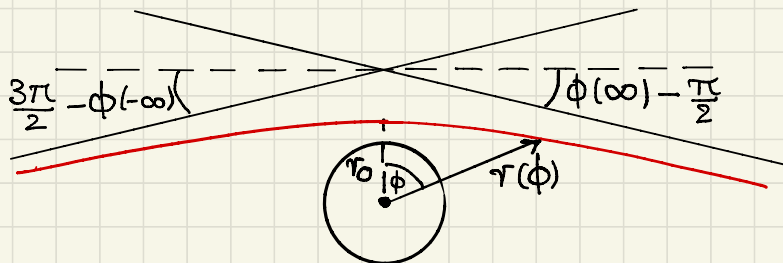



9. Lichtablenkung

Für Photonen gilt $\varepsilon = 0$ in Gl. (8.20):

$$\phi(\tau) = \phi(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau'}{\tau'^2} \frac{\sqrt{A(\tau')}}{\sqrt{\frac{F^2}{B(\tau')\ell^2} - \frac{1}{\tau'^2}}} \quad (9.1)$$

τ_0 : minimaler Abstand $\Rightarrow \left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)_{\tau_0} = 0$, $\phi(\tau_0) = 0$ (9.2)



Lichtablenkung: $\Delta\phi = \phi(\infty) - \frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{3\pi}{2} - \phi(-\infty)}_{= 2\pi - \phi(\infty)} = 2\phi(\infty) - \pi$ (9.3)

Gl. (9.1): $\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\sqrt{A(\tau)}}{\tau^2 \sqrt{\frac{F^2}{B(\tau)\ell^2} - \frac{1}{\tau^2}}} = \frac{\sqrt{A(\tau)}}{\tau \sqrt{\frac{F^2\tau^2}{B(\tau)\ell^2} - 1}}$

$\Rightarrow$ Gl. (9.2): $\frac{d\phi}{d\tau} \rightarrow \infty \quad (\tau \rightarrow \tau_0) \Leftrightarrow \frac{B(\tau_0)}{\tau_0^2} = \frac{F^2}{\ell^2}$ (9.4)

⇒ Eliminiere $\frac{F^2}{\varrho^2}$ zugunsten von τ_0 :

$$\phi(\infty) = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \frac{\sqrt{A(\tau)}}{\sqrt{\frac{\tau^2}{\tau_0^2} \frac{B(\tau_0)}{B(\tau)} - 1}} \quad (9.5)$$

Robertson-Entwicklung: $A(\tau) = 1 + \gamma \frac{\tau_s}{\tau} + \dots$, $B(\tau) = 1 - \frac{\tau_s}{\tau} + \dots$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \frac{B(\tau_0)}{B(\tau)} - 1 &\approx \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \frac{1 - \tau_s/\tau_0}{1 - \tau_s/\tau} - 1 \approx \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_0} + \frac{\tau_s}{\tau} \right) - 1 \\ &= \frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \frac{\tau - \tau_0}{\tau \tau_0} \tau_s = \frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \frac{\tau^2 - \tau_0^2}{\tau \tau_0 (\tau + \tau_0)} \tau_s \\ &= \left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right) \left[1 - \frac{\tau \tau_s}{\tau_0 (\tau + \tau_0)} \right] \end{aligned}$$

$$x \equiv \frac{\tau}{\tau_0}, x_s \equiv \frac{\tau_s}{\tau_0} \ll 1$$

$$\stackrel{(9.5)}{\Rightarrow} \phi(\infty) \approx \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{1 + \frac{\gamma}{2} \frac{x_s}{x}}{\sqrt{x^2 - 1} \left[1 - \frac{x x_s}{2(x+1)} \right]} \approx \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} \left[1 + \frac{\gamma}{2} \frac{x_s}{x} + \frac{x x_s}{2(x+1)} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \left[\arccos \frac{1}{x} + \frac{\gamma x_s}{2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right]_1^{\infty} + \frac{x_s}{2} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} \frac{1}{(y+2)^{3/2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma x_s}{2} + \frac{x_s}{2} \sqrt{\frac{y}{y+2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} + x_s \frac{1+\gamma}{2} \quad (9.6) \end{aligned}$$

(9.3)



$$\Delta\phi \approx \frac{r_s}{r} (1 + \gamma)$$

(9.7)



Lichtstrahl, der gerade an der Sonne vorbeistreift:

$$\Delta\phi \approx \frac{r_{s,\odot}}{R_\odot} (1 + \gamma) \underset{(7.17)}{\approx} 4.24 \cdot 10^{-6} (1 + \gamma) \underset{\substack{\uparrow \\ 60' = 3600'' = \frac{\pi}{180}}}{\approx} 1.75'' \frac{1 + \gamma}{2}$$

