen noch den Energieverlust berechnen, den beschleunigte Ladungen erfahren. Dies hat konkrete Anwendung in der sog. **Bremsstrahlung** und der **Synchrotronstrahlung**.

Anfangspunkt der Betrachtung sind die Liénard–Wiechert–Potentiale (4.91) und (4.92), wobei wir ausgehend von der ersten Zeile jetzt lediglich das $\vec{r}'$ -Integral ausführen,

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{R}(t')|\right), \quad (4.93)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt' \frac{\vec{V}(t')}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{R}(t')|\right). \quad (4.94)$$

Hier haben wir in der zweiten Gleichung $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$ benutzt. Im Folgenden benutzen wir die Abkürzungen

$$\vec{D}(t, \vec{r}) \equiv \vec{r} - \vec{R}(t), \quad (4.95)$$

$$\vec{n}(t, \vec{r}) \equiv \frac{\vec{D}(t, \vec{r})}{|\vec{D}(t, \vec{r})|} = \frac{\vec{D}(t, \vec{r})}{D(t, \vec{r})}, \quad (4.96)$$

$$\kappa(t, \vec{r}) \equiv 1 - \frac{1}{c} \vec{n}(t, \vec{r}) \cdot \vec{V}(t). \quad (4.97)$$

Das elektrische Feld ist durch Gl. (1.42) gegeben. Setzen wir die Glgen. (4.93) und (4.94) ein, so erhalten wir

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left[\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{V}(t')}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right)}{D(t', \vec{r})}. \quad (4.98)$$

Die Ableitung der Delta-Funktion nach ihrem Argument bezeichnen wir mit

$$\delta'(x) \equiv \frac{d}{dx} \delta(x).$$

Dann erhalten wir mit der Kettenregel und der bekannten Formel $\vec{\nabla}r = \vec{r}/r$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) = \delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right), \quad (4.99)$$

$$\vec{\nabla}_r \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) = -\frac{1}{c} \vec{n}(t', \vec{r}) \delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right). \quad (4.100)$$

Setzen wir dies in Gl. (4.98) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' & \left[-\frac{\vec{n}(t', \vec{r})}{D^2(t', \vec{r})} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) \right. \\ & \left. - \frac{\vec{n}(t', \vec{r}) - \frac{1}{c}\vec{V}(t')}{c D(t', \vec{r})} \delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Wir schreiben nun die Ableitung der Delta-Funktion in der zweiten Zeile in eine Ableitung nach t' um. Dazu benutzen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) &= -\left[1 + \frac{1}{c} \frac{\partial D(t', \vec{r})}{\partial t'}\right] \delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) \\ &= -\left[1 - \frac{1}{c} \frac{\vec{D}(t', \vec{r}) \cdot \vec{V}(t')}{D(t', \vec{r})}\right] \delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) \\ &= -\left[1 - \frac{1}{c} \vec{n}(t', \vec{r}) \cdot \vec{V}(t')\right] \delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) \\ &= -\kappa(t', \vec{r}) \delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right), \end{aligned} \quad (4.102)$$

d.h. es gilt

$$\delta'\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) = -\frac{1}{\kappa(t', \vec{r})} \frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right). \quad (4.103)$$

Wir setzen dies in Gl. (4.101) ein und integrieren anschließend die zweite Zeile partiell,

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left[-\frac{\vec{n}(t', \vec{r})}{D^2(t', \vec{r})} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\vec{n}(t', \vec{r}) - \frac{1}{c}\vec{V}(t')}{c \kappa(t', \vec{r}) D(t', \vec{r})} \frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \left[\frac{\vec{n}(t', \vec{r})}{D^2(t', \vec{r})} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\vec{n}(t', \vec{r}) - \frac{1}{c}\vec{V}(t')}{c \kappa(t', \vec{r}) D(t', \vec{r})} \right] \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}D(t', \vec{r})\right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Jetzt führen wir das t' -Integral mit Hilfe von Gl. (4.90) aus, was mit der Definition von $\kappa(t, \vec{r})$, Gl. (4.97), auf

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa(t_R, \vec{r})} \left[\frac{\vec{n}(t_R, \vec{r})}{D^2(t_R, \vec{r})} + \frac{\partial}{\partial t_R} \frac{\vec{n}(t_R, \vec{r}) - \frac{1}{c}\vec{V}(t_R)}{c\kappa(t_R, \vec{r})D(t_R, \vec{r})} \right] \quad (4.105)$$

führt. Für die Ableitung des zweiten Terms nach t_R benötigen wir (wir lassen in den folgenden Zwischenrechnungen der Einfachheit halber die Argumente weg und definieren $\frac{\partial}{\partial t} D \equiv \dot{D}$)

$$\frac{\partial D}{\partial t} \equiv \dot{D} = -\frac{\vec{D} \cdot \vec{V}}{D} = -\vec{n} \cdot \vec{V}, \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \frac{\dot{\vec{D}}}{D} - \frac{\dot{D}\vec{D}}{D^2} = \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{V}) - \vec{V}}{D}, \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial(\kappa D)}{\partial t} = \dot{D} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{V} + \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = -\vec{n} \cdot \vec{V} + \frac{V^2}{c} - \frac{D}{c} \vec{n} \cdot \vec{a}, \quad (4.108)$$

wobei wir die **Teilchenbeschleunigung**

$$\vec{a} \equiv \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

eingeführt haben. Setzen wir dies in Gl. (4.105) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\vec{n}}{D^2} + \frac{1}{c\kappa D} \left(\frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{V}) - \vec{V}}{D} - \frac{\vec{a}}{c} \right) - \frac{\vec{n} - \frac{1}{c}\vec{V}}{c\kappa^2 D^2} \left(-\vec{n} \cdot \vec{V} + \frac{V^2}{c} - \frac{D}{c} \vec{n} \cdot \vec{a} \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa^3} \left\{ \frac{1}{D^2} \left[\kappa \left(\kappa \vec{n} + \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{V}) - \vec{V}}{c} \right) - \left(\vec{n} - \frac{1}{c}\vec{V} \right) \left(-\frac{\vec{n} \cdot \vec{V}}{c} + \frac{V^2}{c^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2 D} \left[-\kappa \vec{a} + \left(\vec{n} - \frac{1}{c}\vec{V} \right) \vec{n} \cdot \vec{a} \right] \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa^3} \left\{ \frac{1}{D^2} \left[\kappa \left(\vec{n} - \frac{1}{c}\vec{V} \right) - \left(\vec{n} - \frac{1}{c}\vec{V} \right) \left(-\frac{\vec{n} \cdot \vec{V}}{c} + \frac{V^2}{c^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2 D} \left[-\kappa \vec{a} + \left(\vec{n} - \frac{1}{c}\vec{V} \right) \vec{n} \cdot \vec{a} \right] \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa^3(t_R, \vec{r})} \left(\frac{1}{D^2(t_R, \vec{r})} \left[\vec{n}(t_R, \vec{r}) - \frac{1}{c}\vec{V}(t_R) \right] \left(1 - \frac{V^2(t_R)}{c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2 D(t_R, \vec{r})} \left\{ -\kappa(t_R, \vec{r}) \vec{a}(t_R) + \left[\vec{n}(t_R, \vec{r}) - \frac{1}{c}\vec{V}(t_R) \right] \vec{n}(t_R, \vec{r}) \cdot \vec{a}(t_R) \right\} \right), \end{aligned} \quad (4.109)$$

wobei wir im letzten Schritt die Argumente restauriert haben.

Für das magnetische Induktionsfeld erhalten wir mit den Glgen. (1.45) und (4.94) und der Definition (4.95)

$$\begin{aligned}
\vec{B}(t, \vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt' \vec{\nabla}_r \times \left[\frac{\vec{V}(t')}{D(t', \vec{r})} \delta \left(t - t' - \frac{1}{c} D(t', \vec{r}) \right) \right] \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt' \vec{V}(t') \times \vec{\nabla}_r \frac{\delta \left(t - t' - \frac{1}{c} D(t', \vec{r}) \right)}{D(t', \vec{r})} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt' \vec{V}(t') \times \left[-\frac{\vec{n}(t', \vec{r})}{D^2(t', \vec{r})} \delta \left(t - t' - \frac{1}{c} D(t', \vec{r}) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\vec{n}(t', \vec{r})}{c D(t', \vec{r})} \delta' \left(t - t' - \frac{1}{c} D(t', \vec{r}) \right) \right] . \quad (4.110)
\end{aligned}$$

Mit Gl. (4.103) und anschließender partieller Integration findet man

$$\begin{aligned}
\vec{B}(t, \vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt' \left[\frac{\vec{V}(t') \times \vec{n}(t', \vec{r})}{D^2(t', \vec{r})} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\vec{V}(t') \times \vec{n}(t', \vec{r})}{c \kappa(t', \vec{r}) D(t', \vec{r})} \right] \delta \left(t - t' - \frac{1}{c} D(t', \vec{r}) \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\kappa(t_R, \vec{r})} \left[\frac{\vec{V}(t_R) \times \vec{n}(t_R, \vec{r})}{D^2(t_R, \vec{r})} + \frac{\partial}{\partial t_R} \frac{\vec{V}(t_R) \times \vec{n}(t_R, \vec{r})}{c \kappa(t_R, \vec{r}) D(t_R, \vec{r})} \right] , \quad (4.111)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt das t' -Integral mit Hilfe der Delta-Funktion und Gl. (4.90) ausgeführt haben. Die Zeitableitung berechnen wir wie oben im Fall des elektrischen Feldes,

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{\vec{V} \times \vec{n}}{D^2} + \frac{1}{c \kappa D} \left[\vec{a} \times \vec{n} + \vec{V} \times \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{V}) - \vec{V}}{D} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\vec{V} \times \vec{n}}{c \kappa^2 D^2} \left(-\vec{n} \cdot \vec{V} + \frac{V^2}{c} - \frac{D}{c} \vec{n} \cdot \vec{a} \right) \right\} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\kappa^3 D^2} \vec{n} \times \left\{ \vec{V} \left[\kappa^2 + \frac{\vec{n} \cdot \vec{V}}{c} (\kappa + 1) - \frac{V^2}{c^2} \right] + \frac{D}{c} \left[\kappa \vec{a} + \frac{1}{c} \vec{V} (\vec{n} \cdot \vec{a}) \right] \right\} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\kappa^3} \vec{n} \times \left\{ \frac{\vec{V}}{D^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c D} \left[\kappa \vec{a} + \frac{1}{c} \vec{V} (\vec{n} \cdot \vec{a}) \right] \right\} . \quad (4.112)
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir mit Gl. (4.109)

$$\vec{n} \times \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa^3} \vec{n} \times \left\{ \frac{\vec{V}}{c D^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2 D} \left[\kappa \vec{a} + \frac{1}{c} \vec{V} (\vec{n} \cdot \vec{a}) \right] \right\} , \quad (4.113)$$

und erkennen, dass

$$\vec{B}(t, \vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \vec{n}(t_R, \vec{r}) \times \vec{E}(t, \vec{r}) , \quad (4.114)$$

wobei wir im letzten Schritt die Argumente restauriert haben. Das magnetische Induktionsfeld steht also senkrecht auf der von $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{n}(t_R, \vec{r}) \equiv [\vec{r} - \vec{R}(t_R)]/|\vec{r} - \vec{R}(t_R)|$

aufgespannten Ebene. Mit diesem Ergebnis lässt sich der **Poynting-Vektor** (1.112) schreiben als

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} \left[\vec{n} E^2 - \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{E}) \right] . \quad (4.115)$$

Betrachten wir den Ausdruck (4.109) für das elektrische Feld genauer, so sehen wir, dass der erste Term unabhängig von der Beschleunigung ist und mit dem Quadrat des Abstands des Beobachters von der retardierten Position der Ladung, $D^2(t_R, \vec{r})$ abfällt, während der zweite Term linear in der Beschleunigung $\vec{a}(t_R)$ der Ladung ist und lediglich mit $D(t_R, \vec{r})$ abfällt. Eingesetzt in den Poynting-Vektor ergeben sich dann, da das elektrische Feld quadratisch auftritt, Beiträge $\sim D^{-2}(t_R, \vec{r})$, welche quadratisch in der Beschleunigung sind, Beiträge $\sim D^{-3}(t_R, \vec{r})$, welche linear in der Beschleunigung sind, sowie Beiträge $D^{-4}(t_R, \vec{r})$, welche unabhängig von der Beschleunigung sind. Betrachten wir den Energiefluss durch eine Kugeloberfläche im Abstand r , so erhalten wir schematisch

$$\oint d\vec{f} \cdot \vec{S} \sim \oint r^2 d\Omega \left(\frac{A}{D^2} + \frac{B}{D^3} + \frac{C}{D^4} \right) ,$$

wobei A , B und C Funktionen von t_R und $\vec{r}$ sind, welche aber nicht mit r anwachsen. Betrachten wir das System in einem großen Abstand, $r \rightarrow \infty$, so überlebt lediglich der erste Term $\sim A$, da in diesem Limes $D \rightarrow r$ geht. Der Anteil des elektrischen Feldes, der proportional zur Beschleunigung ist, lautet

$$\vec{E}_a = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 \kappa^3 D} \left[-\kappa \vec{a} + \left(\vec{n} - \frac{1}{c} \vec{V} \right) \vec{n} \cdot \vec{a} \right] \equiv -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 \kappa^3 D} \vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{1}{c} \vec{V} \right) \times \vec{a} \right] . \quad (4.116)$$

Offensichtlich steht er senkrecht zu $\vec{n}$ und damit verschwindet der zweite Term im Poynting-Vektor (4.115), der $\sim \vec{n} \cdot \vec{E}$ ist. Wir erhalten damit für den Poynting-Vektor bei großen Abständen

$$\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\vec{n}}{c^3 \kappa^6 D^2} \left\{ \vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{1}{c} \vec{V} \right) \times \vec{a} \right] \right\}^2 + \mathcal{O}(D^{-3}) . \quad (4.117)$$

Die Energie, die pro Zeiteinheit dt_R von der Ladung in ein Raumwinkelement $d\Omega$ in Richtung $\vec{n}$ abgestrahlt und im Abstand D^2 von der Ladung beim Beobachter pro Zeiteinheit dt ankommt, ist dann bis auf Korrekturen $\sim \mathcal{O}(D^{-1})$

$$\frac{dP_S}{d\Omega} \equiv \frac{dE}{dt_R d\Omega} = (\vec{n} \cdot \vec{S}) D^2 \frac{dt}{dt_R} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{c^3 \kappa^5} \left\{ \vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{1}{c} \vec{V} \right) \times \vec{a} \right] \right\}^2 , \quad (4.118)$$

wobei P_S die Strahlungsleistung ist und wir $dt/dt_R = \kappa$ benutzt haben (dies folgt aus den Glgen. (4.89) und (4.97)).

