Quantenfeldtheorie

Dirk H. Rischke

Wintersemester 2020/2021
Sommersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Materie und Wechselwirkungen **1**
1.1 Quarks und Leptonen . . . 1
1.2 Eichfelder und das Higgs–Boson . . . 12
1.3 Einheiten, Konventionen und Notation . . . 13

2 Klassische Feldtheorie **17**
2.1 Lagrange–Formulierung . . . 17
2.2 Das neutrale skalare Feld . . . 24
2.3 Das Noether–Theorem . . . 24
2.4 Das geladene skalare Feld und Eichinvarianz . . . 33
2.5 Das Dirac–Feld . . . 40
2.6 Das Photon–Feld und Quantenelektrodynamik . . . 43
2.7 Das Yang–Mills–Feld und Quantenchromodynamik . . . 46

3 Kanonische Quantisierung **59**
3.1 Das neutrale skalare Feld . . . 59
3.2 Das geladene skalare Feld . . . 74
3.3 Das Dirac–Feld . . . 78
3.4 Das Photon–Feld . . . 85
3.4.1 Quantisierung in vollständig fixierter Eichung . . . 85
3.4.2 Kovariante Quantisierung . . . 92

4 Pfadintegral–Formulierung der Quantenmechanik **99**
4.1 Propagatoren . . . 99
4.2 Pfadintegrale . . . 103
4.3 Störungstheorie . . . 108
4.4 Die Streumatrix . . . 111
4.5 Feynman–Diagramme . . . 113
4.6 Green–Funktionen . . . 115
4.7 Das erzeugende Funktional für Korrelationsfunktionen . . . 116

5 Funktionalintegral–Formulierung der Quantenfeldtheorie **123**
5.1 Das erzeugende Funktional für skalare Felder . . . 123
5.2 Das neutrale skalare Feld . . . 126
5.3 Das geladene skalare Feld . . . 135
5.4 Funktionalintegrale für fermionische Felder . . . 136
5.5 Das Dirac–Feld . . . 142
5.6 Funktionalintegrale für Eichfelder – das Photon–Feld . . . 147
5.6.1 Erzeugendes Funktional in vollständig fixierter Eichung . . . 151

5.6.2 Erzeugendes Funktional in kovarianter Eichung 158
5.7 Das Yang–Mills–Feld 167

6 Wechselwirkende Feldtheorien 173
6.1 ϕ^4–Theorie 173
6.2 Das erzeugende Funktional für verbundene n–Punkt–Funktionen 185
6.3 Die Streumatrix 188
6.4 Yukawa–Theorie: Pion–Nukleon–Streuung 196
6.5 Das erzeugende Funktional für Vertex–Funktionen 230
6.6 QED: Ward–Takahashi–Identitäten 239
6.7 QCD: Becchi–Rouet–Stora–Tyutin–Transformation und Slavnov–Taylor–Identitäten 244

7 Spontane Symmetriebrechung 253
7.1 Das Vakuum und spontane Symmetriebrechung 253
7.2 Das $O(N)$–Modell und das Goldstone–Theorem 258
7.3 Spontane Symmetriebrechung in Eichtheorien 266
7.4 Das Weinberg–Salam–Modell der elektroschwachen Wechselwirkung 269

8 Renormierung 283
8.1 Divergenzen in der ϕ^4–Theorie 283
8.2 Dimensionale Regularisierung der ϕ^4–Theorie 289
8.3 Renormierung der ϕ^4–Theorie 295
8.4 Die Renormierungsgruppe 299
8.5 Renormierung der QED 306
8.6 Renormierung der QCD 311

1 Einleitung: Materie und Wechselwirkungen

30.10.2020

1.1 Quarks und Leptonen

Nach unserem gegenwärtigen Verständnis besteht sämtliche sichtbare[1] **Materie** aus **Fermionen** mit **Spin 1/2**: den **Quarks** und den **Leptonen** (griech. λεπτὸς=leicht). Es gibt sechs sog. **Flavor** (engl. *flavor*=Geschmack) von Quarks und Leptonen, die in drei sog. **Familien** eingeteilt werden, s. Tab. 1.1.

Familie	Flavor f	Quarks q_f^i $i = r, g, b$	Leptonen l_f	
I	1	u^r u^g u^b	ν_e	$\updownarrow SU(2)_L$
	2	d^r d^g d^b	e^-	
II	3	c^r c^g c^b	ν_μ	$\updownarrow SU(2)_L$
	4	s^r s^g s^b	μ^-	
III	5	t^r t^g t^b	ν_τ	$\updownarrow SU(2)_L$
	6	b^r b^g b^b	τ^-	

$\leftarrow SU(3)_c \rightarrow$

Tabelle 1.1: Materieteilchen.

Die sechs verschiedenen Quark-Flavors werden mit **up** (u), **down** (d), **charm** (c), **strange** oder **seltsam** (s), **top** (t) und **bottom** (b) bezeichnet. Die Quarks tragen eine weitere Quantenzahl, die man als **Farbe** bezeichnet. Es gibt drei verschiedene Quark-Farben, **rot** (r), **grün** (g) und **blau** (b).

Innerhalb der einzelnen Familien besteht eine **unitäre Symmetrie**, $SU(2)_L$, bzgl. einer Quantenzahl, die man als **linkshändigen schwachen Isospin** bezeichnet. Diese Symmetrie ist grundlegender Bestandteil des **Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung** (s. Abschnitt 7.4). Dies bedeutet, dass sich die Flavors innerhalb einer Familie identisch unter $SU(2)_L$–Transformationen verhalten.

[1] Im Gegensatz zur nicht sichtbaren Dunklen Materie.

Zwischen den einzelnen Farben eines Quark-Flavors besteht ebenfalls eine unitäre Symmetrie, die sog. $SU(3)_c$–**Farb-Symmetrie**. Dies bedeutet, dass sich Quarks unterschiedlicher Farbe identisch unter $SU(3)_c$–Transformationen verhalten. Diese Symmetrie liegt der **starken Wechselwirkung** zugrunde (s. Abschnitt 2.7).

Zu den in Tab. 1.1 aufgeführten Materieteilchen gibt es noch die zugehörigen **Anti-Teilchen**. Anti-Teilchen besitzen identische Massen wie die zugehörigen Teilchen, aber unterscheiden sich ansonsten in allen Quantenzahlen. Für Quarks sind die zugehörigen Anti-Teilchen die **Anti-Quarks**, $\bar{u}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{t}$ und $\bar{b}$. Sie unterscheiden sich im Vorzeichen der elektrischen Ladung von den jeweiligen Quarks und tragen **Anti-Farbe**, also $\bar{r}, \bar{g}$ und $\bar{b}$. Die Anti-Teilchen der Neutrinos sind die sog. **Anti-Neutrinos**, $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ und $\bar{\nu}_\tau$. Aus historischen Gründen bezeichnet man das Anti-Teilchen des Elektrons als **Positron**, e^+. Die Bezeichnung für das **Anti-Myon** ist μ^+ und für das **Anti-Tauon** τ^+. Positron, Anti-Myon und Anti-Tauon haben im Gegensatz zu Elektron, Myon und Tauon positive elektrische Ladung, was durch ein entsprechendes Superskript gekennzeichnet wird.

Woher wissen wir, dass es diese Teilchen gibt? Zumindest beim **Elektron** gibt es keine Zweifel, es ist experimentell als wesentlicher Baustein der Atome und Träger der elektrischen Ladung in Materialien, die den elektrischen Strom leiten, nachgewiesen.

Die Existenz des **Elektron–(Anti-)Neutrinos** wurde von Wolfgang Pauli 1930 postuliert, um den β–Zerfall radioaktiver Kerne zu erklären. Dabei zerfällt ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Elektron–Anti-Neutrino:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \; . \tag{1.1}$$

Beim radioaktiven Zerfall von Kernen haben die Anfangs- und Endzustände wohldefinierte **diskrete** Energien, aber das Energiespektrum der beim Zerfall erzeugten Elektronen ist **kontinuierlich**. Pauli argumentierte, dass ein weiteres, bislang unbeobachtetes Teilchen beim Zerfallsprozess (1.1) frei werden muss, welches die Energieerhaltung sicherstellt. Dies ist gerade das Elektron-Anti-Neutrino $\bar{\nu}_e$.

Das **Muon** μ^- wurde in Zerfällen von Teilchen in der kosmischen Strahlung nachgewiesen,

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \; ; \tag{1.2}$$

$$\text{oder } \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \; ; . \tag{1.3}$$

Daraufhin soll Isidor Isaac Rabi den berühmten Satz "wer hat die bestellt?" (engl. *"who ordered these"*) geprägt haben. Das **Myon–(Anti-)Neutrino** wird beim μ^-–Zerfall (1.2) bzw. π^-–Zerfall (1.3) erzeugt.

Das **Tauon** wurde ebenfalls in der kosmischen Strahlung nachgewiesen. Bei dessen Zerfall wird wiederum das **Tau–Neutrino** erzeugt. In Tab. 1.2 sind die Eigenschaften der Leptonen aufgeführt. Die Leptonquantenzahlen (L_e, L_μ sind L_τ) sind in einem Zerfallsprozess stets erhalten, d.h. ein μ^- kann nicht in ein e^- zerfallen, ohne dass ein $\bar{\nu}_e$ und ein ν_μ erzeugt wird, vgl. Gl. (1.2).

Die Existenz von Quarks ist viel schwieriger zu nachzuweisen, da sie niemals **isoliert** in der Natur vorkommen. Sie sind in sog. **Hadronen** eingeschlossen (engl. *confined*). Als Hadronen (griech. ἀδρὸς=stark) bezeichnet man generell alle Teilchen, die der **starken Wechselwirkung** unterliegen.

Lepton	Spin J	Masse [MeV/c^2]	Mittlere Lebensdauer	Leptonquantenzahlen		
				L_e	L_μ	L_τ
$e^\mp$	1/2	$0.5109989461 \pm 3.1 \cdot 10^{-9}$	$> 6.6 \cdot 10^{28}$ y	± 1	0	0
$\mu^\mp$	1/2	$105.6583745 \pm 2.4 \cdot 10^{-6}$	$(2.1969811 \pm 2.2 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-6}$ s	0	± 1	0
$\tau^\mp$	1/2	1776.86 ± 0.12	$(290.3 \pm 0.5) \cdot 10^{-15}$ s	0	0	± 1
ν_e ($\bar{\nu}_e$)	1/2	$< 1.1 \cdot 10^{-6}$ ($\bar{\nu}_e$)	> 150 s	± 1	0	0
ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$)	1/2	< 0.19	$> 8.105 \cdot 10^{-5}$ s	0	± 1	0
ν_τ ($\bar{\nu}_\tau$)	1/2	< 18.2	–	0	0	± 1

Tabelle 1.2: Eigenschaften der Leptonen.

Hadronen transformieren als **Singuletts** unter der $SU(3)_c$–Farb-Symmetrie, d.h. sie sind **invariant** unter $SU(3)_c$–Transformationen. Darum bezeichnet man sie auch als **weiße** Zustände unter $SU(3)_c$–Transformationen. Der Einschluss (engl. *confinement*) der Farbladung tragenden Quarks in Hadronen, die Farb–Singuletts sind, ist eine Konsequenz der Theorie der starken Wechselwirkung, der sog. **Quantenchromodynamik** (QCD), die in den Abschnitten 2.7, 5.7, 6.7 und 8.6 näher diskutiert wird.

Weiterhin klassifiziert man die Hadronen in **Mesonen** (griech. μέσος=in der Mitte) und **Baryonen** (griech. βαρὺς=schwer). Mesonen sind typischerweise Zustände, die dieselbe Zahl von Quarks und Anti-Quarks enthalten, also z.B. $\bar{q}q$, während Baryonen typischerweise Zustände sind, die drei Quarks enthalten, also qqq. Für beide ist die Bedingung, dass in der Natur beobachtbare Zustände Farb-Singuletts sind, erfüllt. Bei $\bar{q}q$–Zuständen ist dies offensichtlich, da Farbe und entsprechende Anti-Farbe zu einem weißen Zustand kombiniert werden können. Bei qqq–Zuständen ist dies weniger offensichtlich, hier muss man streng genommen die Kopplungsregeln der Gruppe $SU(3)$ zu Hilfe nehmen (s. Vorlesung "Quantenmechanik II"). Als einfache "Eselsbrücke" kann aber die **additive Farbmischung** der **Goetheschen Farbenlehre** dienen: mischt man rot, grün und blau additiv, so ergibt sich weiß. Die drei Quarks im Baryon müssen also die Farben rot, grün und blau tragen, um insgesamt einen "weißen", d.h. farblosen Zustand zu bilden.

Der Name der Mesonen rührt daher, dass man in den Anfängen der Hadronenphysik nur die leichtesten Leptonen, Mesonen und Baryonen kannte. Es gilt z.B. $m_e < m_\pi \simeq 139\,\mathrm{MeV}/c^2 < m_p \simeq 939\,\mathrm{MeV}/c^2$, also ist das Pion (ein Meson) von seiner Masse her betrachtet eben "in der Mitte" zwischen dem Elektron (ein Lepton) und dem Proton (ein Baryon). Das schwerste (z.Z.) bekannte Lepton, das Tauon, ist allerdings schwerer als viele der leichteren Mesonen (wie Pion, Kaon, η, η', ...) und sogar schwerer als einige Baryonen (wie Proton, Neutron, Λ, Δ, ...), und es sind mittlerweile auch viele Mesonen bekannt, die schwerer als Baryonen sind.

Zu jedem Hadron gibt es auch das zugehörige Anti-Teilchen, welches man dadurch erhält, dass man jedes Quark durch ein Anti-Quark ersetzt und umgekehrt. Mesonen sind daher ihre eigenen Anti-Teilchen, da $q\bar{q} \equiv \bar{q}q$ wieder ein Meson ist. **Anti-Baryonen** dagegen sind genuin neue Teilchen, bestehend aus $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$. Denkbar sind aber auch andere hadronische Zustände, die man generell als **exotisch** bezeichnet. So gibt es z.B. Mesonen, die keinerlei Quarks oder Anti-Quarks enthalten, sondern ausschließlich aus Gluo-

nen bestehen, die sog. **Gluebälle**. Denkbar sind auch mesonische Zustände, die aus zwei Quarks und zwei Anti-Quarks bestehen, sog. **Tetra-Quarks**, $(\bar{q}q)(\bar{q}q)$. Die leichtesten dieser Zustände (z.B. $f_0(500)$ und $f_0(980)$) sind allerdings nicht wirklich gebundene Zustände von zwei $\bar{q}q$–Mesonen, sondern eher Resonanzen im Streu-Kontinuum der letztgenannten. Es gibt aber mittlerweile auch experimentelle Kandidaten für echt gebundene Zustände aus zwei $\bar{q}q$–Mesonen (z.B. $X(3872)$, $Y(4660)$ und $Z_c(3900)$).

Spekuliert wird auch über die Existenz von sog. **Penta-Quarks**, $(qqq)(\bar{q}q)$, allerdings sind diese vermutlich keine gebundenen Zustände, sondern höchstens Resonanzen im Streu-Kontinuum von qqq–Baryonen und $\bar{q}q$–Mesonen. Auch (Anti-)Baryonen mit einem Vielfachen von drei (Anti-)Quarks sind denkbar, z.B. das sog H–Baryon (sprich "Eta"–Baryon, vom griechischen Großbuchstaben H), ein $(qqq)(qqq)$–Zustand. Das **confinement** von farbgeladenen Objekten in der QCD macht es lediglich erforderlich, dass diese Zustände Farb-Singuletts bilden. Einen aktuellen Überblick über die bekannten Hadronen findet man im sog. "Particle Data" Buch der "Particle Data Group" [17].

In der nachfolgenden Tabelle 1.3 sind Eigenschaften der einzelnen Quark-Flavors aufgeführt.

Flavor	Spin J	Masse [MeV/c^2]	Quarkquantenzahlen						
			Q	T_3	S	C	$\mathcal{B}$	$\mathcal{T}$	B
u	1/2	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$	$+2/3$	1/2	0	0	0	0	1/3
d	1/2	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$	$-1/3$	$-1/2$	0	0	0	0	1/3
s	1/2	93^{+11}_{-5}	$-1/3$	0	-1	0	0	0	1/3
c	1/2	$(1.27 \pm 0.02) \cdot 10^3$	$+2/3$	0	0	$+1$	0	0	1/3
b	1/2	$(4.18^{+0.03}_{-0.02}) \cdot 10^3$	$-1/3$	0	0	0	-1	0	1/3
t	1/2	$(172.76 \pm 0.3) \cdot 10^3$	$+2/3$	0	0	0	0	$+1$	1/3

Tabelle 1.3: Eigenschaften der Quarks. Die Quarkquantenzahlen sind elektrische Ladung Q, z–Komponente des Isospins T_3, Seltsamkeit S, Charm C, Bottom-Ladung $\mathcal{B}$, Top-Ladung $\mathcal{T}$ und Baryonenzahl B. Dass seltsamen Quarks negative Seltsamkeit zugeordnet wird, hat historische Gründe. Konsistenterweise wird dann Bottom-Quarks negative Bottom-Ladung zugeordnet.

Da Quarks (als farbgeladene Objekte) nicht isoliert beobachtet werden können, ist es schwierig, ihre Massen präzise zu ermitteln. Dennoch sind diese mit Hilfe von Methoden der sog. **Gittereichtheorie** mittlerweile recht genau bestimmbar. Hierbei werden die Massen von Hadronen bei gegebenen Quarkmassen numerisch auf einem **Raum-Zeit-Gitter** bestimmt. Man verändert die Quarkmassen so lange, bis Übereinstimmung mit experimentell gemessenen Hadronenmassen erzielt wird. Dies ergibt dann die in Tab. 1.3 aufgeführten Werte für die Quarkmassen.

Prozesse der starken Wechselwirkung **erhalten** alle Quarkquantenzahlen, aber Prozesse der schwachen Wechselwirkung können diese verändern. Hierzu zwei

Beispiele:

(a) $p + \pi^- \longrightarrow \Lambda + K^0$

Während die beiden Teilchen auf der linken Seite keine Seltsamkeit tragen, hat das Λ, welches jeweils ein u–, d– und s–Quark enthält, $S = -1$, und das neutrale Kaon K^0, welches aus d und $\bar{s}$ besteht, $S = +1$. In der Summe haben also auch die beiden Teilchen auf der rechten Seite keine Seltsamkeit. Bei der obigen Reaktion handelt es sich dementsprechend um einen Prozess der **starken Wechselwirkung**.

(b) $\Lambda \longrightarrow p + \pi^-$

Der Zerfall des Λ in Proton und Pion ist ein Prozess der **schwachen Wechselwirkung**, denn die Seltsamkeit ändert sich von $S = -1$ auf der linken Seite zu $S = 0$ auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung.

Die Erhaltung der Quarkquantenzahlen, oder mit anderen Worten der Quark-Flavors, in der starken Wechselwirkung bedeutet, dass letztere alle Quark-Flavors gleich behandelt. Falls nun N_f Quark-Flavors in der Masse entartet sind, so gibt es, zumindest in Bezug auf Prozesse der starken Wechselwirkung, keine Möglichkeit, zwischen diesen entarteten Flavors zu unterscheiden. Die Ununterscheidbarkeit bedingt die Existenz einer **Symmetrie**, in diesem Fall einer $SU(N_f)$–Flavor-Symmetrie. Dies bedeutet, dass man die N_f entarteten Quark-Flavors mit Hilfe von speziellen unitären Transformationen ineinander umwandeln könnte, ohne dass sich etwas an observablen Größen ändert. Es bedeutet ferner, dass die **Eigenwerte** des **Hamilton-Operators der starken Wechselwirkung**, $\hat{H}_{\mathrm{QCD}}$, oder mit anderen Worten, die **Energie-Eigenzustände**, d.h. die **Massen** der Hadronen, nach **Multipletts** der Gruppe $SU(N_f)$ klassifiziert werden können. Bei exakter $SU(N_f)$–Symmetrie sind alle Hadronenmassen innerhalb eines Multipletts **entartet**.

Dies ist ganz ähnlich wie bei den Eigenwerten des Hamilton-Operators für das Elektron im Wasserstoffatom (vgl. Vorlesung "Quantenmechanik I"). Weil das Coulomb-Potentials des Protons ein Zentralpotential ist, gibt es, in Abwesenheit äußerer elektromagnetischer Felder, eine $SO(3)$–**Symmetrie** bezüglich **Drehungen im Raum**. Also sind die Eigenwerte des Hamilton-Operators bezüglich der Quantenzahlen des Drehimpulses entartet und können nach **Multipletts** der Gruppe $SO(3)$, also zu gegebenem ℓ genau $2\ell + 1$ Zustände, klassifiziert werden. Alle Eigenwerte innerhalb eines Multipletts sind energetisch entartet.

In der starken Wechselwirkung brechen die ungleichen Massen der Quarks die $SU(N_f)$–Symmetrie **explizit**. Dadurch wird auch die Entartung der Hadronenmassen innerhalb eines Multipletts aufgehoben. Auf einer typischen hadronischen Massenskala, $\sim 1\ \mathrm{GeV}/c^2$, ist aber der Massenunterschied zwischen u–, d– und ggfs. sogar s–Quarks vernachlässigbar, vgl. Tab. 1.3, so dass zumindest **näherungsweise** eine $SU(3)$–Flavor-Symmetrie besteht (für die schwereren Quark-Flavors gilt dies nicht mehr, da ihre Massen vergleichbar, oder sogar erheblich größer als die typische hadronische Massenskala sind). Daher ist es sinnvoll, eine Klassifikation der Hadronen in **Multipletts** der Gruppe $SU(3)$ vorzunehmen.

Diese wurde ausführlich in der Vorlesung "Quantenmechanik II" besprochen. Wir geben hier deshalb lediglich eine kurze Erinnerung an die wichtigsten Fakten, soweit sie dieses einleitende Kapitel betreffen. $SU(3)$–Flavor-Multipletts kann man graphisch in einer Ebene darstellen. Dabei macht man sich zunutze, dass jeder Zustand eines $SU(3)$–Multipletts

eindeutig durch die Eigenwerte der Operatoren der **Cartan–Unteralgebra** der Gruppe $SU(3)$ festgelegt wird. Letztere besteht aus den Generatoren $\hat{T}_3$ und $\hat{T}_8$. Anstelle von $\hat{T}_8$ nimmt man oft den sog. **Hyperladungsoperator** $\hat{Y} \equiv (2/\sqrt{3})\,\hat{T}_8$. Die Zustände eines Multipletts sind dann durch die Eigenwerte T_3 und Y eindeutig festgelegt, $|T_3,\, Y\rangle$. Die einzelnen Zustände eines Multipletts nehmen dann in der $(T_3 - Y)$–Ebene eindeutig festgelegte Positionen an. In Abb. 1.1 ist das sog. **fundamentale Triplett** [3] der Quarks dargestellt. Die Wertepaare (T_3, Y) der einzelnen Quark-Flavors entsprechen denen in Tab. 1.3 angegebenen, wenn man die Relation

$$Y = B + S \tag{1.4}$$

benutzt.

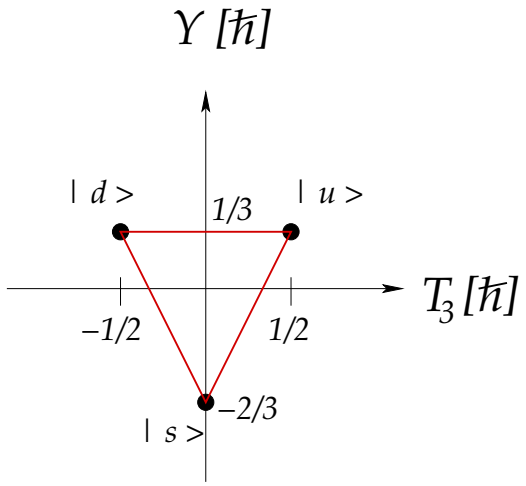


Abbildung 1.1: Das fundamentale Triplett der drei leichtesten Quark-Flavors u, d und s.

In Abb. 1.2 ist das sog. **Anti-Triplett** $[\bar{3}]$ der Anti-Quarks dargestellt. Es ergibt sich aus dem Triplett durch Vorzeichenumkehr von T_3 und Y, so wie man das für Anti-Teilchen erwartet.

Mit Hilfe der **Kopplungsregeln** für $SU(3)$–Multipletts kann man aus dem fundamentalen Triplett und dem Anti-Triplett höherdimensionale Multipletts konstruieren. Die Zahl der dabei verwendeten Tripletts und Anti-Tripletts entspricht dabei genau der Zahl der im jeweiligen Hadron vorkommenden Quarks bzw. Anti-Quarks. Aus den Regeln

$$[3] \times [\bar{3}] \;=\; [1] + [8]\ , \tag{1.5}$$

$$[3] \times [3] \times [3] \;=\; [1] + [8] + [8] + [10] \tag{1.6}$$

erhalten wir also ein Singulett [1] und ein Oktett [8] für **mesonische** $\bar{q}q$–Zustände bzw. ein Singulett [1], zwei Oktetts [8] und ein Dekuplett [10] für **baryonische** qqq–Zustände. Das Singulett und das Oktett der **pseudoskalaren Mesonen** ist in Abb. 1.3 dargestellt. Hier erkennt man das **Isospin-Triplett** der Pionen, π^-, π^0 und π^+, sowie die beiden **Isospin-Dubletts** der Kaonen, K^0, K^+ und K^-, $\bar{K}^0$.

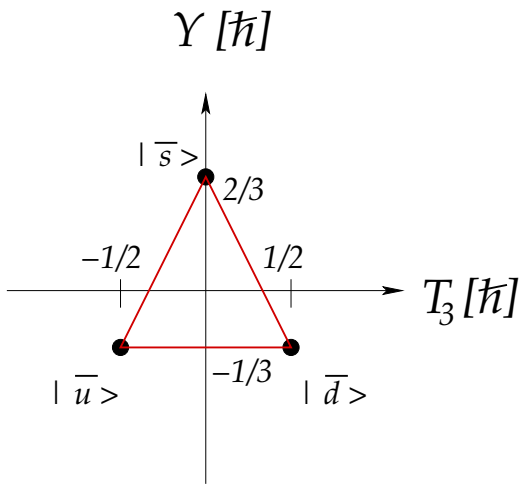


Abbildung 1.2: Das Anti-Triplett der leichtesten drei Anti-Quark–Flavors $\bar{u}$, $\bar{d}$ und $\bar{s}$.

