


24. Schwarze Löcher & Quasare

Schwarzes Loch: Materieansammlung mit Gesamtmasse M im Bereich $r \leq r_s = \frac{2GM}{c^2}$

Beobachter bei $r > r_s$: erhält keinerlei Information aus dem Bereich $r \leq r_s$

kritische Dichte, bei der Materieansammlung ein Schwarzes Loch wird:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_{kr} R^3, \quad R \approx r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\Rightarrow \rho_{kr} = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx \frac{3}{4\pi} \frac{M_\odot}{r_{s,0}^3} \left(\frac{r_{s,0}}{r_s} \right)^3 \frac{M}{M_\odot} = \frac{3M_\odot}{4\pi r_{s,0}^3} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \approx 1.85 \cdot 10^{19} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \quad (24.1)$$

zum Vergleich: charakteristische Dichte von Neutronensternen, Gl. (19.5)

$$\rho_c = \frac{m_N}{3\pi^2} \left(\frac{m_N c^2}{\hbar c} \right)^3 \approx 3.628 \text{ fm}^{-3} \cdot m_N \approx 6.076 \cdot 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$\approx 4.753 \text{ fm}^{-1}$

(Kerngrundzustandsdichte: $\rho_0 \approx 0.17 \text{ fm}^{-3} \cdot m_N \approx \frac{1}{20} \rho_c$)

Bsp.: Sterncluster aus 10^{10} Sternen mit Sonnenmasse: $M \approx 10^{10} M_\odot$ (typische Galaxie!)

$$\Rightarrow \rho_{kr} \approx 0.185 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.85 \cdot 10^{-4} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 1.31 \cdot 10^{-4} \rho_0$$

\Rightarrow mittlerer Sternabstand: $20 R_\odot \Rightarrow$ Galaxie erscheint als Schwarzes Loch!

Kollaps: außerhalb von Sternradius r_0 beschrieben durch Schwarzschild-Metrik,
innerhalb von r_0 beschrieben durch Metrik (23.21)

$$\Rightarrow r \geq r_0: ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (24.2)$$

$$r' \leq r_0: ds^2 = c^2 d\tau^2 - R(\tau)^2 \left[\frac{dr'^2}{1 - kr'^2} + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (24.3)$$

Achtung: Koordinatenzeiten t, τ und radiale Koordinaten r, r' sind unterschiedlich!

An der Sternoberfläche müssen (24.2) und (24.3) übereinstimmen,

$$\Rightarrow \text{Oberfläche gemäß (24.2): } A = 4\pi r_0^2 \quad (\text{s. Aufgabe 13})$$

$$\text{Oberfläche gemäß (24.3): } A' = 4\pi r_0'^2 R^2$$

↑ dimensionslose Koordinate der Oberfläche
(Sternrand $r'_0 = \text{const.}$ durch frei fallende
Teilchen mit konstanten Koordinaten realisiert)

Oberfläche ist unabhängig von der verwendeten Metrik $\Rightarrow A' = A$

$$\Rightarrow r_0(t) = r_0' R(\tau)$$

$$\text{Da Maßstab in (24.3) skalierbar } (r' \rightarrow \text{const. } r'), \text{ wähle } r'_0 = 1 \Rightarrow r_0(t) = R(\tau) \quad (24.4)$$

$$\text{Anfangsbedingung: } r_0(0) = R(0) \equiv R_0 > r_s, \quad \dot{R}(0) = 0, \quad k = \frac{r_s}{R_0} \quad (24.5)$$

$$\Rightarrow kr'^2 = k r_0'^2 = k = \frac{r_s}{R_0} < 1 \Rightarrow \text{Metrik (24.3) nicht singulär}$$

zeitlicher Verlauf des Kollaps: s. Abb. in Kap. 23

$$\text{Bsp.: } R_0 = 3r_s \stackrel{(23.31)}{\Rightarrow} T = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_0}{r_s} \right)^{3/2} \frac{r_s}{c} \simeq 8.162 \frac{r_s}{c} \quad (24.6)$$

entspricht Eigenzeit eines vom Sternrand frei in den Ursprung $R = 0$ fallenden Teilchens

$$\text{Zeitskala des Kollapses: } \frac{r_s}{c} = \frac{r_s}{r_{s,0}} \frac{r_{s,0}}{c} \simeq \frac{M}{M_\odot} \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad (24.7)$$

$$\text{Kollapsgeschwindigkeit: } \frac{R_0}{T} = \frac{R_0}{r_s} \frac{r_s}{T} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{r_s}{R_0} \right)^{1/2} c \sim c \quad (24.8)$$

Frei von R_0 bis r_s fallendes Teilchen benötigt Eigenzeit τ_1 (s. Gl. (21.17)) und Schwarzschild-Metrik-Zeit t_1 (s. Gl. (21.20)):

$$\stackrel{(24.4)}{\Rightarrow} r_0(t_1 \rightarrow \infty) = R(\tau_1) = r_s \quad (24.9)$$

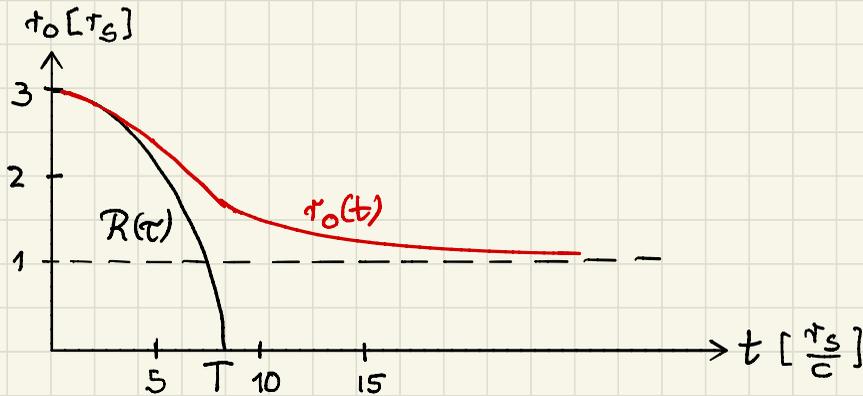
Annäherung von $r_0(t)$ an den Schwarzschild-Radius:

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= \frac{dr_0}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \stackrel{(21.15)}{=} -c \sqrt{K_+ \frac{r_s}{r_0}} \frac{c}{F} (1 - \frac{r_s}{r_0}) = -\frac{c^2}{F} \sqrt{\frac{r_s}{r_0} \frac{r_s}{R_0}} (1 - \frac{r_s}{R_0}) \\ &= -\frac{c^2}{F} \left(\frac{r_s}{r_0} \right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{r_0}{R_0}} \left(\frac{r_0}{r_s} - 1 \right) \stackrel{r_0 \rightarrow r_s}{\sim} -\frac{c^2}{F} \left(\frac{r_0}{r_s} - 1 \right) \quad R_0 = r_0(0) \end{aligned} \quad (24.10)$$

$$\Rightarrow -\frac{c^2}{F r_s} t \sim \int_{R_0}^{r_0(t)} d\tau'_0 \frac{1}{\tau'_0 - r_s} = \ln \frac{r_0 - r_s}{R_0 - r_s}$$

$$\Leftrightarrow r_0(t) \sim r_s + (R_0 - r_s) \exp\left(-\frac{c^2}{F r_s} t\right) \quad (r_0 \rightarrow r_s) \quad (24.11)$$

\Rightarrow von außen gesehen: exponentiell langsame Annäherung des Sternradius r_0 an Schwarzschild-Radius r_s



Rotverschiebung:
$$z = \frac{(24.21)}{\sqrt{1 - r_s/r_0}} - 1 = \sqrt{\frac{r_s}{r_0 - r_s}} - 1$$

$$\stackrel{(24.11)}{\sim} \exp\left(\frac{c^2 t}{2F r_s}\right) \gg 1 \quad (t \gg \frac{r_s}{c}) \quad (24.12)$$

\Rightarrow Photonen verlieren exponentiell mehr an Energie

Zeitabstand der Detektion einzelner Photonen, die vom Sternrand emittiert wurden:

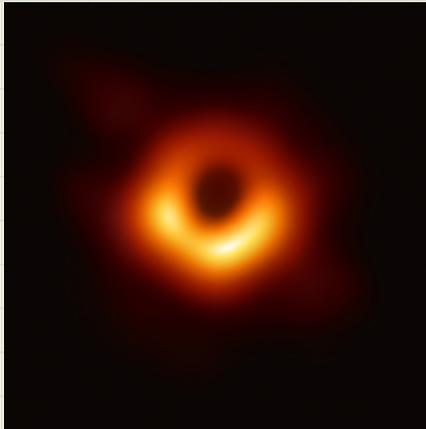
$$dt \stackrel{(8.21)}{=} \frac{F d\tau}{c (1 - r_s/r_0)} \stackrel{(24.11)}{\sim} \frac{F}{c} \frac{r_s}{R_0 - r_s} \exp\left(\frac{c^2 t}{F r_s}\right) d\tau \gg d\tau \quad (t \gg \frac{r_s}{c}) \quad (24.13)$$

⇒ Stern "erlischt" auf der kurzen Zeitskala r_s/c

⇒ Kollaps erscheint als plötzliches Ereignis

Eigenschaften Schwarzer Löcher:

- (i) Beobachtbarkeit: - durch das erzeugte Gravitationsfeld, d.h. Schwarzschild-Metrik für $r \gg r_s$
 - durch in das Schwarze Loch fallende Materie
 - durch "schwarzen" Ereignishorizont der Fläche $4\pi r_s^2$



Schwarzes Loch im Kern der Galaxie Messier 87

$$M \sim 7 \cdot 10^9 M_\odot$$

Abb.: Event Horizon Telescope, 10.4.2019

Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole , 5.7.2020

(ii) **Hawking-Strahlung:**

Paarerzeugung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren im starken Gravitationsfeld des Schwarzen Lochs. Teilchen (oder Antiteilchen) fällt ins Schwarze Loch, Antiteilchen (oder Teilchen) wird abgestrahlt. Ins Schwarze Loch fallendes Teilchen trägt negative Energie, verringert Masse des Schwarzen Lochs.

