

---

---

---

---

---



### III. Statische Sternmodelle

#### 14. Sterngleichgewicht

Stern: Materieansammlung, die (in der Regel) durch eigene Gravitation gebunden ist (gravitativ gebundener Stern).

Sterngleichgewicht: interner Druck der Materie (repulsiv) = gravitativer Druck (attraktiv)

$$P_{mat} = P_{grav} \quad (14.1)$$

Beispiel: Atmosphärendruck

$$P_{mat} \simeq \frac{\rho}{m} k_B T \quad (\text{ideales Gas})$$

hält gravitativem Druck  $P_{grav}$ , der durch die Masse der Atmosphäre (Luftsäule über Einheitsfläche) erzeugt wird, die Waage:

$$P_{mat} = P_{grav} \simeq 1 \text{ bar}$$

Gl. (14.1) gilt für alle gravitierenden Materieansammlungen (Planeten, Sterne).

Stern: Materieansammlung mit  $M \gtrsim M_{\odot}$ , so dass Druck und Temperatur ausreicht, um Fusion von Elementen einzuleiten.

Fusion von Wasserstoff folgt die von Helium usf. ggfs. bis zum stabilsten Element Eisen.

Danach ist  $P_{mat} < P_{grav}$ , Stern kollabiert (Gravitationskollaps, **Supernova**).

Endstadien der Sternentwicklung: abhängig von Anfangsmasse des Sterns

[**Brauner Zwerg**:  $M \lesssim 0.1 M_{\odot}$ , keine Fusionsreaktionen (Jupiter)]

**Weißer Zwerg**:  $M \sim M_{\odot}$ , Fusionsreaktionen bis Sauerstoff,  
stabilisiert durch Fermidruck der **Elektronen**

**Neutronenstern**:  $M \gtrsim M_{\odot}$ , Residuum einer Supernova (Stern mit  $M \sim 10 M_{\odot}$ ,  
Fusionsreaktionen bis Eisen), stabilisiert durch Fermidruck der **Neutronen**

**Quarkstern**: stabilisiert durch Fermidruck der **Quarks** (?)

**Schwarzes Loch**: Residuum einer Supernova (Stern mit  $M \sim 40 M_{\odot}$ ), Objekt mit  $R \gtrsim r_s$

Druck einer statischen, sphärisch symmetrischen Massenverteilung:  $P(r)$  12.6.20

Im Folgenden: nichtrelativistische Betrachtung der Gleichgewichtsbedingung (14.1)

Euler-Gleichung: 
$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla P + \vec{f}_0 \quad (14.2)$$

statisch,  $\vec{v} = 0$ : 
$$0 = -\nabla P + \vec{f}_0 \quad (14.3)$$

Gravitationskraft auf Massenelement  $dm$ : 
$$d\vec{F} = -dm \nabla \Phi$$

$\Rightarrow$  Kraftdichte 
$$\vec{f}_0 = \frac{d\vec{F}}{dV} = -\frac{dm}{dV} \nabla \Phi \equiv -\rho \nabla \Phi$$

Newton'sches Gravitationspotential

(14.4)

$\Rightarrow$  
$$\vec{\nabla} P(r) = -\rho(r) \vec{\nabla} \Phi(r) \quad (14.5)$$

sphärisch symmetrisch: 
$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} \quad (14.6)$$

Newton'sche Feldgleichung:  $\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \rho$  (14.7)

$\Rightarrow r^2 \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \equiv G M(r)$  (14.8)

mit Masse innerhalb Kugel mit Radius  $r$ :

$M(r) \equiv 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r')$  (14.9)

$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{G M(r)}{r^2}$  (14.10)

(14.6)

$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = - \frac{G M(r)}{r^2} \rho(r)$  (14.11)

Lösung erfordert Kenntnis der **Zustandsgleichung** der Materie:  $P = P(\rho)$

Annahme: inkompressible Materie,  $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const.}, & r \leq R \\ 0 & , r > R \end{cases}$  ← Sternradius

(14.9)  
 $\Rightarrow M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3$

(14.11)  
 $\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} G \rho_0^2 r, & r \leq R \\ 0 & , r > R \end{cases}$  (14.12)

$$\Rightarrow P(r) = P(0) - \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 r^2 \equiv P_0 - \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 r^2, \quad r \leq R \quad (14.13)$$

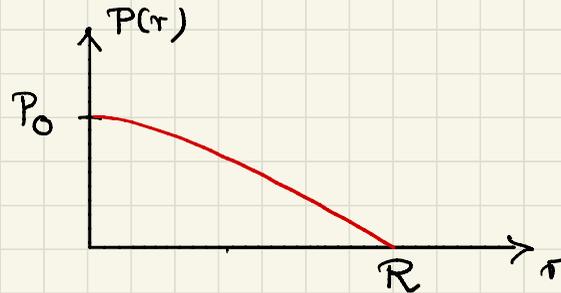
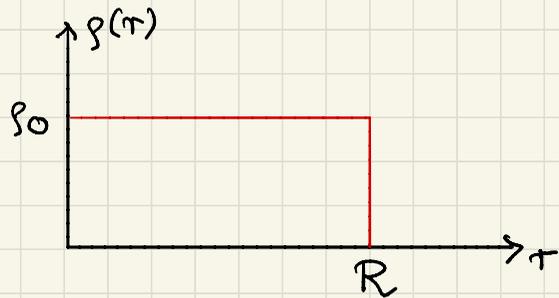
↑  
Druck im Sternzentrum