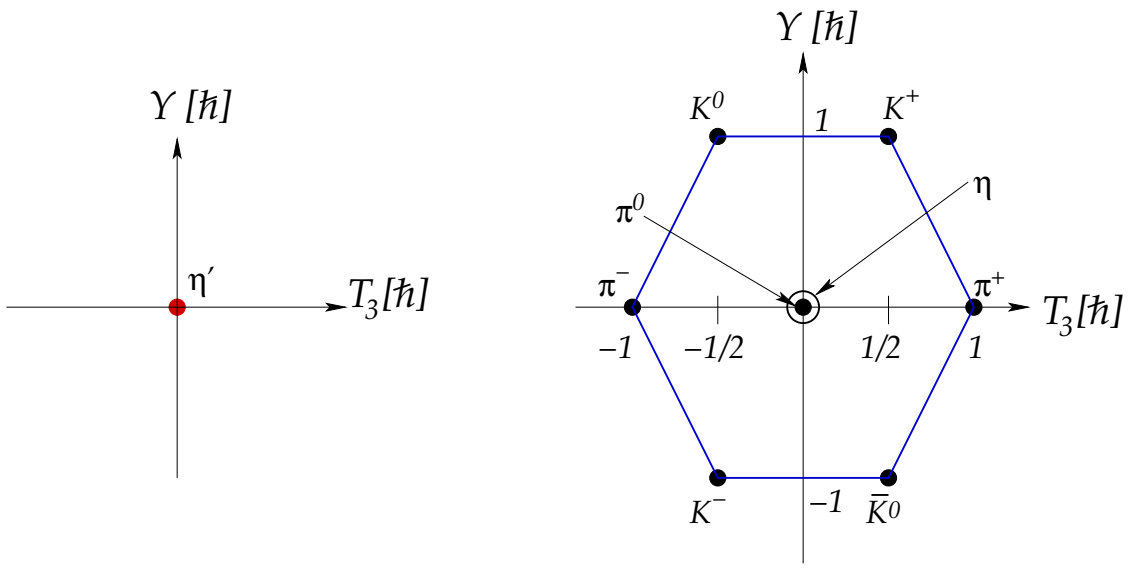


Abbildung 1.3: Das Singulett und Oktett der pseudoskalaren Mesonen.

Das Singulett, ein Oktett und das Dekuplett der Baryonen ist in Abb. 1.4 dargestellt. Hier erkent man z.B. das **Isospin-Dublett**, das von Neutron n und Proton p gebildet wird.

Die Klassifikation von Hadronen in $SU(3)$–Flavor-Multipletts liefert indirekte Evidenz für die Existenz verschiedener Quark-**Flavors**. Ob es mehr als die bekannten sechs Quark-Flavor oder mehr als drei Familien von Materieteilchen gibt, ist nicht bekannt. Unser Standardmodell der starken und elektroschwachen Naturkräfte scheint derzeit nicht mehr zu benötigen, um experimentelle Befunde zu erklären.

Aber woher wissen wir, dass es die Quantenzahl **Farbe** gibt? Betrachten wir beispielsweise das Δ^{++} im Baryonen-Dekuplett (der Zustand ganz rechts oben im Dekuplett in

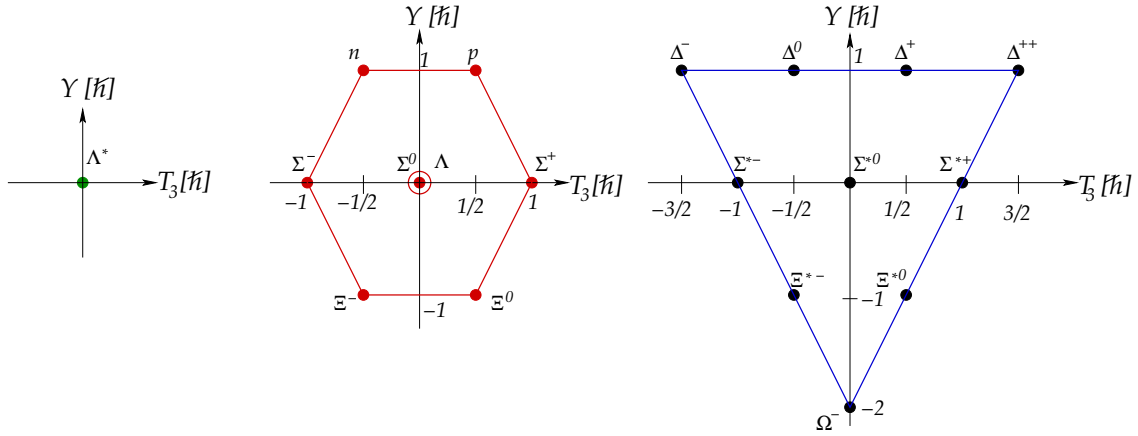


Abbildung 1.4: Das Singulett, ein Oktett und das Dekuplett der Baryonen.

Abb. 1.4). Die Gesamt-Wellenfunktion des Δ^{++} ist das (direkte) Produkt von drei Anteilen, einem räumlichen, einem Spin- und einem Flavor-Anteil,

$$\Psi_{\Delta^{++}} = \psi_{\text{Raum}}\, \psi_{\text{Spin}}\, \psi_{\text{Flavor}}\ . \tag{1.7}$$

Aus den graphischen Kopplungsregeln, die in der Vorlesung "Quantenmechanik II" erläutert wurden, wissen wir, dass das Δ^{++} aus drei u–Quarks besteht, $\Delta^{++} \sim uuu$. Der Flavor-Zustand uuu ist offensichtlich **symmetrisch** unter Austausch der einzelnen Quarks, also ist ψ_{Flavor} symmetrisch. Desweiteren ist experimentell bekannt, dass Δ^{++} Gesamtspin $J = 3/2$ hat. Dieser ergibt sich aus dem Bahndrehimpuls $L = 0$ (also einer s–Welle) und dem Spin $S = 3/2$ (d.h. die drei Quark-Spins 1/2 addieren sich parallel zueinander). Ein Spin $S = 3/2$–Zustand ist **symmetrisch** (weil sich die Quark-Spins parallel addieren und daher beliebig vertauscht werden können), also ist ψ_{Spin} symmetrisch. Letzlich bildet auch eine s–Welle (Bahndrehimpuls $L = 0$) einen **symmetrischen** Zustand, d.h. ψ_{Raum} ist symmetrisch.

Nun sehen wir uns mit einem Dilemma konfrontiert: wenn alle Anteile der Wellenfunktion (1.7) **symmetrisch** sind, muss auch die Gesamtwellenfunktion $\Psi_{\Delta^{++}}$ **symmetrisch** unter Austausch aller Quarks sein. Aber dies ist unmöglich, weil das Δ^{++} als aus einer **ungeraden** Anzahl von Fermionen bestehendes Teilchen ebenfalls ein **Fermion** ist. Das **Pauli-Prinzip** bzw. die **Fermi–Dirac–Statistik** macht es dann aber erforderlich, dass die Gesamtwellenfunktion $\Psi_{\Delta^{++}}$ **anti-symmetrisch** unter Austausch aller Quarks ist.

Der einzige Ausweg ist, die Existenz einer **weiteren** Quantenzahl zu fordern, die man **Farbe** nennt und deren Anteil an der Wellenfunktion des Δ^{++} **anti-symmetrisch** ist. Die Gesamtwellenfunktion (1.7) muss um einen Farbanteil ergänzt werden,

$$\Psi_{\Delta^{++}} = \psi_{\text{Raum}}\, \psi_{\text{Spin}}\, \psi_{\text{Flavor}}\, \psi_{\text{Farbe}}\ . \tag{1.8}$$

Diese ist nun anti-symmetrisch, wie vom Pauli-Prinzip gefordert.

Aber woher wissen wir, dass es **drei** Quark-Farben gibt, nicht mehr und nicht weniger? Hierzu gibt es zwei überzeugende experimentelle Befunde:

(a) π^0–Zerfall: Das π^0–Meson hat den Quarkinhalt

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}u - \bar{d}d \right) \ . \tag{1.9}$$

Die u– und d–Quarks und –Anti-Quarks können sich gegenseitig vernichten, d.h. das π^0–Meson zerfällt in zwei Photonen, s. Abb. 1.5.

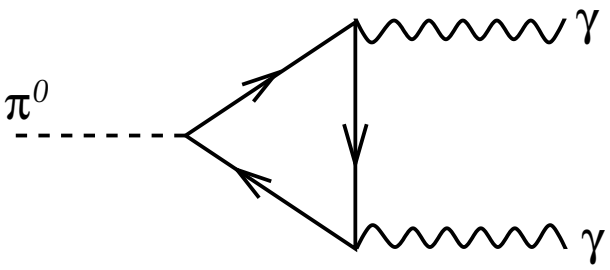


Abbildung 1.5: Der π^0–Zerfall in zwei Photonen.

Dies ist ein sog. **Feynman–Diagramm**: die gestrichelte Linie entspricht dem einlaufenden π^0, die durchgezogenen Linien sind Quarks und die wellenförmigen Linien versinnbildlichen Photonen. Wie man mit Feynman–Diagrammen umgeht, werden wir in den Kapiteln 4 und 6 noch eingehend besprechen. An dieser Stelle ist es lediglich nötig zu bemerken, dass der in Abb. 1.5 graphisch dargestellte Zerfall des π^0–Mesons in eine mathematische Formel für die **Pion–Zerfallsbreite** übersetzt werden kann,

$$\Gamma_{\text{th}}(\pi^0 \to \gamma\gamma) \simeq 7.87 \left(\frac{N_c}{3} \right)^2 \text{eV} \ . \tag{1.10}$$

Die Größe N_c in der Klammer steht dabei für die Anzahl der möglichen Quark-Farben. Weil die im Dreieck in Abb. 1.5 umlaufenden Quarks im Prinzip jede Farbe annehmen können, ist die Zerfallsamplitude proportional zu einem Faktor N_c (und die Zerfallsbreite entsprechend proportional zu N_c^2). Vergleichen wir Gl. (1.10) mit dem experimentell gemessenen Wert,

$$\Gamma_{\text{exp}}(\pi^0 \to \gamma\gamma) \simeq (7.95 \pm 0.05) \text{ eV} \ , \tag{1.11}$$

so wird klar, dass lediglich der Wert $N_c = 3$ für die Zahl der Quark-Farben in Betracht kommt.

(b) e^+e^-–Vernichtung: Betrachten wir das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts für die Vernichtung eines Elektron–Positron–Paars in **Hadronen** zu dem für die Vernichtung in **Myonen**,

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \ . \tag{1.12}$$

Die entsprechenden Feynman-Diagramme sind in Abb. 1.6 dargestellt. Für den Zerfall in Hadronen nehmen wir an, dass das virtuelle Photon im Zwischenzustand

zunächst in ein $\bar{q}q$–Paar zerfällt. Von den Quark-Linien werden dann virtuelle Gluonen (korkenzieherförmige Linien) abgestrahlt, die wiederum in $\bar{q}q$–Paare zerfallen. Diese kombinieren dann mit anderen Quarks bzw. Anti-Quarks zu (farbneutralen) Hadronen.

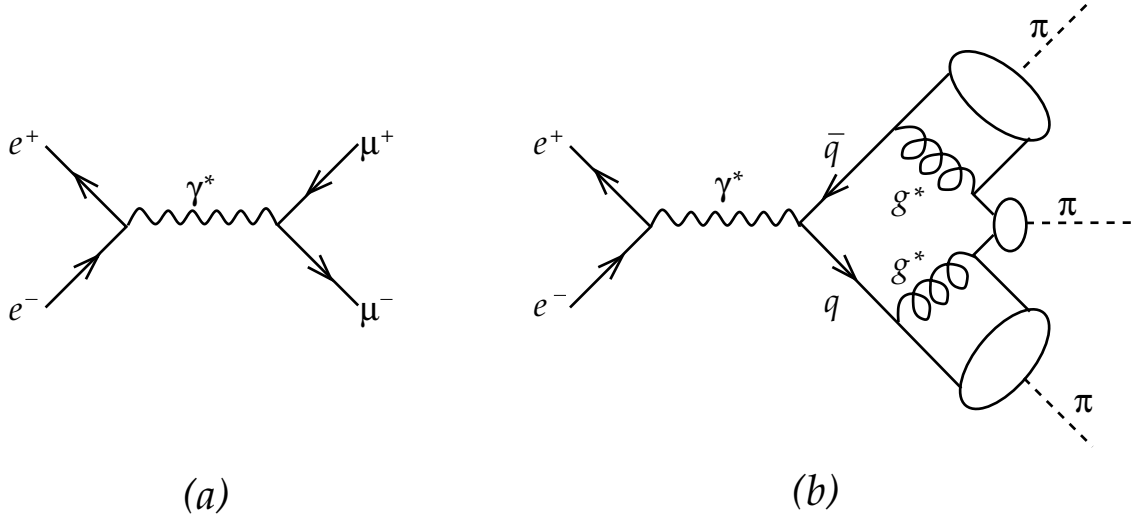


Abbildung 1.6: e^+e^-–Vernichtung in Myonen (a) bzw. in Quarks und Hadronen (b).

Bei hohen Energien kann es keine Rolle spielen, ob man ein $\mu^+\mu^-$– oder ein $\bar{q}q$–Paar erzeugt (der Massenunterschied zwischen den jeweils erzeugten Teilchen ist vernachlässigbar). Allerdings hat man erheblich mehr Möglichkeiten im letzteren Fall: man muss für das $\bar{q}q$–Paar alle Farben und Flavors in Betracht ziehen. Daher ist

$$
\begin{aligned}
R &= N_c \sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 \\
&= N_c \times \begin{cases}
\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\,, & N_f = 2 \;\; (u\text{– und } d\text{–Quarks})\,, \\
\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\,, & N_f = 3 \;\; (u\text{–}, d\text{– und } s\text{–Quarks})\,, \\
\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\,, & N_f = 4 \;\; (u\text{–}, d\text{–}, s\text{– und } c\text{–Quarks})\,, \\
\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\,, & N_f = 5 \;\; (u\text{–}, d\text{–}, s\text{–}, c\text{– und } b\text{–Quarks})\,, \\
3 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{9}\,, & N_f = 6 \;\; (\text{alle Quark–Flavor})\,,
\end{cases} \\
&= \frac{N_c}{3} \times \begin{cases}
\frac{5}{3} \simeq 1.67\,, & N_f = 2\,, \\
2\,, & N_f = 3\,, \\
\frac{10}{3} \simeq 3.33\,, & N_f = 4\,, \\
\frac{11}{3} \simeq 3.67\,, & N_f = 5\,, \\
5\,, & N_f = 6\,.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Der Faktor N_c ergibt sich aus der Zahl möglicher Farben für das $\bar{q}q$–Paar (Quark und Anti-Quark müssen natürlich dieselbe Farbe tragen, da sie im Zerfall eines farblosen

Teilchens, eines Photons, entstehen). Die Summe über die möglichen Quark-Flavors erklärt sich ganz analog. Dass in der Summe die Quadrate der elektrischen Ladungen Q_f^2 der Quark-Flavors auftritt, ergibt sich aus den Feynman–Regeln für die Feynman–Diagramme. Es ist klar, dass die Summe abbrechen muss, wenn nicht genügend Energie zur Verfügung steht, um einen bestimmten Quark-Flavor zu erzeugen. Also bricht die Summe nach zwei Termen ($N_f = 2$) ab, falls die Energie des e^+e^-–Paars niedriger ist als die zweifache s–Quark-Masse $2m_s \simeq 200$ MeV/c^2. Entsprechend bricht sie nach drei Termen ($N_f = 3$) unterhalb der zweifachen c–Quark-Masse $2m_c \simeq 2.56$ GeV/c^2 ab, nach vier Termen ($N_f = 4$) unterhalb der zweifachen b–Quark-Masse $2m_b \simeq 8.36$ GeV/c^2 und nach fünf Termen ($N_f = 5$) unterhalb der zweifachen t–Quark-Masse $2m_t \simeq 346.2$ GeV/c^2. Das experimentell gemessene Verhältnis ist im Energiebereich $2.5 - 40$ GeV in Abb. 1.7 dargestellt. Die einzelnen Schwellen sind sehr gut erkennbar; sie beginnen tatsächlich (in etwa) bei den nach obiger Überlegung erwarteten Werten auf der Energieachse und die entsprechenden R–Werte werden auch dort angenommen, falls $N_c = 3$.

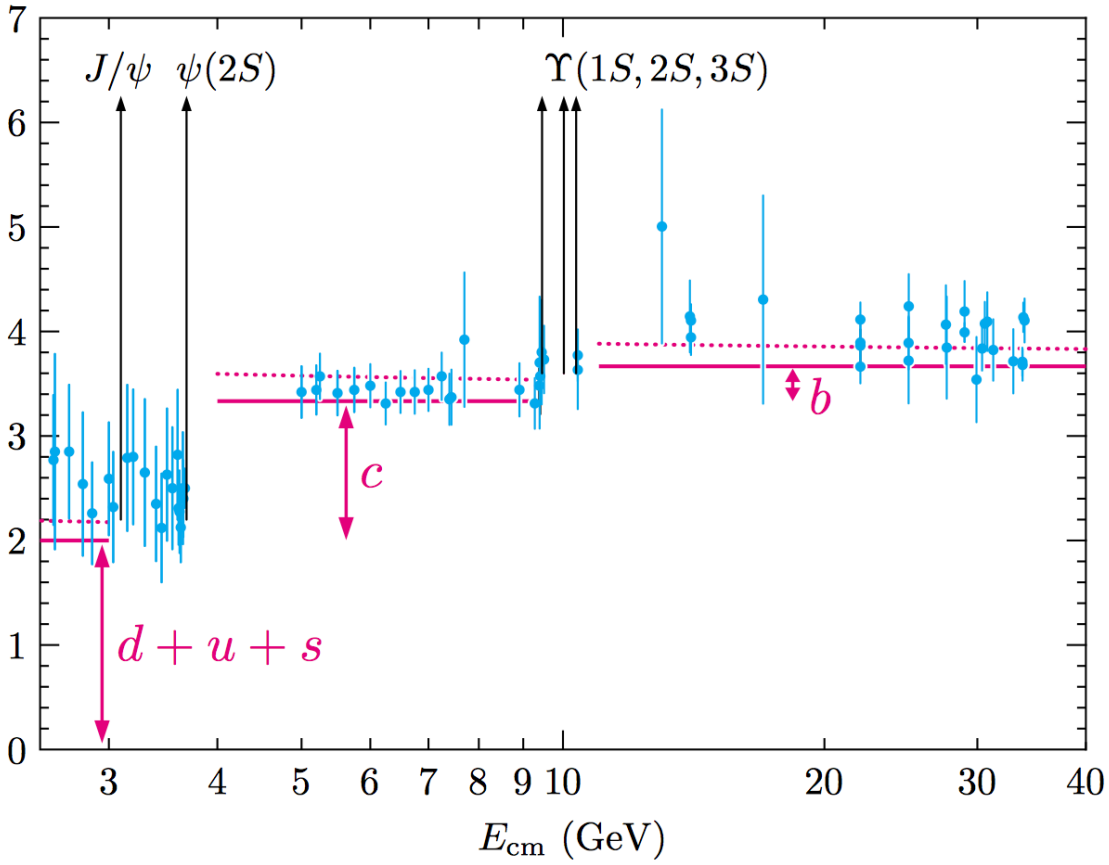


Abbildung 1.7: Das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts der e^+e^-–Annihilation in Hadronen zu dem in Myonen [18].

Diese experimentellen Befunde belegen die Existenz der Quantenzahl **Farbe** und dass die Anzahl der Farben $N_c = 3$ ist. Die einzelnen Farben werden, wie schon erwähnt,

gewöhnlich mit **rot**, **grün** und **blau** bezeichnet. Die starke Wechselwirkung unterscheidet nicht zwischen einzelnen Farben, d.h. es existiert eine $SU(3)_c$–**Farb-Symmetrie**. Hadronen transformieren, wie ebenfalls schon erwähnt, wie **Singuletts** unter dieser Symmetrie, d.h. sie bleiben **invariant**.

4.11.2020

1.2 Eichfelder und das Higgs–Boson

Es gibt vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen Quarks und Leptonen:

(i) **Gravitation**,

(ii) **Elektromagnetismus**,

(iii) **schwache Wechselwirkung** und

(iv) **starke Wechselwirkung**.

Mit Ausnahme der Gravitation glauben wir zu wissen, wie man diese Wechselwirkungen in Form von **Quantenfeldtheorien** formuliert. Die sog. **Quantenchromodynamik (QCD)** ist die Theorie der starken Wechselwirkung. Das sog. **Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung** beschreibt die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung in einem einheitlichen Rahmen. Sowohl die starke wie die elektroschwache Wechselwirkung werden durch den Austausch von **Vektorbosonen**, d.h. Teilchen mit Spin 1, vermittelt. Für die starke Wechselwirkung sind dies die sog. **Gluonen** g, für die elektroschwache Wechselwirkung sind dies **Photon** γ (elektromagnetische Wechselwirkung) sowie W^+–, W^-– und Z^0–Boson (schwache Wechselwirkung). In der quantenfeldtheoretischen Formulierung sind alle diese Vektorbosonen zunächst **masselos**, d.h. sie sind sog. **Eichfelder**. Durch den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung (s. Kapitel 7), bei dem das unlängst experimentell nachgewiesene **Higgs-Boson** H eine wichtige Rolle spielt, nehmen die schwachen Eichbosonen W^+, W^- und Z^0 eine nichtverschwindende Masse an. Die nachfolgende Tabelle 1.4 stellt die Eigenschaften dieser Vektorbosonen zusammen. Ebenfalls aufgeführt ist das sog. **Graviton** G, das Austauschteilchen der Gravitation mit Spin 2 (und damit ein Tensorboson) und das schon erwähnte **Higgs-Boson**, welches Spin 0 trägt (also ein skalares Boson).

Die einzelnen Wechselwirkungen sind nach abnehmender Stärke geordnet. Die starke Wechselwirkung ist, wie ihr Name sagt, die stärkste aller Wechselwirkungen. Ihre Kopplungsstärke wird durch die **starke Kopplungskonstante**

$$\alpha_S \equiv \frac{g^2}{4\pi\hbar c\epsilon_0} \tag{1.14}$$

charakterisiert, die (bei einer typischen hadronischen Energieskala – wir werden in Kapitel 8 sehen, dass aufgrund der Renormierbarkeit der Wechselwirkungen alle Kopplungskonstanten energieabhängig sind) in etwa von der Größenordnung 1 ist. Aufgrund des *confinements* von Farbladungen ist ihre Reichweite auf die typische Ausdehnung eines Hadrons beschränkt.

Austausch–teilchen	Spin J	Masse [GeV/c^2]	Zerfallsbreite [GeV]	Kopplungsstärke	Reichweite [fm = 10^{-15}m]
g	1	0	0	$\alpha_S \sim 1$	< 1
γ	1	$< 10^{-27}$	0	$\alpha \simeq \frac{1}{137.036}$	∞
$W^\pm$	1	80.379 ± 0.012	2.085 ± 0.042	$G_F m_N^2 \simeq 1.01 \cdot 10^{-5}$	$< 2 \cdot 10^{-3}$
Z^0	1	91.1876 ± 0.0021	2.4952 ± 0.0023		
G	2	$< 6 \cdot 10^{-41}$	0	$\frac{\gamma m_N^2}{\hbar c} \simeq 5.76 \cdot 10^{-36}$	∞
H	0	125.10 ± 0.14	< 0.013	–	–

Tabelle 1.4: Eigenschaften der Austauschteilchen.

Die zweitstärkste Wechselwirkung ist die elektromagnetische Wechselwirkung, deren Kopplungsstärke durch die **Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante**

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c\epsilon_0} \tag{1.15}$$

gegeben ist, wobei e die **Elementarladung** ist. Die Reichweite der elektromagnetischen Wechselwirkung ist unendlich.

Wie wir in Kapitel 7 sehen werden, ist die Kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung eigentlich von derselben Größenordnung wie die der elektromagnetischen. In Prozessen der schwachen Wechselwirkung wird jedoch stets ein $W^\pm$– oder Z^0–Boson ausgetauscht. Aufgrund der großen Masse dieser Bosonen ist damit zum einen die Reichweite der schwachen Wechselwirkung beschränkt, und zum anderen auch ihre Stärke bei einer typischen hadronischen Massenskala, z.B. bei der Nukleonenmasse $m_N \simeq 0.939$ GeV/c^2, etwa fünf Größenordnungen kleiner. In Tab. 1.4 ist die typische Kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung durch die sog. **Fermi-Kopplungskonstante** G_F (multipliziert mit m_N^2, um die Kopplung dimensionslos und damit vergleichbar mit den anderen Kopplungsstärken zu machen) angegeben.

Die Gravitation ist die schwächste uns bekannte Naturkraft. In der Tabelle ist für ihre Stärke das Quadrat des Verhältnisses der Nukleonenmasse zur Planck-Masse $M_P \equiv \sqrt{\gamma/\hbar c}$ angegeben. Verglichen mit der starken Wechselwirkung ist sie (bezogen auf die Nukleonenmasse m_N) 36 Größenordnungen schwächer! Für makroskopische Objekte (die viele Größenordnungen schwerer als ein Nukleon sind) und auf astronomischen Größenskalen spielt sie (aufgrund ihrer unendlichen Reichweite) jedoch eine wesentliche Rolle.

1.3 Einheiten, Konventionen und Notation

Einheiten:

Wir verwenden in den nachfolgenden Kapiteln (bis auf Kapitel 4) sog. **natürliche Einheiten**,

$$\hbar = c = \epsilon_0 = 1 \ . \tag{1.16}$$

Dass $\hbar = 1$ ist, bedeutet z.B., dass Energien und Kreisfrequenzen dieselbe Einheit haben (man erinnere sich an die Formel $E = \hbar\omega$ aus der Quantenmechanik). Dass $c = 1$ ist, bedeutet, dass Geschwindigkeiten dimensionslos sind, d.h. dass Längen und Zeiten dieselbe Einheit haben. Wegen $c^2 \equiv (\epsilon_0\mu_0)^{-1}$ und $\epsilon_0 = 1$ ist dann auch $\mu_0 = 1$. Da Kreisfrequenzen die Einheit einer inversen Zeit und damit die einer inversen Länge haben, haben Energien und inverse Längen dieselbe Einheit. Die Konversion zwischen natürlichen und Standardeinheiten geschieht am zweckmäßigsten mit der Formel

$$1 = \hbar c = 197.3269804 \text{ MeV fm} . \tag{1.17}$$

Also ist

$$1 \text{ fm} \simeq \frac{1}{197.327 \text{ MeV}} , \tag{1.18}$$

bzw.

$$1 \text{ GeV} \simeq \frac{1}{0.197 \text{ fm}} . \tag{1.19}$$

Abständen von etwa 1 (1/5) fm entsprechen also einer Energieskala von 200 MeV (1 GeV), oder mit anderen Worten, solche Abstände sind mit Proben (Photonen, Elektronen, etc.) entsprechender Energie auflösbar.

Dass man die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, ϵ_0, gleich 1 setzt, vereinfacht den Ausdruck für die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante (1.15) erheblich,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} . \tag{1.20}$$

Mit dem Wert $\alpha \simeq 1/137.036$ sehen wir, dass die Elementarladung in natürlichen Einheiten ebenfalls dimensionslos wird,

$$|e| = \sqrt{4\pi\alpha} \simeq 0.303 . \tag{1.21}$$

Dasselbe gilt auch für die starke Ladung

$$|g| = \sqrt{4\pi\alpha_S} \sim 3.545 . \tag{1.22}$$

Konventionen:

Der **metrische Tensor** in kartesischen Koordinaten im Minkowski-Raum ist

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{1.23}$$

Man bezeichnet diese Wahl als sog. “Westküstenmetrik” (engl. *West coast metric*), im Unterschied zur “Ostküstenmetrik” (engl. *East coast metric*), die sich um ein globales Vorzeichen von Gl. (1.23) unterscheidet.