⇒ abgestrahlte Teilchen: Schwarzkörperstrahlung

⇒ Schwarzes Loch hat Temperatur T

$$k_B T = \frac{\hbar c}{4\pi r_s} \frac{1}{r_s} \quad (24.14)$$

⇒ leichte Schwarze Löcher sind heißer

$$\Rightarrow T = \frac{\hbar c}{4\pi k_B r_{s0}} \frac{M_\odot}{M} \approx 6.177 \cdot 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} \text{ K}$$

⇒ Hawking-Strahlung verringert Masse ⇒ erhöht Temperatur!

$$\text{Strahlungsleistung } P(t) = \sigma T(t)^4 A(t), \quad A = 4\pi r_s^2 \quad (24.15)$$

Stefan-Boltzmann-Konstante, $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$ Fläche des Schwarzen Lochs

Lebensdauer τ des Schwarzen Lochs:

Abstrahlung verringert Energie des Schwarzen Lochs

$$\Rightarrow P(t) = -\frac{dM(t)}{dt} c^2 \quad (24.16)$$

$$\Rightarrow -\frac{dM(t)}{dt} c^2 \stackrel{(24.15)}{=} \sigma T(t)^4 A(t) = \frac{\pi^2}{60 \hbar^3 c^2} [k_B T(t)]^4 4\pi r_S(t)^2$$

$$\stackrel{(24.14)}{=} \frac{\pi^2}{60 \hbar^3 c^2} \left(\frac{\hbar c}{4\pi}\right)^4 \frac{4\pi}{r_S(t)^2} = \frac{\hbar c^2}{3840 \pi} \left[\frac{c^2}{2GM(t)}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow -dM M^2 = \frac{\hbar c^4}{15360 \pi G^2} dt \Rightarrow -\int_{M(0)}^0 dM M^2 = \frac{\hbar c^4}{15360 \pi G^2} \tau$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{5120 \pi G^2}{\hbar c^4} M(0)^3 \simeq 8.388 \cdot 10^{-17} \left[\frac{M(0)}{\text{kg}}\right]^3 \text{ s} \quad (24.17)$$

\Rightarrow Schwarzes Loch mit $M = M_\odot$ lebt $\tau \simeq 2.09 \cdot 10^{67} \text{ a}$,
 Schwarzes Loch mit $M = 1 \text{ kg}$ zerstrahlt instantan

(iii) Bekenstein-Hawking-Entropie:

Körper, die ins Schwarze Loch fallen, vergrößern dessen Masse

aber: falls Körper Entropie hat, wird Entropie des restlichen Universums verringert

\Rightarrow Schwarzes Loch muss Entropie des Körpers absorbieren, nach 2. HS der Thermodynamik vergrößert sich seine Entropie

\Rightarrow Schwarzes Loch trägt (Bekenstein-Hawking-) Entropie

$$S = k_B \frac{A}{4 \ell_p^2}, \quad \ell_p = \frac{\hbar c}{M_{\text{pc}} c^2} \text{ Planck-Länge} \quad (24.18)$$

\Rightarrow Absorption von Masse vergrößert Masse \Rightarrow Fläche \Rightarrow Entropie des Schwarzen Lochs

(iv) Beschleunigungsgradient bei Durchqueren des Schwarzschild-Radius:

Astronaut durchquere mit Raumschiff den Schwarzschild-Radius

Beschleunigungsgradient
$$\frac{\Delta a}{\Delta l} \sim \frac{a}{r} = \frac{GM}{r^3} = \frac{c^2}{2} \frac{r_s}{r^3}$$

\Rightarrow bei $r = r_s$:
$$\frac{\Delta a}{\Delta l} \sim \frac{c^2}{2r_s^2} = \frac{c^2}{2r_{sp}^2} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \approx 5.171 \cdot 10^9 \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \frac{1}{s^2}$$

\Rightarrow auf Länge $\Delta l = 1 \text{ m}$:
$$\Delta a \sim 5 \cdot 10^9 \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

\Rightarrow (i) $M = 10^{10} M_\odot$:
$$\Delta a \sim 5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

\Rightarrow Durchqueren des Schwarzschild-Radius von supermassiven Schwarzen Löchern gefahrlos möglich

(ii) $M = M_\odot$:
$$\Delta a \sim 5 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

\Rightarrow Beschleunigungsgradient bei kleinen Schwarzen Löchern lethal für Astronaut

(v) No-hair-Theorem: Eigenschaften Schwarzer Löcher ausschließlich durch Masse M , Drehimpuls L und Ladung Q bestimmt (alle anderen Eigenschaften, z.B. höhere Multipolmomente der Massenverteilung, "verschwinden" hinter dem Ereignishorizont)

Quasare: "quasi-stellar object"

- ⇒ Kern einer Galaxie, der große Energiemengen in Form elektromagnetischer Wellen abstrahlt
- ⇒ supermassives Schwarzes Loch, das Materie akkretiert, beschleunigte ionisierte Materie gibt Bremsstrahlung ab ⇒ Unruh-Effekt

<https://de.wikipedia.org/wiki/Quasar>