Druck außerhalb des Sterns:  $P(r) = 0, \quad r > R$

Stetigkeit bei  $r = R$ :  $P(R) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} \stackrel{(14.13)}{\Rightarrow} \boxed{P_0} &= \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2 = \frac{1}{2} G \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \frac{\rho_0}{R} = GM \frac{\rho_0}{2R} = \frac{2GM}{c^2} \frac{\rho_0 c^2}{4R} \\ &= \rho_0 c^2 \frac{r_s}{4R} \end{aligned} \quad (14.14)$$

$$\stackrel{(14.13)}{\Rightarrow} \boxed{P(r) = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \rho_0 c^2 \frac{r_s}{4R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = P_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \quad (14.15)$$



Im Folgenden: benutze Gl. (14.14) als Abschätzung für nicht-konstante Dichten

$$\Rightarrow \rho, P : \text{mittlere Dichte, mittlerer Druck} \Rightarrow \boxed{\frac{P}{\rho c^2} \sim \frac{r_s}{4R}} \quad (14.16)$$

Beispiel 1: Sonne

$$P \approx \frac{\rho}{m} k_B T \stackrel{(14.16)}{\Rightarrow} \frac{r_{s,\odot}}{4R_\odot} \sim \frac{k_B T_\odot}{m c^2} \sim \frac{\text{keV}}{\text{GeV}} = 10^{-6}$$

Temperatur im Sonneninneren  
Ruheenergie von Wasserstoffatomen

Andererseits:  $\frac{r_{s,\odot}}{4R_\odot} \approx \frac{1}{4} \cdot 4.24 \cdot 10^{-6} = 1.06 \cdot 10^{-6}$  ✓

Beispiel 2: Weißer Zwerg

Kernfusion läuft ab von Wasserstoff über Helium und Kohlenstoff bis Sauerstoff.

Atomkerne halten gravitivem Druck nicht stand, es entsteht ein metallischer Festkörper, bestehend aus einem Gitter positiv geladener Ionen und einem Elektronengas.

Stabilisation des Sterns aufgrund Fermidruck des (bei den entsprechenden Temperaturen entarteten) Elektrongases

$$\Rightarrow \text{nichtrelativistisch: } P_{nr} = \frac{2}{5} n E_F, \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3} \quad \text{Fermi-Energie} \quad (14.17)$$

$$\text{ultrarelativistisch: } P_{ur} = \frac{1}{4} n E_F, \quad E_F = \hbar c (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (14.18)$$

Materiedruck verhindert Kollaps, solange

$$P \geq \rho c^2 \frac{\tau_s}{4R} = \frac{M}{V} c^2 \frac{2GM}{4c^2 R} = \frac{GM^2}{2VR} = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad (14.19)$$

nichtrelativistisch: Materiedruck  $P_{nr} \sim n^{5/3} = \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \sim R^{-5}$

hält Gravitationsdruck  $\sim R^{-4}$  die Waage, so dass sich ein bestimmter Radius im Gleichgewicht ergibt

ultrarelativistisch:  $P_{ur} \stackrel{(14.18)}{=} \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3} \hbar c \frac{N^{4/3}}{R^4} \uparrow !$

$$\stackrel{(14.19)}{\Rightarrow} N^{4/3} \hbar c \geq \frac{16\pi}{3} \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3} \frac{3}{8\pi} GM^2 = \left(\frac{32}{9\pi}\right)^{1/3} GM^2 \approx 1.042 GM^2 \quad (14.20)$$

Für leichte Atomkerne mit  $A \approx 2Z$ : auf jedes Elektron kommen zwei Nukleonen

$$\Rightarrow M \approx N_N m_N = 2N m_N \Rightarrow N = \frac{M}{2m_N}$$

$$\stackrel{(14.20)}{\Rightarrow} \left(\frac{M}{2m_N}\right)^{4/3} \gtrsim 4 \frac{Gm_N^2}{\hbar c} \left(\frac{M}{2m_N}\right)^2 \Leftrightarrow M \lesssim 2m_N \left(\frac{\hbar c}{4Gm_N^2}\right)^{3/2} = \frac{1}{4} \frac{M_p^3}{m_N^2} \equiv M_C \quad (14.21)$$

Planck-Masse  $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$

Chandrasekhar-Grenzmasse

Weißer Zwerge, die schwerer als  $M_C$  sind, kollabieren (und fusionieren) weiter.