(9.8)

Newtonsche Bewegungsgleichung auch für Photon gültig! (Dividiere beide Seiten durch m !)

$$\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \Delta\phi_N \approx 0.875''$$

Voraussage der ART (A. Einstein, 1911):

$$\Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow \Delta\phi_E \approx 1.75'' = \underline{2 \cdot \Delta\phi_N} !$$

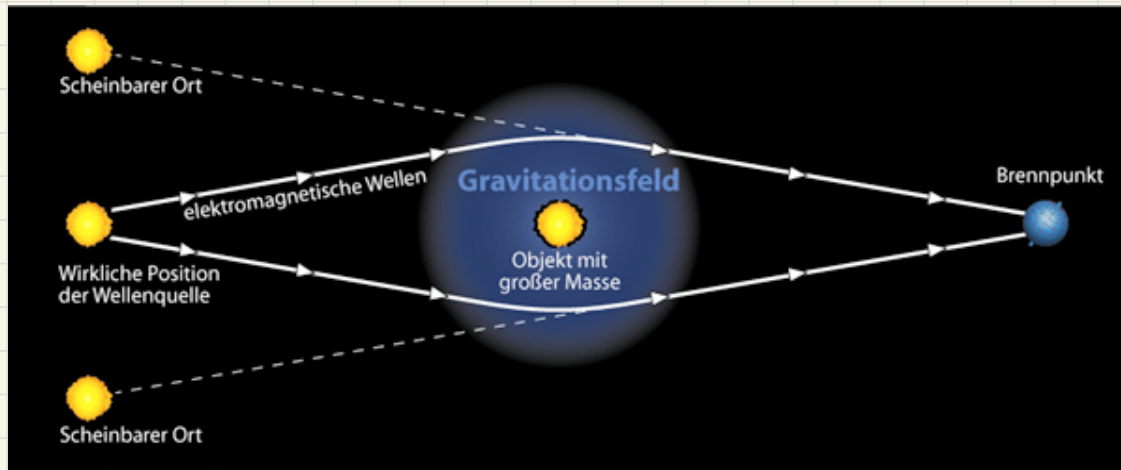
Eddington-Experiment: Sonnenfinsternis 29.5.1919

$\Rightarrow$ beobachte Fixsternposition am Sonnenrand relativ zu normaler Position
2 Expeditionen (Eddington $\rightarrow$ Principe, Crommelin $\rightarrow$ Sobral, Brasilien)

$$\Rightarrow \Delta\phi_{\text{exp}} = (1.9 \pm 0.11)'' \checkmark \Rightarrow \gamma : \text{Eddington-Parameter}$$

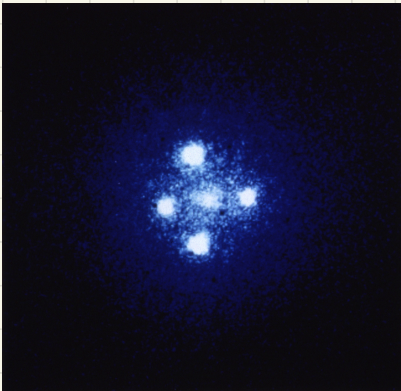
Neuere VLBI-Experimente: $\gamma - 1 = (-1.6 \pm 1.5) \cdot 10^{-4} \Rightarrow \text{ART bestätigt!} \checkmark$

Gravitationslinse:



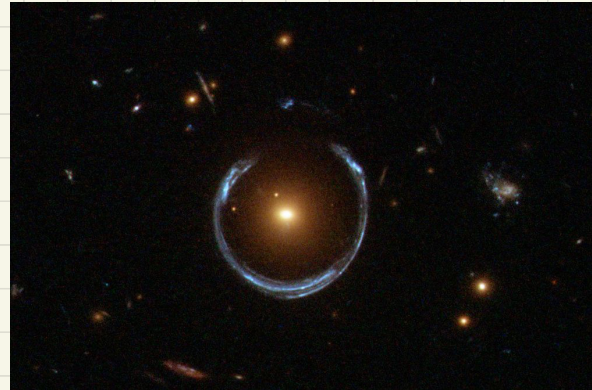
Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationslinseneffekt#/media/Datei:Gravitationslinse.gif>, 24.5.2020

"Einstein-Kreuz": Quasar QSO 2237+0305



Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinkreuz>

"Einstein-Ring": LRG 3-757



Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinring>