


---

---

---

---

---



## 29. Weltzustand

22.7.2020

Friedmann-Modell (28.23) mit  $K_s \approx 0$ :

$$\dot{R}^2 - \frac{K_m}{R} - \frac{\Lambda}{3} R^2 = -k \quad (29.1)$$

Bei  $t = t_0$ :  $R_0 \equiv R(t_0)$ ,  $H_0 = c \frac{\dot{R}(t_0)}{R_0}$ ,  $q_0 = - \frac{\ddot{R}(t_0) R_0}{\dot{R}(t_0)^2}$  (29.2)

Definiere dimensionslose Variablen

$$x(\tau) \equiv \frac{R(t)}{R_0}, \quad \tau = H_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{H_0} \frac{d}{d(ct)} \equiv \frac{d}{d\tau} \quad (29.3)$$

(29.1)  
 $\Rightarrow$

$$\frac{c^2}{H_0^2 R_0^2} \dot{R}(t)^2 - \frac{c^2}{H_0^2} \frac{K_m}{R_0^2 R(t)} - \frac{\Lambda}{3} \frac{c^2}{H_0^2} \frac{R(t)^2}{R_0^2} = - \frac{c^2 k}{R_0^2 H_0^2}$$

(29.3)

$\Leftrightarrow$   
 (28.22)

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3 H_0^2} \frac{\rho_{mat}(t_0)}{x} - \frac{c^2 \Lambda}{3 H_0^2} x^2 = - \frac{c^2 k}{R_0^2 H_0^2} \quad (29.4)$$

Definiere

$$\rho_{kr}(t_0) \equiv \frac{3 H_0^2}{8\pi G} \approx 1.001 \cdot 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (29.5)$$

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_{mat}(t_0)}{\rho_{kr}(t_0)}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{3 H_0^2}, \quad \Omega_k = - \frac{c^2 k}{R_0^2 H_0^2} \quad (29.6)$$

(29.4)  
⇒

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{\Omega_m}{x} - \Omega_\Lambda x^2 = \Omega_k$$

(29.7)

Für  $t = t_0$  gilt:  $x(H_0 t_0) = \frac{R(t_0)}{R_0} \equiv 1$ ,  $\frac{dx}{dt}(H_0 t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{\dot{R}(t_0)}{R_0} \stackrel{(29.2)}{=} 1$

(29.8)

(29.7)  
⇒

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k$$

(29.9)

⇒  $\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k$  Maß dafür, wie stark Einfluss Materie, kosmologische Konstante und Krümmung in Bewegungsgleichung (29.7) zum heutigen Zeitpunkt sind.

Differenziere Gl. (29.1) nach  $ct$ :

$$2\dot{R}\ddot{R} + \frac{K_m}{R^2}\dot{R} - \frac{2}{3}\Lambda R\dot{R} = 0$$

(29.10)

$$\times \frac{R}{\dot{R}^3} : 2\frac{\ddot{R}}{\dot{R}^2} + \frac{K_m}{R\dot{R}^2} - \frac{2}{3}\Lambda\frac{R^2}{\dot{R}^2} = 0$$

$$t = t_0 : -2q_0 + \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{\text{mat}}(t_0) - \frac{2}{3}\frac{c^2\Lambda}{H_0^2} = -2q_0 + \Omega_m - 2\Omega_\Lambda = 0$$

⇔

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda$$

(29.11)

Weltzustand: charakterisiert durch 5 Parameter  $\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k, H_0, q_0$   
wegen Glgen. (29.9), (29.11): 3 unabhängige Parameter

## Bestimmung der Parameter:

(i) Standardkerzen  $\Rightarrow H_0, q_0$  (s. Kap. 26)

(ii) Bewegung der äußeren Galaxien in Galaxiencluster  $\Rightarrow M \Rightarrow \Omega_m$

(iii) Analyse der kosmischen Hintergrundstrahlung

$\Rightarrow$  Lambda - Cold Dark Matter-Modell ( $\Lambda$ CDM-Modell):

Analyse der experimentellen Daten (WMAP, Planck) der kosmischen Hintergrundstrahlung

$$\Rightarrow (i) \quad \Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm} \quad (29.12)$$

sichtbare, baryonische Materie

unsichtbare, sog. "Dunkle" Materie

$$\Omega_b = 0.044 \pm 0.0017$$

$$\Omega_m = 0.308 \pm 0.012$$

$$\Rightarrow \Omega_{dm} = 0.264 \pm 0.014 \quad (29.13)$$

$$(ii) \quad \Omega_\Lambda = 0.692 \pm 0.01 \quad (29.14)$$

(29.9)

$\Rightarrow$

$$\Omega_k = 0 \pm 0.022 \quad (29.15)$$

(29.11)

$\Rightarrow$

$$q_0 = -0.538 \pm 0.016 \quad (29.16)$$

$$(iii) \quad H_0 = (67.8 \pm 0.9) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \Rightarrow H_0^{-1} \approx 14.432 \cdot 10^9 \text{ a} \quad (29.17)$$

Zeitliche Entwicklung: Integration von Gl. (29.7)

$$\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{\frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_k} \Rightarrow \tau \equiv H_0 t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{x'} + \Omega_\Lambda x'^2 + \Omega_k}} \quad (29.18)$$

$$\Omega_k \approx 0 \Rightarrow \tau = H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_0^x \frac{\sqrt{x'} dx'}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} x'^3}}$$

$$y^2 \equiv \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} x'^3 \Rightarrow x' = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} y^{2/3} \Rightarrow dx' = \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} y^{-1/3} dy$$

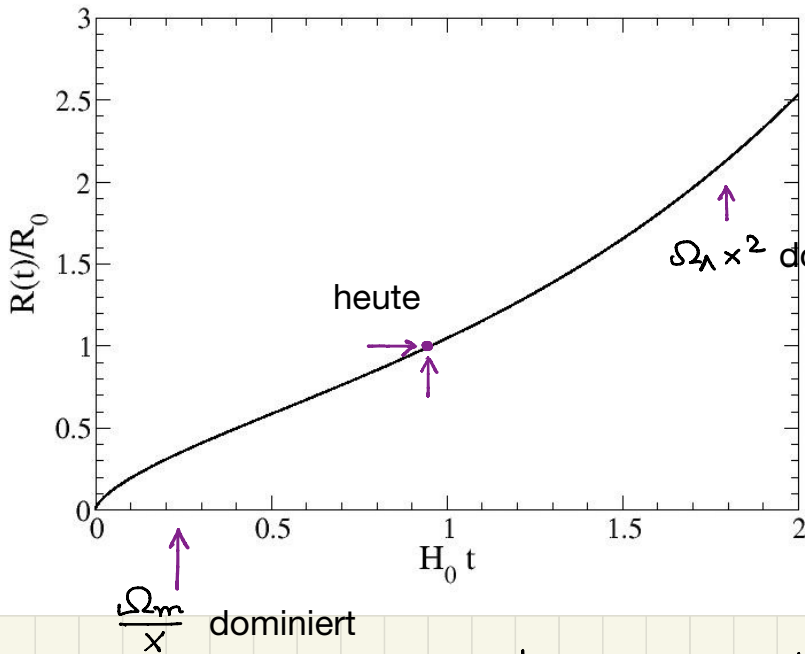
$$\Rightarrow \tau = H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \int_0^{\sqrt{\Omega_\Lambda/\Omega_m} x^{3/2}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{Arsinh} \left( \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} x^{3/2} \right) \quad (29.19)$$

Weltalter:  $t = t_0, x = 1$

$$\Rightarrow T_{\text{Welt}} = t_0 = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0} \operatorname{Arsinh} \left( \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right) \approx 0.957 H_0^{-1} \approx 13.811 \cdot 10^9 \text{ a} \quad (29.20)$$

Auflösen von Gl. (29.19) nach  $R(t) = R_0 x(\tau)$ :

$$\Rightarrow R(t) = R_0 \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \quad (29.21)$$



$\Omega_\Lambda x^2$  dominiert  $\Rightarrow$  beschleunigte Expansion des Universums!

Übergang von gebremster zu beschleunigter Expansion:

$$\ddot{R}(t_*) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow H_0 t_* \approx 0.33$$

$$R(t_*) \approx 0.431 R_0$$

$$\approx 4.76 \cdot 10^9 \text{ Lj}$$

Welthorizont:

$$\begin{aligned} D_0 &= R_0 \int_0^{t_0} \frac{c dt}{R(t)} = \frac{c}{H_0} \int_0^{H_0 t_0} \frac{d\tau}{x(\tau)} = \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \frac{dx}{d\tau}} \\ &= \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_m}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} x^3}} \approx 3.14 H_0^{-1} c \approx 45.4 \cdot 10^9 \text{ Lj} \quad (29.22) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{D_0}{t_0} \approx \frac{3.14}{0.957} c \approx 3.281 c, \quad v(D_0) = c \dot{R}(t_0) x = H_0 D_0 \approx 3.14 c > c!$$

Dunkle Materie: bislang unbekannte Form der Materie,  
 konventionelle Formen: abgekühlte Weiße Zwerge, Braune Zwerge,  
 intergalaktisches Gas, Neutrinos mit  $m_\nu > 0$   
 exotische Formen: WIMPs ("weakly interacting massive particles"),  
 Axionen, ...

$\Lambda$ CDM-Modell: dunkle Materie ist kalt, d.h. Geschwindigkeit nicht-relativistisch,  
 nicht-baryonisch, wechselwirkt gravitativ (und evtl. schwach)

Strahlungsbeitrag:

$$\text{Gl. (29.7):} \quad \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \frac{\Omega_s}{x^2} - \frac{\Omega_m}{x} - \Omega_\Lambda x^2 = \Omega_k, \quad \Omega_s = \frac{\rho_{\text{str}}(t_0)}{\rho_{\text{kr}}(t_0)} \quad (29.23)$$

$$\text{Gl. (29.9)} \quad 1 = \Omega_s + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad (29.24)$$

↑  $\sim 10^{-4}$  besteht i.w. aus Neutrinos

Kosmologische Konstante: entspricht nach Gl. (28.28) Vakuumenergiedichte

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \stackrel{(29.6)}{=} \Omega_\Lambda \frac{3H_0^2}{8\pi G} \stackrel{(29.5)}{=} \Omega_\Lambda \rho_{\text{kr}}(t_0) \approx 0.692 \rho_{\text{kr}}(t_0) \approx 7 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (29.25)$$

Vakuumenergiedichte einer bei  $M_P$  renormierten Feldtheorie:

$$\rho_{\text{vak}} = \frac{1}{(2\pi)^3 c^2} \int_0^{M_P/\hbar} d^3k \frac{\hbar \omega}{2} = \frac{M_P}{16\pi^2} \left( \frac{M_P c^2}{\hbar c} \right)^3 \approx 3.264 \cdot 10^{94} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \sim \underline{10^{121}} \rho_\Lambda !$$

Vakuumentergie = "Dunkle Energie"

Vakuumpdruck: Fundamentalsatz der Thermodynamik bei  $T = \mu = 0$

$$\mathcal{E} + \mathcal{P} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_\lambda = -\rho_\lambda c^2 < 0$$

$\Rightarrow$  abstoßende Kräfte, Expansion des Universums