Zwei Spezialfälle sind von Interesse:

(i) Die Ladung bewegt sich **nicht-relativistisch**, $|\vec{V}| \ll c$. Dann ist $\kappa \simeq 1$ und

$$\frac{dP_S}{d\Omega} \simeq \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a})]^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} [\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a}) - \vec{a}]^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} a^2 \sin^2 \vartheta , \quad (4.119)$$

wobei ϑ der Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{a}$ ist. Die abgestrahlte Leistung ist daher **senkrecht** zur Beschleunigung maximal.

- (ii) Die Ladung bewegt sich **relativistisch**, $|\vec{V}| \lesssim c$. Nehmen wir der Einfachheit halber an, das Teilchen wird in Bewegungsrichtung beschleunigt, $\vec{a} \sim \vec{V}$, oder abgebremst, $\vec{a} \sim -\vec{V}$. Dann verschwindet, wie im nicht-relativistischen Fall, der Term $\sim \vec{V} \times \vec{a}$ in Gl. (4.118) und wir erhalten

$$\frac{dP_S}{d\Omega} \simeq \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{a^2 \sin^2 \vartheta}{(1 - |\vec{V}| \cos \vartheta / c)^5}, \quad (4.120)$$

wobei jetzt ϑ jedoch der Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{V}$ ist. Der Winkel ϑ , unter dem die abgestrahlte Leistung maximal wird, bestimmt sich aus der Bedingung

$$0 = \frac{d}{d \cos \vartheta} \frac{dP_S}{d\Omega} \quad \Longrightarrow \quad 0 = 5 \frac{|\vec{V}|}{c} (1 - \cos^2 \vartheta) - 2 \cos \vartheta \left(1 - \frac{|\vec{V}|}{c} \cos \vartheta \right).$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\cos \vartheta$ mit der Lösung

$$\cos \vartheta_{\max} = \frac{c}{3|\vec{V}|} \left(\sqrt{1 + 15 \frac{V^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (4.121)$$

Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten, $|\vec{V}| \ll c$, reproduziert dies das Ergebnis von Fall (i), denn die Entwicklung der Wurzel liefert dann

$$\cos \vartheta_{\max} \simeq \frac{15}{6} \frac{|\vec{V}|}{c} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \vartheta_{\max} \simeq \frac{\pi}{2},$$

also Abstrahlung **senkrecht** zur Bewegungsrichtung (wir hatten angenommen, dass Bewegungs- und Beschleunigungsrichtung parallel bzw. antiparallel ist). Für relativistische Geschwindigkeiten, $|\vec{V}| \lesssim c$, erhalten wir dagegen

$$\cos \vartheta_{\max} \simeq 1 \quad \Longrightarrow \quad \vartheta_{\max} \simeq 0,$$

d.h. die Abstrahlung erfolgt **vorwärts in Bewegungsrichtung**.

5 Makroskopische Elektrodynamik

26.4.2024

Die Elektrodynamik beschreibt die von einer Ladungsdichte $\rho(t, \vec{r})$ und einer Ladungsstromdichte $\vec{j}(t, \vec{r})$ erzeugten elektromagnetischen Feld $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{B}(t, \vec{r})$. Falls $\rho(t, \vec{r})$ und $\vec{j}(t, \vec{r})$ **exakt** bekannt sind, ist dies im Prinzip durch Lösen der Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84), (1.85) und (1.86) immer möglich.

In vielen Anwendungen ist eine exakte Bestimmung von Ladungsdichte und Ladungsstromdichte praktisch unmöglich. Man denke z.B. an einen Festkörper makroskopischer Größe, der aus ca. 10^{23} Atomen oder Molekülen besteht (im Folgenden werden beide Begriffe kurz zu "Molekül" zusammengefaßt), die wiederum aus positiv geladenen Atomkernen und negativ geladenen Elektronen bestehen. Diese Ladungen erzeugen nicht nur elektromagnetische Felder, ihre Bewegung wird im Gegenzug durch solche Felder beeinflusst. Selbst wenn man außer acht läßt, dass Elementarteilchen den Gesetzen der Quantenmechanik genügen und ihre Bewegung rein klassisch betrachtet, so müßte man dennoch die Maxwell-Gleichungen zusammen mit ca. 10^{23} Newtonschen Bewegungsgleichungen für diese Elementarteilchen lösen, letztere mit der durch $\vec{E}(t, \vec{r})$ und $\vec{B}(t, \vec{r})$ gegebenen Lorentz-Kraft (1.122). Dies ist praktisch nicht durchführbar.

Stattdessen behilft man sich mit folgendem Argument: für ein Experiment, das man auf makroskopischen Längenskalen, z.B. $L \sim 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$, durchführt, ist man nicht an der detaillierten Form der elektromagnetischen Felder auf mikroskopischen, in diesem Fall submolekularen Längenskalen, $\lambda \sim 10^{-8} \text{ m}$, interessiert. Man kann daher die elektromagnetischen Felder und die Ladungsdichten bzw. Ladungsstromdichten über eine geeignete, zwischen diesen Extremen liegende Längenskala, z.B. $\ell \sim 10^{-6} \text{ m}$, **mitteln**. Das dazugehörige **Mittelungsvolumen**, $v \sim \ell^3 \sim (10^{-6} \text{ m})^3 = 10^{-18} \text{ m}^3 = 10^{-12} \text{ cm}^3$ enthält typischerweise noch $10^{-12} \cdot 10^{23} = 10^{11}$ Moleküle. Die Ladungsdichte bzw. Ladungsstromdichte **innerhalb** eines Moleküls, bzw. die entsprechenden elektromagnetischen Felder, sind auf der Längenskala ℓ **irrelevant**. Wir sind vielmehr daran interessiert, welche Felder von einer Ansammlung von 10^{11} Ladungsträgern erzeugt werden.

Im Folgenden leiten wir zunächst die **makroskopischen Maxwell-Gleichungen** durch geeignete Mittelwertbildung ab. Es treten neue, makroskopische Felder auf, die **dielektrische Verschiebung** $\vec{D}(t, \vec{r})$ und das **Magnetfeld** $\vec{H}(t, \vec{r})$. Sodann wird der Zusammenhang zwischen diesen Feldern und den elektromagnetischen Feldern $\vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{B}(t, \vec{r})$ erläutert. Zum Abschluss dieses Kapitels diskutieren wir noch zwei Anwendungen, die Reflexions- und Brechungsgesetze der Optik und Wellenausbreitung in elektrischen Leitern.

5.1 Makroskopische Maxwell–Gleichungen

5.1.1 Makroskopischer Mittelwert

Der **makroskopische Mittelwert** einer beliebigen Größe $f(t, \vec{r})$ ist definiert als

$$\langle f(t, \vec{r}) \rangle \equiv \int d^3\vec{r}' w(\vec{r}') f(t, \vec{r} + \vec{r}') , \quad (5.1)$$

wobei $w(\vec{r}')$ eine geeignete **Gewichtsfunktion** für die Mittelung ist, mit

$$\int d^3\vec{r}' w(\vec{r}') = 1 .$$

Ein Beispiel wäre

$$w(\vec{r}') = \begin{cases} 3/(4\pi\ell^3) , & r' \leq \ell , \\ 0 & r' > \ell . \end{cases}$$

Dies bedeutet, dass die Funktion $f(t, \vec{r})$ über das Volumen einer Kugel mit Radius ℓ und Mittelpunkt in $\vec{r}$ gemittelt wird. Dies ist zwar ausgesprochen anschaulich, besitzt aber den Nachteil, dass $w(\vec{r}')$ nicht stetig differenzierbar ist. Außerdem würde der Mittelwert (5.1) stark fluktuieren, wann immer Moleküle in das Mittelungsvolumen ein- oder aus diesem austreten. Eine geeignetere Variante ist daher

$$w(\vec{r}') = \frac{1}{(\pi\ell^2)^{3/2}} e^{-(r'/\ell)^2} .$$

Diese Gauß-Funktion fällt auf der Längenskala ℓ um $1/e$ ab, verschwindet aber erst im Unendlichen. Daher treten keine Probleme auf, selbst wenn sich Moleküle auf der relativ zu ihrer Größe λ gigantischen Längenskala ℓ bewegen. Für das Folgende ist die exakte Form der Gewichtsfunktion unerheblich. Wir nehmen lediglich an, dass sie hinreichend oft stetig differenzierbar ist und dass sie lediglich auf der Längenskala ℓ merklich variiert, sich also auf der mikroskopischen Längenskala $\lambda \ll \ell$ nicht wesentlich ändert.

Eine unmittelbare Konsequenz der Definition (5.1) ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \langle f(t, \vec{r}) \rangle &= \int d^3\vec{r}' w(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(t, \vec{r} + \vec{r}') = \int d^3\vec{r}' w(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}+\vec{r}'} f(t, \vec{r} + \vec{r}') \\ &\equiv \left\langle \vec{\nabla} f(t, \vec{r}) \right\rangle , \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle f(t, \vec{r}) \rangle &= \int d^3\vec{r}' w(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{r} + \vec{r}') \equiv \left\langle \frac{\partial f(t, \vec{r})}{\partial t} \right\rangle . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Im Folgenden werden wir die entsprechend Gl. (5.1) gemittelten Maxwell–Gleichungen herleiten. Dies führt dann letztlich auf die makroskopischen Maxwell–Gleichungen.

5.1.2 Gemittelte Maxwell-Gleichungen

Wie in der Einleitung erwähnt, sind die Maxwell-Gleichungen (1.83), (1.84), (1.85) und (1.86) entsprechend Gl. (5.1) zu mitteln. Wir erhalten mit den Glgen. (5.2)

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) \rangle \equiv \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}(t, \vec{r}) \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho(t, \vec{r}) \rangle , \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{r}) \rangle - \frac{1}{c^2} \left\langle \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t} \right\rangle &\equiv \vec{\nabla} \times \langle \vec{B}(t, \vec{r}) \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{E}(t, \vec{r}) \rangle \\ &= \mu_0 \langle \vec{j}(t, \vec{r}) \rangle , \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) \rangle \equiv \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{B}(t, \vec{r}) \rangle = 0 , \quad (5.5)$$

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{r}) \rangle + \left\langle \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t} \right\rangle \equiv \vec{\nabla} \times \langle \vec{E}(t, \vec{r}) \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{B}(t, \vec{r}) \rangle = 0 . \quad (5.6)$$

Im Folgenden lassen wir die Mittelungsklammern bei den elektromagnetischen Feldern der Einfachheit halber weg,

$$\langle \vec{E}(t, \vec{r}) \rangle \longrightarrow \vec{E}(t, \vec{r}) , \quad \langle \vec{B}(t, \vec{r}) \rangle \longrightarrow \vec{B}(t, \vec{r}) .$$

Es ist dann aber stets zu bedenken, dass diese Felder nur auf **makroskopischen** Längenskalen definiert sind und nicht mit den vormals eingeführten **mikroskopischen** elektromagnetischen Feldern verwechselt werden dürfen (auch wenn wir die gleichen Symbole für diese Größen benutzen).

Nun müssen wir uns überlegen, welche Form die gemittelte Ladungsdichte und die gemittelte Ladungsstromdichte haben.

5.1.3 Polarisation

Wir beginnen mit der gemittelten Ladungsdichte. **Mikroskopisch** betrachtet besteht die Ladungsdichte eines beliebigen Festkörpers aus **freien** Ladungsträgern (z.B. Elektronen im Metall) und aus in Molekülen **gebundenen** Ladungsträgern,

$$\rho(t, \vec{r}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) + \sum_n \rho_n(t, \vec{r}) , \quad (5.7)$$

wobei die erste Summe über die freien Ladungsträger mit Ladungen q_i mit den Trajektorien $\vec{r}_i(t)$ läuft und die zweite Summe über die einzelnen Moleküle, mit den jeweiligen Ladungsdichten $\rho_n(t, \vec{r})$. Jedes Molekül wiederum besteht aus gebundenen Ladungsträgern,

$$\rho_n(t, \vec{r}) = \sum_j q_{nj} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t) - \vec{r}_{nj}(t)) , \quad (5.8)$$

wobei wir die Schwerpunkttrajektorie des n -ten Moleküls mit $\vec{R}_n(t)$ bezeichnet haben. Die Ladungsträger mit den Ladungen q_{nj} innerhalb des Moleküls haben **relativ** zu $\vec{R}_n(t)$ die Trajektorien $\vec{r}_{nj}(t)$, vgl. Abb. 5.1.

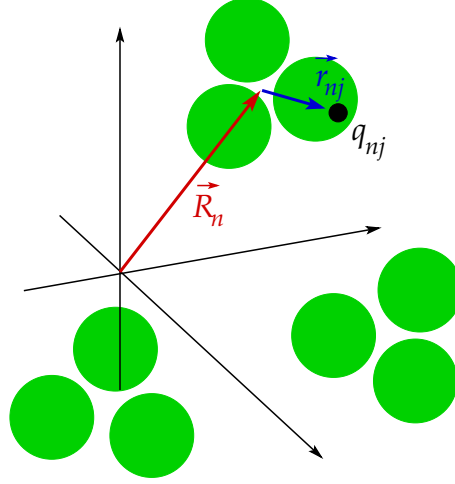


Abbildung 5.1: Moleküle im Festkörper mit den Schwerpunktstrajektorien $\vec{R}_n(t)$ und ihre internen Ladungsträger mit Trajektorien $\vec{r}_{nj}(t)$, die relativ zu $\vec{R}_n(t)$ angegeben werden.