Notationen:

Für **kontravariante** 4–Vektoren verwenden wir Großbuchstaben mit hoch gestellten griechischen Indizes, wie z.B. der kontravariante Raum-Zeit–Vektor

$$(X^\mu) = (t, x, y, z)^T \ . \tag{1.24}$$

Das Transpositionssymbol gibt an, dass es sich streng genommen um einen **Spaltenvektor** handelt. Der zugehörige **kovariante** 4–Vektor ergibt sich durch Herunterziehen der Indizes mittels des metrischen Tensors,

$$(X_\mu) = (g_{\mu\nu} X^\nu) = (t, -x, -y, -z) \ . \tag{1.25}$$

Hierbei handelt es sich um einen **Zeilenvektor**. In der Ostküstenmetrik ändert sich lediglich das Vorzeichen der Zeitkomponente, während die der Raumkomponenten unverändert bleiben.

Wir können mit Hilfe des metrischen Tensors auch einen Index am metrischen Tensor selbst herunterziehen. Der **gemischt kontra- und kovariante** metrische Tensor ist damit identisch mit der (4×4)–**Einheitsmatrix**,

$$(g^\mu{}_\nu) = (g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1}_4 = (\delta^\mu{}_\nu) \ . \tag{1.26}$$

Das **Skalarprodukt** von 4–Vektoren ist mit Hilfe des metrischen Tensors definiert, z.B. das Skalarprodukt des Raum-Zeit–Vektors mit sich selbst ist

$$X^\mu g_{\mu\nu} X^\nu \equiv X_\nu X^\nu = t^2 - \vec{x}^2 \ . \tag{1.27}$$

In der Ostküstenmetrik hat das Skalarprodukt das umgekehrte Vorzeichen.

Der **4–Gradient** ist

$$(\partial_\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial X^\mu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \ . \tag{1.28}$$

Man beachte, dass dies ein **ko**varianter Vektor ist, weil nach einem **kontra**varianten Vektor abgeleitet wird. Dies sorgt dafür, dass **kein** negatives Vorzeichen vor den räumlichen Komponenten erscheint, wie dies sonst für kovariante 4–Vektoren üblich ist, vgl. z.B. Gl. (1.25). Die kontravariante Version des 4–Gradienten ist

$$(\partial^\mu) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial X_\mu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right)^T \ . \tag{1.29}$$

Hier wird nach einem kovarianten Vektor abgeleitet, was ein Minus-Zeichen vor den räumlichen Indizes bedingt. Als einfache Merkregel zu den Vorzeichen gilt, dass ein kontra(ko)varianter Index im **Nenner** wie ein ko(kontra)varianter Index zu behandeln ist.

Der **D'Alembert–Operator** ist

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \ , \tag{1.30}$$

wobei $\Delta \equiv \vec{\nabla}^2$ der Laplace–Operator ist. Mehr Details zur relativistischen Notation findet man in der Vorlesung "Theoretische Physik II: Klassische Mechanik".

Die **Dirac–Matrizen** haben (in der Diracschen Konvention) die Form

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \left(\gamma^0\right)^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} , \\
\gamma^i &= -\left(\gamma^i\right)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad i = 1, 2, 3 , \\
\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} ,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

wobei $\mathbb{1}_2$ die (2×2)–Einheitsmatrix ist und

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{1.32}$$

die **Pauli–Matrizen** sind.

2 Klassische Feldtheorie

2.1 Lagrange–Formulierung

In diesem Abschnitt rufen wir uns die **Lagrange–Formulierung** der **klassischen Mechanik** in Erinnerung (s. Vorlesung "Theoretische Physik II: Klassische Mechanik"). Wir betrachten zunächst einen einzelnen Freiheitsgrad, charakterisiert durch die **generalisierte Koordinate** q und die **generalisierte Geschwindigkeit** $\dot{q}$. Für **konservative** Systeme (und nur solche sollen hier betrachtet werden) ist die **Lagrange–Funktion** die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie,

$$L(q, \dot{q}; t) \equiv T - V = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q, t) \ . \tag{2.1}$$

Die **Wirkung** ist definiert als

$$S[q(t)] \equiv \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{d}t \, L(q, \dot{q}; t) \ . \tag{2.2}$$

Sie ist ein **Funktional** der im Zeitintervall $[t_a, t_e]$ durchlaufenen **Trajektorie** $\{q(t)\,,\ t_a \leq t \leq t_e\}$, hängt also vom gesamten Verlauf der Funktion $q(t)$ in diesem Zeitintervall ab. Im Unterschied zu Funktionen, die im mathematischen Sinne Abbildungen sind, die Zahlen Zahlen zuordnen, z.B. die generalisierte Koordinate als Funktion der Zeit,

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R} \supset \mathcal{M} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{N} \subset \mathbb{R} \\ \mathcal{M} \ni t \quad &\longmapsto \quad q(t) \in \mathcal{N} \ , \end{aligned} \tag{2.3}$$

sind Funktionale im mathematischen Sinn Abbildungen, die **Funktionen** Zahlen zuordnen. Im Fall der Wirkung gilt

$$\begin{aligned} S : \mathcal{C}^\infty \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{N} \subset \mathbb{R} \\ \mathcal{C}^\infty \ni q(t) \quad &\longmapsto \quad S[q(t)] \in \mathcal{N} \ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei $\mathcal{C}^\infty$ die Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen ist. Argumente von Funktionalen werden zur besseren Kenntlichmachung in eckigen Klammern aufgeführt.

Welches ist nun die Trajektorie, die ein klassisches Teilchen durchläuft? Diese ist gemäß dem **Hamiltonschen Prinzip** durch das **Extremum** der Wirkung gegeben. An diesem ist die Wirkung stationär, d.h. ihre **Variation** verschwindet,

$$\delta S[q(t)] = 0 \ . \tag{2.5}$$

Die Variation der Wirkung ist wiederum definiert als

$$\delta S[q(t)] \equiv S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] \ , \tag{2.6}$$

wobei $\delta q(t)$ eine **Variation** der Trajektorie $q(t)$ ist. Diese ist der Bedingung unterworfen, dass die Trajektorie am Anfangs- und Endzeitpunkt nicht variiert wird,

$$\delta q(t_a) = \delta q(t_e) \equiv 0 \ \ \forall \ \delta q(t) \ . \tag{2.7}$$

Dies ist in Abb. 2.1 verdeutlicht.

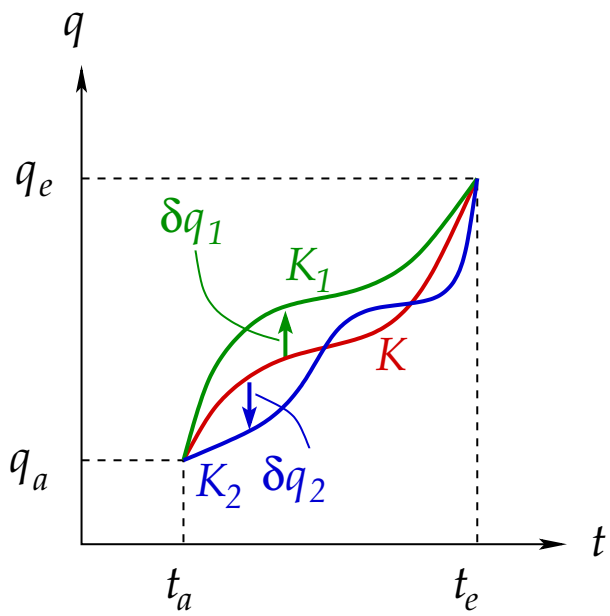


Abbildung 2.1: Eine Trajektorie (rot) und zwei im Vergleich dazu variierte Trajektorien (grün und blau).

Es genügt, infinitesimale Variationen des Pfades zu betrachten, $|\delta q(t)| \ll |q(t)|$. Die Bedingung (2.5) lautet dann

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S[q(t)] = S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{d}t \ [L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t); t) - L(q(t), \dot{q}(t); t)] \\ &\simeq \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{d}t \left[L(q(t), \dot{q}(t); t) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) - L(q(t), \dot{q}(t); t) \right] \ , \end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei wir eine Taylorentwicklung bis zur Ordnung $O(\delta q, \delta \dot{q})$ vorgenommen haben (was für infinitesimale Variationen ausreichend ist). Der erste und letzte Term heben sich gegenseitig weg. Für den dritten Term benutzen wir, dass

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [q(t) + \delta q(t)] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q(t) = \dot{q}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q(t) - \dot{q}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q(t) \ , \tag{2.9}$$

so dass nach partieller Integration folgt

$$0 = \delta S[q(t)] = \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \, \delta q(t) \Big|_{t_a}^{t_e} \; . \tag{2.10}$$

Der zweite Term verschwindet, da die Trajektorie am Anfangs- und Endzeitpunkt nicht variiert wird, vgl. Gl. (2.7). Da die Variation $\delta q(t)$ **beliebig** war, kann die rechte Seite nur verschwinden, wen der Integrand verschwindet, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \; . \tag{2.11}$$

Dies ist die wohlbekannte **Euler–Lagrange–Gleichung**.

Wir wollen diese Betrachtung nun auf ein **kontinuierliches System** verallgemeinern, d.h. wir suchen die **Lagrange–Formulierung für Felder**. Dazu ist es zweckmäßig, zunächst die **longitudinal schwingende Kette** zu betrachten, vgl. Kapitel 5 der Vorlesung "Theoretische Physik II: Klassische Mechanik". Gegeben sei eine in $x-$Richtung ausgedehnte Kette aus N Teilchen der Masse m, die durch Federn mit Federkonstante k miteinander verbunden sind und **longitudinale Schwingungen**, d.h. Schwingungen in Richtung der Ausdehnung der Kette ausführen, vgl. Abb. 2.2.

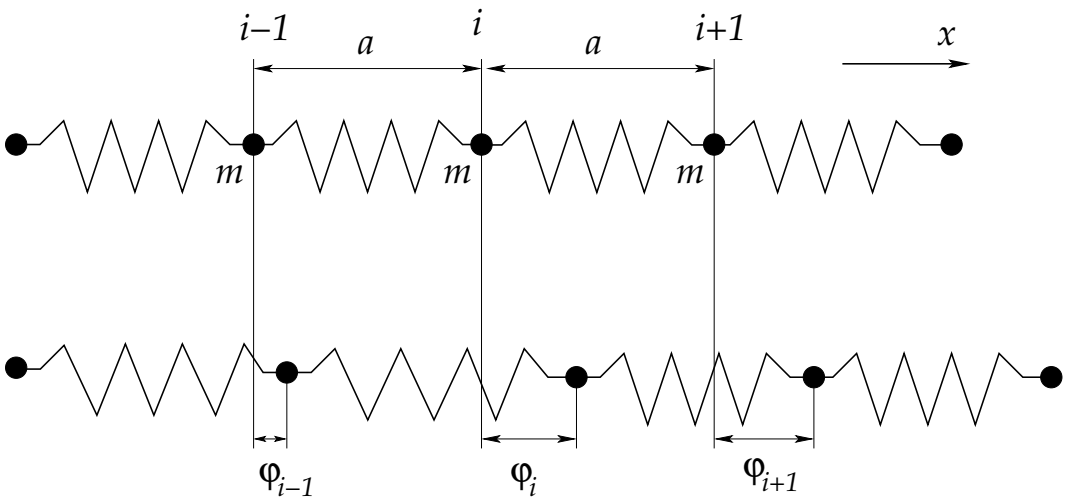


Abbildung 2.2: Die longitudinal schwingende Kette.

In der Ruhelage haben die Massen den Abstand a. Beim Schwingen wird die $i-$te Masse um eine Distanz φ_i aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. Die kinetische Energie des Systems beträgt offensichtlich

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{N} \dot{\varphi}_i^2 \; . \tag{2.12}$$

Die potentielle Energie ist

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{N-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \; . \tag{2.13}$$

Wir überzeugen uns davon, dass dieser Ausdruck korrekt ist, indem wir die auf die $j-$te Masse wirkende Kraft berechnen,

$$F_j = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_j} = -k\,(\varphi_j - \varphi_{j-1}) + k(\varphi_{j+1} - \varphi_j)\ , \quad j = 2, \ldots, N-1\ . \tag{2.14}$$

Der erste Term auf der rechten Seite entspricht gerade dem Hookeschen Gesetz für die Feder auf der linken Seite der $j-$ten Masse. Wird diese Feder elongiert, also $\varphi_j - \varphi_{j-1} > 0$, so zieht sie die $j-$te Masse in $(-x)-$Richtung zurück. Wird sie dagegen komprimiert, $\varphi_j - \varphi_{j-1} < 0$, so drückt sie die Masse in $(+x)-$Richtung. Daher muss dieser Term mit einem negativen Vorzeichen auftreten. Der zweite Term auf der rechten Seite entspricht dem Hookeschen Gesetz für die Feder auf der rechten Seite der $j-$ten Masse. Hier argumentiert man ganz analog, aber da eine Elongation dieser Feder die Masse in $(+x)-$Richtung zieht und eine Kompression sie in $(-x)-$Richtung drückt, ist das Vorzeichen des zweiten Terms gerade das umgekehrte des ersten. Für $j = 1$ bzw. $j = N$ erhalten wir die Kraft, indem wir den ersten bzw. den letzten Term in Gl. (2.14) weglassen.

Mit den Glgen. (2.12) und (2.13) lautet die Lagrange–Funktion des Systems

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left[m\,\dot{\varphi}_i^2 - k\,(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} a\left[\frac{m}{a}\,\dot{\varphi}_i^2 - ka\left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} a\left[\mu\,\dot{\varphi}_i^2 - \kappa\left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a}\right)^2\right] \equiv \sum_{i=1}^{N-1} a\,\mathcal{L}_i\ , \end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei wir die **Masse pro Längeneinheit** $\mu \equiv m/a$, das **Elastizitätsmodul** $\kappa \equiv ka$ und die **Lagrange–Funktion pro Längeneinheit** $\mathcal{L}_i$ eingeführt haben. Desweiteren haben wir die kinetische Energie des $N-$ten Massenpunktes vernachlässigt. Falls $N \gg 1$, ist dies eine gerechtfertigte Näherung, da die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes die Bewegung des gesamten Systems nicht wesentlich beeinflussen kann.

Die Auslenkungen φ_i der Massen repräsentieren die **Freiheitsgrade** des Systems. Die Euler–Lagrange–Gleichungen für diese Freiheitsgrade lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_j} \\ \Longleftrightarrow\quad 0 &= \mu\,\ddot{\varphi}_j - \kappa\left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{a^2} - \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{a^2}\right) \\ &= \mu\,\ddot{\varphi}_j - \kappa\,\frac{\varphi_{j+1} - 2\,\varphi_j + \varphi_{j-1}}{a^2}\ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Wir betrachten nun den Limes, in dem $N \to \infty$ und $a \to 0$ gehen. Die Kette von eindimensionalen harmonischen Oszillatoren geht dann über in einen kontinuierlichen **elastischen Stab**. Wenn alle (unendlich vielen) Oszillatoren in der Ruhelage sind, nehme die Stablänge den Wert ℓ an. Dieser Wert kann sich ändern, wenn die Oszillatoren

Schwingungen ausführen; der Stab kann in $x-$Richtung elongiert oder komprimiert werden. Der Positionsindex i nimmt **kontinuierliche Werte** an; wir können ihn durch die $x-$Koordinate ersetzen,

$$\varphi_j(t) \quad \longrightarrow \quad \varphi(t,x) \; .$$

Der Abstand a zwischen den Massen wird durch das infinitesimale Differential $\mathrm{d}x$ ersetzt, so dass

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} \frac{\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)}{a} &= \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{\varphi(t,x+\mathrm{d}x) - \varphi(t,x)}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \; , \\
\lim_{a\to 0} \frac{\varphi_{j+1}(t) - 2\,\varphi_j(t) + \varphi_{j-1}(t)}{a^2} &= \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{\varphi(t,x+\mathrm{d}x) - 2\,\varphi(t,x) + \varphi(t,x-\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x^2} \\
&\equiv \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2} \; .
\end{aligned}$$

Man beachte, dass aufgrund der Abhängigkeit der Auslenkung $\varphi(t,x)$ von Zeit **und** Ort nun partielle Ableitungen auftreten. Daher ist die Differentiation von φ_i nach der Zeit ebenfalls durch eine partielle Ableitung zu ersetzen,

$$\dot{\varphi}_j \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} \; , \qquad \ddot{\varphi}_j \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t^2} \; .$$

Die Lagrange–Funktion (2.15) geht über in

$$L = \lim_{a\to 0} \sum_{i=1}^{N-1} a\,\mathcal{L}_i \equiv \int_0^\ell \mathrm{d}x\;\mathcal{L} \; , \tag{2.17}$$

wobei ℓ die Gesamtlänge des Stabes ist (wie oben erwähnt, ist diese nicht konstant, da die Federschwingungen zur Elongation bzw. Kompression des Systems führen) und

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \tag{2.18}$$

die sog. **Lagrange–Dichte**. Die Bewegungsgleichung (2.16) nimmt die Form

$$0 = \mu\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{2.19}$$

an. Diese Gleichung ist vom Typ der aus der Vorlesung "Theoretische Physik III: Elektrodynamik" bekannten **Wellengleichung**. Allerdings tritt hier nur eine Raumdimension auf (nämlich die entlang des Stabes). Dementsprechend beschreibt Gl. (2.19) die **eindimensionale**, d.h. **longitudinale** Ausbreitung von **Schallwellen** entlang des Stabes. Dividieren wir Gl. (2.19) durch κ, so können wir in Analogie zur Lichtgeschwindigkeit in der Wellengleichung für elektromagnetische Felder die **Schallgeschwindigkeit** ablesen,

$$c_S \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \; . \tag{2.20}$$

Diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf ein dreidimensionales System verallgemeinern. Gleichung (2.17) lautet dann

$$L \equiv \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathcal{L}\ , \tag{2.21}$$

wobei V das Volumen des betrachteten Systems ist. Anhand von Gl. (2.18) sehen wir, dass die **Lagrange–Dichte** $\mathcal{L}$ nicht nur eine Funktion von $\partial\varphi/\partial t$ ist, sondern auch von den räumlichen Ableitungen $\partial\varphi/\partial x$. In drei Dimensionen treten dann i.a. auch partielle Ableitungen nach y und z auf. Desweiteren kann die Lagrange–Dichte auch vom Feld φ selbst und (explizit) von Zeit und Ort abhängen. I.a. treten also folgende funktionale Abhängigkeiten auf:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi(t,\vec{x}), \frac{\partial\varphi(t,\vec{x})}{\partial t}, \vec{\nabla}\varphi(t,\vec{x}); t, \vec{x}\right) \equiv \mathcal{L}\left(\varphi(X), \partial_\mu\varphi(X); X\right)\ , \tag{2.22}$$

wobei wir der Zweckmäßigkeit halber die relativistisch kovariante Notation benutzt haben, um die einzelnen Abhängigkeiten auszudrücken.

Man beachte, dass im Vergleich zur Lagrange–Funktion $L(q,\dot{q};t)$ in der Lagrange–**Dichte** das Feld φ die Rolle der generalisierten Koordinate q übernimmt, seine Ableitungen $\partial_\mu\varphi$ die der generalisierten Geschwindigkeit $\dot{q}$, und dass die explizite Abhängigkeit von der Zeit t um eine von Zeit t **und** Ort $\vec{x}$ erweitert wird. Die Ortsvariable hat nicht länger die Bedeutung der Koordinate eines Teilchens, sondern sie ist lediglich ein **kontinuierlicher** Index, ähnlich wie der Index i, wenn wir mehr als eine generalisierte Koordinate betrachten, $q \to q_i$. In der Lagrange–Funktion waren $q, \dot{q}$ unabhängige **Freiheitsgrade** des Systems. In der Lagrange–Dichte sind die Freiheitsgrade des Systems das Feld φ und seine Ableitungen $\partial_\mu\varphi$. Da diese Funktionen an **jedem** Punkt X der Raum-Zeit unterschiedliche und (prinzipiell) voneinander unabhängige Werte annehmen können, stellt dies ein System mit **unendlich vielen** Freiheitsgraden dar.

Für kontinuierliche Systeme spielt die Lagrange–Dichte dieselbe Rolle wie die Lagrange–Funktion für diskrete Systeme. Daher muss es prinzipiell möglich sein, die Bewegungsgleichung (z.B. Gl. (2.19) für das Beispiel im vorangegangenen Abschnitt) für das Feld $\varphi(t,\vec{r})$ aus der Lagrange–Dichte selbst abzuleiten. Dies werden wir im folgenden erläutern.

Mit Gl. (2.21) ist die Wirkung definiert als

$$S[\varphi(X)] = \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathcal{L} \equiv \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}\left(\varphi(X), \partial_\mu\varphi(X); X\right)\ , \tag{2.23}$$

wobei die Integration über ein **Raum-Zeit-Volumen** $V_4 \equiv [t_a, t_e] \times V$ erfolgt. Prinzipiell sollten die Bewegungsgleichungen aus dem **Hamiltonschen Prinzip** folgen, welches mit Gl. (2.22) lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S[\varphi(X)] = S[\varphi(X) + \delta\varphi(X)] - S[\varphi(X)] \qquad (2.24)\\ &= \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\ \left[\mathcal{L}\left(\varphi(X) + \delta\varphi(X), \partial_\mu\varphi(X) + \delta(\partial_\mu\varphi(X)); X\right) - \mathcal{L}\left(\varphi(X), \partial_\mu\varphi(X); X\right)\right]\ . \end{aligned}$$

Ganz ähnlich wie die Trajektorie $q(t)$, die am Anfangs- und Endzeitpunkt nicht variiert wird, wird auch das Feld $\varphi(X)$ auf der **Oberfläche** ∂V_4 des Raum-Zeit-Volumens V_4

nicht variiert,

$$\delta\varphi(X)\,|_{X\,\in\,\partial V_4} = 0\ . \tag{2.25}$$

Diese Einschränkung gilt aber nicht für die partiellen Ableitungen $\partial_\mu\varphi$ des Feldes, ganz ähnlich wie auch die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{q}$ bei t_a und t_e nicht festgehalten werden darf (oder auch wie der generalisierte Impuls p im modifizierten Hamiltonschen Prinzip bei t_a und t_e mitvariiert werden muss, vgl. Vorlesung "Theoretische Physik II").

Unter der Annahme infinitesimaler Feldvariationen, $|\delta\varphi(X)| \ll |\varphi(X)|$, können wir die Taylorentwicklung des ersten Terms unter dem Integral in Gl. (2.24) nach der Ordnung $O(\delta\varphi, \delta\partial_\mu\varphi)$ abbrechen und erhalten

$$0 = \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\,\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)}\,\delta\left(\partial_\mu\varphi\right)\right]\ . \tag{2.26}$$

Es gilt ferner

$$\delta(\partial_\mu\varphi) \equiv \partial_\mu(\varphi + \delta\varphi) - \partial_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\delta\varphi\ . \tag{2.27}$$

Der zweite Term in Gl. (2.26) kann folgendermaßen umgeschrieben werden,

$$0 = \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\delta\varphi + \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,\delta\varphi\right]\ . \tag{2.28}$$

Das zweite Integral läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes in vier Dimensionen in ein Integral über die geschlossene Oberfläche ∂V_4 des Raum-Zeit-Volumens V_4 umwandeln,

$$\int_{V_4} \mathrm{d}^4X\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,\delta\varphi\right] = \oint_{\partial V_4} \mathrm{d}\sigma_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,\delta\varphi \equiv 0\ , \tag{2.29}$$

da $\delta\varphi$ auf ∂V_4 verschwindet, s. Gl. (2.25). Da die Variation $\delta\varphi(X)$ des Feldes an jedem Raum-Zeit-Punkt X beliebig ist, muss der Term in eckigen Klammern im ersten Integral in Gl. (2.28) verschwinden,

$$0 = \partial_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\ . \tag{2.30}$$

Dies ist die **Euler–Lagrange–Gleichung** für kontinuierliche Systeme, d.h. für das Feld φ, welches die (unendlich vielen) Freiheitsgrade eines solchen kontinuierlichen Systems darstellt. Sie ist eine **klassische** Bewegungsgleichung für das Feld φ und bestimmt daher ausschließlich die **klassische Feldkonfiguration**. Gemäß dem Hamiltonschen Prinzip (2.24) extremalisiert (i.a. minimalisiert) diese die Wirkung. Wir werden in Kapitel 5 sehen, dass in der **Quantenfeldtheorie** auch alle anderen möglichen Feldkonfigurationen auftreten und mit einem bestimmten Gewichtsfaktor (nämlich $\exp\{iS[\varphi(X)]/\hbar\}$) zu physikalischen Observablen beitragen.

Wir überzeugen uns nun noch davon, dass Gl. (2.30) die richtige Bewegungsgleichung für das Feld φ darstellt, indem wir sie auf das Beispiel des elastischen Stabes anwenden, also die Bewegungsgleichung (2.30) mit der Lagrange–Dichte (2.18) berechnen und zeigen, dass wir daraus die Bewegungsgleichung (2.19) erhalten.

Die Lagrange–Dichte (2.18) enthält nur Ableitungen des Feldes, also ist $\partial\mathcal{L}/\partial\varphi \equiv 0$. Die Ableitung von $\mathcal{L}$ nach der partiellen Ableitung des Feldes nach der Zeit ergibt

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} = \mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\ ,$$

und die Ableitung nach der partiellen Ableitung des Feldes nach der Raumkoordinate x ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ .$$

Da es sich um ein eindimensionales Problem handelt, treten keine Abhängigkeiten oder Ableitungen nach y oder z auf. Eingesetzt in die Euler–Lagrange–Gleichung (2.30) erhalten wir

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \equiv \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \ ,$$

was mit der vormals abgeleiteten Bewegungsgleichung (2.19) übereinstimmt.

Falls wir ein System betrachten, in dem nicht nur ein einziges, sondern **mehrere** Felder auftreten, so tragen diese einen weiteren Index,

$$\varphi_a(X) \ , \quad a = 1, 2, \ldots \ .$$

Dann erfüllt **jedes** dieser Felder eine Euler–Lagrange–Gleichung vom Typ (2.30),

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \varphi_a\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \ , \quad a = 1, 2, \ldots \ . \tag{2.31}$$

11.11.2020

2.2 Das neutrale skalare Feld

Skalare Felder beschreiben in der Quantenfeldtheorie Teilchen, die **keinen Spin haben** ($J = 0$) und keine Ladung tragen, also **neutral** sind. Solche Felder werden durch die **Klein–Gordon–Lagrange–Dichte**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right) \tag{2.32}$$

beschrieben. Dabei ist m die **Masse** der skalaren, neutralen Teilchen und das Feld **reellwertig**, $\phi(X) \in \mathbb{R}$. Die Euler–Lagrange–Gleichung (2.30) liefert für die Lagrange–Dichte (2.32)

$$0 = \partial_\mu \left(\partial^\mu \phi\right) - \left(-m^2 \phi\right) \equiv \left(\Box + m^2\right) \phi \ . \tag{2.33}$$

Dies ist die **Klein–Gordon–Gleichung** (vgl. Kap. 1.1. der Vorlesung "Quantenmechanik II").

