7. Schwarzschild-Metrik

Betrachte statische, sphärisch symmetrische, räumlich begrenzte Massenverteilung

$$\rho(r) \begin{cases} \neq 0 & , \; r \leq r_0 \\ = 0 & , \; r > r_0 \end{cases} \tag{7.1}$$

$\Rightarrow$ Druck $P(t,\vec{r}) = P(r)$, 4-Geschwindigkeit $u^\mu(t,\vec{r}) = (u^0,0,0,0)^T, u^0$ = const.

$\Rightarrow$ $T^{\mu\nu}(t,\vec{r}) = T^{\mu\nu}(r)$

$\Rightarrow$ Quellterm in Einsteinschen Feldgleichungen statisch, sphärisch symmetrisch

$\Rightarrow$ Lösung $g_{\mu\nu}(t, r) = g_{\mu\nu}(r)$

Lösungsansatz: Standardform (6.4)!

$$\Rightarrow \quad (g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\left(B(r), -A(r), -r^2, -r^2\sin^2\theta\right) \tag{7.2}$$

Suche Lösung im Außenraum, d.h. für $T^{\mu\nu}(r) = 0 \quad , \; r > r_0$

$\Rightarrow$ Lösung muss homogene Einstein-Gleichungen erfüllen,

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad , \; r > r_0 \tag{7.3}$$

Gl. (6.16) erfüllt Gl. (7.3) trivial, Gl. (6.15) ist erfüllt, wenn Gl. (6.14) erfüllt ist

$\Rightarrow$ zu lösende Gleichungen: Glgen. (6.12), (6.13), (6.14)

$$R_{00} = 0 \,, \quad R_{11} = 0 \,, \quad R_{22} = 0 \tag{7.4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) = 0 \tag{7.5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\ln(AB) = 0 \tag{7.6}$$

$$\Rightarrow \quad A(r)\,B(r) = \text{const.} \tag{7.7}$$

Wg. Gl. (6.5): $\quad A(r)B(r) \xrightarrow{(r\to\infty)} 1 \quad \Rightarrow \quad A(r) = \frac{1}{B(r)} \quad \forall\, r > r_0 \qquad (7.8)$

$\Rightarrow$ Gl. (6.14): $\quad R_{22} = -1 + rB' + B = 0 \qquad (7.9)$

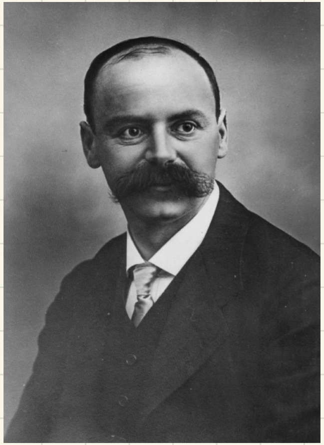
Gl. (6.13): $\quad R_{11} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{rB'' + 2B'}{2rB} = \frac{1}{2rB}\frac{dR_{22}}{dr} = 0$

$\Rightarrow$ automatisch erfüllt!

Gl. (7.9): $$1 = r B' + B = \frac{d}{dr}(rB) \tag{7.10}$$

$$\Rightarrow \quad rB = r + \text{const.} \equiv r - 2a \tag{7.11}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B(r) = 1 - \frac{2a}{r}, \quad A(r) = \frac{1}{1 - 2a/r}, \quad r > r_0} \tag{7.12}$$



K. Schwarzschild, 1916

(* 9.10.1873 Frankfurt a.M., † 11.5.1916 Potsdam)

$\overset{(6.4)}{\Rightarrow}$ Schwarzschild-Metrik

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2a/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)} \tag{7.13}$$

Konstante *a* durch Newtonschen Grenzfall bestimmt:

$$g_{00} = B(r) \xrightarrow{r \to \infty} 1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \equiv 1 - \frac{2a}{r} \tag{7.14}$$

$\Rightarrow$ Schwarzschild-Radius $$\boxed{r_S \equiv 2a = \frac{2GM}{c^2}} \tag{7.15}$$

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild

Diskussion:

(i) Schwarzschild-Radius der Sonne

$$r_{S,\odot} = \frac{2GM_\odot}{c^2} \simeq 2950\,m \tag{7.16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_{S,\odot}}{R_\odot} \simeq \frac{2.95 \cdot 10^3}{6.96 \cdot 10^8} \simeq 4.24 \cdot 10^{-6} \ll 1 \tag{7.17}$$

Gültigkeitsbereich: $r > R_\odot \gg r_{S,\odot} \Rightarrow \frac{r_{S,\odot}}{r} < \frac{r_{S,\odot}}{R_\odot} \ll 1$

$\Rightarrow$ Abweichung von Minkowski-Metrik sehr klein!

(ii) Singularitäten, Nullstellen:

$$A(r) = \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} \xrightarrow{r \to r_S} \infty$$

$\Rightarrow$ keine "echte" Singularität des Raums (s. Abschnitt 21)

$$B(r) = 1 - \frac{r_S}{r} \xrightarrow{r \to r_S} 0$$

$$\Rightarrow \quad d\tau = \frac{1}{c}\, ds_{\text{Uhr}} = \sqrt{B(r)}\, dt = \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}\, dt \xrightarrow{r \to r_S} 0 \tag{7.18}$$

(7.13), $dr = d\theta = d\phi = 0$

$\Rightarrow$ Rotverschiebung $\to \infty$

$\Rightarrow$ Schwarzes Loch: Stern mit Radius $r_0 < r_S$

$\Rightarrow$ emittiert kein Licht (Licht kann nicht in den Bereich $r > r_S$ dringen)

Koordinatensingularitäten: $\theta \to 0 \quad \left(g^{22} = \frac{1}{\sin^2\theta} \to \infty\right)$

$r_0 \to 0\,, \quad r \to 0 \quad \Rightarrow$ Metrik einer Punktmasse bei $r = 0$

(iii) Taylor-Entwicklung für $\frac{r_S}{r} \ll 1$:

$$A(r) \simeq 1 + \frac{r_S}{r} + O\left(\frac{r_S^2}{r^2}\right) \quad \overset{(6.6)}{\Longrightarrow} \quad \gamma = 1 \tag{7.19}$$

$$B(r) = 1 - \frac{r_S}{r} \quad \overset{(6.6)}{\Longrightarrow} \quad \beta = \gamma = 1 \tag{7.20}$$

(iv) Raumkrümmung:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 0$$

$\Rightarrow$ keine (vierdimensionale) Krümmung in der Umgebung einer Masse!