Bei der Mittelung der Ladungsdichte (5.7) können wir die Summation über n mit der Mittelung vertauschen, wir mitteln also zunächst die Ladungsdichte des n -ten Moleküls und summieren dann über n ,

$$\begin{aligned}
 \langle \rho_n(t, \vec{r}) \rangle &= \int d^3\vec{r}' w(\vec{r}') \rho_n(t, \vec{r} + \vec{r}') \\
 &= \sum_j q_{nj} \int d^3\vec{r}' w(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{R}_n(t) - \vec{r}_{nj}(t)) \\
 &= \sum_j q_{nj} w(\vec{R}_n(t) + \vec{r}_{nj}(t) - \vec{r}) .
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Da die Trajektorien $\vec{r}_{nj}(t)$ der im n -ten Molekül gebundenen Ladungsträger nur um einen Betrag von der Größenordnung λ von der Schwerpunktstrajektorie $\vec{R}_n(t)$ abweichen, sich die Funktion w nach Voraussetzung aber auf solch kleinen Skalen nicht wesentlich ändert, ist es erlaubt, $w(\vec{R}_n(t) + \vec{r}_{nj}(t) - \vec{r})$ in eine Taylor-Reihe um $\vec{R}_n(t) - \vec{r}$ zu entwickeln,

$$\begin{aligned}
 \langle \rho_n(t, \vec{r}) \rangle &= \sum_j q_{nj} \left[w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) + \vec{r}_{nj}(t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}_n - \vec{r}} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) + O(r_{nj}^2) \right] \\
 &= \sum_j q_{nj} \left[w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) - \vec{r}_{nj}(t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) + O(\lambda^2) \right] .
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Wir bezeichnen die **Gesamtladung** des n -ten Moleküls mit

$$q_n \equiv \sum_j q_{nj} , \tag{5.11}$$

und das **molekulare kartesische Dipolmoment** mit

$$\vec{p}_n(t) \equiv \sum_j q_{nj} \vec{r}_{nj}(t) . \tag{5.12}$$

Diese Definition stimmt mit Gl. (2.109) überein, wenn wir dort für die Ladungsdichte Gl. (5.8) einsetzen und den Schwerpunktsanteil $q_n \vec{R}_n(t)$ weglassen, der natürlich nicht zum eigentlichen Dipolmoment des n -ten Moleküls gehört. Mit den Definitionen (5.11) und (5.12) erhalten wir für Gl. (5.10)

$$\langle \rho_n(t, \vec{r}) \rangle = q_n w \left(\vec{R}_n(t) - \vec{r} \right) - \vec{p}_n(t) \cdot \vec{\nabla}_r w \left(\vec{R}_n(t) - \vec{r} \right) + O(\lambda^2) . \quad (5.13)$$

Der erste Term läßt sich auch als Mittelwert einer im Schwerpunkt $\vec{R}_n(t)$ des Moleküls befindlichen Punktladungsdichte $q_n \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t))$ auffassen,

$$\left\langle q_n \delta^{(3)} \left(\vec{r} - \vec{R}_n(t) \right) \right\rangle = q_n \int d^3 \vec{r}' w(\vec{r}') \delta^{(3)} \left(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{R}_n(t) \right) \equiv q_n w \left(\vec{R}_n(t) - \vec{r} \right) . \quad (5.14)$$

Der zweite Term kann als Divergenz einer im Schwerpunkt des Moleküls befindlichen mittleren punktförmigen Dipoldichte $\vec{p}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t))$ aufgefaßt werden,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_r \cdot \left\langle \vec{p}_n(t) \delta^{(3)} \left(\vec{r} - \vec{R}_n(t) \right) \right\rangle &= \vec{p}_n(t) \cdot \vec{\nabla}_r \int d^3 \vec{r}' w(\vec{r}') \delta^{(3)} \left(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{R}_n(t) \right) \\ &\equiv \vec{p}_n(t) \cdot \vec{\nabla}_r w \left(\vec{R}_n(t) - \vec{r} \right) . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nun können wir den Mittelwert der gesamten Ladungsdichte (5.7) angeben. Setzen wir die Glgen. (5.14) und (5.15) in Gl. (5.13) ein und benutzen den resultierenden Ausdruck dann für den Mittelwert von Gl. (5.7), so folgt

$$\begin{aligned} \langle \rho(t, \vec{r}) \rangle &= \left\langle \sum_i q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) + \sum_n q_n \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle \\ &\quad - \vec{\nabla} \cdot \left\langle \sum_n \vec{p}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle + \dots \\ &\equiv \bar{\rho}(t, \vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(t, \vec{r}) + \dots , \end{aligned} \quad (5.16)$$

wobei wir in der letzten Zeile die gesamte **makroskopische Ladungsdichte**

$$\bar{\rho}(t, \vec{r}) \equiv \left\langle \sum_i q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) + \sum_n q_n \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle , \quad (5.17)$$

und die sog. **makroskopische Polarisation**

$$\vec{P}(t, \vec{r}) \equiv \left\langle \sum_n \vec{p}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle \quad (5.18)$$

definiert haben. Im Folgenden lassen wir den Querstrich über der makroskopischen Ladungsdichte weg,

$$\bar{\rho}(t, \vec{r}) \longrightarrow \rho(t, \vec{r}) ,$$

bedenken dabei aber stets, dass diese Größe dann nur auf **makroskopischen** Längenskalen definiert ist. Sie ist insbesondere nicht mit der gesamten **mikroskopischen** Ladungsdichte (5.7) zu verwechseln (auch wenn wir das gleiche Symbol für beide Größen benutzen).

5.1.4 Dielektrische Verschiebung

Wenn wir das Ergebnis (5.16) in die gemittelte Maxwell-Gleichung (5.3) einsetzen, erhalten wir unter Vernachlässigung Terme höherer Ordnung

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = \rho(t, \vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(t, \vec{r})$$

oder

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t, \vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot [\epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{r}) + \vec{P}(t, \vec{r})] = \rho(t, \vec{r}) , \quad (5.19)$$

wobei wir die sog. **dielektrische Verschiebung**

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.20)$$

eingeführt haben.

5.1.5 Magnetisierung

Wir können analoge Argumente wie in Abschnitt 5.1.3 auch zur Mittelung der **mikroskopischen Ladungsstromdichte** heranziehen. Diese lautet

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) + \sum_n \vec{j}_n(t, \vec{r}) , \quad (5.21)$$

wobei die erste Summe über die freien Ladungsträger mit Ladungen q_i , Trajektorien $\vec{r}_i(t)$ und Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ läuft und die zweite Summe über die einzelnen Moleküle, mit den jeweiligen Ladungsstromdichten $\vec{j}_n(t, \vec{r})$. Letztere setzen sich wieder zusammen aus den Ladungsstromdichten der gebundenen Ladungsträger,

$$\vec{j}_n(t, \vec{r}) = \sum_j q_{nj} [\vec{V}_n(t) + \vec{v}_{nj}(t)] \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t) - \vec{r}_{nj}(t)) , \quad (5.22)$$

wobei wir die Geschwindigkeiten der Ladungsträger ähnlich wie ihre Trajektorien in einen Schwerpunktsanteil $\vec{V}_n(t)$ und einen Relativanteil $\vec{v}_{nj}(t)$ aufgespalten haben. Hierbei wurden nichtrelativistische Geschwindigkeiten angenommen, vgl. Gl. (6.47) der Vorlesung “Theoretische Mechanik II” für das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten.

Wir verfahren nun genauso wie in Gl. (5.9) und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_n(t, \vec{r}) \rangle &= \int d^3 \vec{r}' w(\vec{r}') \vec{j}_n(t, \vec{r} + \vec{r}') \\ &= \sum_j q_{nj} [\vec{V}_n(t) + \vec{v}_{nj}(t)] \int d^3 \vec{r}' w(\vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{R}_n(t) - \vec{r}_{nj}(t)) \\ &= \sum_j q_{nj} [\vec{V}_n(t) + \vec{v}_{nj}(t)] w(\vec{R}_n(t) + \vec{r}_{nj}(t) - \vec{r}) . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Analog zu Gl. (5.10) wird die Funktion w wieder in eine Taylor-Reihe entwickelt, nun allerdings bis zu Termen zweiter Ordnung. Für die a -Komponente der mittleren molekularen Ladungsstromdichte erhalten wir dann (über doppelt auftretende Indices b, c wird gemäß Einsteinscher Summenkonvention summiert)

$$\begin{aligned}
 \langle j_n^a(t, \vec{r}) \rangle &\simeq \sum_j q_{nj} [V_n^a(t) + v_{nj}^a(t)] \left[w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) - x_{nj}^b(t) \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} x_{nj}^b(t) x_{nj}^c(t) \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x^c} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \right] \\
 &\simeq \left[q_n V_n^a(t) + \frac{\partial p_n^a(t)}{\partial t} \right] w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) - V_n^a(t) p_n^b(t) \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 &\quad - \sum_j q_{nj} v_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t) \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 &\quad + V_n^a(t) \sum_j \frac{q_{nj}}{2} x_{nj}^b(t) x_{nj}^c(t) \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x^c} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) , \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

wobei wir die Definition (5.11) der Gesamtladung des Moleküls und die Definition (5.12) des molekularen kartesischen Dipolmoments benutzt und einen Term höherer Ordnung, $\sim v_{nj}^a x_{nj}^b x_{nj}^c$, vernachlässigt haben. Die Kettenregel liefert für die Zeitableitung der Funktion w ,

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) = \frac{dX_n^b(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial [X_n^b(t) - x^b]} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \equiv -V_n^b(t) \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) , \tag{5.25}$$

so dass wir Gl. (5.24) auch wie folgt schreiben können,

$$\begin{aligned}
 \langle j_n^a(t, \vec{r}) \rangle &= q_n V_n^a(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t} [p_n^a(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r})] \\
 &\quad + [p_n^a(t) V_n^b(t) - V_n^a(t) p_n^b(t)] \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 &\quad + \sum_j \frac{q_{nj}}{2} [x_{nj}^a(t) v_{nj}^b(t) - v_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t)] \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 &\quad - \sum_j \frac{q_{nj}}{2} [x_{nj}^a(t) v_{nj}^b(t) + v_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t)] \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 &\quad + \frac{1}{6} V_n^a(t) Q_n'^{bc}(t) \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x^c} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) , \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Gegenüber Gl. (5.24) haben wir in der dritten und vierten Zeile eine Null addiert und in der letzten Zeile das sog. **molekulare Quadrupolmoment**

$$Q_n'^{bc}(t) \equiv 3 \sum_j q_{nj} x_{nj}^b(t) x_{nj}^c(t) \tag{5.27}$$

eingeführt, das eine Variante des kartesischen Quadrupolmoment (2.111) mit nichtverschwindender Spur darstellt. Wie dieses ist das molekulare Quadrupolmoment ein Tensor zweiter Stufe.

Die vierte Zeile von Gl. (5.26) können wir wie folgt umschreiben,

$$\begin{aligned}
 & - \sum_j \frac{q_{nj}}{2} [x_{nj}^a(t) v_{nj}^b(t) + v_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t)] \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 & = - \sum_j \frac{q_{nj}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [x_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t)] \right\} \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 & = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_j \frac{q_{nj}}{2} x_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t) \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \right] \\
 & \quad + \sum_j \frac{q_{nj}}{2} x_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t) \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial t} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 & \equiv - \frac{1}{6} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[Q_n'^{ab}(t) \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \right] + Q_n'^{ab}(t) V_n^c(t) \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x^c} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \right\} ,
 \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Kettenregel (5.25) für die Zeitableitung der Funktion w und die Definition (5.27) des molekularen Quadrupolmoments benutzt haben. Setzen wir dies in Gl. (5.26) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \langle j_n^a(t, \vec{r}) \rangle & = q_n V_n^a(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t} [p_n^a(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r})] \\
 & + [p_n^a(t) V_n^b(t) - V_n^a(t) p_n^b(t)] \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 & + \sum_j \frac{q_{nj}}{2} [x_{nj}^a(t) v_{nj}^b(t) - v_{nj}^a(t) x_{nj}^b(t)] \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \\
 & - \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} \left[Q_n'^{ab}(t) \frac{\partial}{\partial x^b} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) \right] \\
 & - \frac{1}{6} [Q_n'^{ab}(t) V_n^c(t) - V_n^a(t) Q_n'^{bc}(t)] \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x^c} w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) . \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

Die Terme mit den molekularen Quadrupolmomenten $Q_n'^{ab}(t)$ sind in der Regel vernachlässigbar gegenüber den anderen Termen. In guter Näherung berücksichtigen wir daher lediglich die Terme in der ersten, zweiten und dritten Zeile von Gl. (5.28),

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{j}_n(t, \vec{r}) \rangle & \simeq q_n \vec{V}_n(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{p}_n(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r})] \\
 & + \vec{\nabla}_r \times [\vec{p}_n(t) \times \vec{V}_n(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r})] + \vec{\nabla}_r \times [\vec{m}_n(t) w(\vec{R}_n(t) - \vec{r})] , \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

wobei wir das **molekulare magnetische Moment**

$$\vec{m}_n(t) \equiv \sum_j \frac{q_{nj}}{2} \vec{r}_{nj}(t) \times \vec{v}_{nj}(t) \quad (5.30)$$

eingeführt haben, vgl. Gl. (3.53). Die Gleichheit der zweiten und dritten Zeile von Gl. (5.28) und der letzten von Gl. (5.29) überprüft man mit der bekannten Formel $\epsilon^{abc} \epsilon^{cde} =$

$\delta^{ad} \delta^{be} - \delta^{ae} \delta^{bd}$. Im Folgenden werden wir auch den dritten Term vernachlässigen (dies ist z.B. gerechtfertigt, falls die molekulare Schwerpunktschwindigkeit $\vec{V}_n(t)$ viel kleiner ist als die Relativgeschwindigkeiten $\vec{v}_{nj}(t)$ der Konstituenten des Moleküls).

Wie in den Glgen. (5.14) und (5.15) lassen sich die verbleibenden Terme als Mittelwerte von im Schwerpunkt des Moleküls befindlichen Punktdichten auffassen,

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_n(t, \vec{r}) \rangle &\simeq \langle q_n \vec{V}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{p}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \rangle \\ &+ \vec{\nabla}_r \times \langle \vec{m}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \rangle . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Summieren wir über alle Moleküle und setzen das Ergebnis in den Mittelwert der mikroskopischen Ladungsstromdichte (5.21) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}(t, \vec{r}) \rangle &= \left\langle \sum_i q_i \vec{v}_i(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) + \sum_n q_n \vec{V}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_n \vec{p}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle + \vec{\nabla} \times \left\langle \sum_n \vec{m}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle + \dots \\ &\equiv \vec{j}(t, \vec{r}) + \frac{\partial \vec{P}(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}(t, \vec{r}) + \dots , \end{aligned} \quad (5.32)$$

wobei wir die **makroskopische Ladungsstromdichte**

$$\vec{j}(t, \vec{r}) \equiv \left\langle \sum_i q_i \vec{v}_i(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) + \sum_n q_n \vec{V}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle \quad (5.33)$$

und die **makroskopische Magnetisierung**

$$\vec{M}(t, \vec{r}) \equiv \left\langle \sum_n \vec{m}_n(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_n(t)) \right\rangle \quad (5.34)$$

eingeführt und die Definition (5.18) der makroskopischen Polarisation benutzt haben. Im Folgenden lassen wir den Querstrich über der makroskopischen Ladungsstromdichte weg,

$$\vec{j}(t, \vec{r}) \longrightarrow \vec{j}(t, \vec{r}) ,$$

bedenken dabei aber stets, dass diese Größe dann nur auf **makroskopischen** Längenskalen definiert ist. Sie ist insbesondere nicht mit der gesamten **mikroskopischen** Ladungsstromdichte (5.21) zu verwechseln (auch wenn wir das gleiche Symbol für beide Größen benutzen).

5.1.6 Magnetfeld

Wenn wir das Ergebnis (5.32) in die gemittelte Maxwell-Gleichung (5.4) einsetzen, erhalten wir unter Vernachlässigung Terme höherer Ordnung

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{r}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{r})}{\partial t} = \vec{j}(t, \vec{r}) + \frac{\partial \vec{P}(t, \vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}(t, \vec{r})$$

oder

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{r}) - \frac{\partial \vec{D}(t, \vec{r})}{\partial t} \equiv \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{B}(t, \vec{r}) - \vec{M}(t, \vec{r}) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \vec{E}(t, \vec{r}) + \vec{P}(t, \vec{r}) \right] = \vec{j}(t, \vec{r}) , \quad (5.35)$$

wobei wir die Definition (5.20) der dielektrischen Verschiebung benutzt und das sog. **Magnetfeld**

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (5.36)$$

eingeführt haben.

Wir fassen nun noch einmal das Endergebnis unserer Betrachtungen, die **makroskopischen Maxwell-Gleichungen**, zusammen,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho , \quad (5.37)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} , \quad (5.38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (5.39)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 . \quad (5.40)$$

17.5.2024

5.2 Klassifizierung von Materialien

Es ist offensichtlich, dass die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (5.37) – (5.40) ohne zusätzliche Annahmen über die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ bzw. die Polarisation $\vec{P}$ und über das Magnetfeld $\vec{H}$ bzw. die Magnetisierung $\vec{M}$ zu viele Freiheitsgrade enthalten und daher nicht eindeutig lösbar sind. Die Polarisation $\vec{P}$ und die Magnetisierung $\vec{M}$ sind in gewisser Weise die **Antwort** der Materie auf ein äußeres elektrisches Feld $\vec{E}$ bzw. magnetisches Induktionsfeld $\vec{B}$. Sie sind daher **Funktionen** der elektromagnetischen Felder,

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) , \quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{B}) . \quad (5.41)$$

Wie dieser funktionale Zusammenhang im Einzelnen aussieht, hängt von der betrachteten Materie ab. Wir wollen dies im Folgenden genauer erläutern.

5.2.1 Dielektrika

Wir beginnen mit der Polarisation, der Antwort der Materie auf äußere elektrische Felder. Materie mit nichtverschwindender Polarisation nennt man **dielektrische Materie** oder kurz ein sog. **Dielektrikum**. Allen Dielektrika ist gemein, dass sie **molekulare Dipole** aufweisen. Diese Größen haben wir im vorangegangenen Abschnitt bei der Herleitung der makroskopischen Maxwell-Gleichungen mit $\vec{p}_n(t)$ bezeichnet. Man unterscheidet drei verschiedene Typen von Dielektrika, je nachdem, unter welchen Voraussetzungen diese Dipole auftreten:

- (i) **Eigentliche Dielektrika:** Bei dieser Art von Materie sind ohne äußeres elektrisches Feld die Ladungsschwerpunkte der positiven und der negativen Ladungen im Molekül identisch, vgl. Abb. 5.2(a), das molekulare Dipolmoment verschwindet. Legt man ein äußeres elektrisches Feld an, so verschiebt man die molekularen Ladungsträger in einer Weise, dass sich lokal elektrische Dipole bilden, Abb. 5.2(b). Man spricht von sog. **Deformationspolarisation**.

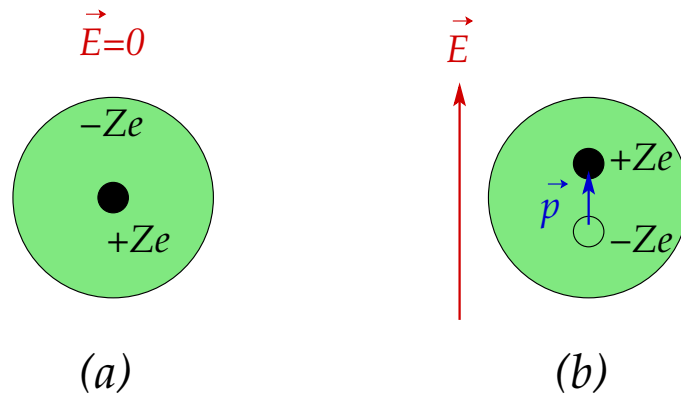


Abbildung 5.2: (a) Ein neutrales Atom mit Kernladungszahl Z ohne äußeres elektrisches Feld. Der Ladungsschwerpunkt der Elektronen und des Kerns sind identisch, das atomare Dipolmoment verschwindet. (b) Dasselbe Atom im äußeren elektrischen Feld. Letzteres verschiebt den Ladungsschwerpunkt des Kerns gegenüber dem der Elektronenhülle. Resultat ist ein atomares Dipolmoment $\vec{p}$.

- (ii) **Paraelektrika:** Bei dieser Art von Materie existieren bereits **ohne** äußeres elektrisches Feld molekulare Dipole, sog. **permanente Dipole**. Dies hängt gewöhnlich mit der Molekülstruktur zusammen, s. z.B. das Wassermolekül H_2O , Abb. 5.3. Hier verteilen sich die molekularen Ladungen so, dass die beiden Wasserstoffatome einfach positiv und das Sauerstoffatom zweifach negativ geladen sind, was zu einem nichtverschwindenden Dipolmoment $\vec{p}$ führt. Ohne äußeres elektrisches Feld sind diese molekularen Dipole aber zufällig ausgerichtet. Bei der Gesamtpolarisation der Materie mitteln sie sich zu null weg, vgl. Abb. 5.3(a). Mit äußerem elektrischen Feld dagegen richten sie sich der Feldrichtung entsprechend aus, man spricht von sog. **Orientierungspolarisation**, s. Abb. 5.3(b). Die Ausrichtung ist bei nichtverschwindenden Temperaturen nicht perfekt, da die thermische Bewegung der Moleküle dieser Ordnungstendenz entgegenwirkt.
- (iii) **Ferroelektrika:** Bei diesen Materialien existieren permanente Dipole, die sich selbst **ohne** äußeres elektrisches Feld unterhalb einer kritischen Temperatur T_C , der sog. **Curie-Temperatur**, **spontan** ausrichten, also sogar eine **permanente Polarisation** aufweisen. Ein Beispiel dafür ist Bariumtitanat BaTiO_3 .

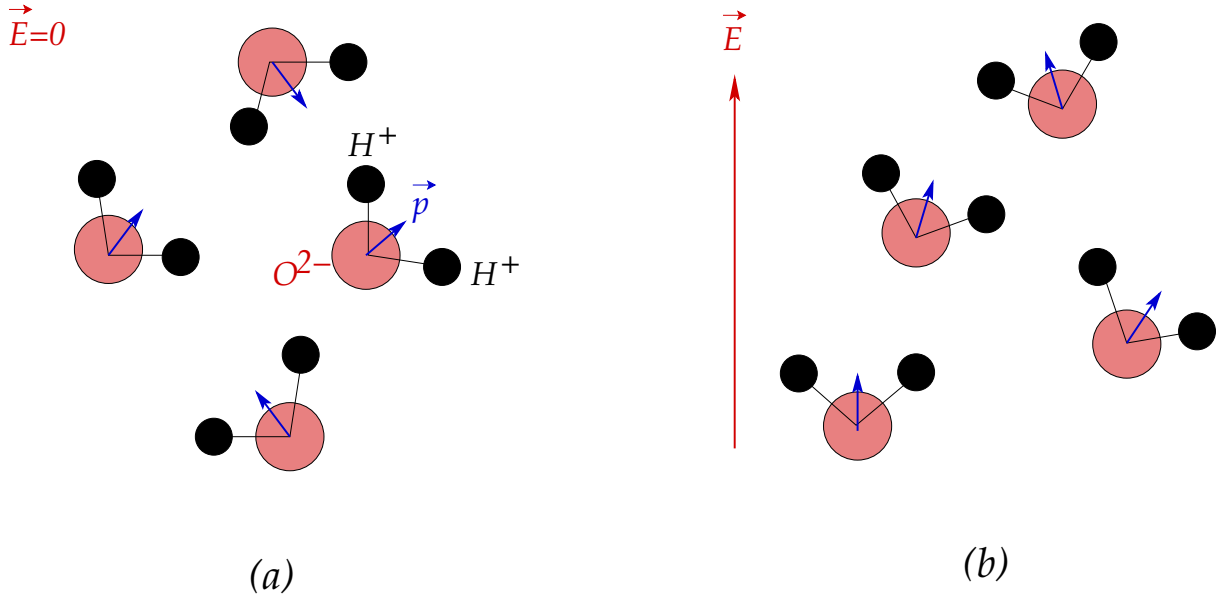


Abbildung 5.3: (a) Wassermoleküle als permanente Dipole ohne äußeres elektrisches Feld. (b) Wassermoleküle im äußeren elektrischen Feld. Die molekularen Dipolmomente richten sich nach dem Feld aus.

Für nicht zu große elektrische Feldstärken können wir den funktionalen Zusammenhang (5.41) in eine Potenzreihe entwickeln,

$$P^i(\vec{E}) = \alpha^i + \sum_{j=1}^3 \beta^{ij} E^j + \sum_{j,k=1}^3 \gamma^{ijk} E^j E^k + \dots, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.42)$$

wobei die Konstanten α^i , β^{ij} , γ^{ijk} Materialkonstanten sind. Für eigentliche Dielektrika und Paraelektrika gilt nach obiger Definition $\vec{P}(0) = 0$, also $\alpha^i = 0$, während für Ferroelektrika $\vec{P}(0) \neq 0$ oder $\alpha^i \neq 0$ gilt. Wir betrachten im Folgenden lediglich eigentliche Dielektrika und Paraelektrika.

Für hinreichend kleine Feldstärken kann man höhere Potenzen von $\vec{E}$ in Gl. (5.42) vernachlässigen, es ergibt sich ein **linearer** Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischem Feld,

$$P^i \simeq \sum_{j=1}^3 \beta^{ij} E^j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.43)$$

Man spricht auch von **linearer Antwort** (engl. *linear response*) des Systems auf äußere Felder. Im allgemeinen zeigt $\vec{P}$ nicht in die gleiche Richtung wie $\vec{E}$, oder mit anderen Worten $\beta^{ij} \neq 0$ für $i \neq j$. In diesem Fall spricht man von einem **linearen anisotropen Dielektrikum**. Der Spezialfall eines **linearen isotropen Dielektrikums** ergibt sich, wenn $\beta^{ij} = \chi_e \epsilon_0 \delta^{ij}$, d.h.

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}.$$

Die Größe χ_e nennt man **dielektrische Suszeptibilität**.

Für die dielektrische Verschiebung in linearen isotropen Dielektrika ergibt sich

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} \equiv \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}.$$

Die Größe $\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ bezeichnet man als **relative Dielektrizitätskonstante**. Für nicht polarisierbare Medien gilt $\chi_e = 0$ bzw. $\epsilon_r = 1$. Insbesondere ist das **Vakuum** ein solches nicht polarisierbares Medium.

5.2.2 Magnetika

Die Einteilung magnetischer Materialien ist ganz ähnlich der der Dielektrika. Voraussetzung ist die Existenz molekularer **magnetischer Dipole**, im Abschnitt 5.1.5 mit $\vec{m}_n(t)$ bezeichnet. Man unterscheidet wieder drei Klassen von magnetischen Erscheinungen:

- (i) **Diamagnetismus:** In diesem Fall existieren in Abwesenheit äußerer magnetischer Induktionsfelder **keine** magnetischen Dipole. In einem äußeren $\vec{B}$ -Feld werden diese aber **induziert**. Nach der **Lenzschen Regel** sind die induzierten Dipole dem äußeren Feld **entgegengesetzt**, schwächen dieses also ab.

Diamagnetismus tritt in **allen** Materialien auf. Man spricht von diamagnetischen Materialien aber nur dann, wenn der Effekt nicht durch die stärkeren Phänomene des Paramagnetismus bzw. des kollektiven Magnetismus überdeckt werden.

- (ii) **Paramagnetismus:** Hier existieren auch für verschwindendes externes magnetisches Induktionsfeld permanente molekulare magnetische Dipole, die sich, ganz ähnlich wie die elektrischen Dipole bei Paraelektrika, in diesem Feld ausrichten, diesmal aber, im Gegensatz zum Diamagnetismus, **in** Feldrichtung, so dass das äußere Feld verstärkt wird. Dieser Ordnungseffekt konkurriert wieder mit der thermischen Bewegung der Moleküle, die diese Ordnung zerstören will.