2.3 Das Noether–Theorem

Wir betrachten die Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten X^μ und des Feldes $\phi(X)$ unter einer **kontinuierlich verbundenen** Symmetrie-Gruppe. Es ist dann ausreichend, **infinitesimale** Transformationen zu betrachten, da für kontinuierlich verbundene Gruppen eine beliebige Transformation durch eine (unendliche) Folge von infinitesimalen Transformationen ausgedrückt werden kann (s. dazu Kap. 2.2 der Vorlesung "Quantenmechanik II"). Wir haben also für die Transformation von X^μ

$$X^\mu \longrightarrow X'^\mu = X^\mu + \delta X^\mu \ , \tag{2.34}$$

wobei

$$\delta X^\mu = \Lambda_i^\mu(X)\,\delta\omega^i \ . \tag{2.35}$$

Hierbei ist $\Lambda_i^\mu(X)$ eine Funktion, die von den **Generatoren** der jeweiligen Symmetrie-Gruppe und (ggfs.) von der Raum-Zeit-Koordinate abhängt, und $\delta\omega^i$ entsprechen den (infinitesimalen) **Parametern** der Transformation (vgl. Kap. 2.2 der Vorlesung "Quantenmechanik II"). Wir betrachten hier sog. **globale** Transformationen, d.h. die Parameter sind **unabhängig** von der Raum-Zeit-Koordinate X^μ. Man beachte, dass der Index i auch ein Lorentz-Index sein kann,

$$\delta X^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}\,\delta\omega^\nu \ . \tag{2.36}$$

Für $\Lambda^\mu_{\ \nu} = g^\mu_{\ \nu}$ entspräche dies einer **Raum-Zeit-Translation** der Koordinate X^μ um $\delta\omega^\mu$,

$$X'^\mu = X^\mu + g^\mu_{\ \nu}\,\delta\omega^\nu = X^\mu + \delta\omega^\mu \ . \tag{2.37}$$

Der Index i kann auch eine Kombination von mehreren Lorentz-Indizes sein, $i \equiv \nu\lambda\cdots$. Üblicherweise gehört er aber zu einer **internen** Symmetrie-Gruppe, er numeriert die Generatoren bzw. Parameter der Gruppe.

Für die Transformation des Feldes $\phi(X)$ schreiben wir zunächst formal

$$\begin{aligned}\phi(X) \quad\longrightarrow\quad \phi'(X') &= \phi'(X') - \phi(X') + \phi(X') - \phi(X) + \phi(X) \\ &\equiv \phi(X) + \delta\phi(X') + [\partial_\mu\phi(X)]\,\delta X^\mu + O(\delta X^2) \ ,\end{aligned} \tag{2.38}$$

wobei wir die Änderung des Feldes bei festgehaltener Koordinate,

$$\delta\phi(X') \equiv \phi'(X') - \phi(X') \ , \tag{2.39}$$

definiert und die Taylor–Entwicklung

$$\phi(X') = \phi(X) + [\partial_\mu\phi(X)]\,\delta X^\mu + O(\delta X^2) \tag{2.40}$$

benutzt haben. Da δX^μ infinitesimal ist, können Terme von quadratischer (und höherer) Ordnung im folgenden vernachlässigt werden. Wir entwickeln desweiteren $\delta\phi(X')$ nach Taylor um X^μ,

$$\delta\phi(X') = \delta\phi(X) + [\partial_\mu\delta\phi(X)]\,\delta X^\mu + O(\delta X^2\delta\phi) \ . \tag{2.41}$$

Schon der zweite Term ist quadratisch klein in infinitesimalen Größen (wenn wir annehmen, dass der 4–Gradient von $\delta\phi(X)$ von derselben Größenordnung ist wie $\delta\phi(X)$) und kann vernachlässigt werden. Setzen wir alles in Gl. (2.38) ein, so erhalten wir für die Transformation des Feldes

$$\phi(X) \longrightarrow \phi'(X') = \phi(X) + \delta\phi(X) + [\partial_\mu\phi(X)]\,\delta X^\mu \equiv \phi(X) + \Delta\phi(X) \ , \tag{2.42}$$

wobei

$$\Delta\phi(X) \equiv \delta\phi(X) + [\partial_\mu\phi(X)]\,\delta X^\mu \equiv \Omega_i(X)\,\delta\omega^i \ . \tag{2.43}$$

Man beachte, dass die Symmetrie-Transformation eindeutig durch Angabe der Größen $\Lambda_i^\mu(X)$ und $\Omega_i(X)$ festgelegt ist.

Wir betrachten nun die Änderung der Wirkung unter der infinitesimalen Transformation,

$$\delta S[\phi(X)] \equiv S[\phi'(X')] - S[\phi(X)] = \int_{V_4'} \mathrm{d}^4X'\, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\lambda \phi'; X') - \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\lambda \phi; X) \ , \tag{2.44}$$

und addieren eine Null,

$$\begin{aligned} \delta S[\phi(X)] &= \int_{V_4'} \mathrm{d}^4X' \left[\mathcal{L}(\phi', \partial'_\lambda \phi'; X') - \mathcal{L}(\phi, \partial'_\lambda \phi; X')\right] \\ &+ \int_{V_4'} \mathrm{d}^4X' \mathcal{L}(\phi, \partial'_\lambda \phi; X') - \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\lambda \phi; X) \ . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Im ersten Term ändern sich lediglich die Felder, die Raum-Zeit-Koordinaten bleiben unverändert. Wir können also eine Taylor–Entwicklung um $\phi(X')$, also nach der in Gl. (2.40) definierten Größe und ihren Ableitungen durchführen,

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\lambda \phi'; X') - \mathcal{L}(\phi, \partial'_\lambda \phi; X') \simeq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\, \delta\phi(X') + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial'_\mu \phi)}\, \partial'_\mu \delta\phi(X') \ , \tag{2.46}$$

wobei wir wieder höhere Ordnungen infinitesimal kleiner Größen vernachlässigt haben. Aber auch dieser Ausdruck ist bereits infinitesimal klein. Wir können daher auch die Raum-Zeit-Koordinate X'^μ durch X^μ ersetzen; der Fehler ist wieder quadratisch in infinitesimalen Größen. Desweiteren können wir bis zur führenden Ordnung in infinitesimalen Größen auch das Integrationsmaß und die Integrationsgrenzen im ersten Term in Gl. (2.45) durch die untransformierten Koordinaten ersetzen; wieder ist der dabei auftretende Fehler quadratisch in infinitesimalen Größen. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \delta S[\phi(X)] &= \int_{V_4} \mathrm{d}^4X \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\, \delta\phi(X) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \partial_\mu \delta\phi(X)\right] \\ &+ \int_{V_4} \mathrm{d}^4X \left|\frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu}\right| \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\lambda \phi; X) + (\partial_\mu \mathcal{L})\, \delta X^\mu\right] - \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\lambda \phi; X) \ . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Hierbei haben wir im zweiten Term in Gl. (2.45) eine Variablensubstitution $X'^\mu \to X^\mu$ vorgenommen, was das Integrationsmaß um die Jacobi-Determinante $|\partial X'^\mu / \partial X^\nu|$ ändert. Außerdem wurde die Lagrange–Dichte $\mathcal{L}(\phi, \partial'_\lambda \phi; X')$ nach Taylor um X^μ bis zur linearen Ordnung in δX^μ entwickelt.

Die Jacobi–Determinante berechnen wir mit Hilfe von Gl. (2.34),

$$\frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} = g^\mu_{\ \nu} + \partial_\nu \delta X^\mu \ , \tag{2.48}$$

und erhalten mit der bekannten Relation $\ln \det A \equiv \mathrm{Tr} \ln A$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu}\right| &= \det\left(g^\mu_{\ \nu} + \partial_\nu \delta X^\mu\right) = \exp\left[\ln \det\left(g^\mu_{\ \nu} + \partial_\nu \delta X^\mu\right)\right] \\ &= \exp\left[\mathrm{Tr} \ln\left(g^\mu_{\ \nu} + \partial_\nu \delta X^\mu\right)\right] \simeq \exp\left[\mathrm{Tr}\left(\partial_\nu \delta X^\mu\right)\right] \\ &\simeq 1 + \partial_\nu \delta X^\nu \ , \end{aligned} \tag{2.49}$$

wobei wir den Logarithmus im Exponenten in erster Ordnung in δX^μ entwickelt haben (nach der für Zahlen wie Matrizen gültigen Reihenentwicklung der Logarithmus-Funktion $\ln(\mathbb{1}+A) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A^n/n$), sodann die Spur über die Lorentz-Indizes genommen haben, $\mathrm{Tr}\,(\partial_\nu \delta X^\mu) \equiv \partial_\nu \delta X^\nu$, und letztlich auch noch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion bis zur ersten Ordnung in infinitesimal kleinen Größen angewendet haben. Eingesetzt in Gl. (2.47) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta S[\phi(X)] &= \int_{V_4} \mathrm{d}^4X \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi(X) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\partial_\mu \delta\phi(X) \right. \\
&\qquad \left. + (1+\partial_\nu \delta X^\nu)\left[\mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X) + (\partial_\mu \mathcal{L})\,\delta X^\mu\right] - \mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X)\right\} \\
&= \int_{V_4} \mathrm{d}^4X \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi(X) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\partial_\mu \delta\phi(X) + \partial_\mu\left[\mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X)\delta X^\mu\right]\right\}, \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

wobei wir beim Ausmultiplizieren der Klammern im dritten Term nach dem ersten Gleichheitszeichen quadratisch infinitesimale Terme vernachlässigt und die Produktregel angewendet haben,

$$(\partial_\nu \delta X^\nu)\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X) + (\partial_\mu \mathcal{L})\,\delta X^\mu \equiv \partial_\mu\left[\mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X)\delta X^\mu\right] .$$

Mit Hilfe der Produktregel,

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi(X)\right] = \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi(X) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\mu\delta\phi(X) ,$$

schreiben wir nun den zweiten Term in Gl. (2.50) um,

$$\begin{aligned}
\delta S[\phi(X)] &= \int_{V_4} \mathrm{d}^4X \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi(X) \\
&\quad + \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\,\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi(X) + \mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X)\delta X^\mu\right] . \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, solange wir Feldkonfigurationen $\phi(X)$ betrachten, die die Euler–Lagrange–Gleichungen (2.30) erfüllen. Im zweiten Term können wir noch Gl. (2.42) verwenden (wobei wir die Summationsindizes geeignet umbenennen, damit keine Doppelverwendung auftritt), so dass folgt

$$\delta S[\phi(X)] = \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\,\partial_\mu\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\Delta\phi(X) - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\nu\phi(X) - \mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X)g^\mu_{\ \nu}\right]\delta X^\nu\right\} . \qquad (2.52)$$

Die Größe in eckigen Klammern ist der sog. **Energie-Impuls-Tensor**

$$\Theta^\mu_{\ \nu}(X) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\nu\phi(X) - \mathcal{L}(\phi,\partial_\lambda\phi;X)g^\mu_{\ \nu} . \qquad (2.53)$$

Er hat folgende Struktur:

$$(\Theta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \Theta^{00} & \Theta^{0x} & \Theta^{0y} & \Theta^{0z} \\ \Theta^{x0} & \Theta^{xx} & \Theta^{xy} & \Theta^{xz} \\ \Theta^{y0} & \Theta^{yx} & \Theta^{yy} & \Theta^{yz} \\ \Theta^{z0} & \Theta^{zx} & \Theta^{zy} & \Theta^{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{P}^x & \mathcal{P}^y & \mathcal{P}^z \\ \mathcal{P}^x & & & \\ \mathcal{P}^y & & (\Theta^{ij}) & \\ \mathcal{P}^z & & & \end{pmatrix} . \qquad (2.54)$$

Die (00)–Komponente ist die **Energie-** oder **Hamilton–Dichte**, $\Theta^{00} \equiv \mathcal{H}$. Aus der Definition (2.53) ist es nicht offensichtlich, dass der Energie-Impuls-Tensor ein symmetrischer Tensor ist. Wie in Übungsaufgabe H3.1 zu zeigen ist, ist es jedoch immer möglich, einen physikalisch äquivalenten, symmetrischen Energie-Impuls-Tensor zu konstruieren (s. auch Übungsaufgabe H7). Wir nehmen daher o.B.d.A. an, dass $\Theta^{\mu\nu} \equiv \Theta^{\nu\mu}$. Dann entsprechen die $(0i)$– bzw. $(i0)$–Komponenten des Energie-Impuls-Tensors den Komponenten der **Impulsdichte**, $\Theta^{0i} \equiv \Theta^{i0} \equiv \mathcal{P}^i$, $i = x, y, z$. Letztlich bilden die räumlichen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors den sog. **Spannungstensor** (Θ^{ij}).

Mit dem Energie-Impuls-Tensor (2.53) erhalten wir für die Änderung (2.52) der Wirkung unter der Transformation (2.42) des Feldes $\phi(X)$ und der Transformation (2.34) der Koordinaten X^μ

$$\begin{aligned} \delta S[\phi(X)] &= \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \Delta\phi(X) - \Theta^\mu{}_\nu(X)\, \delta X^\nu \right] \\ &= \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \Omega_i(X) - \Theta^\mu{}_\nu(X)\, \Lambda^\nu_i(X) \right] \delta\omega^i \,, \end{aligned} \tag{2.55}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Transformation des Feldes und der Koordinaten durch die Glgen. (2.43) und (2.35) ausgedrückt haben (für globale Transformationen kann man die konstanten Parameter $\delta\omega^i$ ausklammern). Falls die Transformationen (2.42) des Feldes und (2.34) der Koordinaten **Symmetrie-Transformationen** sind, d.h. wenn sie die Wirkung invariant lassen, dann muss die linke Seite von Gl. (2.55) verschwinden,

$$0 = \delta S[\phi(X)] \,, \tag{2.56}$$

bzw., da die Parameter $\delta\omega^i$ der Transformation beliebig sind,

$$0 = \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \Omega_i(X) - \Theta^\mu{}_\nu(X)\, \Lambda^\nu_i(X) \right] \,. \tag{2.57}$$

Da aber auch das 4–Volumen beliebig wählbar ist, muss der Integrand verschwinden,

$$0 = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \Omega_i(X) - \Theta^\mu{}_\nu(X)\, \Lambda^\nu_i(X) \right] \equiv \partial_\mu \mathcal{J}^\mu_i(X) \,. \tag{2.58}$$

Diese Gleichung hat die Form einer **Kontinuitätsgleichung** für die 4–Stromdichte

$$\mathcal{J}^\mu_i(X) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \Omega_i(X) - \Theta^\mu{}_\nu(X)\, \Lambda^\nu_i(X) \,, \tag{2.59}$$

die sog. **Noether–Stromdichte**. Man vergleiche diese Kontinuitätsgleichung mit der für die elektrische Ladungsstromdichte in der Elektrodynamik, Gl. (1.84) der Vorlesung "Elektrodynamik".

Genau wie in der Elektrodynamik die Kontinuitätsgleichung für die Ladungsstromdichte impliziert, dass die elektrische Ladung eine Erhaltungsgröße darstellt, läßt sich im Fall der Noether–Stromdichte ebenfalls eine **erhaltene Ladung**, die sog. **Noether–Ladung**,

finden. Um dies zu sehen, schreiben wir das Integral in Gl. (2.57) über das Raum-Zeit-Volumen V_4 mit Hilfe des verallgemeinerten Gaußschen Satzes in ein Integral über die (geschlossene) Oberfläche ∂V_4 von V_4 um,

$$0 = \int_{V_4} \mathrm{d}^4X\, \partial_\mu \mathcal{J}_i^\mu = \oint_{\partial V_4} \mathrm{d}\sigma_\mu\, \mathcal{J}_i^\mu \,. \tag{2.60}$$

Hierbei ist $\mathrm{d}\sigma_\mu$ der (infinitesimale) **4–Normalenvektor** auf der Oberfläche ∂V_4. Wir vereinbaren, dass er **aus** dem Volumen V_4 heraus zeigen soll. Nun wählen wir das Volumen wie in Abb. 2.3 gezeigt.

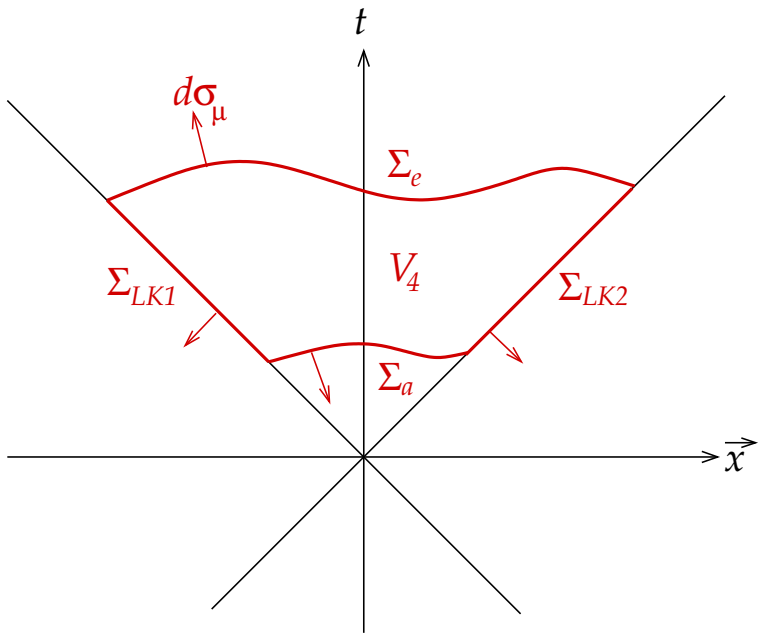


Abbildung 2.3: Das 4–Volumen V_4.

Die Oberfläche ∂V_4 besteht demnach aus vier Teilen, zwei Stücken Σ_a und Σ_e, auf denen der Normalenvektor $\mathrm{d}\sigma_\mu$ **zeitartig** ist, $\mathrm{d}\sigma_\mu \mathrm{d}\sigma^\mu > 0$, und zwei Stücken Σ_{LK1} und Σ_{LK2} entlang des Lichtkegels. Da durch den Lichtkegel keine Ladung fließen kann (dies würde superluminalem, und daher akausalem Transport der zu $\mathcal{J}_i^\mu$ gehörenden Noether–Ladung entsprechen), verschwindet der Beitrag von Σ_{LK1} und Σ_{LK2} zum Oberflächenintegral (2.60). Wir erhalten dann

$$0 = \int_{\Sigma_a} \mathrm{d}\sigma_\mu\, \mathcal{J}_i^\mu + \int_{\Sigma_e} \mathrm{d}\sigma_\mu\, \mathcal{J}_i^\mu \,. \tag{2.61}$$

Bislang zeigt der Normalenvektor auf Σ_a in die **negative** Zeitrichtung. Wenn wir sein Vorzeichen auf Σ_a umdrehen, $\mathrm{d}\sigma'_\mu \equiv -\mathrm{d}\sigma_\mu$, so dass er in die positive Zeitrichtung zeigt (wie auch der Normalenvektor auf Σ_e), so erhalten wir aus Gl. (2.61)

$$\int_{\Sigma_a} \mathrm{d}\sigma'_\mu\, \mathcal{J}_i^\mu = \int_{\Sigma_e} \mathrm{d}\sigma_\mu\, \mathcal{J}_i^\mu \,. \tag{2.62}$$

Die Situation ist in Abb. 2.4 verdeutlicht.

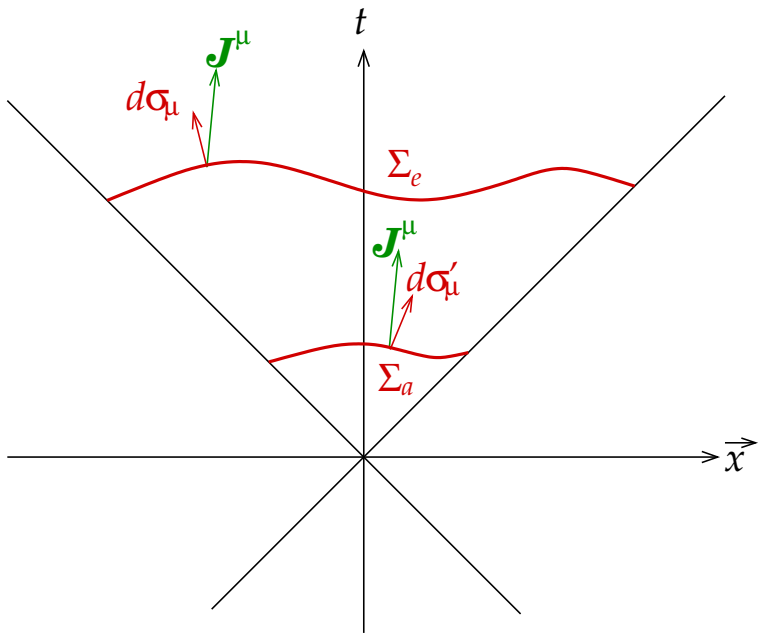


Abbildung 2.4: Der Fluß der Noether–Ladung durch die Flächen Σ_a und Σ_e.

Das 4–Skalarprodukt $\mathrm{d}\sigma_\mu\, \mathcal{J}_i^\mu$ stellt aber gerade den **Fluß** der Noether–Ladung durch ein infinitesimales Flächenelement $\mathrm{d}\Sigma$ (mit 4–Normalenvektor $\mathrm{d}\sigma_\mu$) dar. Dieser Fluß verschwindet, falls $\mathrm{d}\sigma_\mu$ und $\mathcal{J}_i^\mu$ **orthogonal** zueinander stehen, $\mathrm{d}\sigma_\mu\, \mathcal{J}_i^\mu = 0$, also wenn keine Ladung durch die Fläche dringen kann. Gleichung (2.62) besagt also, dass der Fluß der Noether–Ladung durch Σ_a **identisch** ist mit dem durch Σ_e. Die Noether–Ladung ist also eine **Erhaltungsgröße**. Da Σ_a und Σ_e beliebig wählbar sind, können wir sie auch als Flächen bei **konstanter Zeit** t_a bzw. t_e (bezogen auf das System von Abb. 2.4) wählen, vgl. Abb. 2.5.

Im allgemeinen wird eine 3-dimensionale Hyperfläche Σ durch einen 4–Vektor $\Sigma^\mu(\zeta, \eta, \phi)$ festgelegt, wobei (ζ, η, ϕ) drei Parameter sind, die die Position auf der Hyperfläche festlegen. Der infinitesimale 4–Normalenvektor auf der Fläche Σ ist dann definiert als

$$\mathrm{d}\sigma_\mu \equiv -\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial\Sigma^\alpha}{\partial\zeta} \frac{\partial\Sigma^\beta}{\partial\eta} \frac{\partial\Sigma^\gamma}{\partial\phi}\, \mathrm{d}\zeta\, \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\phi\ , \tag{2.63}$$

mit dem total antisymmetrischen Tensor vom Rang 4, wobei $\epsilon^{0123} = +1$. Der 4–Normalenvektor $\mathrm{d}\sigma_\mu$ zeigt offensichtlich entlang von Σ_e **immer** in die **Zeitrichtung**, hat also lediglich eine 0–Komponente. Wählen wir als Parameter der Hyperfläche die kartesischen Koordinaten, $(\zeta, \eta, \phi) \equiv (x, y, z)$, so ist $\partial\Sigma^\alpha/\partial x^i = g^\alpha{}_i$ und $\mathrm{d}\sigma_0$ entspricht einer Integration über die **räumlichen Koordinaten**, also über das 3–Volumen V_e des Systems bei der Zeit t_e,

$$\mathrm{d}\sigma_\mu = (\mathrm{d}^3\vec{x}, 0, 0, 0)\ . \tag{2.64}$$

Analoges gilt auch für $\mathrm{d}\sigma'_\mu$. Dann folgt aus Gl. (2.62)

$$\mathcal{Q}_i(t_a) \equiv \int_{V_a} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \mathcal{J}_i^0(t_a, \vec{x}) = \int_{V_e} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \mathcal{J}_i^0(t_e, \vec{x}) \equiv \mathcal{Q}_i(t_e) \equiv \mathcal{Q}_i = const.\ . \tag{2.65}$$

Da t_a und t_e ebenfalls beliebig wählbar sind, hängt $\mathcal{Q}_i$ in der Tat nicht von der Zeit ab, sondern ist für alle Zeiten konstant, also erhalten. In beiden Volumenintegralen kann man auch über ein beliebiges Volumen V integrieren, solange es V_a und V_e vollständig enthält. Voraussetzung ist allerdings, dass die Ladungsstromdichte $\mathcal{J}_i^\mu$ in den Bereichen, die nicht Teilmenge von V_a bzw. V_e sind, verschwindet. Dies ist z.B. dann gegeben, wenn $\mathcal{J}_i^\mu(t_a, \vec{x})$ außerhalb von V_a verschwindet. Da keine Ladung durch den Lichtkegel strömen kann, ist auch $\mathcal{J}^\mu(t_e, \vec{x})$ außerhalb von V_e null.

Die in Gl. (2.65) definierte Größe $\mathcal{Q}_i$ bezeichnet man als **Noether–Ladung**. Man beachte aber, dass man sie aufgrund der vorangegangenen Diskussion auch für beliebig in der Raum-Zeit orientierte Flächen (mit zeitartigem 4–Normalenvektor) definieren kann.

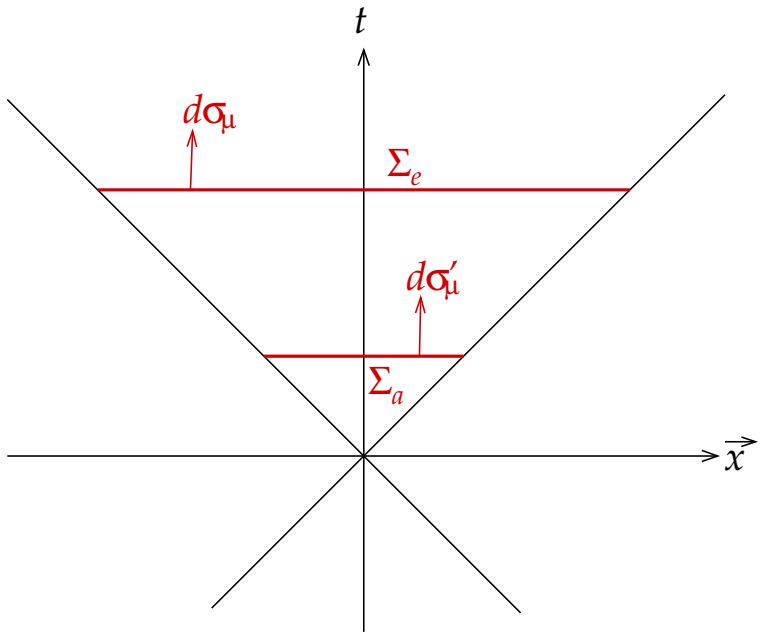


Abbildung 2.5: Σ_a und Σ_e als Flächen bei konstanter Zeit.