$$M_C = \frac{1}{4c^2} \frac{(M_p c^2)^3}{(m_N c^2)^2} = \frac{1}{4} \frac{(1.2 \cdot 10^{22})^3 \text{ MeV}}{(10^3)^2 c^2} \approx 4.32 \cdot 10^{59} \frac{\text{MeV}}{c^2} \approx 7.7 \cdot 10^{29} \text{ kg} \approx 0.39 M_\odot$$

Genauere Rechnung:

$$M_C \approx 1.46 M_\odot$$

(14.22)

Beachte:  $M_C$  allein durch Naturkonstanten ( $\hbar$ ,  $c$ ,  $G$ ) und Nukleonenmasse  $m_N$  bestimmt!

Wie wichtig sind ART-Korrekturen bei Weißen Zwergen?

$E_F \sim m_e c^2$  (Übergang vom nichtrelativistischen zum ultrarelativistischen Fermi-Gas)

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho c^2} \sim \frac{\alpha n m_e c^2}{2 m_N n c^2} = \frac{\alpha}{2} \frac{m_e}{m_N} \stackrel{(14.16)}{\sim} \frac{r_s}{4R}$$

$\alpha \in [1/4, 2/5]$   
 $\rho \approx 2 m_N n$

$$\Rightarrow \frac{r_s}{R} \sim 2\alpha \frac{m_e}{m_N} \lesssim \frac{m_e}{m_N} \approx \frac{1}{2000} \ll 1 \quad (14.23)$$

$\Rightarrow$  Weiße Zwerge können in Newtonscher Näherung behandelt werden!

Radius eines Weißen Zwergs:

$$R \sim 2000 \tau_s \sim 2 \cdot 10^3 \tau_{s, \odot} \approx 5900 \text{ km} \sim 10^{-2} R_{\odot} \quad (14.24)$$

$\uparrow$   
 $M \sim M_{\odot}$

Mittlere Dichte eines Weißen Zwergs:

$$\rho = \frac{M}{V} \sim \frac{M_{\odot}}{\frac{4\pi}{3} R^3} \sim 10^6 \frac{M_{\odot}}{\frac{4\pi}{3} R_{\odot}^3} = 10^6 \rho_{\odot} = 1.41 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (14.25)$$

(zentrale Dichte aber um Faktor  $10^3$  höher!)

### Beispiel 3: Neutronenstern

Betrachte Stern mit  $M > M_C \Rightarrow$  Stabilisierung durch Fermi-Druck der Elektronen nicht möglich

$\Rightarrow$  Reaktion  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  konvertiert Protonen in Neutronen

$\Rightarrow$  Stern besteht (hauptsächlich) aus Neutronen!

$\Rightarrow$  Neutronenstern  $\hat{=}$  makroskopischer Atomkern!

$\Rightarrow$  Dichte:  $\rho \gtrsim m_N n_0 \approx m_N \cdot 0.17 \cdot 10^{45} \text{ m}^{-3} \approx 2.84 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (14.26)$

$\uparrow$  Kerngrundzustandsdichte

$\Rightarrow$  Sterngleichgewicht: Fermi-Druck der Neutronen hält Gravitationsdruck die Waage

Radius eines Neutronensterns der Masse  $M \sim M_{\odot}$  :

$$R = \left( \frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} = \left( \frac{3}{4\pi} \frac{M}{\rho} \right)^{1/3} \sim \left( \frac{3}{4\pi} \frac{M_{\odot}}{\rho} \right)^{1/3} \underset{(14.26)}{\approx} 11.9 \text{ km} \quad (14.27)$$

Wie wichtig sind ART-Korrekturen bei Neutronensternen?

$$\frac{\tau_s}{R} = \frac{2GM}{c^2 R} \sim \frac{2GM_{\odot}}{c^2 R} = \frac{\tau_{s,\odot}}{R} \underset{(14.27)}{\approx} \frac{3}{R^{12}} = \frac{1}{4} \quad (14.28)$$

⇒ Neutronensterne müssen im Rahmen der ART behandelt werden!

#### Beispiel 4: Quarkstern

Dichte so groß, dass sich Nukleonen in ihre Bestandteile (= Quarks) auflösen.

Quarks sind bei dieser Dichte ( $n \sim n_0$ ) ultrarelativistisch

$$\Rightarrow \frac{P_{ur}}{\rho c^2} \equiv \frac{P_{ur}}{\epsilon_{ur}} = \frac{1}{3} \underset{(14.16)}{\sim} \frac{\tau_s}{4R} \Rightarrow \frac{\tau_s}{R} \sim \frac{4}{3} \quad (14.29)$$

⇒ Quarksterne müssen im Rahmen der ART behandelt werden!

(weiteres Problem: "confinement" von Farbladungen ⇒ Quarksterne sind selbstgebunden!

Stabilität nicht aufgrund der Balance von Fermi- und Gravitationsdruck)