- (iii) **Kollektiver Magnetismus:** Auch hier existieren permanente magnetische Dipole, die sich aber auch ohne äußeres Feld **spontan ausrichten**, solange die Temperatur einen kritischen Wert T^* nicht überschreitet. Die Situation ist also ganz ähnlich wie bei den Ferroelektrika. Man unterscheidet beim kollektiven Magnetismus noch drei Unterklassen:

- (a) **Ferromagnetismus:** In diesem Fall heißt die kritische Temperatur (wie schon bei den Ferroelektrika) **Curie-Temperatur**, $T^* \equiv T_C$. Für $0 < T < T_C$ richten sich die permanenten magnetischen Dipole spontan aus, das Material ist ein **Permanentmagnet**. Ein typisches Beispiel ist Eisen. Oberhalb von T_C verschwindet die permanente Magnetisierung und das Material ist ein gewöhnlicher Paramagnet. Eisen ist eines der Materialien mit der höchsten Curie-Temperatur, $T_{C,\text{Fe}} \simeq 1043$ K.

Die Magnetisierung in Abhängigkeit vom Magnetfeld zeigt bei Ferromagneten eine sog. **Hysteresekurve**, vgl. Abb. 5.4.

Ein nicht vormagnetisiertes Material wird zunächst entlang der **Neukurve** (I) aufmagnetisiert, bis die **Sättigungsmagnetisierung** M_s (II) erreicht ist.

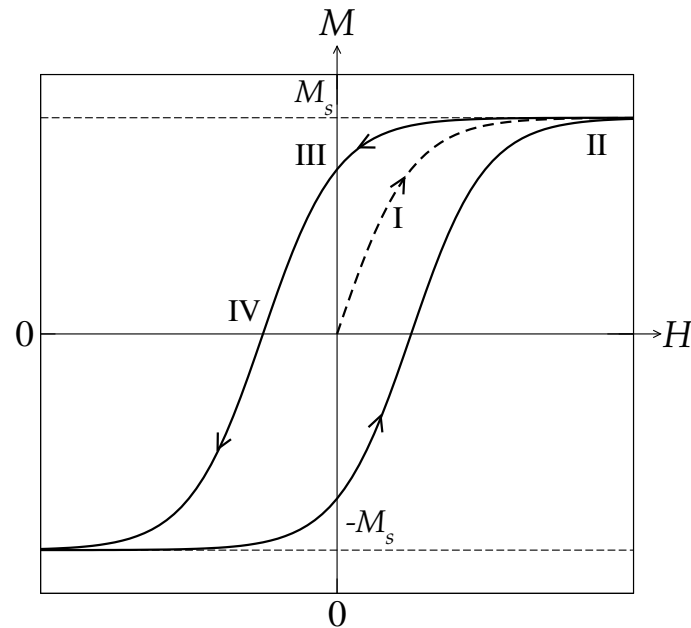


Abbildung 5.4: Hysteresekurve bei Ferromagneten.

Beim Zurückfahren des Magnetfelds auf null bleibt eine Restmagnetisierung, die sog. **Remanenz** (III), erhalten. Diese Eigenschaft definiert den Permanentmagneten. Die Remanenz bringt man erst durch ein entgegengerichtetes äußeres Magnetfeld, die sog. **Koerzitivkraft** (IV) zum Verschwinden.

Mikroskopisch gesehen besitzt ein Ferromagnet sog. **Weißsche Bezirke**, vgl. Abb. 5.5. In jedem Bezirk sind die permanenten magnetischen Dipole spontan ausgerichtet, aber seine gesamte Magnetisierung zeigt in eine zufällige Richtung, so dass die Magnetisierung gemittelt über alle Weißschen Bezirke null ergibt. Das äußere Magnetfeld richtet die Magnetisierungen der Weißschen Bezirke aus. Sättigung wird erreicht, wenn die Magnetisierungen **aller** Weißschen Bezirke in die gleiche Richtung zeigen.

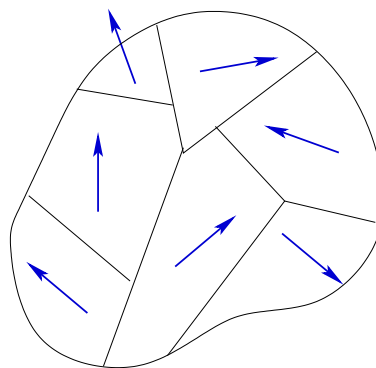


Abbildung 5.5: Weißsche Bezirke in Ferromagneten.

- (b) **Ferrimagnetismus:** Der Festkörper besitzt zwei ferromagnetische Untergitter A und B mit jeweils unterschiedlichen Magnetisierungen $\vec{M}_A, \vec{M}_B$, mit

$$\vec{M}_A \neq \vec{M}_B, \quad \vec{M}_{A+B} = \vec{M}_A + \vec{M}_B \neq 0,$$

solange $0 < T < T_C$.

- (c) **Antiferromagnetismus:** Dies ist ein Spezialfall des Ferrimagnetismus mit $\vec{M}_{A+B} = 0$. Die beiden Magnetisierungen der Untergitter sind entgegengesetzt gleich groß, $\vec{M}_A = -\vec{M}_B$. Die kritische Temperatur T^* nennt man **Néel-Temperatur** T_N .

Wie bei Dielektrika kann man bei magnetischen Materialien die Magnetisierung $\vec{M}$ als Funktion des magnetischen Induktionsfeldes $\vec{B}$, oder auch des Magnetfelds $\vec{H}$ in eine Potenzreihe entwickeln,

$$M^i = \delta^i + \sum_{j=1}^3 \eta^{ij} H^j + \sum_{j,k=1} \kappa^{ijk} H^j H^k + \dots$$

Für kollektiven Magnetismus haben wir $\delta^i \neq 0$, während für Dia- und Paramagnetismus $\delta^i = 0$ gilt. Wir sind insbesondere an **linearen isotropen** magnetischen Materialien interessiert, für die

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

gilt, mit der sog. **magnetischen Suszeptibilität** χ_m . Aufgrund der Tatsache, dass bei Diamagnetismus die Magnetisierung dem äußeren Feld entgegenwirkt, gilt für diamagnetische Materialien $\chi_m < 0$, während für paramagnetische Materialien $\chi_m > 0$ gilt. Für das magnetische Induktionsfeld erhalten wir die Beziehung

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H} \equiv \mu_r \mu_0 \vec{H},$$

mit der **relativen Permeabilität** $\mu_r \equiv 1 + \chi_m$. Nicht magnetisierbare Materialien (insbesondere das Vakuum) haben $\chi_m = 0$ bzw. $\mu_r = 1$.

5.3 Elektromagnetische Wellen in Materie

24.5.2024

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich **lineare isotrope** Materialien, d.h.

$$\vec{D} \equiv \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} \equiv \mu_r \mu_0 \vec{H}.$$

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (5.37) – (5.40) lauten für diesen Fall

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (5.44)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_r \mu_0 \vec{j}, \quad (5.45)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.46)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (5.47)$$

Sie sind bei bekanntem ϵ_r, μ_r wie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum **eindeutig lösbar**.

5.3.1 Wellenausbreitung in Materie

Wir betrachten zunächst den Fall der **homogenen** makroskopischen Maxwell-Gleichungen für lineare isotrope Materialien, d.h. die Glgen. (5.44) – (5.47) in Abwesenheit von (makroskopischen) Ladungsdichten oder Ladungstromdichten,

$$\rho(t, \vec{r}) = \vec{j}(t, \vec{r}) \equiv 0 .$$

Wie im Vakuum (vgl. Abschnitt 4.1.1) lassen sich dann durch Bilden der Rotation der Glgen. (5.45) bzw. (5.47) und Benutzen der Glgen. (5.44) und (5.46) zwei **homogene Wellengleichungen** für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ableiten,

$$\left(\frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0 , \quad (5.48)$$

$$\left(\frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} = 0 . \quad (5.49)$$

Wir bezeichnen mit

$$u \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \equiv \frac{c}{n} \quad (5.50)$$

die **Lichtgeschwindigkeit in Materie**. Die Größe

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (5.51)$$

ist der sog. **Brechungsindex** des durch ϵ_r , μ_r gekennzeichneten Mediums. Alles in Kapitel 4 für die Wellenausbreitung im Vakuum Diskutierte kann vollständig übernommen werden, wenn wir dort einfach c durch u ersetzen. Wir wollen dies hier nicht weiter vertiefen, sondern einige spezielle, gegenüber dem Vakuum qualitativ neue Phänomene ansprechen.

5.3.2 Felder an Grenzflächen

Wir analysieren zunächst das Verhalten der elektromagnetischen Felder an Grenzflächen. Dies geht sogar in voller Allgemeinheit für die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (5.37) – (5.40), ohne Annahme eines linearen isotropen Mediums. Für die Analyse sind die in Abschnitt 2.2.1 eingeführten Konzepte des **Gaußschen Kästchens**, vgl. Abb. 2.6, und der **Stokesschen Fläche**, vgl. Abb. 2.7, äußerst nützlich. Die Glgen. (5.37) und (5.39), welche auf der linken Seite den Divergenz-Operator enthalten, betrachten wir mit Hilfe des Gaußschen Kästchens. In völliger Analogie zur Herleitung von Gl. (2.32) erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_a - \vec{D}_i) &= \sigma , \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_a - \vec{B}_i) &= 0 , \end{aligned} \quad (5.52)$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor auf der Grenzfläche in Richtung der äußeren Region (Index a) und σ die Flächenladungsdichte ist. Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung springt also um den Betrag der Flächenladungsdichte beim Durchgang durch

die Grenzfläche, während die Normalkomponente des magnetischen Induktionsfelds stetig bleibt.

Für die Glgen. (5.38) und (5.40) mit dem Rotationsoperator verwenden wir eine Stokessche Fläche wie in Abb. 2.7 gezeigt. Aus Gl. (5.38) folgt nach Integration über die (zeitlich unveränderliche) Stokessche Fläche

$$\int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{D} .$$

Die dielektrische Verschiebung nimmt auf der Grenzfläche endliche Werte an, deshalb verschwindet das letzte Integral im Limes $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \longrightarrow \vec{j}_F \cdot \vec{t} \Delta \ell \quad (\Delta x \longrightarrow 0) , \quad (5.53)$$

wobei $\vec{j}_F (\equiv \vec{j} \Delta x)$ die **Flächenladungsstromdichte** (wegen $j \Delta x = (I/F) \Delta x$ ein Ladungsstrom pro Längeneinheit auf der Grenzfläche), $\vec{t}$ der Normalenvektor auf der Stokesschen Fläche und $\Delta \ell$ die Längsseite der Stokesschen Fläche (parallel zur Grenzfläche) darstellt. Die linke Seite von Gl. (5.53) formen wir genauso um wie in Abschnitt 2.2.1 den entsprechenden Ausdruck für $\int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}$, mit dem Ergebnis

$$(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_a - \vec{H}_i) = \vec{j}_F \cdot \vec{t} .$$

Benutzen wir noch die zyklische Vertauschbarkeit des Spatproduktes, so erhalten wir letztendlich

$$\vec{n} \times (\vec{H}_a - \vec{H}_i) = \vec{j}_F . \quad (5.54)$$

Die Tangentialkomponente des Magnetfeldes springt also beim Durchgang durch die Grenzfläche um die Flächenladungsstromdichte. Mit den gleichen Argumenten beweist man unter Zugrundelegung von Gl. (5.40)

$$\vec{n} \times (\vec{E}_a - \vec{E}_i) = 0 , \quad (5.55)$$

vgl. Gl. (2.33), d.h. die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist stetig beim Durchgang durch die Grenzfläche; ein Resultat, das wir schon in der Elektrostatik bewiesen hatten. In Abwesenheit von Flächenladungen und -strömen gilt

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_a - \vec{D}_i) &= 0 , \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_a - \vec{B}_i) &= 0 , \\ \vec{n} \times (\vec{H}_a - \vec{H}_i) &= 0 , \\ \vec{n} \times (\vec{E}_a - \vec{E}_i) &= 0 , \end{aligned} \quad (5.56)$$

d.h. die Normalkomponenten von $\vec{D}$ und $\vec{B}$, sowie die Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ und $\vec{E}$ bleiben beim Durchgang durch eine Grenzfläche stetig.

Für lineare isotrope Medien folgt aus den Glgen. (5.56)

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot (\epsilon_{r,a} \vec{E}_a - \epsilon_{r,i} \vec{E}_i) &= 0, \\
 \vec{n} \cdot (\vec{B}_a - \vec{B}_i) &= 0, \\
 \vec{n} \times \left(\frac{\vec{B}_a}{\mu_{r,a}} - \frac{\vec{B}_i}{\mu_{r,i}} \right) &= 0, \\
 \vec{n} \times (\vec{E}_a - \vec{E}_i) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

5.3.3 Reflexions- und Brechungsgesetz

Wir betrachten eine ebene Welle, die auf eine Grenzfläche auftrifft. Sie wird dort teilweise reflektiert und teilweise gebrochen, vgl. Abb. 5.6.

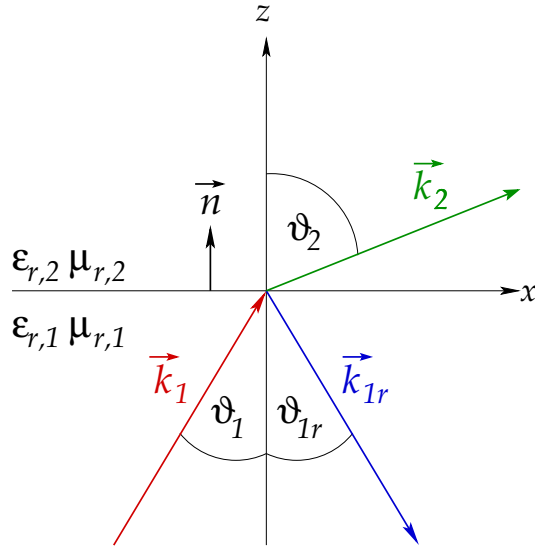


Abbildung 5.6: Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an einer Grenzfläche.