Beispiel: Wir betrachten **Raum-Zeit-Translationen** eines skalaren Feldes $\phi(X)$,

$$\Lambda^\mu_{\ \nu} = g^\mu_{\ \nu} \ , \quad \Omega_\nu = 0 \ . \tag{2.66}$$

Die erste Gleichung folgt aus der Diskussion nach Gl. (2.36). Die zweite folgt aus der Überlegung, dass sich skalare Felder nicht unter Raum-Zeit-Translationen transformieren, mit anderen Worten das transformierte Feld $\phi'(X')$ am transformierten Raum-Zeit-Punkt X' ist identisch mit dem ursprünglichen Feld $\phi(X)$ am ursprünglichen Ort X. Daher ist $\Delta\phi(X) = 0$, vgl. Gl. (2.42) und daher auch $\Omega_\nu = 0$, vgl. Gl. (2.43). Mit Gl. (2.59) folgt dann für die Noether–Stromdichte

$$\mathcal{J}^\mu_{\ \lambda} = -\Theta^\mu_{\ \nu} g^\nu_{\ \lambda} = -\Theta^\mu_{\ \lambda} \ . \tag{2.67}$$

Die erhaltene Stromdichte ist also (bis auf das Vorzeichen) identisch mit dem **Energie-Impuls-Tensor**! Entsprechend den Werten, die der Lorentz–Index λ annehmen kann,

gibt es vier erhaltene Noether–Ladungen:

$$\lambda = 0: \;\; \mathcal{Q}_0 = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \mathcal{J}_0^0 = -\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \Theta^{00} = -\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \mathcal{H} \equiv -H \quad \text{(Energie)}\ , \tag{2.68}$$
$$\lambda = i: \;\; \mathcal{Q}_i = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \mathcal{J}_i^0 = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \Theta^{0i} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \mathcal{P}^i \equiv P^i \quad (i\text{–Komponente des Impulses})\ .$$

(Hochziehen des Zeit-Index 0 ändert das Vorzeichen nicht, Hochziehen des Raum-Index i ergibt einen Vorzeichenwechsel.) **Symmetrie unter Raum-Zeit-Translationen** bedeutet also **Energie-Impuls-Erhaltung**!

Relativistische Quantenfeldtheorien werden in der Regel so konstruiert, dass sie **invariant** unter **Poincaré–Transformationen** sind. Die **Poincaré–Gruppe** besteht aus **Raum-Zeit-Translationen** und **Lorentz–Transformationen**, die wiederum in **Drehungen im Raum** und **Lorentz–Boosts** unterteilt werden, s. Abschnitt 2.6 der Vorlesung "Quantenmechanik II". Infinitesimale Poincaré–Transformationen der Raum-Zeit-Koordinaten lauten

$$X^\mu \longrightarrow X'^\mu = X^\mu + \delta X^\mu \quad \text{mit} \quad \delta X^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}\delta\omega^\nu + \Lambda^\mu_{\ \nu\rho}(X)\delta\omega^{\nu\rho}\ , \tag{2.69}$$

wobei der erste Term für Raum-Zeit-Translationen steht, mit $\Lambda^\mu_{\ \nu} = g^\mu_{\ \nu}$ (vgl. obiges Beispiel) und der zweite für Lorentz–Transformationen. Für letzteren gilt außerdem, dass die Parameter antisymmetrisch in den Lorentz–Indizes sind, $\delta\omega^{\nu\rho} = -\delta\omega^{\rho\nu}$, und dass

$$\Lambda^\mu_{\ \nu\rho}(X) = \frac{1}{2}\left(g^\mu_{\ \nu}X_\rho - g^\mu_{\ \rho}X_\nu\right)\ , \tag{2.70}$$

so dass

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= g^\mu_{\ \nu}\delta\omega^\nu + \frac{1}{2}\left(g^\mu_{\ \nu}X_\rho - g^\mu_{\ \rho}X_\nu\right)\delta\omega^{\nu\rho} \\ &= \delta\omega^\mu + \delta\omega^{\mu\nu}X_\nu\ , \end{aligned} \tag{2.71}$$

wobei wir die Antisymmetrie der Parameter $\delta\omega^{\nu\rho}$ ausgenutzt haben. In Abschnitt 2.6.2 der Vorlesung "Quantenmechanik II" wird gezeigt, dass infinitesimale Lorentz–Transformationen in der Tat mit dem zweiten Term in Gl. (2.71) übereinstimmen.

Wie transformiert sich nun die partielle Ableitung unter Poincaré–Transformationen? Es gilt

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial X'^\mu} = \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu}\frac{\partial}{\partial X^\nu} = \frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu}\partial_\nu\ . \tag{2.72}$$

Nun ist gemäß Glgen. (2.34) und (2.71)

$$X^\nu = X'^\nu - \delta X^\nu = X'^\nu - \delta\omega^\nu - \delta\omega^{\nu\rho}(X'_\rho - \delta X_\rho) \simeq X'^\nu - \delta\omega^\nu - \delta\omega^{\nu\rho}X'_\rho\ ,$$

wobei wir im letzten Schritt quadratisch infinitesimale Terme vernachlässigt haben. Also ist

$$\frac{\partial X^\nu}{\partial X'^\mu} = g^\nu_{\ \mu} - \delta\omega^{\nu\rho}g_{\rho\mu} = g^\nu_{\ \mu} - \delta\omega^\nu_{\ \mu} = g_\mu^{\ \nu} + \delta\omega_\mu^{\ \nu}\ , \tag{2.73}$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie des metrischen Tensors und die Antisymmetrie der Parameter $\delta\omega^{\nu\rho}$ ausgenutzt haben. Eingesetzt in Gl. (2.72) erhalten wir das Transformationsgesetz für die partielle Ableitung,

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial'_\mu = (g_\mu^{\ \nu} + \delta\omega_\mu^{\ \nu})\partial_\nu \ . \tag{2.74}$$

Skalare Felder $\phi(X)$ transformieren nicht unter Raum-Zeit-Translationen, wie wir oben schon erwähnt haben, und sie transformieren sich wie Skalare unter Lorentz–Transformationen. Insgesamt ergibt dies für das Transformationsverhalten unter Poincaré–Transformationen

$$\phi(X) \longrightarrow \phi'(X') = \phi(X) + \Delta\phi(X) \quad \text{mit} \quad \Delta\phi(X) = 0 \ . \tag{2.75}$$

Mit den Resultaten (2.74) und (2.75) können wir nun das Transformationsverhalten der Klein–Gordon–Lagrange–Dichte (2.32) unter Poincaré–Transformationen überprüfen,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right) \\
\longrightarrow \quad & \mathcal{L}' = \frac{1}{2}\left(\partial'_\mu\phi'\partial'^\mu\phi' - m^2\phi'^2\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu\phi + \delta\omega_\mu^{\ \alpha}\partial_\alpha\phi\right) g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\phi + \delta\omega_\nu^{\ \beta}\partial_\beta\phi\right) - m^2\phi^2\right] \\
& = \mathcal{L} + \delta\omega_\mu^{\ \nu}(\partial_\nu\phi)\partial^\mu\phi + O(\delta\omega^2) \\
& \equiv \mathcal{L} \ ,
\end{aligned} \tag{2.76}$$

wobei wir Terme von quadratischer Ordnung in infinitesimalen Größen vernachlässigt und die Antisymmetrie von $\delta\omega_\mu^{\ \nu}$ ausgenutzt haben. Die Klein–Gordon–Lagrange–Dichte ist also **Poincaré–invariant**, wie wir es für eine relativistische Quantenfeldtheorie erwarten.

Wir bemerken zum Abschluss, dass dann auch die Wirkung (2.23) Poincaré–invariant ist. Der Grund ist, dass sich das Integrationsmaß d^4X nicht ändert, denn die Jacobi–Determinante nimmt bei einer (infinitesimalen) Poincaré–Transformation, $X^\mu \to X'^\mu = X^\mu + \delta X^\mu$, den Wert eins an,

$$\left|\frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu}\right| = 1 + \partial_\mu\delta X^\mu = 1 + \partial_\mu\left(\delta\omega^\mu + \delta\omega^{\mu\nu}X_\nu\right) = 1 + \delta\omega^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 1 + \delta\omega^\mu{}_\mu \equiv 1 \ , \tag{2.77}$$

wobei wir die Glgen. (2.49) und (2.71), $\partial X_\nu/\partial X^\mu \equiv g_{\mu\nu}$, sowie die Antisymmetrie (und damit gleichzeitig Spurfreiheit) von $\delta\omega^{\mu\nu}$ benutzt haben.

2.4 Das geladene skalare Feld und Eichinvarianz

18.11.2020

Betrachten wir nun ein **komplexes** skalares Feld $\Phi(X) \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\Phi(X) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(X) + i\phi_2(X)\right] \ , \\
\Phi^*(X) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(X) - i\phi_2(X)\right] \ , \\
\phi_1(X) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi(X) + \Phi^*(X)\right] = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\Phi(X) \ , \\
\phi_2(X) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\Phi(X) - \Phi^*(X)\right] = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\Phi(X) \ ,
\end{aligned} \tag{2.78}$$

wobei $\phi_{1,2}(X) \in \mathbb{R}$. Daher wird jedes der beiden Felder ϕ_1 und ϕ_2 durch die Lagrange–Dichte (2.32) für neutrale skalare Felder beschrieben. Addieren wir die entsprechenden Lagrange–Dichten und setzen die Massen gleich, $m_1 = m_2 \equiv m$, so erhalten wir nach Einsetzen von Gl. (2.78)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m^2\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\,\partial_\mu\left(\Phi+\Phi^*\right)\partial^\mu\left(\Phi+\Phi^*\right) - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\left(\Phi-\Phi^*\right)\partial^\mu\left(\Phi-\Phi^*\right)\right. \\
&\qquad \left. - 2m^2\left[(\mathrm{Re}\Phi)^2 + (\mathrm{Im}\Phi)^2\right]\right\} \\
&= \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi\,. \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

Wie wir sehen werden, beschreibt diese Klein–Gordon–Lagrange–Dichte ein **geladenes** skalares Feld. Ein geladenes skalares Feld entspricht also zwei neutralen skalaren Feldern gleicher Masse. Es hat damit zwei unabhängige Freiheitsgrade.

Die Euler–Lagrange–Gleichungen für die Felder ϕ_1 und ϕ_2 sind durch die Klein–Gordon–Gleichung (2.33) gegeben,

$$\left(\Box + m^2\right)\phi_{1,2} = 0\,. \qquad (2.80)$$

Bilden wir Linearkombinationen dieser Gleichungen entsprechend Gl. (2.78), so erhalten wir

$$\left(\Box + m^2\right)\Phi = 0\,, \quad \left(\Box + m^2\right)\Phi^* = 0\,. \qquad (2.81)$$

Das geladene skalare Feld erfüllt also auch die Klein–Gordon–Gleichung. Man kann diese Gleichungen auch direkt aus der Lagrange–Dichte (2.79) erhalten, indem man Φ und Φ^* als unabhängige Felder betrachtet. Dann gilt gemäß den Euler–Lagrange–Gleichungen (2.31)

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*} = \partial_\mu\partial^\mu\Phi + m^2\Phi = \left(\Box + m^2\right)\Phi\,, \\
0 &= \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = \partial_\mu\partial^\mu\Phi^* + m^2\Phi^* = \left(\Box + m^2\right)\Phi^*\,, \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

was mit Gl. (2.81) übereinstimmt.

Die Poincaré–Invarianz der Lagrange–Dichte (2.79) folgt sofort aus der der Lagrange–Dichte (2.32). Die Lagrange–Dichte (2.79) hat jedoch eine **weitere** Symmetrie: wir multiplizieren das komplexe Feld Φ mit einem Phasenfaktor $e^{-i\Lambda}$, $\Lambda = const. \in \mathbb{R}$, d.h. wir führen eine sog. $U(1)$–**Transformation** des Feldes Φ durch,

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi\,, \quad \Phi^* \longrightarrow \Phi'^{\,*} = \Phi^* e^{i\Lambda}\,. \qquad (2.83)$$

Die Lagrange–Dichte (2.79) ist **invariant** unter dieser Transformation,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} = \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi \\
\longrightarrow\ & \mathcal{L}' = \partial_\mu\left(\Phi^* e^{i\Lambda}\right)\partial^\mu\left(e^{-i\Lambda}\Phi\right) - m^2\Phi^* e^{i\Lambda}e^{-i\Lambda}\Phi \\
& \quad = (\partial_\mu\Phi^*)e^{i\Lambda}e^{-i\Lambda}(\partial^\mu\Phi) - m^2\Phi^*\Phi \\
& \quad \equiv \mathcal{L}\,, \qquad (2.84)
\end{aligned}$$

weil die (konstanten) Phasenfaktoren aus der partiellen Ableitung herausgezogen werden können und sich dann gegenseitig wegheben. Man sagt, dass die Klein–Gordon–Lagrange–Dichte für das geladene skalare Feld eine **globale** $U(1)$–**Symmetrie** besitzt.

Wir bemerken, dass die $U(1)$–Transformation (2.83) für das Feld Φ einer $SO(2)$–Transformation im Raum der Felder (ϕ_1, ϕ_2) entspricht,

$$\begin{aligned}
\Phi' &= e^{-i\Lambda}\Phi = (\cos\Lambda - i\sin\Lambda)\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1\cos\Lambda + \phi_2\sin\Lambda + i\left(-\phi_1\sin\Lambda + \phi_2\cos\Lambda\right)\right] \\
\Longrightarrow \qquad \phi_1' &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\Phi' = \phi_1\cos\Lambda + \phi_2\sin\Lambda\ , \\
\phi_2' &= \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\Phi' = -\phi_1\sin\Lambda + \phi_2\cos\Lambda\ , \\
\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\Lambda & \sin\Lambda \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Dies entspricht einer **Drehung** der Felder in der (ϕ_1, ϕ_2)–Ebene um den Winkel Λ, also gerade einer $SO(2)$–Transformation.

Welches sind nun die aus dieser $U(1)$– bzw. $SO(2)$–Symmetrie folgende Noether–Stromdichte und Noether–Ladung? Dazu können wir direkt Gl. (2.59) anwenden, wir müssen nur die zu einer $U(1)$– bzw. $SO(2)$–Transformation gehörenden Größen $\Omega_i(X)$ und $\Lambda_i^\nu(X)$ bestimmen. Hierzu zunächst zwei Vorbemerkungen:

(i) Da es sich bei der $U(1)$– bzw. $SO(2)$–Transformation um eine Transformation im Raum der Felder (Φ, Φ^*) bzw. (ϕ_1, ϕ_2), also um eine **interne** Symmetrietransformation handelt, werden die Raum-Zeit-Koordinaten X^μ nicht transformiert, $\Lambda_i^\nu(X) \equiv 0$.

(ii) Für eine $U(1)$– bzw. $SO(2)$–Transformation gibt es lediglich einen einzigen Parameter, $\delta\omega^i \equiv \delta\Lambda$. Der Index i, der die Parameter der Symmetriegruppe durchnumeriert, ist also überflüssig. Es gibt nun aber zwei unabhängige Feld-Freiheitsgrade, Φ und Φ^*, bzw. ϕ_1 und ϕ_2. Also müssen wir Gl. (2.43) um einen Index für die Felder erweitern,

$$\Delta\phi_a(X) = \Omega_{a,i}(X)\delta\omega^i\ , \quad a = 1, 2, \ldots\ , \tag{2.86}$$

bzw. für den $U(1)$– oder $SO(2)$–Fall

$$\Delta\phi_a(X) = \Omega_a(X)\delta\Lambda\ , \quad a = 1, 2\ . \tag{2.87}$$

Es geht nun darum, die beiden $\Omega_a(X)$ zu bestimmen. Dazu genügt es, **infinitesimale** $U(1)$– bzw. $SO(2)$–Transformationen zu betrachten,

$$\begin{aligned}
e^{\mp i\delta\Lambda} &\simeq 1 \mp i\delta\Lambda\ , \quad |\delta\Lambda| \ll 1\ , \\
\text{bzw.} \quad \cos\delta\Lambda &\simeq 1\ , \quad \sin\delta\Lambda \simeq \delta\Lambda\ ,
\end{aligned}$$

also

$$
\begin{aligned}
\Phi &\longrightarrow \Phi' = \Phi - i\delta\Lambda\Phi \ , & \Phi^* &\longrightarrow \Phi'^* = \Phi^* + i\delta\Lambda\Phi^* \ , \\
\Longrightarrow \Delta\Phi &= -i\Phi\delta\Lambda \ , & \Delta\Phi^* &= i\Phi^*\delta\Lambda \ , \\
\Longrightarrow \Omega &= -i\Phi \ , & \Omega^* &= i\Phi^* \ , \\
\text{bzw. } \phi_1 &\longrightarrow \phi_1' = \phi_1 + \delta\Lambda\phi_2 \ , & \phi_2 &\longrightarrow \phi_2' = \phi_2 - \delta\Lambda\phi_1 \ , \\
\Longrightarrow \Delta\phi_1 &= \phi_2\delta\Lambda \ , & \Delta\phi_2 &= -\phi_1\delta\Lambda \ , \\
\Longrightarrow \Omega_1 &= \phi_2 \ , & \Omega_2 &= -\phi_1 \ .
\end{aligned} \tag{2.88}
$$

Hier haben wir Gl. (2.87) benutzt, um entweder Ω und Ω^* oder Ω_1 und Ω_2 abzulesen, je nachdem, ob man die $U(1)$– oder die $SO(2)$–Schreibweise der Felder bevorzugt. Nun wenden wir Gl. (2.59) an, wobei wir über die unabhängigen Feld-Freiheitsgrade summieren,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)}\,\Omega^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\,\Omega = i\left[\Phi^*\partial^\mu\Phi - (\partial^\mu\Phi^*)\Phi\right] \ , \\
\text{bzw. } \mathcal{J}^\mu &= \sum_{a=1,2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\,\Omega_a = (\partial^\mu\phi_1)\phi_2 - (\partial^\mu\phi_2)\phi_1 \ .
\end{aligned} \tag{2.89}
$$

Aus Abschnitt 1.1.5 der Vorlesung "Quantenmechanik II" wissen wir bereits, dass dies (abgesehen vom Faktor i und bis auf einen Faktor $\mathfrak{q}$, der Ladung des Teilchens) der **elektrischen Ladungsstromdichte** des Klein–Gordon–Feldes entspricht. Die zugehörige Noether–Ladung ist

$$
\mathcal{Q} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathcal{J}^0 = i\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,[\Phi^*\partial_t\Phi - (\partial_t\Phi^*)\Phi] = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,[(\partial_t\phi_1)\phi_2 - (\partial_t\phi_2)\phi_1] \ . \tag{2.90}
$$

Dies entspricht (bis auf Faktoren) der **elektrischen Ladung** des Klein–Gordon–Feldes. Man beachte, dass für **reelle** skalare Felder $\Phi^* = \Phi$, bzw. $\phi_2 = 0$, so dass sowohl die Noether–Stromdichte wie auch die Noether–Ladung verschwinden. **Reelle** skalare Felder sind daher **neutral**, wie wir es in der Diskussion bereits vorweggenommen haben.

Aber woher wissen wir im Gegenzug, dass **komplexe** skalare Felder **geladen** sind? Bislang tritt in den Glgen. (2.89) und (2.90) kein Faktor wie z.B. e, die Elementarladung (oder ein Vielfaches davon), auf, der mit der Ladung des Feldes identifiziert werden könnte. An dieser Stelle bemerken wir, dass unsere Felder immer noch **klassische** Objekte sind, d.h. noch nicht quantisiert wurden. Daher können im Prinzip auch keine gequantelten Größen, wie z.B. die Ladung in Einheiten von e, auftreten.

Desweiteren wissen wir aus den Maxwell–Gleichungen (s. Vorlesung "Elektrodynamik"), dass eine elektrische Ladung stets Quelle elektromagnetischer Felder ist und im Gegenzug von solchen beeinflusst wird. Um eine Ladung zu messen, müssen wir eine Testladung in das von ersterer erzeugte elektromagnetische Feld einbringen. Elektromagnetische Felder kommen aber in unserer Lagrange–Dichte (2.79) bislang überhaupt nicht vor. Um die Ladung des Klein–Gordon–Feldes zu "sehen", müssen wir die **Wechselwirkung** des Feldes mit dem **elektromagnetischen Feld** betrachten. Letzteres wird, wie in der Vorlesung "Elektrodynamik" diskutiert, in relativistisch kovarianter Form zweckmäßigerweise mit Hilfe des 4–Vektorpotentials A^μ beschrieben.

Im Prinzip erlaubt die Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld, Information über das Feld $\Phi(X)$ am Raum-Zeit-Punkt X zum Feld $\Phi(Y)$ an einem anderen Raum-Zeit-Punkt Y zu transportieren, s. Abb. 2.6. Dieser Informationsaustausch ist (zunächst) **kausal**, d.h. er findet **höchstens** mit Lichtgeschwindigkeit statt.

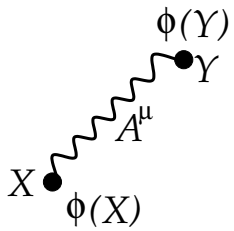


Abbildung 2.6: Graphische Veranschaulichung des Informationsaustausches über das Feld $\Phi(X)$ am Ort X zum Feld $\Phi(Y)$ am Ort Y mittels des elektromagnetischen Feldes A^μ.

Nehmen wir nun an, dass wir eine **globale** $U(1)$–Transformation (2.83) des Feldes Φ durchführen. Der Wert des Feldes ändert sich dann von Φ zu $\Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi$, und zwar **simultan an jedem** Raum-Zeit-Punkt, also auch an den beiden in Abb. 2.6 gezeigten Punkten X und Y. Im Prinzip sollte das Feld $\Phi(Y)$ bei Y jedoch nicht **simultan** die Phase in gleicher Weise wechseln wie das Feld $\Phi(X)$ bei X, denn es bedarf ja einer gewissen Zeit, Information von X nach Y zu übertragen, also z.B. auch Information über die stattgefundene $U(1)$–Transformation des Feldes bei X. Dies ist im Grunde genommen eine Forderung, die erfüllt sein muss, damit das Kausalitätsprinzip der Speziellen Relativitätstheorie gültig bleibt.

Dies impliziert, dass die $U(1)$–Transformation (2.83) **keine globale**, sondern eine **lokale** Transformation sein sollte,

$$\Phi(X) \longrightarrow \Phi'(X) = e^{-i\Lambda(X)}\Phi(X) \ , \quad \Phi^*(X) \longrightarrow \Phi'^*(X) = \Phi^*(X)e^{i\Lambda(X)} \ . \tag{2.91}$$

Dann ist die Lagrange–Dichte (2.79) aber nicht mehr $U(1)$–invariant. Der Massenterm ist es zwar nach wie vor,

$$-m^2\Phi^*\Phi \longrightarrow -m^2\Phi^* e^{i\Lambda}e^{-i\Lambda}\Phi = -m^2\Phi^*\Phi \ , \tag{2.92}$$

aber der Term mit den partiellen Ableitungen ist es nicht mehr, da

$$\partial_\mu\Phi \longrightarrow \partial_\mu\Phi' = \partial_\mu\left(e^{-i\Lambda}\Phi\right) = e^{-i\Lambda}\left(\partial_\mu\Phi - i\Phi\partial_\mu\Lambda\right) \ , \tag{2.93}$$

so dass

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi \longrightarrow \partial_\mu\Phi'^*\partial^\mu\Phi' &= \left(\partial_\mu\Phi^* + i\Phi^*\partial_\mu\Lambda\right)e^{i\Lambda}e^{-i\Lambda}\left(\partial^\mu\Phi - i\Phi\partial^\mu\Lambda\right) \\
&= \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi + i\left[\Phi^*\partial^\mu\Phi - \left(\partial^\mu\Phi^*\right)\Phi\right]\partial_\mu\Lambda + \left(\partial_\mu\Lambda\right)\left(\partial^\mu\Lambda\right)\Phi^*\Phi \ . \\
&= \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi + \mathcal{J}^\mu\partial_\mu\Lambda + |\Phi|^2\left(\partial_\mu\Lambda\right)\partial^\mu\Lambda \ ,
\end{aligned} \tag{2.94}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der Noether–Stromdichte (2.89) benutzt haben. Im folgenden bezeichnen wir die Lagrange–Dichte (2.79) mit $\mathcal{L}_0$. Mit den Glgen. (2.92) und (2.94) transformiert sich $\mathcal{L}_0$ also unter lokalen $U(1)$–Transformationen wie folgt,

$$\mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_0 \ , \quad \delta\mathcal{L}_0 = \mathcal{J}^\mu \partial_\mu \Lambda + |\Phi|^2 \left(\partial_\mu \Lambda\right) \partial^\mu \Lambda \ . \tag{2.95}$$

Nun koppeln wir den Noether–Strom (2.89) an das elektromagnetische Feld, und zwar mit der Stärke $-e$ (wir legen damit fest, dass die Quanten des geladenen Klein–Gordon–Feldes eine elektrische Ladung von der Größe einer negativen Elementarladung tragen), d.h. wir addieren zu $\mathcal{L}_0$ noch einen Term

$$\mathcal{L}_1 = -e\, \mathcal{J}^\mu A_\mu \ . \tag{2.96}$$

Aus Abschnitt 1.3 der Vorlesung "Elektrodynamik" wissen wir, dass wir das 4–Vektorpotential A^μ einer sog. **Eichtransformation** unterwerfen können, ohne dass dies die elektromagnetischen Feldstärken ändert. Wir **fordern** nun, dass sich, wenn das Feld Φ einer lokalen $U(1)$–Transformation (2.91) unterworfen wird, das elektromagnetische Feld A^μ wie folgt transformieren soll,

$$A^\mu(X) \longrightarrow A'^\mu(X) = A^\mu(X) + \frac{1}{e}\, \partial^\mu \Lambda(X) \ , \tag{2.97}$$

mit **derselben** Funktion $\Lambda(X)$, die auch in der Phase der $U(1)$–Transformation (2.91) auftritt. Dann transformiert sich $\mathcal{L}_1$ unter $U(1)$–Transformationen unter Benutzung der Glgen. (2.91), (2.93) und (2.97) wie folgt,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_1' &= -e\, \mathcal{J}'^\mu A_\mu' = -ie \left[\Phi'^* \partial^\mu \Phi' - \left(\partial^\mu \Phi'^*\right) \Phi'\right] A_\mu' \\
&= -ie \left[\Phi^* \left(\partial^\mu \Phi - i\Phi \partial^\mu \Lambda\right) - \left(\partial^\mu \Phi^* + i\Phi^* \partial^\mu \Lambda\right) \Phi\right] \left(A_\mu + \frac{1}{e}\, \partial_\mu \Lambda\right) \\
&= -e \left(\mathcal{J}^\mu + 2|\Phi|^2 \partial^\mu \Lambda\right) \left(A_\mu + \frac{1}{e}\, \partial_\mu \Lambda\right) \\
&= -e\, \mathcal{J}^\mu A_\mu - \mathcal{J}^\mu \partial_\mu \Lambda - 2e|\Phi|^2 A_\mu \partial^\mu \Lambda - 2|\Phi|^2 \left(\partial_\mu \Lambda\right) \partial^\mu \Lambda \\
&\equiv \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_1 \ ,
\end{aligned} \tag{2.98}$$

mit

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\mathcal{J}^\mu \partial_\mu \Lambda - 2e|\Phi|^2 A_\mu \partial^\mu \Lambda - 2|\Phi|^2 \left(\partial_\mu \Lambda\right) \partial^\mu \Lambda \ . \tag{2.99}$$

Das Transformationsverhalten von $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ ist damit