Mit Gl. (4.23) erhalten wir für die einfallenden elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)}, \\
 \vec{B}_1 &= \frac{1}{\omega_1} \vec{k}_1 \times \vec{E}_1 \equiv \frac{1}{u_1} \hat{k}_1 \times \vec{E}_1,
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

wobei wir die Dispersionsrelation (im Medium 1) $\omega_1 = u_1 k_1$ benutzt haben.

Für die reflektierten elektromagnetischen Felder gilt entsprechend

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{1r} &= \vec{E}_{01r} e^{i(\vec{k}_{1r} \cdot \vec{r} - \omega_{1r} t)}, \\
 \vec{B}_{1r} &= \frac{1}{\omega_{1r}} \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r} \equiv \frac{1}{u_1} \hat{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r},
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

wobei wir voraussetzen konnten, dass die Geschwindigkeit der reflektierten Welle im Medium 1 gleich der der einfallenden ist, $u_{1r} = \omega_{1r}/k_{1r} \equiv \omega_1/k_1 = u_1 \equiv c/\sqrt{\epsilon_{r,1}\mu_{r,1}} = c/n_1$, denn die Lichtgeschwindigkeit hängt nicht von der Bewegungsrichtung der Welle ab.

Für die an der Grenzfläche gebrochenen elektromagnetischen Felder gilt analog

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)}, \\ \vec{B}_2 &= \frac{1}{\omega_2} \vec{k}_2 \times \vec{E}_2 \equiv \frac{1}{u_2} \hat{k}_2 \times \vec{E}_2,\end{aligned}\quad (5.60)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $u_2 = \omega_2/k_2 = c/\sqrt{\epsilon_{r,2}\mu_{r,2}} = c/n_2$ im Medium 2.

Aus der Stetigkeitsbedingung (5.57) für die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes folgt, dass die Phasenfaktoren der einfallenden, der reflektierten und der gebrochenen Welle auf der Grenzfläche ($z = 0$) identisch sein müssen, d.h. die Phasen dürfen sich höchstens um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden,

$$\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t\right)_{z=0} = \left(\vec{k}_{1r} \cdot \vec{r} - \omega_{1r} t\right)_{z=0} + 2n\pi = \left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t\right)_{z=0} + 2m\pi, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von t , $\vec{r}$ und insbesondere für

(i) $t = \vec{r} = 0$: dies liefert sofort, dass $n = m = 0$.

(ii) $\vec{r} = 0$, t beliebig: dies liefert

$$\omega_1 = \omega_{1r} = \omega_2 \equiv \omega,$$

d.h. die Kreisfrequenz des reflektierten und gebrochenen Lichts stimmt mit der des einfallenden Lichts überein. Wegen $\nu = \omega/(2\pi)$ ist dann auch die Frequenz identisch. Insbesondere resultiert wegen der Konstanz von u_1 im Medium 1

$$k_1 = \frac{\omega}{u_1} \equiv k_{1r},$$

d.h. die Wellenvektoren des einfallenden und reflektierten Lichts sind vom Betrag her identisch. Wegen $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ sind dann auch die Wellenlängen identisch.

(iii) $t = 0$, $\vec{r}$ beliebig: man erhält

31.5.2024

$$\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}_{1r} \cdot \vec{r}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}\right)_{z=0}. \quad (5.61)$$

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Wellenvektor $\vec{k}_1$ in der (xz) -Ebene liegt, aber wir machen keine Annahmen über die Richtung von $\vec{k}_{1r}$ und $\vec{k}_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{k}_1 &= \sin \vartheta_1 \vec{e}^x + \cos \vartheta_1 \vec{e}^z, \\ \hat{k}_{1r} &= \sin \vartheta_{1r} \cos \varphi_{1r} \vec{e}^x + \sin \vartheta_{1r} \sin \varphi_{1r} \vec{e}^y - \cos \vartheta_{1r} \vec{e}^z, \\ \hat{k}_2 &= \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 \vec{e}^x + \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 \vec{e}^y + \cos \vartheta_2 \vec{e}^z,\end{aligned}$$

wobei φ_{1r} (φ_2) der Winkel zwischen $\vec{k}_{1r}$ ($\vec{k}_2$) und der (xz) -Ebene ist. Damit liefert die Bedingung (5.61)

$$k_1 \sin \vartheta_1 x = k_{1r} \sin \vartheta_{1r} (\cos \varphi_{1r} x + \sin \varphi_{1r} y) = k_2 \sin \vartheta_2 (\cos \varphi_2 x + \sin \varphi_2 y).$$

Dies gilt für beliebige x, y , also auch für $y = 0$, x beliebig, und für $x = 0$, y beliebig:

$$\begin{aligned} k_1 \sin \vartheta_1 &= k_{1r} \sin \vartheta_{1r} \cos \varphi_{1r} = k_2 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, \\ 0 &= k_{1r} \sin \vartheta_{1r} \sin \varphi_{1r} = k_2 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist für beliebige k_{1r} , k_2 , ϑ_{1r} , ϑ_2 nur für

$$\varphi_{1r} = \varphi_2 \equiv 0$$

erfüllbar. Dies bedeutet aber, dass **alle** Wellenvektoren in der (xz) -Ebene, der sog. **Einfallebene** liegen. Aus der ersten Gleichung folgt dann (mit $k_1 = k_{1r}$)

$$k_1 \sin \vartheta_1 = k_1 \sin \vartheta_{1r} = k_2 \sin \vartheta_2.$$

Das erste Gleichheitszeichen liefert

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1r}, \quad (5.62)$$

das berühmte **Reflexionsgesetz**: “Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel”. Das zweite Gleichheitszeichen liefert das **Brechungsgesetz von Snellius**:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega}{u_2} \frac{u_1}{\omega} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{c}{n_1} \frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (5.63)$$

wobei wir die Dispersionsrelation im Medium, $\omega = u_i k_i$, und Gl. (5.50) benutzt haben.

Nehmen wir an, das Medium 2 sei **optisch dichter** als das Medium 1, $n_2 > n_1$. In diesem Fall liefert das Brechungsgesetz wegen $0 \leq \vartheta_{1,2} \leq \pi/2$, dass $\vartheta_1 > \vartheta_2$, d.h. die auslaufende Lichtwelle wird **zum Einfallslot hin gebrochen**. Außerdem gilt $k_2 > k_1$ und $\lambda_1 > \lambda_2$, die Wellenlänge des gebrochenen Lichts ist kleiner als die des einfallenden.

Für den Fall, dass das Medium 2 **optisch dünner** als das Medium 1 ist, $n_1 > n_2$, so ist $\vartheta_2 > \vartheta_1$, die auslaufende Lichtwelle wird **vom Lot weg gebrochen**. Die Wellenzahl wird kleiner, $k_1 > k_2$, und damit die Wellenlänge größer, $\lambda_2 > \lambda_1$. Es gibt einen **Grenzwinkel** $\vartheta_1 = \vartheta_g$, bei dem **Totalreflexion** auftritt, d.h. die gebrochene Lichtwelle tritt nicht ins Medium 2 ein, $\vartheta_2 = \pi/2$. Dieser Winkel ist gemäß Gl. (5.63) durch

$$\sin \vartheta_g = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.64)$$

gegeben.

7.6.2024

5.3.4 Intensitäten bei Reflexion und Brechung

Wir analysieren nun die Stetigkeitsbedingungen (5.57) weiter, um Aussagen über die Amplitudenverhältnisse, d.h. **Intensitäten** des reflektierten und gebrochenen Lichtes zu erhalten. Da jede elliptisch polarisierte ebene Welle in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen zerlegt werden kann, betrachten wir im Folgenden die Spezialfälle, dass

(a) das elektrische Feld $\vec{E}$ **senkrecht zur Einfallsebene** linear polarisiert ist, vgl. Abb. 5.7(a), und (b) das elektrische Feld $\vec{E}$ **in der Einfallsebene** linear polarisiert ist, vgl. Abb. 5.7(b). Das jeweilige magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ ergibt sich dann aus den Glgen. (5.58), (5.59) bzw. (5.60), d.h. es steht senkrecht auf der von $\vec{k}$ und $\vec{E}$ aufgespannten Ebene.

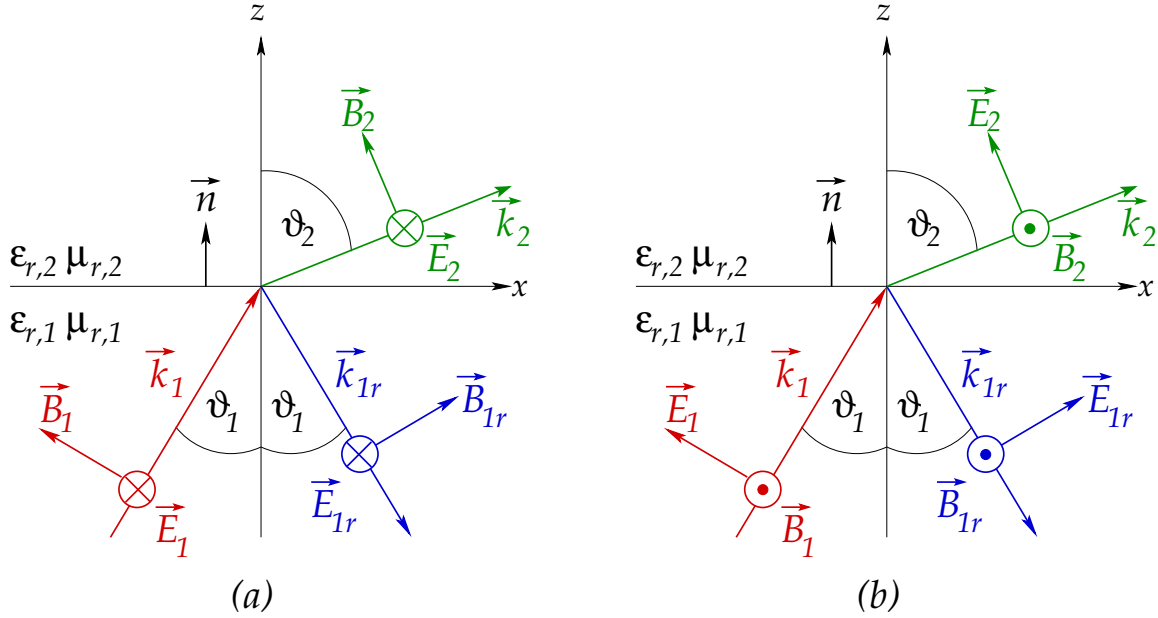


Abbildung 5.7: Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an einer Grenzfläche. (a) $\vec{E}$ senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert, (b) $\vec{E}$ in der Einfallsebene linear polarisiert.

Die Stetigkeitsbedingungen (5.57) lassen sich nach Einsetzen der Glgen. (5.58), (5.59) bzw. (5.60) wie folgt schreiben,

$$\vec{n} \cdot [\epsilon_{r,2} \vec{E}_2 - \epsilon_{r,1} (\vec{E}_1 + \vec{E}_{1r})] = 0, \quad (5.65)$$

$$\vec{n} \cdot [\vec{k}_2 \times \vec{E}_2 - (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r})] = 0, \quad (5.66)$$

$$\vec{n} \times \left[\frac{1}{\mu_{r,2}} \vec{k}_2 \times \vec{E}_2 - \frac{1}{\mu_{r,1}} (\vec{k}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r}) \right] = 0, \quad (5.67)$$

$$\vec{n} \times [\vec{E}_2 - (\vec{E}_1 + \vec{E}_{1r})] = 0. \quad (5.68)$$

Hier haben wir berücksichtigt, dass $\omega_1 = \omega_{1r} = \omega_2 \equiv \omega$ ist, sowie die Tatsache ausgenutzt, dass das Feld im Medium 1 eine Überlagerung von einlaufender ebener Welle $\vec{E}_1$ und reflektierter ebener Welle $\vec{E}_{1r}$ ist. Wir betrachten nun die beiden o.g. Fälle:

- (a) **$\vec{E}$ senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert:** Gleichung (5.65) ist in diesem Fall trivial erfüllt, da $\vec{n}$ in der Einfallsebene liegt. Aus Gl. (5.68) folgt für die

Amplituden der ebenen Wellen

$$E_{02} = E_{01} + E_{01r} . \quad (5.69)$$

Gleichung (5.66) liefert das Brechungsgesetz von Snellius, Gl. (5.63). Dies sieht man, indem man den gemeinsamen Phasenfaktor aus Gl. (5.66) herausdividiert und sodann berechnet, dass

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{k}_2 \times \vec{E}_{02}) &= k_2 E_{02} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2\right) = k_2 E_{02} \sin \vartheta_2 , \\ \vec{n} \cdot (\vec{k}_1 \times \vec{E}_{01} + \vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{01r}) &= k_1 (E_{01} + E_{01r}) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right) = k_1 (E_{01} + E_{01r}) \sin \vartheta_1 . \end{aligned}$$

Hier haben wir $k_1 \equiv k_{1r}$ benutzt. Setzt man dies zusammen mit Gl. (5.69) in Gl. (5.66) ein, so folgt $k_1 \sin \vartheta_1 = k_2 \sin \vartheta_2$.

Somit verbleibt nur noch, Gl. (5.67) zu analysieren. Ausführen des doppelten Kreuzprodukts liefert aufgrund der Tatsache, dass alle elektrischen Feldvektoren senkrecht auf $\vec{n}$ stehen

$$-\frac{k_2}{\mu_{r,2}} \cos \vartheta_2 \vec{E}_2 + \frac{k_1}{\mu_{r,1}} \cos \vartheta_1 (\vec{E}_1 - \vec{E}_{1r}) = 0 .$$

Da alle elektrischen Felder in dieselbe Richtung zeigen und denselben Phasenfaktor besitzen, kann man dies unter Benutzung von Gl. (5.69) umschreiben in

$$-\frac{k_2}{\mu_{r,2}} \cos \vartheta_2 E_{02} + \frac{k_1}{\mu_{r,1}} \cos \vartheta_1 (2E_{01} - E_{02}) = 0 . \quad (5.70)$$

Wenn wir jetzt berücksichtigen, dass

$$k_1 = \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega}{c} n_1 , \quad k_2 = \frac{\omega}{u_2} = \frac{\omega}{c} n_2 , \quad (5.71)$$

so erhalten wir für das Verhältnis der Amplituden der elektrischen Feldstärken im Fall, dass letztere senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert sind,

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_2} , \quad (5.72)$$

und, wenn wir E_{02} mit Gl. (5.69) eliminieren,

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_2} . \quad (5.73)$$

Mit Hilfe des Brechungsgesetzes (5.63) läßt sich prinzipiell noch ϑ_2 durch ϑ_1 ausdrücken, so dass die Amplitudenverhältnisse lediglich Funktionen des Einfallswinkels ϑ_1 , sowie der Brechungsindizes n_1 , n_2 und des Verhältnisses $\mu_{r,1}/\mu_{r,2}$ sind.

- (b) **$\vec{E}$ in der Einfallsebene linear polarisiert:** In diesem Fall ist die Bedingung (5.66) trivial erfüllt, da $\vec{k}_2 \times \vec{E}_2$, $\vec{k}_1 \times \vec{E}_1$ und $\vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r}$ senkrecht auf der Einfallsebene, und damit senkrecht zu $\vec{n}$ stehen. Gleichung (5.67) benötigen wir nicht, um Aussagen

über die Amplitudenverhältnisse zu treffen. Gleichung (5.65) liefert nach Division durch den gemeinsamen Phasenfaktor

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_{r,2} E_{02} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2\right) - \epsilon_{r,1} (E_{01} + E_{01r}) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right) \\ &= \epsilon_{r,2} E_{02} \sin \vartheta_2 - \epsilon_{r,1} (E_{01} + E_{01r}) \sin \vartheta_1 . \end{aligned}$$

Eliminieren wir $\sin \vartheta_2$ mit dem Brechungsgesetz (5.63), und benutzen $\epsilon_{r,i} = n_i^2 / \mu_{r,i}$, $i = 1, 2$, vgl. Gl. (5.51), so ergibt sich nach Division durch $\sin \vartheta_1$

$$\frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 E_{02} = n_1 (E_{01} + E_{01r}) . \quad (5.74)$$

Gleichung (5.68) liefert

$$E_{02} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2\right) - (E_{01} - E_{01r}) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right) = 0 .$$

Das relative Minuszeichen zwischen E_{01} und E_{01r} resultiert daraus, dass $\vec{n} \times \vec{E}_{1r}$ in die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{n} \times \vec{E}_1$ zeigt. Wir erhalten schlußendlich

$$E_{02} \cos \vartheta_2 = (E_{01} - E_{01r}) \cos \vartheta_1 . \quad (5.75)$$

Die Glgen. (5.74) und (5.75) lassen sich nach den Amplitudenverhältnissen auflösen,

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_1} , \quad (5.76)$$

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = - \frac{n_1 \cos \vartheta_2 - \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_1} . \quad (5.77)$$

Es ist häufig der Fall, dass die beiden Medien dieselbe relative magnetische Permeabilität besitzen, $\mu_{r,1} = \mu_{r,2}$. Für diesen Fall vereinfachen sich die Glgen. (5.72) – (5.77),

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} , \quad (5.78)$$

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} , \quad (5.79)$$

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1} , \quad (5.80)$$

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = - \frac{n_1 \cos \vartheta_2 - n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1} . \quad (5.81)$$

Mit Hilfe des Brechungsgesetzes (5.63) und der Additionstheoreme für die trigonometri-

schen Funktionen lassen sich diese Ausdrücke weiter vereinfachen,

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (5.82)$$

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (5.83)$$

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \quad (5.84)$$

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = \frac{\tan(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (5.85)$$

Dies sind die nach ihrem Entdecker benannten **Fresnelschen Formeln**.

Für die Diskussion der Intensitäten sind allerdings die Glgen. (5.78) – (5.81) einfacher zu analysieren. Wir betrachten im Folgenden einige Spezialfälle.

- (i) **Senkrechter Einfall ($\vartheta_1 = 0$):** Falls $\vartheta_1 = 0$ ist, muss nach dem Brechungsgesetz für jeden nichtverschwindenden Wert von n_1/n_2 auch $\vartheta_2 = 0$ sein. Gemäß den Glgen. (5.78) – (5.81) haben wir

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad (5.86)$$

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\perp} = - \left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \quad (5.87)$$

Falls Medium 2 das optisch dichtere Medium ist, $n_2 > n_1$, so ist $\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\parallel} < 1$, d.h. die Intensität der gebrochenen Welle ist geringer als die der einlaufenden. Außerdem gilt $\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\perp} < 0$, d.h. im Falle senkrecht zur Einfallsebene linear polarisierten Lichtes erfährt die reflektierte Welle gegenüber der einlaufenden Welle einen Phasensprung um π . Nominal ist $\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} > 0$, aber wenn man Abb. 5.7(b) betrachtet, so sieht man, dass sich die Richtung des Feldstärkevektors der reflektierten Welle gegenüber dem der einlaufenden Welle ebenfalls umgedreht hat. Also findet auch in diesem Fall ein Phasensprung um π statt.

Falls Medium 2 das optisch dünnere Medium ist, $n_2 < n_1$, so ist $\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\parallel} > 1$, d.h. die Intensität der gebrochenen Welle ist größer als die der einlaufenden. In diesem Fall erfährt die reflektierte Welle gegenüber der einlaufenden Welle keinen Phasensprung, weder für die senkrecht zur Einfallsebene linear polarisierte Welle, noch die in der Einfallsebene linear polarisierte Welle (das negative Vorzeichen von $\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel}$ in Gl. (5.87) kompensiert gerade die Richtungsumkehr des elektrischen Feldes der reflektierten Welle gegenüber der einlaufenden Welle).

- (ii) **Streifender Einfall ($\vartheta_1 = \pi/2$):** In diesem Fall gilt

$$\left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\perp} = \left. \frac{E_{02}}{E_{01}} \right|_{\parallel} = 0, \quad (5.88)$$

d.h. die Intensität der gebrochenen Welle ist stets null, es dringt kein Licht in Medium 2 ein.

- (iii) **Brewster–Winkel:** Nehmen wir an, dass Medium 2 das optisch dichtere Medium ist. Aufgrund von Gl. (5.87) ist für $\vartheta_1 = 0$ die Intensität der reflektierten Welle $\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} (\vartheta_1 = 0) > 0$, während man für streifenden Einfall ($\vartheta_1 = \pi/2$) aus Gl. (5.81) sofort $\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} (\vartheta_1 = \pi/2) = -1$ erhält. Also muss es einen Nulldurchgang bei einem bestimmten Winkel ϑ_B , dem sog. **Brewster–Winkel**, geben,

$$\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel} (\vartheta_1 = \vartheta_B) = 0 . \quad (5.89)$$

Gemäß Gl. (5.81) ist dies der Fall, wenn

$$\begin{aligned} n_2 \cos \vartheta_1 \equiv n_1 \cos \vartheta_B &\stackrel{!}{=} n_1 \cos \vartheta_2 = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_2} \\ &= n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \vartheta_1} \equiv n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \vartheta_B} , \end{aligned}$$

wobei wir von der ersten zur zweiten Zeile das Brechungsgesetz (5.63) benutzt haben. Lösen wir diese Gleichung nach ϑ_B auf, so erhalten wir für den Brewster–Winkel

$$\tan \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1} . \quad (5.90)$$

Der Nulldurchgang von $\left. \frac{E_{01r}}{E_{01}} \right|_{\parallel}$ bedeutet, dass die reflektierte Welle **keine Komponente** mehr hat, welche **parallel zur Einfallsebene linear polarisiert** ist, d.h. es überlebt ausschließlich die Komponente, die **senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert** ist. Dies wiederum bedeutet, dass die reflektierte Welle **vollständig linear polarisiert** ist.

5.3.5 Energietransport bei Reflexion und Brechung

5.7.2024

Wir betrachten nun den Energietransport bei Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche. Der Poynting-Vektor war im Vakuum in Gl. (1.112) definiert worden. Im Medium ist lediglich μ_0 durch $\mu_r \mu_0$ zu ersetzen,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{E} \times \vec{B} . \quad (5.91)$$

Verwenden wir die Relation

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \equiv \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{E} , \quad (5.92)$$

welche für $\vec{B}_1$, $\vec{B}_{1r}$ und $\vec{B}_2$ gilt, vgl. die Glgen. (5.58), (5.59) und (5.60), so folgt mit $k/\omega = 1/u = \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}$ (vgl. Gl. (5.50)),

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} (\vec{E} \cdot \vec{E} \hat{k} - \vec{E} \hat{k} \cdot \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \vec{E} \cdot \vec{E} \hat{k} , \quad (5.93)$$

wobei wir für die letzte Identität $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ benutzt haben. Wie es sein muss, zeigt der Energiestrom in Richtung des Wellenvektors. Der Energiestrom ist eine physikalisch meßbare Größe, und ist daher reellwertig. Dies bedeutet, dass man in Gl. (5.93) die elektrischen Felder durch ihre Realteile ersetzen muss

$$\vec{E} \cdot \vec{E} \longrightarrow \text{Re} \vec{E} \cdot \text{Re} \vec{E} = \frac{1}{4} (\vec{E} + \vec{E}^*) \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*) = \frac{1}{4} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{E}^* \cdot \vec{E}^*) + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* .$$

Für ebene Wellen,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ,$$

ergibt dies

$$\text{Re} \vec{E} \cdot \text{Re} \vec{E} = \frac{1}{4} \left[\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0^* e^{-2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] + \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2 . \quad (5.94)$$

Die ersten beiden Terme enthalten eine zeitliche Oszillation $\sim e^{\pm 2i\omega t}$, welche nur auf Zeitskalen $t < 1/(2\omega)$ beobachtbar wäre. Mitteln wir über größere Zeitskalen, z.B. über eine halbe Periode $\tau = \pi/\omega$, so verschwinden diese zeitlich oszillierenden Terme,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt' e^{\pm 2i\omega t'} &= \mp \frac{i}{2\omega\tau} (e^{\pm 2i\omega(t+\tau)} - e^{\pm 2i\omega t}) = \mp \frac{i}{2\omega\tau} e^{\pm 2i\omega t} (e^{\pm 2i\omega\tau} - 1) \\ &= \mp \frac{i}{2\omega\tau} e^{\pm 2i\omega t} (e^{\pm 2\pi i} - 1) = 0 . \end{aligned}$$

Im zeitlichen Mittel überlebt daher nur der letzte Term in Gl. (5.94). Der zeitlich gemittelte Energiestrom (5.93), den wir der Einfachheit halber mit demselben Symbol $\vec{S}$ bezeichnen, lautet dann

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} |\vec{E}_0|^2 \hat{k} . \quad (5.95)$$

Wir definieren nun den **Reflexionskoeffizienten** als das Verhältnis der Normalkomponente des **reflektierten** Energiestroms zu der des einfallenden Energiestroms,

$$R \equiv \left| \frac{\vec{S}_{1r} \cdot \vec{n}}{\vec{S}_1 \cdot \vec{n}} \right| , \quad (5.96)$$

und den **Transmissionskoeffizienten** als das Verhältnis der Normalkomponente des **transmittierten** Energiestroms zu der des einfallenden Energiestroms,

$$T \equiv \left| \frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{n}}{\vec{S}_1 \cdot \vec{n}} \right| . \quad (5.97)$$

Mit

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 \cdot \vec{n} &= \cos \vartheta_1 , \\ \hat{k}_{1r} \cdot \vec{n} &= \cos(\pi - \vartheta_1) = -\cos \vartheta_1 , \\ \hat{k}_2 \cdot \vec{n} &= \cos \vartheta_2 , \end{aligned}$$

vgl. Abb. 5.6, erhalten wir mit Gl. (5.95)

$$R = \frac{|\vec{E}_{01r}|^2}{|\vec{E}_{01}|^2} , \quad (5.98)$$

$$T = \sqrt{\frac{\epsilon_{r,2}\mu_{r,1}}{\epsilon_{r,1}\mu_{r,2}}} \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} \frac{|\vec{E}_{02}|^2}{|\vec{E}_{01}|^2} = \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} \frac{|\vec{E}_{02}|^2}{|\vec{E}_{01}|^2} , \quad (5.99)$$

wobei wir zum letzten Gleichheitszeichen in der zweiten Zeile Gl. (5.51) benutzt haben. Wir sehen, dass bei Totalreflexion ($\vartheta_2 = \pi/2$) der Transmissionskoeffizient wie erwartet verschwindet.

Es darf natürlich kein Energieverlust bei Reflexion und Transmission entstehen, daher muss gelten

$$T + R = 1 . \quad (5.100)$$

Mit den Glgen. (5.98) und (5.99) muss also die Bedingung

$$\frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} |\vec{E}_{02}|^2 + |\vec{E}_{01r}|^2 = |\vec{E}_{01}|^2 \quad (5.101)$$

gelten. Wir benutzen nun, dass der allgemeine Amplitudenvektor des elektrischen Feldes in eine senkrecht und eine parallel zur Einfallsebene linear polarisierte Komponente zerlegt werden kann, die beide senkrecht aufeinander stehen, so dass

$$|\vec{E}_{0i}|^2 = E_{0i\perp}^2 + E_{0i\parallel}^2 , \quad i = 1, 1r, 2 .$$

Gleichung (5.101) lautet dann unter Benutzung der Glgen. (5.72), (5.73), (5.76) und (5.77),

$$\begin{aligned} & 4 \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_1 n_2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \left[\frac{E_{01\perp}^2}{\left(n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_2 \right)^2} + \frac{E_{01\parallel}^2}{\left(n_1 \cos \vartheta_2 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_1 \right)^2} \right] \\ & + \left(\frac{n_1 \cos \vartheta_1 - \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_2} \right)^2 E_{01\perp}^2 + \left(\frac{n_1 \cos \vartheta_2 - \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} n_2 \cos \vartheta_1} \right)^2 E_{01\parallel}^2 \\ & = E_{01\perp}^2 + E_{01\parallel}^2 = |\vec{E}_{01}|^2 , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

5.3.6 Wellenausbreitung in elektrischen Leitern

12.7.2024

Wir betrachten einen **homogenen, isotropen, ladungsneutralen elektrischen Leiter**. Ein elektrischer Leiter hat, wie in Abschnitt 3.3.1 gezeigt, eine nichtverschwindende elektrische Leitfähigkeit σ . Homogenität und Isotropie bedeuten, dass diese über den Leiter hinweg konstant ist,

$$\sigma = \text{const.} \neq 0 .$$

Die (makroskopische) Ladungsstromdichte ist dann

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sigma \vec{E}(t, \vec{r}) ,$$

vgl. Gl. (3.36). Ladungsneutralität bedeutet, dass die **makroskopische** Ladungsdichte verschwindet,

$$\rho \equiv 0 .$$

Gemäß Gl. (5.17) bedeutet dies, dass sich die mittlere Ladungsdichte der freien Ladungen und der in Molekülen gebundenen Ladungen gerade gegenseitig kompensieren.