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_0' + \mathcal{L}_1' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 \ , \tag{2.100}$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 &= \mathcal{J}^\mu \partial_\mu \Lambda + |\Phi|^2 \left(\partial_\mu \Lambda\right) \partial^\mu \Lambda - \mathcal{J}^\mu \partial_\mu \Lambda - 2e|\Phi|^2 A_\mu \partial^\mu \Lambda - 2|\Phi|^2 \left(\partial_\mu \Lambda\right) \partial^\mu \Lambda \\
&= -2e|\Phi|^2 A_\mu \partial^\mu \Lambda - |\Phi|^2 \left(\partial_\mu \Lambda\right) \partial^\mu \Lambda \ .
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Offenbar heben sich nicht alle Terme gegenseitig weg, die Summe $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ ist also noch nicht $U(1)$–invariant. Betrachten wir jedoch einen weiteren Term,

$$\mathcal{L}_2 = e^2 |\Phi|^2 A_\mu A^\mu \ , \tag{2.102}$$

der sich unter $U(1)$–Transformationen wie folgt transformiert,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_2' &= e^2|\Phi'|^2 A'_\mu A'^\mu = e^2|\Phi|^2 \left(A_\mu + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\Lambda\right)\left(A^\mu + \frac{1}{e}\,\partial^\mu\Lambda\right) \\
&= e^2|\Phi|^2 A_\mu A^\mu + 2e|\Phi|^2 A_\mu \partial^\mu\Lambda + |\Phi|^2 \left(\partial_\mu\Lambda\right)\partial^\mu\Lambda \\
&\equiv \mathcal{L}_2 + \delta\mathcal{L}_2 \ , \qquad (2.103)
\end{aligned}$$

mit

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e|\Phi|^2 A_\mu \partial^\mu\Lambda + |\Phi|^2 \left(\partial_\mu\Lambda\right)\partial^\mu\Lambda \ . \qquad (2.104)$$

Dies sind offensichtlich genau die Terme, die man benötigt, um die Summe $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ $U(1)$–invariant zu machen, da

$$\delta\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0 \ . \qquad (2.105)$$

Die gesamte Lagrange–Dichte lautet also

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \\
&= \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi - e\,\mathcal{J}^\mu A_\mu + e^2|\Phi|^2 A_\mu A^\mu \\
&= \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi + \left(\partial^\mu\Phi^*\right) ieA_\mu\Phi - ieA_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - ieA_\mu\Phi^* ieA^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi \\
&= \left(\partial_\mu\Phi^* - ieA_\mu\Phi^*\right)\left(\partial^\mu\Phi + ieA^\mu\Phi\right) - m^2\Phi^*\Phi \\
&\equiv \left(D_\mu\Phi\right)^* D^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi \ , \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

wobei wir die sog. **kovariante Ableitung**

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \qquad (2.107)$$

definiert haben. Diese ist uns schon aus Abschnitt 1.1.4 der Vorlesung "Quantenmechanik II" bekannt. Die Bezeichnung "kovariant" bezieht sich hier nicht auf die Stellung des Lorentz-Index, sondern auf das Transformationsverhalten unter $U(1)$–Transformationen: die kovariante Ableitung des Feldes Φ transformiert sich wie das Feld selbst, und nicht wie die partielle Ableitung des Feldes, vgl. Gl. (2.93):

$$\begin{aligned}
D_\mu\Phi \quad \longrightarrow \quad D'_\mu\Phi' &= \left(\partial_\mu + ieA'_\mu\right) e^{-i\Lambda}\Phi \\
&= e^{-i\Lambda}\left[\partial_\mu\Phi - i\Phi\partial_\mu\Lambda + ieA_\mu\Phi + i\left(\partial_\mu\Lambda\right)\Phi\right] \\
&= e^{-i\Lambda} D_\mu\Phi \ . \qquad (2.108)
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die kovariante Ableitung des komplex konjugierten Feldes

$$\begin{aligned}
\left(D_\mu\Phi\right)^* \quad \longrightarrow \quad \left(D'_\mu\Phi'\right)^* &= \left(\partial_\mu - ieA'_\mu\right)\Phi^* e^{i\Lambda} \\
&= \left[\partial_\mu\Phi^* + i\Phi^*\partial_\mu\Lambda - ieA_\mu\Phi^* - i\left(\partial_\mu\Lambda\right)\Phi^*\right] e^{i\Lambda} \\
&= \left(D_\mu\Phi\right)^* e^{i\Lambda} \ . \qquad (2.109)
\end{aligned}$$

Das umgekehrte Vorzeichen vor der Ladung (welches durch das komplexe Konjugieren entsteht) deutet darauf hin, dass, wenn Φ ein Feld der Ladung $+e$ beschreibt, Φ^* ein Feld der Ladung $-e$ beschreibt. Komplexes Konjugieren für geladene skalare Felder ist identisch mit der **Ladungskonjugation**.

Lokale Symmetrietransformationen bezeichnet man auch als **Eichtransformationen**, und die Invarianz der Lagrange–Dichte (2.106) unter lokalen $U(1)$–Transformationen bezeichnet man als $U(1)$–**Eichinvarianz** oder $U(1)$–**Eichsymmetrie**.

Bislang ist A_μ ein **externes** Feld. Um es dynamisch zu machen, d.h. die Rückwirkung des geladenen skalaren Feldes auf das elektromagnetische Feld zu betrachten, müssen wir noch die Lagrange–Dichte des letzteren,

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{2.110}$$

vgl. Abschnitt 1.2.8 der Vorlesung "Elektrodynamik", zu $\mathcal{L}$ dazu addieren. Dies werden wir in Abschnitt 2.6 im Detail besprechen.

20.11.2020

2.5 Das Dirac–Feld

Dirac–Felder sind, wie aus Abschnitt 1.2 der Vorlesung "Quantenmechanik II" bekannt, 4–Spinoren und beschreiben Fermionen mit Spin 1/2. Die Lagrange–Dichte des Dirac–Feldes lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\partial\!\!\!/ - m \right) \psi \ . \tag{2.111}$$

Hier bezeichnet

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 \tag{2.112}$$

den **Dirac–adjungierten** Spinor und es wurde die "Dirac–Slash"–Notation

$$\partial\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \tag{2.113}$$

benutzt. Die Euler–Lagrange–Gleichungen (2.31), angewendet auf die Dirac–Lagrange–Dichte (2.111), müssen die Dirac–Gleichung ergeben. Um dies einzusehen, betrachtet man am besten ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Freiheitsgrade (so wie auch Φ und Φ^* im Falle des geladenen skalaren Feldes). Wir erhalten dann

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \left(i\partial\!\!\!/ - m \right) \psi = 0 \ , \tag{2.114}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\bar{\psi} m - \partial_\mu \bar{\psi} i \gamma^\mu = -\bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m \right) = 0 \ . \tag{2.115}$$

Der Pfeil über der partiellen Ableitung bedeutet hier, dass sie nach **links** auf den Dirac-adjungierten Spinor wirkt. Gleichung (2.114) ist, wie erwartet, die Dirac–Gleichung, vgl. Abschnitt 1.2.2 der Vorlesung "Quantenmechanik II". Gleichung (2.115) ist die Dirac–Gleichung für den Dirac-adjungierten Spinor. Sie folgt auch direkt aus der Dirac–Gleichung (2.114), wenn wir letztere hermitesch konjugieren und von rechts mit γ_0 multiplizieren,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(i\partial\!\!\!/ - m \right) \psi \right]^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \left(-i \overleftarrow{\partial_\mu} \gamma^{\mu\,\dagger} - m \right) \gamma_0 \\ &= \bar{\psi} \left(-i \overleftarrow{\partial_\mu} \gamma_0 \gamma^{\mu\,\dagger} \gamma_0 - m \right) = -\bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m \right) \ . \end{aligned} \tag{2.116}$$

Hier haben wir $\gamma_0\gamma_0 = \mathbb{1}_4$ und die Relation

$$\gamma_0 {\gamma^\mu}^\dagger \gamma_0 = \gamma^\mu \tag{2.117}$$

benutzt (die man leicht in der Dirac–Darstellung der Gamma-Matrizen beweist, in der $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$, $\gamma_i^\dagger = -\gamma_i$; man benötigt dann noch $\gamma_i\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_i$).

Die Dirac–Lagrange–Dichte (2.111) ist **Poincaré-invariant**. Für Raum-Zeit–Translationen sieht man das sofort, da die Raum-Zeit–Koordinate X^μ explizit lediglich in der partiellen Ableitung in der Dirac–Lagrange–Dichte auftritt. Ableitungen sind aber invariant unter einer (konstanten) Translation der Variablen, nach denen abgeleitet wird. Der Beweis der Invarianz unter Lorentz–Transformationen ist etwas komplizierter, weil man das Transformationsverhalten von Dirac–Spinoren unter Lorentz–Transformationen kennen muss. Es gilt (ohne Beweis)

$$\psi(X) \longrightarrow \psi'(X') = \exp\left[-\frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}(X)\right]\,\psi(X)\ , \tag{2.118}$$

wobei $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ und $\omega^{\mu\nu}(X) = -\omega^{\nu\mu}(X)$ die Parameter der Lorentz–Transformation sind. Eine Diskussion der Invarianz der Dirac–Lagrange–Dichte (2.111) unter Lorentz–Transformationen ist Gegenstand von Übungsaufgabe H6.1.

Zusätzlich zur Poincaré–Invarianz besitzt die Dirac–Lagrange–Dichte (2.111) aber noch eine weitere Symmetrie, eine **globale** $U(1)$**–Invarianz**. Unter einer globalen $U(1)$–Transformation der Spinoren,

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi' = e^{-i\Lambda}\psi\ , \\ \bar\psi &\longrightarrow \bar\psi' = \bar\psi e^{i\Lambda}\ , \end{aligned} \tag{2.119}$$

ändert sich die Dirac–Lagrange–Dichte (2.111) nicht,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \quad\longrightarrow\quad \mathcal{L}' &= \bar\psi'\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi' \\ &= \bar\psi e^{i\Lambda}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,e^{-i\Lambda}\psi = \bar\psi\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi \\ &= \mathcal{L}\ . \end{aligned} \tag{2.120}$$

Folglich gibt es eine Noether–Stromdichte und eine Noether–Ladung. Um diese zu bestimmen, gehen wir ähnlich vor wie in Abschnitt 2.4 beim geladenen skalaren Feld. Zunächst gibt es für $U(1)$–Transformationen wieder nur einen Parameter, aber wir haben zwei unabhängige Feldfreiheitsgrade, ψ und $\bar\psi$. (Als Dirac–Spinoren enthalten diese jeweils noch vier Komponenten, so dass man es eigentlich mit acht unabhängigen Feldfreiheitsgraden zu tun hat. Dies spielt aber in der nachfolgenden Betrachtung keine Rolle, da die einzelnen Spinorkomponenten unter der $U(1)$–Transformation nicht miteinander mischen.) Die zugehörigen $\Omega_a(X)$ bestimmen wir aus der infinitesimalen ($|\Lambda| \ll 1$) Version der $U(1)$–Transformation (2.119),

$$\begin{aligned} & \psi \longrightarrow \psi' = \psi - i\Lambda\psi\ , \quad \bar\psi \longrightarrow \bar\psi = \bar\psi + i\Lambda\bar\psi\ , \\ \Longrightarrow\quad & \Delta\psi = -i\psi\Lambda\ , \qquad \Delta\bar\psi = i\bar\psi\Lambda\ , \\ \Longrightarrow\quad & \Omega = -i\psi\ , \qquad \bar\Omega = i\bar\psi\ . \end{aligned} \tag{2.121}$$

Die Noether–Stromdichte ist folglich

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\,(-i\psi) + i\bar{\psi}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \bar{\psi} i\gamma^\mu\,(-i\psi) \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\ , \tag{2.122}$$

weil der zweite Term nach dem ersten Gleichheitszeichen verschwindet. Dies ist die **fermionische 4–Stromdichte**. Die Noether–Ladung ist die **Fermionenzahl**,

$$N = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathcal{J}^0 = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\bar{\psi}\gamma^0\psi = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\psi^\dagger\psi\ . \tag{2.123}$$

In Analogie zum geladenen skalaren Feld vermuten wir, dass diese Erhaltungsgrößen etwas mit der elektrischen Ladung der Fermionen zu tun haben. Dies ist aber zum jetzigen Zeitpunkt nicht offensichtlich, wir müssen das Dirac–Feld zunächst wieder an das elektromagnetische Feld koppeln. Dies geschieht in analoger Weise wie beim geladenen skalaren Feld. Wir addieren einen Term

$$\mathcal{L}_1 = -e\,\mathcal{J}^\mu A_\mu \tag{2.124}$$

zur Dirac–Lagrange–Dichte (2.111) (die wir im folgenden wieder mit $\mathcal{L}_0$ bezeichnen):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 &= \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi - e\,\mathcal{J}^\mu A_\mu = \bar{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\,\psi \\ &= \bar{\psi}\,[i\gamma^\mu\,(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\,\psi = \bar{\psi}\,(i\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi \\ &\equiv \bar{\psi}\,(iD\!\!\!/ - m)\,\psi\ ,\end{aligned} \tag{2.125}$$

wobei wir wieder die kovariante Ableitung (2.107) benutzt haben. Nun prüfen wir die Invarianz der gesamten Lagrange–Dichte (2.125) unter **lokalen** $U(1)$**–Transformationen** des Dirac–Feldes und des elektromagnetischen Feldes

$$\begin{aligned}\psi(X) &\longrightarrow \psi'(X) = e^{-i\Lambda(X)}\psi(X)\ , \\ \bar{\psi}(X) &\longrightarrow \bar{\psi}'(X) = \bar{\psi}(X)e^{i\Lambda(X)}\ , \\ A^\mu(X) &\longrightarrow A'^\mu(X) = A^\mu(X) + \frac{1}{e}\,\partial^\mu\Lambda(X)\ .\end{aligned} \tag{2.126}$$

Die lokale $U(1)$–Invarianz (oder $U(1)$–Eichsymmetrie) ist nun aber offensichtlich, denn die kovariante Ableitung des Dirac–Feldes transformiert wie das Feld selbst,

$$\begin{aligned}D_\mu\psi \quad\longrightarrow\quad D'_\mu\psi' &= \left(\partial_\mu + ieA'_\mu\right)e^{-i\Lambda}\psi \\ &= e^{-i\Lambda}\,[\partial_\mu\psi - i\psi\partial_\mu\Lambda + ieA_\mu\psi + i\,(\partial_\mu\Lambda)\,\psi] \\ &= e^{-i\Lambda}D_\mu\psi\ .\end{aligned} \tag{2.127}$$

Also ist

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'\,(iD\!\!\!/' - m)\,\psi' = \bar{\psi}e^{i\Lambda}e^{-i\Lambda}\,(iD\!\!\!/ - m)\,\psi \equiv \mathcal{L} \tag{2.128}$$

lokal $U(1)$–invariant.

2.6 Das Photon–Feld und Quantenelektrodynamik

Die Lagrange–Dichte des elektromagnetischen (oder Photonen–) Feldes ist bereits aus Abschnitt 1.2.8 der Vorlesung "Elektrodynamik" bekannt. In natürlichen Einheiten lautet sie

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{2.129}$$

mit dem **Feldstärketensor**

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{2.130}$$

Der Feldstärketensor ist vollständig **antisymmetrisch**,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \ , \tag{2.131}$$

und **invariant** unter **lokalen** $U(1)$–**Transformationen** des 4–Vektorpotentials A_μ, vgl. Gl. (2.97),

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu \left(A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\nu \Lambda \right) - \partial_\nu \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda \right) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)\Lambda \\ &\equiv F_{\mu\nu} \ , \end{aligned} \tag{2.132}$$

vorausgesetzt, die Funktion $\Lambda(X)$ ist zweifach stetig differenzierbar. Aus der $U(1)$–Eichinvarianz des Feldstärketensors folgt dann natürlich auch die der Lagrange–Dichte (2.129).

Wir erinnern an dieser Stelle kurz an den Zusammenhang von Feldstärketensor und elektrischer Feldstärke $\vec{E}$ bzw. magnetischer Feldstärke $\vec{B}$, s. Abschnitt 1.2.2 der Vorlesung "Elektrodynamik". Mit Hilfe des "skalaren" Potentials φ und des 3–Vektorpotentials $\vec{A}$ können elektrische und magnetische Feldstärke bekannterweise wie folgt ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A} \ , \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \ , \end{aligned} \tag{2.133}$$

s. Abschnitt 1.2.9 der Vorlesung "Elektrodynamik". Das "skalare" Potential ist natürlich kein Lorentz–Skalar, vielmehr ist es die Zeit-Komponente des 4–Vektorpotentials,

$$A^\mu = (\varphi,\, \vec{A})^T \ , \tag{2.134}$$

s. Abschnitt 1.2.1 der Vorlesung "Elektrodynamik". In Komponenten lauten die Glgen. (2.133) daher

$$\begin{aligned} E^i &= -\partial_i A^0 - \partial^0 A^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \equiv F^{i0} \ , \\ B^i &= \epsilon^{ijk}\partial_j A^k = -\epsilon^{ijk}\partial^j A^k = -\frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}\left(\partial^j A^k - \partial^k A^j\right) \equiv -\frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk} F^{jk} \ . \end{aligned} \tag{2.135}$$

Hier haben wir mehrfach von der Regel Gebrauch gemacht, dass Herauf- bzw. Herunterziehen eines räumlichen Lorentz–Index einen Vorzeichenwechsel bedingt. Außerdem

haben wir die Antisymmetrie des Levi-Cività–Tensors unter Vertauschung von Indizes, $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{ikj}$ benutzt. Die zweite Gl. (2.135) kann man durch Multiplikation mit ϵ^{mni} und Ausnutzen der Relation $\epsilon^{mni}\epsilon^{ijk} = \delta^{mj}\delta^{nk} - \delta^{mk}\delta^{nj}$ nach F^{mn} auflösen,

$$\epsilon^{mni}B^i = -\frac{1}{2}\left(\delta^{mj}\delta^{nk} - \delta^{mk}\delta^{nj}\right)F^{jk} = -\frac{1}{2}\left(F^{mn} - F^{nm}\right) = -F^{mn} \ . \tag{2.136}$$

Damit nimmt der Feldstärketensor folgende Gestalt an,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2.137}$$

Die Euler–Lagrange–Gleichungen (2.31) liefern

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{4}\partial_\mu\left[2F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\left[F^{\alpha\beta}\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right] = \frac{1}{2}\partial_\mu\left[F^{\alpha\beta}\left(g_\alpha^{\ \mu}g_\beta^{\ \nu} - g_\beta^{\ \mu}g_\alpha^{\ \nu}\right)\right] = \frac{1}{2}\partial_\mu\left(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}\right) \\ &= \partial_\mu F^{\mu\nu} \ . \end{aligned} \tag{2.138}$$

Dies sind die **inhomogenen Maxwell–Gleichungen** in Abwesenheit einer elektrischen Ladungsstromdichte, vgl. Abschnitt 1.2.9 der Vorlesung "Elektrodynamik". Um dies zu sehen, ist es zweckmäßig, die einzelnen Komponenten ($\nu = 0$, $\nu = x, y, z$) einzeln zu betrachten,

$$\begin{aligned} \nu = 0: \quad 0 &= \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \ , \\ \nu = i: \quad 0 &= \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\partial_t E^i - \epsilon^{jik}\partial_j B^k = -\partial_t E^i + \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)^i \ . \end{aligned} \tag{2.139}$$

Die **homogenen Maxwell–Gleichungen** erhält man aus der **Jacobi–Identität**,

$$0 = \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} \ . \tag{2.140}$$

Für $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3)$ erhalten wir

$$0 = -\partial_x(-B^x) - \partial_y(-B^y) - \partial_z(-B^z) \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{B} \ . \tag{2.141}$$

Für $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 3, 2), (0, 1, 3)$ und $(0, 2, 1)$ haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t B^x - \partial_z E^y - \partial_y(-E^z) = \partial_t B^x + \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)^x \ , \\ 0 &= \partial_t B^y - \partial_x E^z - \partial_z(-E^x) = \partial_t B^y + \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)^y \ , \\ 0 &= \partial_t B^z - \partial_y E^x - \partial_x(-E^y) = \partial_t B^z + \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)^z \ , \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= \partial_t\vec{B} + \vec{\nabla}\times\vec{E} \ . \end{aligned} \tag{2.142}$$

Nun betrachten wir die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit einem geladenen skalaren Feld. Dazu müssen wir dessen Lagrange–Dichte (2.106) zur Lagrange–Dichte (2.129) des elektromagnetischen Feldes addieren. Während in der Lagrange–Dichte (2.106) das elektromagnetische Feld **extern**, also von außen vorgegeben war, wird nun die **Rückwirkung** des elektrische Ladung tragenden skalaren Feldes auf das elektromagnetische Feld mit berücksichtigt. Beide Felder, sowohl das geladene skalare Feld als auch das elektromagnetische Feld, sind nun **dynamische, miteinander wechselwirkende** Freiheitsgrade des Systems. Die resultierende Lagrange–Dichte ist die der sog. **skalaren Elektrodynamik**,

$$\mathcal{L}_{\text{SED}} = (D_\mu \Phi)^* \, D^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \; . \tag{2.143}$$

Sie ist ganz offensichtlich $U(1)$–**eichinvariant**.

Die Bewegungsgleichungen folgen wie gehabt aus den Euler–Lagrange–Gleichungen (2.31). Für das geladene skalare Feld erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SED}}}{\partial \Phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SED}}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} = -ieA_\mu D^\mu \Phi - m^2 \Phi - \partial_\mu D^\mu \Phi \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= \left(D_\mu D^\mu + m^2\right) \Phi \; . \end{aligned} \tag{2.144}$$

Dies ist die Klein–Gordon–Gleichung für das geladene skalare Feld Φ in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes A_μ. Die entsprechende Gleichung für Φ^* erhält man durch komplexes Konjugieren.

Für das elektromagnetische Feld erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SED}}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -ie\Phi^* D^\nu \Phi + ie \left(D^\nu \Phi\right)^* \Phi + \partial_\mu F^{\mu\nu} \\ \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} &= ie \left[\Phi^* D^\nu \Phi - \left(D^\nu \Phi\right)^* \Phi\right] \equiv e \mathfrak{J}^\nu \; , \end{aligned} \tag{2.145}$$

wobei

$$\mathfrak{J}^\nu = i \left[\Phi^* D^\nu \Phi - \left(D^\nu \Phi\right)^* \Phi\right] \tag{2.146}$$

die $U(1)$–invariante Version der Noether–Stromdichte (2.89) ist. Wegen der Antisymmetrie des Feldstärketensors ist dieser Strom erhalten,[1]

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0 = e \, \partial_\nu \mathfrak{J}^\nu \; . \tag{2.147}$$

Gleichung (2.145) ist die **inhomogene Maxwell–Gleichung in Anwesenheit** einer Ladungsstromdichte $e\mathfrak{J}^\nu$. Diese stellt nun eine **Quelle** für das elektromagnetische Feld dar. Die elektrische Ladung des skalaren Feldes ist dabei $+e$.

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir das elektromagnetische Feld auch noch an das Dirac–Feld koppen. Diese Theorie nennt man (zumindest in ihrer quantisierten, d.h. quantenfeldtheoretischen Version) **Quantenelektrodynamik**:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} \left(i \not{D} - m\right) \psi - \frac{1}{4} \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \; . \tag{2.148}$$

[1] Eine sehr schöne Diskussion des Noether–Theorems für lokale Symmetrien findet man in Ref. [19].

Auch diese Theorie besitzt, wie die skalare Elektrodynamik, eine $U(1)$–**Eichinvarianz**.

Die Bewegungsgleichung für das Dirac–Feld lautet

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = (i \not{D} - m)\, \psi \ . \tag{2.149}$$

Dies ist die Dirac–Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes.

Die Bewegungsgleichung für das elektromagnetische Feld lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi + \partial_\mu F^{\mu\nu} \\ \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} &= e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \equiv e\mathcal{J}^\nu \ , \end{aligned} \tag{2.150}$$

mit der Ladungsstromdichte (2.122). Auch dieser Ladungsstrom ist erhalten,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0 = e\, \partial_\nu \mathcal{J}^\nu \ . \tag{2.151}$$

Man beachte, dass in unserer Konvention die Ladung des Dirac–Feldes $+e$ beträgt. Für Elektronen muss dann die Elementarladung e mit einem **negativen** Vorzeichen gewählt werden, $e < 0$.

25.11.2020

2.7 Das Yang–Mills–Feld und Quantenchromodynamik

Bislang haben wir Theorien diskutiert, die eine $U(1)$–Eichinvarianz besitzen. Wir verallgemeinern dies nun auf Theorien, die invariant unter Transformationen einer größeren Symmetriegruppe sind. Betrachten wir z.B. ein Feld

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \ , \tag{2.152}$$

wobei $\phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Dieses Feld transformiert unter der Gruppe $SO(3)$, d.h. **orthogonaler Transformationen** oder **Drehungen** im drei-dimensionalen Raum der Feldkomponenten ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3. Die Gruppe $SO(3)$ ist eine **nicht-Abelsche** Gruppe, im Gegensatz zu $U(1)$, welches eine **Abelsche** Gruppe ist (mehr zu Gruppen findet man in Kapitel 2 der Vorlesung "Quantenmechanik II"). Man beachte, dass $\mathbf{\Phi}$ kein Vektor im drei-dimensionalen Ortsraum ist, sondern im Raum der **internen** Freiheitsgrade des Feldes, d.h. im Raum, welcher durch seine Komponenten ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 aufgespannt wird. Man spricht daher von **internen** $SO(3)$–Transformationen bzw., wenn die noch zu diskutierende Theorie für $\mathbf{\Phi}$ symmetrisch (invariant) unter diesen Transformationen ist, von einer **internen** $SO(3)$–Symmetrie.

Unser Ziel ist nun, eine Theorie zu konstruieren, die invariant unter **lokalen** $SO(3)$–Transformationen (Drehungen) ist, oder mit anderen Worten eine **lokale** $SO(3)$–**Symmetrie** bzw. eine $SO(3)$–**Eichinvarianz** besitzt. Betrachten wir zunächst eine spezielle $SO(3)$–Transformation des Feldes $\mathbf{\Phi}$, z.B. eine Drehung um einen Winkel Λ_3 um die 3–Achse im internen Raum der Feldkomponenten, s. Abb. 2.7.

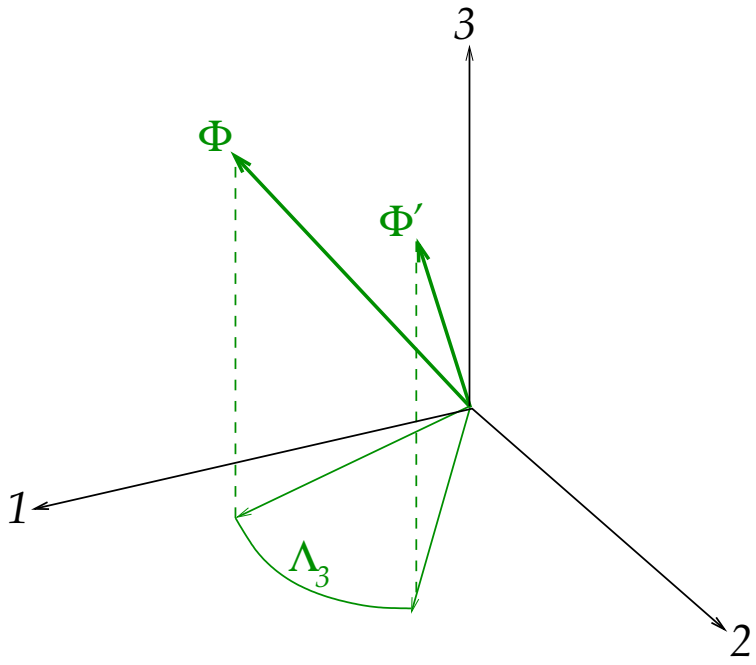


Abbildung 2.7: Drehung des Feldes $\mathbf{\Phi}$ um die 3–Achse.