Auf den ersten Blick mag es etwas überraschend erscheinen, dass $\rho = 0$, während $\vec{j} \neq 0$ ist. Dies ist eine Folge der Tatsache, dass wir anstelle der mikroskopischen Größen (die gemäß Gl. (1.71) miteinander zusammenhängen) nun **makroskopisch gemittelte Größen** betrachten. Man denke z.B. an einen stromdurchflossenen Leitungsdraht. Er ist ungeladen, $\rho = 0$, weil in jedem Mittelungsvolumen die negative Ladung der Elektronen, die für den Stromfluß sorgen, durch die positive Ladung der stationären Atomrümpfe kompensiert wird. Dennoch fließt durch den Draht ein Strom, $\vec{j} \neq 0$.

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen für einen linearen isotropen Leiter, Glgen. (5.44) – (5.47), lauten in diesem Fall

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 , \quad (5.102)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_r \mu_0 \sigma \vec{E} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (5.103)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (5.104)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (5.105)$$

Das Verschwinden der Ladungsdichte kann man nun sogar mathematisch beweisen. Wir nehmen an, $\rho \neq 0$, so dass Gl. (5.102) die Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \rho$$

hat. Bilden wir nun die Divergenz von Gl. (5.103), so erhalten wir

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_r \mu_0 \sigma \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \rho + \frac{1}{u^2 \epsilon_r \epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_r \mu_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) ,$$

wobei wir Gl. (5.50) benutzt haben, bzw.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} \rho .$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit hat die Lösung

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho(t=0, \vec{r}) e^{-\sigma t / (\epsilon_r \epsilon_0)} .$$

Falls zu Anfang $\rho(t=0, \vec{r}) = 0$, so bleibt auch zu späteren Zeiten $\rho(t, \vec{r}) = 0$.

Obwohl die Maxwell-Gleichungen (5.102) – (5.105) komplizierter aussehen als beispielsweise für das Vakuum ohne Ladungen und Ladungstromdichten, Glgen. (4.2) – (4.5), lassen sie sich immer noch entkoppeln. Wir bilden die Rotation von Gl. (5.105),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \\ &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_r \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} , \end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (5.102) und (5.103) benutzt haben. Wir erhalten eine **Verallgemeinerung** der Wellengleichung für $\vec{E}$ für den Fall $\sigma \neq 0$, die sog. **Telegraphengleichung**

$$\left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu_r \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E} = 0 . \quad (5.106)$$

Auch das magnetische Induktionsfeld erfüllt die Telegraphengleichung. Wir bilden die Rotation von Gl. (5.103),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \\ &= \mu_r \mu_0 \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{u^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_r \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} , \end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (5.104) und (5.105) benutzt haben. Auch diese Gleichung ist eine Telegraphengleichung, diesmal für das magnetische Induktionsfeld,

$$\left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu_r \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{B} = 0 . \quad (5.107)$$

Zur Lösung der Telegraphengleichung (5.106) machen wir den Lösungsansatz einer ebenen Welle,

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} . \quad (5.108)$$

Eingesetzt in die Telegraphengleichung (5.106) ergibt sich

$$\left(\frac{\omega^2}{u^2} - k^2 + i \mu_r \mu_0 \sigma \omega \right) \vec{E}_0 = 0 . \quad (5.109)$$

Wir definieren nun die sog. **komplexe Dielektrizitätskonstante** des Mediums,

$$\hat{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} .$$

Mit dieser komplexen Dielektrizitätskonstante können wir auch eine **komplexe Wellengeschwindigkeit** definieren,

$$\hat{u}(\omega) \equiv \frac{c}{\sqrt{\hat{\epsilon}_r(\omega) \mu_r}} \equiv \frac{c}{\hat{n}(\omega)} ,$$

wobei

$$\hat{n}(\omega) \equiv \sqrt{\hat{\epsilon}_r(\omega) \mu_r} \quad (5.110)$$

der **komplexe Brechungsindex** ist. Mit diesen Definitionen und $u^2 = c^2/(\epsilon_r \mu_r)$ sowie $\mu_0 c^2 = 1/\epsilon_0$ schreibt sich Gl. (5.109) wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \mu_r - k^2 + i \mu_r \mu_0 \sigma \omega \right) \vec{E}_0 = \left[\frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \left(\epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) - k^2 \right] \vec{E}_0 \\ &\equiv \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \hat{\epsilon}_r(\omega) - k^2 \right) \vec{E}_0 = \left(\frac{\omega^2}{\hat{u}^2(\omega)} - k^2 \right) \vec{E}_0 . \end{aligned}$$

Dies sieht formal wie die Fourier-Transformierte der homogenen Wellengleichung aus, vgl. Gl. (4.12), allerdings ist zu bedenken, dass die Wellengeschwindigkeit nun komplexe Werte annimmt. Nichttriviale Lösungen erfordern $\vec{E}_0 \neq 0$, deshalb muss der Vorfaktor verschwinden,

$$\omega^2 = \hat{u}^2(\omega) k^2 . \quad (5.111)$$

Dies ist das Analogon zur Dispersionsrelation (4.13). Da $\omega \in \mathbb{R}$ und $\hat{u}^2(\omega) \in \mathbb{C}$, muss auch $k^2 \in \mathbb{C}$ sein, d.h. die Wellenzahl ist komplex, $k \in \mathbb{C}$.

Zur Bestimmung der komplexen Wellenzahl berechnen wir zunächst den Real- und Imaginärteil des komplexen Brechungsindex (5.110). Wir schreiben

$$\hat{n} = \bar{n} + i \gamma , \quad \bar{n}, \gamma \in \mathbb{R} .$$

Das Quadrat des komplexen Brechungsindex ist

$$\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}_r \mu_r = \epsilon_r \mu_r + i \frac{\mu_r \sigma}{\epsilon_0 \omega} \equiv \bar{n}^2 - \gamma^2 + 2 i \gamma \bar{n} .$$

Identifizieren wir Real- und Imaginärteil auf der linken und rechten Seite folgt

$$\bar{n}^2 - \gamma^2 = \epsilon_r \mu_r \equiv n^2 , \quad (5.112)$$

wobei n der Brechungsindex in einem gewöhnlichen Isolator ist, und

$$\gamma \bar{n} = \frac{\mu_r \sigma}{2 \epsilon_0 \omega} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{\mu_r \sigma}{2 \epsilon_0 \bar{n} \omega} .$$

Eingesetzt in Gl. (5.112) ergibt sich

$$\bar{n}^2 - \frac{\mu_r^2 \sigma^2}{4 \epsilon_0^2 \bar{n}^2 \omega^2} = n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{n}^4 - n^2 \bar{n}^2 - \frac{\mu_r^2 \sigma^2}{4 \epsilon_0^2 \omega^2} = 0 .$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung für $\bar{n}^2$ ist

$$\bar{n}^2 = \frac{n^2}{2} \pm \sqrt{\frac{n^4}{4} + \frac{\mu_r^2 \sigma^2}{4 \epsilon_0^2 \omega^2}} ,$$

wobei, da $\bar{n}$ reell ist, nur das obere Vorzeichen Gültigkeit besitzt,

$$\bar{n}^2 = \frac{1}{2} n^2 \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0 \omega} \right)^2} \right] . \quad (5.113)$$

Offenbar ist $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{n} = n$, weswegen wir $\bar{n}$ als **verallgemeinerten Brechungsindex** bezeichnen. Offensichtlich gilt stets $\bar{n} \geq n$, wobei das Gleichheitszeichen für $\sigma = 0$ gilt.

Für γ^2 erhalten wir aufgrund von Gl. (5.112)

$$\gamma^2 \equiv \bar{n}^2 - n^2 = \frac{1}{2} n^2 \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0 \omega} \right)^2} \right] .$$

Für $\sigma \rightarrow 0$ geht $\gamma \rightarrow 0$, wie zu erwarten. Man nennt γ den sog. **Extinktionskoeffizienten**.

Die aus der Dispersionsrelation (5.111) folgende Wellenzahl ist nun

$$k = \frac{\omega}{\bar{u}} = \frac{\omega}{c} \hat{n} = \frac{\omega}{c} (\bar{n} + i\gamma) \equiv k_R + i k_I ,$$

wobei $k_R \equiv \omega \bar{n}/c$ und $k_I \equiv \omega \gamma/c$ den Real- und Imaginärteil der komplexen Wellenzahl darstellen. Der komplexe Wellenzahl**vektor** ist wie gewöhnlich $\vec{k} = \hat{k} k$, wobei $\hat{k} \in \mathbb{R}^3$ ein **reellwertiger** Einheitsvektor ist und k ist der komplexwertige Betrag von $\vec{k}$. Eingesetzt in den Lösungsansatz (5.108) erhalten wir nun

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\bar{n}}{c} \hat{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \exp \left(-\frac{\omega \gamma}{c} \hat{k} \cdot \vec{r} \right) . \quad (5.114)$$

Dies hat die Form einer ebenen Welle, multipliziert mit einem **Dämpfungsfaktor**.

Welche Bedeutung hat dies für einen elektrischen Leiter? Nehmen wir z.B. an, wir hätten einen elektrischen Leiter oberhalb der (xy) -Ebene und Vakuum unterhalb davon. Eine elektromagnetische ebene Welle propagiere im Vakuum in $+z$ -Richtung, $\hat{k} = \vec{e}^z$. Diese trifft dann bei $z = 0$ auf die Grenzfläche des Leiters. Gleichung (5.114) beschreibt die Form dieser Welle im elektrischen Leiter,

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{\bar{n}}{c} z \right) \right] \exp \left(-\frac{\omega \gamma}{c} z \right) .$$

Die Amplitude des elektrischen Feldes wird mit zunehmender Distanz von der Grenzfläche exponentiell kleiner. Man nennt

$$\delta \equiv \frac{c}{\omega \gamma} \quad (5.115)$$

die sog. **Eindringtiefe**, bei der die Amplitude auf $1/e$ -tel ihres ursprünglichen Wertes abgefallen ist.

Die **Phasengeschwindigkeit** der Welle bestimmt sich aus der Bedingung $t - \bar{n} z/c = \text{const.}$,

$$\bar{u} = \frac{dz}{dt} = \frac{c}{\bar{n}} \leq \frac{c}{n} \equiv u ,$$

d.h. sie ist kleiner als die Phasengeschwindigkeit in einem vergleichbaren Isolator mit $\sigma = 0$.

Die Frequenz des eindringenden elektrischen Feldes bleibt die gleiche wie im Vakuum, allerdings ändert sich die Wellenlänge,

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{k_R} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{c}{\bar{n}} = \frac{c}{\nu} \frac{1}{\bar{n}} = \frac{\lambda}{\bar{n}} < \lambda ,$$

wobei $\lambda = c/\nu$ die Wellenlänge im Vakuum ist. Die Wellenlänge wird also kleiner. Sie ist wegen $\bar{n} \geq n$ auch kleiner als in einem vergleichbaren Isolator mit $\sigma = 0$.

Die Lösungen

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{r}) &= \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k \hat{k} \cdot \vec{r})} , \\ \vec{B}(t, \vec{r}) &= \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - k \hat{k} \cdot \vec{r})} , \end{aligned}$$

der Telegraphengleichung müssen natürlich noch die Maxwell-Gleichungen (5.102), (5.104) und (5.105) erfüllen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\implies \hat{k} \cdot \vec{E} = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 &\implies \hat{k} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\implies \frac{\hat{n}}{c} \hat{k} \times \vec{E} = \vec{B}.\end{aligned}$$

Wie im Vakuum bilden auch hier $\hat{k}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ (in dieser Reihenfolge) ein rechtshändiges Orthogonalsystem. Dies bedeutet, dass elektromagnetische Wellen auch in elektrischen Leitern **transversal** sind!

Allerdings sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht mehr gleichphasig, sondern **phasenverschoben**. Mit der Polardarstellung der komplexen Zahl $\hat{n} = \bar{n} + i\gamma$,

$$\hat{n} = \bar{n} + i\gamma = \sqrt{\bar{n}^2 + \gamma^2} e^{i\varphi}, \quad \tan \varphi = \frac{\gamma}{\bar{n}},$$

erhalten wir

$$\vec{B} = \frac{\hat{n}}{c} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\sqrt{\bar{n}^2 + \gamma^2}}{c} \hat{k} \times \vec{E} e^{i\varphi}.$$

$\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind also um den Winkel φ phasenverschoben.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (Springer, Berlin)
- [2] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* (Springer, Berlin)
- [3] W. Greiner, *Theoretische Physik Band 3: Klassische Elektrodynamik* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [4] R. Jelitto, *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (AULA-Verlag, Wiesbaden)
- [5] R. Dreizler, C. Lüdde, *Theoretische Physik 2: Elektrodynamik und spezielle Relativitätstheorie* (Springer, Berlin)
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [7] J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (de Gruyter, Berlin)
- [8] D.J. Griffiths, *Elektrodynamik* (Pearson, München)
- [9] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)
- [10] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego, 1980), Gl. (3.721.1)