Mathematisch lautet diese Transformation

$$\begin{aligned} \phi_1 &\longrightarrow \phi_1' = \phi_1 \cos\Lambda_3 + \phi_2 \sin\Lambda_3 \ , \\ \phi_2 &\longrightarrow \phi_2' = -\phi_1 \sin\Lambda_3 + \phi_2 \cos\Lambda_3 \ , \\ \phi_3 &\longrightarrow \phi_3' = \phi_3 \ . \end{aligned} \tag{2.153}$$

Für eine infinitesimale Transformation, $\Lambda_3 \to \delta\Lambda_3$, $|\delta\Lambda_3| \ll 1$, wird dies zu

$$\begin{aligned} \phi_1 &\longrightarrow \phi_1' = \phi_1 + \delta\Lambda_3\, \phi_2 \ , \\ \phi_2 &\longrightarrow \phi_2' = -\delta\Lambda_3\, \phi_1 + \phi_2 \ , \\ \phi_3 &\longrightarrow \phi_3' = \phi_3 \ . \end{aligned} \tag{2.154}$$

In Vektorschreibweise lautet dieser Gleichungssatz

$$\mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{\Phi}' = \mathbf{\Phi} - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \ , \tag{2.155}$$

wobei

$$\delta\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\Lambda_3 \end{pmatrix}$$

der Drehvektor ist, der einer Drehung um die 3–Achse entspricht. Natürlich gilt Gl. (2.155) auch für Drehungen um **beliebig** im Raum orientierte Achsen. Die Änderung $\Delta\mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{\Phi}' - \mathbf{\Phi}$ des Feldes $\mathbf{\Phi}$ bei einer Drehung um die durch den Drehvektor $\delta\mathbf{\Lambda}$ definierte Achse ist also

$$\Delta\mathbf{\Phi} = -\delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \ . \tag{2.156}$$

Die partielle Ableitung des Feldes transformiert sich wie folgt,

$$\partial_\mu \mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu \mathbf{\Phi}' = \partial_\mu \mathbf{\Phi} - \partial_\mu \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi}\right) = \partial_\mu \mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu \mathbf{\Phi} - \left(\partial_\mu \delta \mathbf{\Lambda}\right) \times \mathbf{\Phi} \ . \tag{2.157}$$

Der letzte Term verhindert, dass sich die partielle Ableitung wie das Feld selbst, also wie eine kovariante Ableitung, transformiert. Um eine lokal $SO(3)$–invariante Theorie zu konstruieren, brauchen wir wieder eine kovariante Ableitung $D_\mu \mathbf{\Phi}$, die sich wie das Feld selbst transformiert, also für die gilt

$$D_\mu \mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad D'_\mu \mathbf{\Phi}' = D_\mu \mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times D_\mu \mathbf{\Phi} \ . \tag{2.158}$$

Wir machen den Ansatz

$$D_\mu \mathbf{\Phi} = \partial_\mu \mathbf{\Phi} + g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{\Phi} \ , \tag{2.159}$$

bzw. in Komponenten

$$\left(D_\mu \mathbf{\Phi}\right)_i = \partial_\mu \phi_i + g\, \epsilon_{ijk} W_{j\mu} \phi_k = \left(\delta_{ik}\, \partial_\mu + g\, \epsilon_{ijk} W_{j\mu}\right) \phi_k \equiv D_{ik\mu} \phi_k \ . \tag{2.160}$$

An dieser Gleichung ist ersichtlich, dass die kovariante Ableitung eine (3×3)–**Matrix** im Raum der Feldkomponenten ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 ist. Diese Matrix "verdreht" die Feldkomponenten gegeneinander.

Das in Gl. (2.159) eingeführte Vektorfeld $\mathbf{W}_\mu$ ist das **Eichfeld**, welches dem elektromagnetischen Feld A_μ im Fall der (Abelschen) $U(1)$–eichinvarianten Theorien entspricht. Im Gegensatz zu letzterem handelt es sich nun allerdings um ein sog. **nicht-Abelsches Eichfeld** bzw. ein **Yang–Mills–Feld**. Das Eichfeld $\mathbf{W}_\mu$ ist ein **Lorentz–Vektor** (erkennbar am Lorentz–Index μ), wie auch das elektromagnetische Feld, aber **zusätzlich** hat es, wie das Feld $\mathbf{\Phi}$, drei Komponenten im internen Raum der Feldkomponenten ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3. Es hat damit **Ähnlichkeit** mit einem Vektor in diesem Raum. Wie wir gleich sehen werden, transformiert es sich aber **nicht** wie ein Vektor unter $SO(3)$–Transformationen.

Die Konstante g vor dem zweiten Term in Gl. (2.159) ist die **Kopplungskonstante** der Theorie. Ihr numerischer Wert legt fest, wie stark das Eichfeld $\mathbf{W}_\mu$ an das Materiefeld $\mathbf{\Phi}$ koppelt. Sie spielt dieselbe Rolle wie die Elementarladung e in der skalaren Elektrodynamik oder der Quantenelektrodynamik.

Für das elektromagnetische Feld hatten wir mit Gl. (2.97) ein bestimmtes Transformationsverhalten unter $U(1)$–Eichtransformationen festgelegt. Dies müssen wir analog nun auch für $\mathbf{W}_\mu$ tun. Wir fordern, dass dieses sich unter lokalen $SO(3)$–Transformationen wie folgt transformiert:

$$\mathbf{W}_\mu \quad \longrightarrow \quad \mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\, \partial_\mu \delta \mathbf{\Lambda} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu \ . \tag{2.161}$$

Der zweite Term hat Ähnlichkeit mit dem Term, der auch bei einer $U(1)$–Transformation auftritt, vgl. Gl. (2.97). Der dritte Term wiederum hat Ähnlichkeit mit einer $SO(3)$–Transformation (Drehung) des Feldes $\mathbf{\Phi}$, vgl. Gl. (2.155). Gäbe es nur diesen dritten Term, würde sich $\mathbf{W}_\mu$ wie ein Vektor im internen Raum der Feldkomponenten transformieren. Der zweite Term zerstört dieses Transformationsgesetz.

Mit dem in Gl. (2.161) festgelegten Verhalten unter $SO(3)$–Transformationen berechnen wir nun das Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung (2.159),

$$\begin{aligned}
D_\mu \mathbf{\Phi} \quad &\longrightarrow \quad D'_\mu \mathbf{\Phi}' = \partial_\mu \mathbf{\Phi}' + g\, \mathbf{W}'_\mu \times \mathbf{\Phi}' \\
&= \quad \partial_\mu \left(\mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \right) + g \left(\mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\, \partial_\mu \delta \mathbf{\Lambda} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu \right) \times \left(\mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \right) \\
&= \quad \partial_\mu \mathbf{\Phi} - \left(\partial_\mu \delta \mathbf{\Lambda} \right) \times \mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu \mathbf{\Phi} + g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{\Phi} - g \mathbf{W}_\mu \times \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \right) \\
&\qquad + \left(\partial_\mu \delta \mathbf{\Lambda} \right) \times \mathbf{\Phi} - g \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu \right) \times \mathbf{\Phi} + O(\delta \mathbf{\Lambda}^2) \\
&\simeq \quad D_\mu \mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \partial_\mu \mathbf{\Phi} - g \mathbf{W}_\mu \times \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \right) - g \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu \right) \times \mathbf{\Phi} \; , \qquad (2.162)
\end{aligned}$$

wobei wir Terme von quadratischer Ordnung in der infinitesimalen Größe $\delta \mathbf{\Lambda}$ vernachlässigt haben. Die beiden Terme mit dem doppelten Kreuzprodukt können noch mit Hilfe der Jacobi-Identität (s. Gl. (1.37) der Vorlesung "Mechanik I")

$$\mathbf{A} \times \left(\mathbf{B} \times \mathbf{C} \right) + \mathbf{B} \times \left(\mathbf{C} \times \mathbf{A} \right) + \mathbf{C} \times \left(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \right) = 0 \qquad (2.163)$$

zusammengefasst werden,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{W}_\mu \times \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \right) + \mathbf{\Phi} \times \left(\mathbf{W}_\mu \times \delta \mathbf{\Lambda} \right) &= -\delta \mathbf{\Lambda} \times \left(\mathbf{\Phi} \times \mathbf{W}_\mu \right) \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathbf{W}_\mu \times \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Phi} \right) + \left(\delta \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_\mu \right) \times \mathbf{\Phi} &= \delta \mathbf{\Lambda} \times \left(\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{\Phi} \right) \; , \qquad (2.164)
\end{aligned}$$

so dass folgt

$$D_\mu \mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad D'_\mu \mathbf{\Phi}' \simeq D_\mu \mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times \left(\partial_\mu \mathbf{\Phi} + g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{\Phi} \right) \equiv D_\mu \mathbf{\Phi} - \delta \mathbf{\Lambda} \times D_\mu \mathbf{\Phi} \; . \qquad (2.165)$$

Dies ist genau Gl. (2.158), d.h. die kovariante Ableitung transformiert sich in der Tat wie das Feld selbst, bzw. sie transformiert sich wie ein **Vektor** im Raum der internen Freiheitsgrade.

Es ist nun nicht weiter schwierig, eine lokal $SO(3)$–invariante Lagrange–Dichte für das Feld $\mathbf{\Phi}$ hinzuschreiben. Da es sich bei den Komponenten ϕ_i des Vektors $\mathbf{\Phi}$ um neutrale skalare Felder handelt, muss die gesuchte Lagrange–Dichte vom Klein–Gordon–Typ sein,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}} = \frac{1}{2} \left(D_\mu \mathbf{\Phi} \right) \cdot D^\mu \mathbf{\Phi} - \frac{m^2}{2}\, \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi} \; . \qquad (2.166)$$

Hierbei bedeutet die Notation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ das **Skalarprodukt** der Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ im Raum der internen Freiheitsgrade. Solche Skalarprodukte sind natürlich **invariant** unter Drehungen der Vektoren, d.h. $SO(3)$–**invariant**. Also ist auch die Lagrange–Dichte (2.166) $SO(3)$–invariant, da ausschließlich Skalarprodukte von Größen vorkommen, die sich wie Vektoren transformieren (hier $D_\mu \mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Phi}$).

In der Lagrange–Dichte (2.166) ist das Eichfeld $\mathbf{W}_\mu$ ein **externes** Feld. Um es zu einem **dynamischen** Freiheitsgrad zu machen, müssen wir noch die Lagrange–Dichte für das Feld $\mathbf{W}_\mu$, also einen Term analog $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ im $U(1)$–Fall, zu Gl. (2.166) hinzuaddieren. Wie könnte dieser Term aussehen? Wir machen eine naheliegende Vermutung,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{W}} = -\frac{1}{4}\, \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} \; . \qquad (2.167)$$

Hierbei ist $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ der **Feldstärketensor** für das Eichfeld $\mathbf{W}_\mu$. Es handelt sich dabei einerseits um einen **Lorentz–Tensor** vom Rang 2 (erkennbar an den beiden Lorentz–Indizes), wie auch der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes. Zusätzlich hat $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ aber noch drei Komponenten im Raum der internen Freiheitsgrade. Damit die Lagrange–Dichte (2.167) $SO(3)$–invariant ist, muss sich $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ wie ein **Vektor** in diesem Raum transformieren,

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{W}'_{\mu\nu} = \mathbf{W}_{\mu\nu} - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_{\mu\nu} \; . \tag{2.168}$$

Genau dann ist die Lagrange–Dichte (2.167) $SO(3)$–invariant, da lediglich das Skalarprodukt des Vektors $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ mit sich selbst auftritt.

Aber welche Gestalt hat $\mathbf{W}_{\mu\nu}$, ausgedrückt durch das Eichfeld $\mathbf{W}_\mu$? Die naheliegende Vermutung wäre

$$\mathbf{W}_0^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu \; , \tag{2.169}$$

in Analogie zum Feldstärketensor der Elektrodynamik. Dieser Ansatz hat aber nicht das korrekte Transformationsverhalten (2.168),

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0^{\mu\nu} \longrightarrow \mathbf{W}_0'^{\mu\nu} &= \partial^\mu \left[\mathbf{W}^\nu + \frac{1}{g}\,\partial^\nu \delta\mathbf{\Lambda} - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}^\nu \right] - \partial^\nu \left[\mathbf{W}^\mu + \frac{1}{g}\,\partial^\mu \delta\mathbf{\Lambda} - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}^\mu \right] \\ &= \mathbf{W}_0^{\mu\nu} - \left[(\partial^\mu \delta\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}^\nu - (\partial^\nu \delta\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}^\mu \right] - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}_0^{\mu\nu} \; . \end{aligned} \tag{2.170}$$

Dies ist **nicht** das Transformationsverhalten eines Vektors im Raum der internen Freiheitsgrade, der zusätzliche Term in eckigen Klammern ist unerwünscht.

Betrachten wir jedoch den Ausdruck

$$g\,\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu \; . \tag{2.171}$$

Dieser transformiert sich wie folgt,

$$\begin{aligned} & g\,\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu \quad \longrightarrow \quad g\,\mathbf{W}'^\mu \times \mathbf{W}'^\nu \\ &= g \left(\mathbf{W}^\mu + \frac{1}{g}\,\partial^\mu \delta\mathbf{\Lambda} - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}^\mu \right) \times \left(\mathbf{W}^\nu + \frac{1}{g}\,\partial^\nu \delta\mathbf{\Lambda} - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}^\nu \right) \\ &= g\,\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu + \mathbf{W}^\mu \times \partial^\nu \delta\mathbf{\Lambda} - g\,\mathbf{W}^\mu \times (\delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}^\nu) \\ &\qquad + (\partial^\mu \delta\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}^\nu - g\,(\delta\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{W}^\mu) \times \mathbf{W}^\nu + O(\delta\mathbf{\Lambda}^2) \\ &\simeq g\,\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu + (\partial^\mu \delta\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}^\nu - (\partial^\nu \delta\mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{W}^\mu - g\,\delta\mathbf{\Lambda} \times (\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu) \; , \end{aligned} \tag{2.172}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Jacobi–Identität (6.310) angewendet haben. Addieren wir die Glgen. (2.170) und (2.172), so erkennen wir, dass die Größe

$$\mathbf{W}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu + g\,\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu \tag{2.173}$$

das korrekte Transformationsverhalten (2.168) eines Vektors im Raum der internen Freiheitsgrade hat. Gleichung (2.173) ist also der korrekte Ausdruck für den **nicht-Abelschen** Feldstärketensor. Man beachte, dass er, wie auch der Abelsche Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, **antisymmetrisch** ist, $\mathbf{W}^{\mu\nu} = -\mathbf{W}^{\nu\mu}$. Für spätere Zwecke geben wir noch die Komponentendarstellung des Feldstärketensors (2.173) an,

$$W_\ell^{\mu\nu} = \partial^\mu W_\ell^\nu - \partial^\nu W_\ell^\mu + g\,\epsilon_{\ell mn} W_m^\mu W_n^\nu \; . \tag{2.174}$$

Die gesamte $SO(3)$–eichinvariante Lagrange–Dichte lautet demnach

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{\Phi}} + \mathcal{L}_{\mathbf{W}} = \frac{1}{2}\,(D_\mu \mathbf{\Phi}) \cdot D^\mu \mathbf{\Phi} - \frac{m^2}{2}\,\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Phi} - \frac{1}{4}\,\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} \tag{2.175}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Komponenten ϕ_i des Feldes $\mathbf{\Phi}$ lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \\ &= -m^2 \phi_i + g\,\epsilon_{\ell j i} W_{j\mu}\,\mathbf{e}_\ell \cdot D^\mu \mathbf{\Phi} - \partial_\mu\,(\mathbf{e}_\ell\,\delta_{\ell i}) \cdot D^\mu \mathbf{\Phi} \\ &= -m^2 \phi_i - (\delta_{i\ell}\,\partial_\mu + g\,\epsilon_{ij\ell} W_{j\mu})\,(D^\mu \mathbf{\Phi})_\ell \\ &= -m^2 \phi_i - D_{i\ell\mu}(D^\mu \mathbf{\Phi})_\ell \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= (D_\mu D^\mu + m^2)\mathbf{\Phi}\,. \end{aligned} \tag{2.176}$$

Hier haben wir den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\ell$ in ℓ–Richtung im Raum der internen Freiheitsgrade eingeführt und die Komponentendarstellung (2.160) der kovarianten Ableitung benutzt. Gleichung (2.176) hat, wie zu erwarten, die Form einer Klein–Gordon–Gleichung für das Feld ϕ_i in Anwesenheit eines Eichfeldes $\mathbf{W}_\mu$.

Für das Eichfeld $W_{i\nu}$ erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_{i\nu}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_{i\nu})} \\ &= g\,\epsilon_{\ell i k} \phi_k\,\mathbf{e}_\ell \cdot D^\nu \mathbf{\Phi} - \frac{1}{2}\,\mathbf{W}^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}_{\alpha\beta}}{\partial W_{i\nu}} + \frac{1}{2}\,\partial_\mu \left[\mathbf{W}^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu W_{i\nu})}\right] \\ &= g\,\epsilon_{i k \ell} \phi_k\,(D^\nu \mathbf{\Phi})_\ell - \frac{g}{2}\,\epsilon_{\ell m n}\left(W_{m\alpha}\,g_\beta^{\ \nu}\,\delta_{in} + W_{n\beta}\,g_\alpha^{\ \nu}\,\delta_{im}\right) W_\ell^{\alpha\beta} \\ &+ \frac{1}{2}\,\partial_\mu\left(g_\alpha^{\ \mu}\,g_\beta^{\ \nu}\,\delta_{i\ell} - g_\alpha^{\ \nu}\,g_\beta^{\ \mu}\,\delta_{i\ell}\right) W_\ell^{\alpha\beta} \\ &= g\,\epsilon_{i k \ell} \phi_k\,(D^\nu \mathbf{\Phi})_\ell + g\,\epsilon_{i m \ell}\,W_{m\alpha} W_\ell^{\alpha\nu} + \partial_\mu W_i^{\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{2.177}$$

wobei wir von der Antisymmetrie des Levi-Cività–Tensors und des Feldstärketensors Gebrauch gemacht haben. Stellen wir die Terme noch etwas um und benutzen die Vektorschreibweise, so erhalten wir letztendlich

$$\partial_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} + g\,\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}^{\mu\nu} = g\,(D^\nu \mathbf{\Phi}) \times \mathbf{\Phi}\,, \tag{2.178}$$

bzw. mit der Definition (2.159) der kovarianten Ableitung

$$D_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} = g\,\mathfrak{J}^\nu\,, \tag{2.179}$$

wobei wir die Stromdichte

$$\mathfrak{J}^\nu = (D^\nu \mathbf{\Phi}) \times \mathbf{\Phi} \tag{2.180}$$

eingeführt haben. Gleichung (2.179) bezeichnet man gemeinhin als **Yang–Mills–Gleichung**. Sie ist das Analogon zur inhomogenen Maxwell–Gleichung in der Elektrodynamik.

Wir machen einige **Bemerkungen:**

(i) Das nicht-Abelsche Eichfeld trägt, im Gegensatz zum elektromagnetischen Feld, **selbst eine Ladung**. Dies sieht man daran, dass es als seine eigene Quelle wirken kann. Ohne Materiefelder, $\mathbf{\Phi} = 0$, lautet Gl. (2.178) nämlich

$$\partial_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} = -g\, \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}^{\mu\nu} \ . \tag{2.181}$$

Der zweite Term aus der kovarianten Ableitung übernimmt dabei die Funktion der Ladungsstromdichte als Quelle des Eichfeldes.

(ii) Die Stromdichte (2.180) entspricht **nicht** der **erhaltenen** Stromdichte. Letztere bestimmen wir wie folgt. Wir bringen den zweiten Term auf der linken Seite von Gl. (2.178) auf die rechte Seite und bilden von beiden Seiten die 4–Divergenz. Aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors erhalten wir

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} = g\, \partial_\nu \left[(D^\nu \mathbf{\Phi}) \times \mathbf{\Phi} - \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}^{\mu\nu} \right] \ . \tag{2.182}$$

Die **erhaltene Stromdichte** ist also

$$\mathcal{J}^\nu = (D^\nu \mathbf{\Phi}) \times \mathbf{\Phi} - \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}^{\mu\nu} \equiv \mathfrak{J}^\nu - \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}^{\mu\nu} \ . \tag{2.183}$$

Sie enthält einen Beitrag von den Ladungen des Materiefeldes sowie, im Einklang mit Bemerkung (i) einen Beitrag von den Ladungen des Eichfeldes.

(iii) Die Stromdichte (2.180) transformiert wie ein **Vektor** unter $SO(3)$–Transformationen,

$$\mathfrak{J}^\nu \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{J}'^{\,\nu} = \mathfrak{J}^\nu - \delta\mathbf{\Lambda} \times \mathfrak{J}^\nu \ . \tag{2.184}$$

Dies muss so sein, da sich auch die linke Seite der Yang–Mills–Gleichung (2.179) wie ein Vektor transformiert. Man kann sich aber auch mittels einer expliziten Rechnung, die wir als Übungsaufgabe überlassen, davon überzeugen. Wir bemerken noch, dass sich die erhaltene Stromdichte (2.183) **nicht** wie ein Vektor transformiert. Der Grund liegt am Auftreten des Eichfeldes $\mathbf{W}_\mu$, welches sich bekanntlich nicht wie ein Vektor transformiert, vgl. Gl. (2.161).

(iv) Um 1960, vor der Entdeckung der Quantenchromodynamik als der Theorie der starken Wechselwirkung, dachte man, dass man die Wechselwirkung von Pionen und ρ–Mesonen mit Hilfe einer Lagrange–Dichte vom Typ (2.175) beschreiben könnte. Dabei fungieren die (pseudo-)skalaren Pionen als **Materiefelder**. Als Isospin-Triplett, vgl. Abb. 1.3, besitzen sie drei interne Freiheitsgrade, π^+, π^0 und π^-, können also durch einen Vektor (2.152) repräsentiert werden, wobei

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 \mp i\phi_2 \right) \ , \quad \pi^0 = \phi_3 \ .$$

ρ–Mesonen tragen Spin 1, sind also Lorentz–Vektoren. Zudem bilden sie ebenfalls ein Isospin–Triplett, sie entsprechen also dem Eichfeld $\mathbf{W}_\mu$ aus der obigen Betrachtung einer $SO(3)$–Eichtheorie,

$$\rho_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_{1\mu} \mp i W_{2\mu} \right) \ , \quad \rho_\mu^0 = W_{3\mu} \ .$$

Heute wissen wir, dass dieses Bild nicht zutreffend ist. Zum einen sind die ρ–Mesonen massiv, und nicht masselos, wie es für ein Eichfeld sein muss. Zum anderen ist Isospin eine **globale** und keine lokale Symmetrie der starken Wechselwirkung.

27.11.2020

Wir wollen nun die Betrachtung von lokal symmetrischen Theorien auf andere Eichgruppen als $SO(3)$ verallgemeinern. Dazu müssen wir zunächst die vorangegangene Diskussion auf **endliche** $SO(3)$–Transformationen verallgemeinern. Eine solche endliche Transformation des Vektors $\mathbf{\Phi}$ lautet

$$\mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{\Phi}' = O\,\mathbf{\Phi}\ , \tag{2.185}$$

wobei O ein **Element der Gruppe** $SO(3)$ in der passenden Darstellung (d.h. einer Darstellung, die auf $\mathbf{\Phi}$ wirkt) ist. Die Gruppe $SO(3)$ ist eine **Lie–Gruppe**, d.h. ihre Elemente lassen sich in der Form

$$O = e^{i\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}} \tag{2.186}$$

darstellen, vgl. Abschnitt 2.2.3 der Vorlesung "Quantenmechanik II". Hierbei ist $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)^T$ der **Drehvektor**. Seine Komponenten Λ_i bilden die **Parameter** der Gruppe $SO(3)$. $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)^T$ ist der Vektor der **Generatoren** J_i der Gruppe $SO(3)$.

In Gl. (2.185) wirkt O auf einen Vektor im drei-dimensionalen Raum der internen Freiheitsgrade, es muss also eine Darstellung von O als (3×3)–**Drehmatrix** gewählt werden. Entsprechend ist auch die (3×3)–Matrixdarstellung für die Generatoren J_i zu wählen. Diese lautet (vgl. Gl. (2.65) der Vorlesung "Quantenmechanik II")

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \tag{2.187}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$(J_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}\ . \tag{2.188}$$

Eine infinitesimale $SO(3)$–Transformation (2.185), $\mathbf{\Lambda} \to \delta\mathbf{\Lambda}$, $|\delta\mathbf{\Lambda}| \ll 1$, lautet dann

$$\mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{\Phi}' = \mathbf{\Phi} + i\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}\,\mathbf{\Phi} + O(\delta\mathbf{\Lambda}^2)\ , \tag{2.189}$$

bzw. in Komponenten

$$\begin{aligned} \phi_j \quad \longrightarrow \quad \phi_j' \ &\simeq\ \phi_j + i\,\delta\Lambda_i\,(J_i)_{jk}\,\phi_k \\ &=\ \phi_j + \epsilon_{ijk}\,\delta\Lambda_i\,\phi_k = \phi_j - \epsilon_{jik}\,\delta\Lambda_i\,\phi_k\ , \end{aligned} \tag{2.190}$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$\mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{\Phi}' \simeq \mathbf{\Phi} - \delta\mathbf{\Lambda}\times\mathbf{\Phi}\ . \tag{2.191}$$

Dies ist konsistent mit Gl. (2.155).

Die Verallgemeinerung auf andere Gruppen ist nun nicht weiter schwierig. Betrachten wir z.B. die Gruppe $SU(N)$, ebenfalls eine Lie–Gruppe, deren Elemente U folglich die Darstellung

$$U = e^{i\alpha_a T_a} \tag{2.192}$$

besitzen. Hier sind α_a die Parameter, $\alpha_a \in R$, $a = 1, \ldots, N^2 - 1$, und T_a die Generatoren der $SU(N)$. Der Index läuft dabei von $a = 1, \ldots, N^2 - 1$. Wir wenden eine $SU(N)$–Transformation auf einen N–komponentigen (und, da es sich bei $SU(N)$ um eine unitäre Gruppe handelt, i.a. komplexwertigen) Vektor an,

$$\mathbf{\Phi} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{\Phi}' = U\,\mathbf{\Phi}\ . \tag{2.193}$$

Für einen solchen Vektor müssen die Elemente U der $SU(N)$ in der Darstellung als $(N \times N)$–Matrizen gewählt werden.
Beispiele:

(i) $N = 2$: Die Generatoren der $SU(2)$ sind die halben Pauli–Matrizen,

$$T_a = \frac{1}{2}\,\sigma_a\ , \quad a = 1, 2, 3\ , \tag{2.194}$$

mit den σ_a aus Gl. (1.32).

(ii) $N = 3$: Die Generatoren der $SU(3)$ sind die halben Gell-Mann–Matrizen,

$$T_a = \frac{1}{2}\,\lambda_a\ , \quad a = 1, \ldots, 8\ , \tag{2.195}$$

mit

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \lambda_8 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\ . \tag{2.196}$$

Eigenschaften der Generatoren der $SU(N)$: Die Generatoren

(i) sind **spurfrei**, $\quad \mathrm{Tr}\, T_a = 0$,

(ii) sind **hermitesch**, $\quad T_a^\dagger = T_a$,

(iii) sind **orthogonal**,

$$\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\,\delta_{ab}\ , \tag{2.197}$$

(iv) erfüllen die **Vertauschungsrelationen**

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c\ , \tag{2.198}$$

wobei f_{abc} die **antisymmetrischen Strukturkonstanten** der Gruppe $SU(N)$ sind (Beispiel: für $SU(2)$, $f_{abc} \equiv \epsilon_{abc}$),

(v) erfüllen die **Anti-Vertauschungsrelationen**

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{N}\,\delta_{ab} + d_{abc} T_c \;, \tag{2.199}$$

wobei d_{abc} die **symmetrischen Strukturkonstanten** der Gruppe $SU(N)$ sind (Beispiel: für $SU(2)$, $d_{abc} \equiv 0$),

(vi) erfüllen die **Jacobi–Identität**

$$[[T_a, T_b], T_c] + [[T_b, T_c], T_a] + [[T_c, T_a], T_b] = 0 \;. \tag{2.200}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (2.198) eine ähnliche Identität für die antisymmetrischen Strukturkonstanten,

$$f_{abn} f_{ncd} + f_{bcn} f_{nad} + f_{can} f_{nbd} = 0 \;. \tag{2.201}$$

Als nächstes müssen wir eine **kovariante Ableitung** konstruieren. Im $SO(3)$–Fall hatten wir (s. Gl. (2.160))

$$\begin{aligned} D_{ik\mu} &= \delta_{ik}\,\partial_\mu + g\,\epsilon_{ijk}\,W_{j\mu} = \delta_{ik}\,\partial_\mu - i\,g\,(-i\,\epsilon_{jik})\,W_{j\mu} \\ &= \delta_{ik}\,\partial_\mu - i\,g\,(J_j)_{ik}\,W_{j\mu} \equiv \delta_{ik}\,\partial_\mu - i\,g\,\mathbf{J}_{ik}\cdot\mathbf{W}_\mu \;, \end{aligned} \tag{2.202}$$

wobei wir die Definition (2.188) der Generatoren der $SO(3)$ benutzt haben. Es liegt daher nahe, die kovariante Ableitung im $SU(N)$–Fall folgendermaßen zu definieren:

$$D_{ik\mu} = \delta_{ik}\partial_\mu - i\,g\,(T_a)_{ik} A^a_\mu \;, \tag{2.203}$$

wobei A^a_μ das $SU(N)$–**Eichfeld** ist. Es bietet sich an, ein sog. **matrix-wertiges** Eichfeld einzuführen,

$$(\mathcal{A}_\mu)_{ik} \equiv (T_a)_{ik} A^a_\mu \;, \tag{2.204}$$

womit sich die kovariante Ableitung (2.203) in kompakter Form schreiben läßt,

$$D_\mu = \partial_\mu - i\,g\,\mathcal{A}_\mu \;. \tag{2.205}$$

Wie üblich erfüllt die kovariante Ableitung die Bedingung, dass sie sich wie ein Vektor unter $SU(N)$–Transformationen transformiert, also

$$D_\mu \mathbf{\Phi} \quad\longrightarrow\quad D'_\mu \mathbf{\Phi}' = U\,D_\mu \mathbf{\Phi} \;. \tag{2.206}$$

Diese Bedingung erlaubt es uns, das Transformationsgesetz für das Eichfeld $\mathcal{A}_\mu$ unter $SU(N)$–Transformationen abzuleiten,

$$\begin{aligned} \left(\partial_\mu - i\,g\,\mathcal{A}'_\mu\right)\mathbf{\Phi}' = \left(\partial_\mu - i\,g\,\mathcal{A}'_\mu\right) U\,\mathbf{\Phi} &= U\,(\partial_\mu - i\,g\,\mathcal{A}_\mu)\,\mathbf{\Phi} \\ \Longleftrightarrow \qquad U\,\partial_\mu\mathbf{\Phi} + (\partial_\mu U)\mathbf{\Phi} - i\,g\,\mathcal{A}'_\mu U\,\mathbf{\Phi} &= U\,\partial_\mu\mathbf{\Phi} - i\,g\,U\,\mathcal{A}_\mu\mathbf{\Phi} \\ \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A}'_\mu U\,\mathbf{\Phi} &= U\,\mathcal{A}_\mu\mathbf{\Phi} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U)\mathbf{\Phi} \;, \end{aligned} \tag{2.207}$$

bzw., weil dies für jeden beliebigen Vektor $\mathbf{\Phi}$ gelten muss,

$$\mathcal{A}'_\mu U = U\,\mathcal{A}_\mu - \frac{i}{g}\,\partial_\mu U\ ,$$

oder, nach Multiplikation von rechts mit U^{-1},

$$\mathcal{A}'_\mu = U\mathcal{A}_\mu\,U^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U)U^{-1}\ . \tag{2.208}$$

Für unitäre Matrizen gilt $U^{-1} = U^\dagger$ und wegen $U\,U^\dagger = U\,U^{-1} = \mathbb{1}$ auch

$$0 = \partial_\mu(UU^\dagger) = (\partial_\mu U)U^\dagger + U\,\partial_\mu U^\dagger\ . \tag{2.209}$$

Eingesetzt in Gl. (2.208) erhalten wir alternativ zu dieser Gleichung die Relation

$$\mathcal{A}'_\mu = U\mathcal{A}_\mu\,U^\dagger + \frac{i}{g}\,U\,\partial_\mu U^\dagger\ . \tag{2.210}$$

Wir überprüfen noch, ob dieses Transformationsgesetz, angewendet auf infinitesimale $SO(3)$–Transformationen, auf den vormals erhaltenen Ausdruck (2.161) führt. Für $SO(3)$–Transformationen eines matrix-wertigen Eichfeldes $\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu$ lautet Gl. (2.208)

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu \quad\longrightarrow\quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{W}'_\mu = O\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu O^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu O)O^{-1}\ . \tag{2.211}$$

Für infinitesimale $SO(3)$–Transformationen können wir setzen

$$O = e^{i\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}} \simeq \mathbb{1} + i\,\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}\ ,\quad O^{-1} = e^{-i\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}} \simeq \mathbb{1} - i\,\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}\ .$$

Eingesetzt in Gl. (2.211) ergibt dies

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu \quad\longrightarrow\quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{W}'_\mu \;&\simeq\; (\mathbb{1} + i\,\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J})\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu\,(\mathbb{1} - i\,\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}) \\
&\quad - \frac{i}{g}\,i\,(\partial_\mu\delta\mathbf{\Lambda})\cdot\mathbf{J}\,(\mathbb{1} - i\,\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}) \\
&= \mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu + i\,(\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J})\,(\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu) - i\,(\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu)\,(\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}) \\
&\quad + \frac{1}{g}\,\mathbf{J}\cdot(\partial_\mu\delta\mathbf{\Lambda}) + O(\delta\mathbf{\Lambda}^2)\ .
\end{aligned} \tag{2.212}$$

Es bietet sich nun an, die Skalarprodukte der Vektoren im zweiten und dritten Term als Summe über das Produkt ihrer Komponenten schreiben. Dann können wir diese Terme mit Hilfe der Vertauschungsrelation

$$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk}J_k \tag{2.213}$$

für die Generatoren der $SO(3)$ folgendermaßen umschreiben,

$$\begin{aligned}
(\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J})\,(\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu) - (\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu)\,(\delta\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{J}) \;&=\; \delta\Lambda_i\,W_{j\mu}\,(J_iJ_j - J_jJ_i) \equiv \delta\Lambda_i\,W_{j\mu}\,[J_i, J_j] \\
&\equiv\; i\,\epsilon_{ijk}\,J_k\,\delta\Lambda_i\,W_{j\mu} = i\,\mathbf{J}\cdot(\delta\mathbf{\Lambda}\times\mathbf{W}_\mu)\ .
\end{aligned} \tag{2.214}$$

Eingesetzt in Gl. (2.212) erhalten wir

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{W}_\mu \quad\longrightarrow\quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{W}'_\mu \;\simeq\; \mathbf{J}\cdot\left(\mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\,\partial_\mu\delta\mathbf{\Lambda} - \delta\mathbf{\Lambda}\times\mathbf{W}_\mu\right)\;, \tag{2.215}$$

was genau Gl. (2.161) entspricht.

Schlussendlich müssen wir noch den Feldstärketensor für den $SU(N)$–Fall bestimmen. Im $SO(3)$–Fall hatten wir Gl. (2.173) bzw., in Komponentenschreibweise, Gl. (2.174). Der Levi-Cività–Tensor in dieser Gleichung ist aber gerade identisch mit den Strukturkonstanten der Gruppe $SO(3)$. Es ist also naheliegend, für die **Komponenten des Feldstärketensors** im $SU(N)$–Fall folgenden Ausdruck anzunehmen,

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g\, f_{abc}\, A_b^\mu A_c^\nu\;. \tag{2.216}$$

Wir können auch einen **matrix-wertigen** Feldstärketensor definieren,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{\mu\nu} \equiv T_a\, G_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu(T_a\, A_a^\nu) - \partial^\nu(T_a\, A_a^\mu) - i\,g\,(i\,f_{abc}\,T_a)A_b^\mu A_c^\nu \\ &= \partial^\mu\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu - i\,g\,[T_b, T_c]\,A_b^\mu A_c^\nu \\ &= \partial^\mu\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu - i\,g\,[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]\;.\end{aligned} \tag{2.217}$$

In Übungsaufgabe H8.1(i) wird gezeigt, dass eine alternative Form des matrix-wertigen Feldstärketensors lautet

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}\,[D_\mu, D_\nu]\;, \tag{2.218}$$

also bis auf einen Vorfaktor ist der matrix-wertige Feldstärketensor der Kommutator zweier kovarianter Ableitungen (2.205).

In Übungsaufgabe H8.1(ii) wird gezeigt, dass sich der matrix-wertige Feldstärketensor wie eine $(N\times N)$–Matrix unter $SU(N)$–Transformationen transformiert,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \quad\longrightarrow\quad \mathcal{G}'_{\mu\nu} = U\,\mathcal{G}_{\mu\nu}\,U^\dagger\;. \tag{2.219}$$

Die **Yang–Mills–Lagrange–Dichte** für das $SU(N)$–Eichfeld A_a^μ kann in einer Form geschrieben werden, in der die Invarianz unter $SU(N)$–Transformationen sofort offensichtlich ist,

$$\mathcal{L}_{\rm YM} = -\frac{1}{2}\,{\rm Tr}\,(\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu})\;. \tag{2.220}$$

In der Tat lautet die transformierte Yang–Mills–Lagrange–Dichte mit Gl. (2.219)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm YM} \quad\longrightarrow\quad \mathcal{L}'_{\rm YM} &= -\frac{1}{2}\,{\rm Tr}\,(\mathcal{G}'_{\mu\nu}\mathcal{G}'^{\,\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\,{\rm Tr}\,(U\,\mathcal{G}_{\mu\nu}\,U^\dagger U\,\mathcal{G}'^{\,\mu\nu}\,U^\dagger) \\ &= -\frac{1}{2}\,{\rm Tr}\,(\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{\rm YM}\;,\end{aligned} \tag{2.221}$$

wobei wir die zyklische Vertauschbarkeit eines Produktes von Matrizen unter der Spur benutzt haben. Mit Hilfe der Definition (2.217) des matrix-wertigen Feldstärketensors und mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (2.197) läßt sich die Yang–Mills–Lagrange–Dichte (2.220) auch in der folgenden Form schreiben,

$$\mathcal{L}_{\rm YM} = -\frac{1}{2}\,{\rm Tr}\,(T_a\,G_{a\mu\nu}\,T_b\,G_b^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\,G_{a\mu\nu}\,G_b^{\mu\nu}\,{\rm Tr}(T_a\,T_b) = -\frac{1}{4}\,G_{a\mu\nu}\,G_a^{\mu\nu}\;. \tag{2.222}$$

Dies ist eine Form, deren Gültigkeit wir beispielsweise aufgrund von Gl. (2.167) im $SO(3)$–Fall auch erwartet hätten.

Die **Quantenchromodynamik (QCD)** ist die Theorie der starken Wechselwirkung. Sie beschreibt die Wechselwirkung von Materiefeldern mit Spin 1/2, den **Quarks**, mit Eichfeldern mit Spin 1, den **Gluonen**. Das Quark-Feld trägt drei interne **Farb-Freiheitsgrade**,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} , \tag{2.223}$$

wobei r, g und b wie schon erwähnt für "rot", "grün" und "blau" stehen. Jede Komponente ψ_i des Quark-Feldes ist ein 4–komponentiger Dirac–Spinor, d.h. das Quark-Feld ist ein 12–komponentiger Spinor im Produktraum aus Dirac– und Farb-Raum. Außerdem gibt es sechs verschiedene Quark-Flavors, $f = u, d, s, c, b, t$, s. Kap. 1. QCD ist **flavor-blind**, d.h. die starke Wechselwirkung behandelt alle Quark-Flavors in derselben Art und Weise.

Das Quark-Feld (2.223) transformiert sich wie ein **Vektor** unter $SU(3)_c$–Transformationen im Farbraum, d.h.

$$\psi \quad \longrightarrow \quad \psi' = U\,\psi \; . \tag{2.224}$$

Entsprechend gilt für das Dirac-adjungierte Quark-Feld

$$\bar{\psi} \quad \longrightarrow \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\,U^\dagger \; . \tag{2.225}$$

(Die Dirac-Matrix γ_0 vertauscht mit der $SU(3)_c$–Matrix U, da sie in verschiedenen Räumen wirken.) Die kovariante Ableitung von ψ transformiert sich ebenfalls wie ein Vektor,

$$D_\mu\psi \quad \longrightarrow \quad D'_\mu\psi' = U\,D_\mu\psi \; . \tag{2.226}$$

Die Lagrange–Dichte hat eine **lokale** $SU(3)_c$–**Symmetrie**, d.h. sie ist $SU(3)_c$–**eichinvariant**,

$$\mathcal{L}_{\rm QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f\,(i\not{D} - m_f)\,\psi_f - \frac{1}{2}\,{\rm Tr}\,(\mathcal{G}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}) \; . \tag{2.227}$$

Dass QCD flavor-blind ist, sieht man daran, dass der Beitrag aller Quark-Flavors zu $\mathcal{L}_{\rm QCD}$ (mit Ausnahme des Massenterms m_f) derselbe ist. Mit anderen Worten, die kovariante Ableitung, in der die Wechselwirkung der Quarks mit den Gluonen steckt, mischt die verschiedenen Quark-Flavors nicht miteinander. Dies ist der Unterschied zum Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung, die verschiedene Quark-Flavors ineinander umwandeln kann. Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch erwähnt, dass die Bewegungsgleichungen der QCD in Übungsaufgabe H8.2 abgeleitet werden.

3 Kanonische Quantisierung

3.1 Das neutrale skalare Feld

2.12.2020

In einer relativistischen Theorie hat es wenig Sinn, Ein-Teilchen-Systeme zu betrachten. Man kann nämlich bei ausreichender Energie stets **Teilchen-Antiteilchen-Paare** aus dem Vakuum erzeugen. Erinnern wir uns kurz an den Mechanismus im Bild der Lösungen der freien Dirac–Gleichung, vgl. Abschnitt 1.2.8 der Vorlesung "Quantenmechanik II". Die Idee ist, dass bereits im Vakuum die negativen Energiezustände komplett mit Fermionen besetzt sind, die sog. **Dirac–See**. Das Pauli–Prinzip verhindert nun, dass ein Teilchen positiver Energie unter Abstrahlung von Energie immer tiefer liegende Energiezustände negativer Energie besetzt. Bei der Teilchen–Antiteilchen–Paarerzeugung aus dem Vakuum wird ein Teilchen aus einem Zustand negativer Energie in einen Zustand positiver Energie gehoben. Zurück bleibt ein "Loch" in der Dirac–See. Das Loch, d.h. das Fehlen eines Teilchens, wird als Antiteilchen interpretiert, vgl. Abb. 3.1.

Die unendlich vielen Teilchen in der besetzten Dirac–See bedingen, dass die relativistische Beschreibung von Fermionen **nie** eine Ein-Teilchen-Theorie, sondern **immer** eine **Vielteilchen-Theorie** ist. Wie man Vielteilchen-Systeme quantenmechanisch beschreibt, ist aber wohlbekannt: man führt **Erzeugungs-** und **Vernichtungsoperatoren** ein, die Teilchen in einem gegebenen Quantenzustand erzeugen oder vernichten, s. Abschnitt 3.1.5 der Vorlesung "Statistische Mechanik". Mathematisch nennt man dies die **kanonische** oder **"zweite" Quantisierung** eines quantenmechanischen Systems (im Gegensatz zur "ersten" Quantisierung – der quantenmechanischen Beschreibung eines Ein-Teilchen-Systems mit Hilfe einer Wellengleichung, z.B. der Schrödinger–Gleichung).

Aber wie quantisiert man kanonisch in einer Feldtheorie? Betrachten wir zunächst ein neutrales (d.h. reelles) skalares Feld $\phi(X)$. Dieses hat eine Fourier–Darstellung der Form

$$\phi(X) = \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4}\, \tilde{\phi}(K)\, e^{-iK\cdot X} \,. \tag{3.1}$$

Hierbei ist $\mathrm{d}^4K = \mathrm{d}k_0\, \mathrm{d}^3\vec{k}$ und $K\cdot X = k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x}$. Wir fordern, dass $\phi(X)$ eine Lösung der **freien** Klein–Gordon–Gleichung (2.33) ist,

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(X) = \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4}\, \tilde{\phi}(K)\, \left(-K^2 + m^2\right) e^{-iK\cdot X} = 0 \,. \tag{3.2}$$

Weil die ebenen Wellen $e^{-iK\cdot X}$ ein vollständiges System linear unabhängiger Funktionen bilden, kann die linke Seite nur verschwinden, wenn entweder alle Fourier–Amplituden $\tilde{\phi}(K)$ verschwinden (was aber der trivialen Lösung $\phi(X) \equiv 0$ entspräche), oder wenn

$$K^2 = k_0^2 - \vec{k}^{\,2} = m^2 \iff k_0^2 \equiv E_k^2 = \vec{k}^{\,2} + m^2 \iff k_0 = \pm E_k = \pm\sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2} \,. \tag{3.3}$$

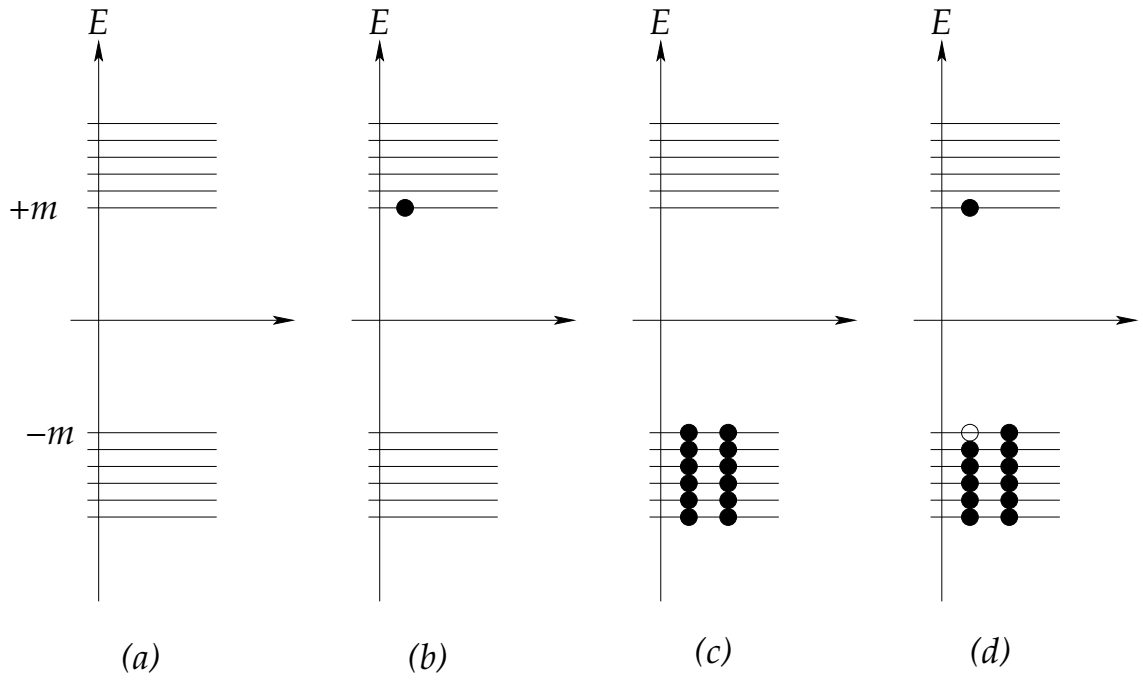


Abbildung 3.1: (a) Energiespektrum der Dirac–Gleichung. (b) Teilchen im Zustand $E_0 = m$. (c) Dirac-See. (d) Paarerzeugung im Vakuum: ein Teilchen aus den besetzten negativen Energiezuständen wird in einen Zustand positiver Energie gehoben, zurück bleibt ein "Loch".

Dies bedeutet, dass die Energie k_0 gerade die **relativistische Energie-Impuls-Beziehung** für ein **freies Teilchen** (bzw., für die Lösung mit dem negativen Vorzeichen, für ein **freies Antiteilchen**) erfüllen muss. Die Bedingung (3.3) bezeichnet man, in Anlehnung an die analoge Betrachtung im Fall der homogenen Wellengleichung in der Elektrodynamik (vgl. Abschnitt 4.1.4 der Vorlesung "Elektrodynamik"), auch als **Dispersionsrelation**.

Man kann die Dispersionsrelation (3.3) nun in die Fourier–Entwicklung (3.1) inkorporieren, indem man die Fourier–Amplituden in folgender Form schreibt,

$$\tilde{\phi}(K) = a_+(\vec{k})\,\frac{2\pi}{2E_k}\,\delta(k_0 - E_k) + a_-(\vec{k})\,\frac{2\pi}{2E_k}\,\delta(k_0 + E_k)\ . \tag{3.4}$$

Die δ–Funktionen in der Energie k_0 setzen den Wert für k_0 entweder auf $+E_k$ (für Lösungen positiver Energie, d.h. Teilchen) oder auf $-E_k$ (für Lösungen negativer Energie, d.h. Antiteilchen). Man sagt auch, die Energie k_0 wird "auf die Massenschale" (von Teilchen bzw. Antiteilchen) gesetzt.

Setzen wir den Ansatz (3.4) in die Fourier–Entwicklung (3.1) ein, so erhalten wir die **allgemeine Lösung der freien Klein–Gordon–Gleichung**,

$$\phi(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3\,2E_k}\,\left[a_+(\vec{k})\,e^{-i(E_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + a_-(\vec{k})\,e^{i(E_k t + \vec{k}\cdot\vec{x})}\right]\ , \tag{3.5}$$

wobei wir das k_0–Integral in Gl. (3.1) mit Hilfe der δ–Funktionen ausgeführt haben. Im zweiten Term führen wir noch eine Variablensubstitution durch, $\vec{k} \to -\vec{k}$, und schreiben

im folgenden abkürzenderweise $K \cdot X \equiv E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}$, d.h. im folgenden ist $(K^\mu) \equiv (E_k, \vec{k})^T$,

$$\phi(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2E_k} \left[a_+(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + a_-(-\vec{k})\, e^{iK\cdot X} \right] . \tag{3.6}$$

Weil das neutrale skalare Feld reell ist, $\phi(X) = \phi^*(X)$, muss gelten

$$a_+^*(\vec{k}) = a_-(-\vec{k}) \ , \quad a_-^*(-\vec{k}) = a_+(\vec{k}) \ , \tag{3.7}$$

d.h. $a_+(\vec{k})$ und $a_-(\vec{k})$ sind keine unabhängigen komplexwertigen Funktionen von $\vec{k}$. Es genügt, z.B. $a_+(\vec{k})$ zu benutzen. Wir unterdrücken der Einfachheit halber den Index "+" und schreiben

$$\phi(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2E_k} \left[a(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + a^*(\vec{k})\, e^{iK\cdot X} \right] . \tag{3.8}$$

Die **Quantisierung** des klassischen Feldes $\phi(X)$ erfolgt nun, indem man die Fourier–Amplituden $a(\vec{k})$ und $a^*(\vec{k})$ **operator-wertig** macht,

$$a(\vec{k}) \ \longrightarrow \ \hat{a}(\vec{k}) \ , \quad a^*(\vec{k}) \ \longrightarrow \ \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \ . \tag{3.9}$$

Wie wir sehen werden, ist $\hat{a}(\vec{k})$ der **Vernichtungsoperator** für ein Teilchen mit Impuls $\vec{k}$, und $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ der entsprechende **Erzeugungsoperator**. Mit der Ersetzung der Fourier–Amplituden durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wird auch $\phi(X)$ operator-wertig,

$$\hat{\phi}(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2E_k} \left[\hat{a}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\, e^{iK\cdot X} \right] . \tag{3.10}$$

Man beachte, dass $\hat{\phi}(X)$ ein hermitescher Operator ist, $\hat{\phi}(X) = \hat{\phi}^\dagger(X)$. Der Grund ist, dass $\hat{\phi}(X)$ ein **neutrales** Feld beschreibt. Der Feldoperator (3.10) erfüllt wie das Feld (3.8) ebenfalls die Klein–Gordon–Gleichung (2.33).

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ bzw. $\hat{a}(\vec{k})$ transformieren sich wie **Lorentz–Skalare** unter Lorentz–Transformationen, wie auch das Feld $\hat{\phi}(X)$. Um dies zu sehen, bemerken wir, dass die ebenen Wellen $e^{\pm iK\cdot X}$ nur von einem Lorentz–Skalar, $K \cdot X$, abhängen, sich also ebenfalls wie ein Lorentz–Skalar transformieren. Es bleibt dann nur noch zu zeigen, dass sich das Integrationsmaß, $\int \mathrm{d}^3\vec{k}/[(2\pi)^3 2E_k]$, wie ein Lorentz–Skalar transformiert. Dazu betrachten wir

$$\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, 2\pi\, \delta(K^2 - m^2)\, \Theta(k_0) \ . \tag{3.11}$$

Dies transformiert sich wie ein Lorentz–Skalar, denn unter Lorentz–Transformationen des Impulses, $K'_\mu = K_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$,

(i) bleibt d^4K invariant,

$$\mathrm{d}^4K' = \left| \frac{\partial K'_\mu}{\partial K_\nu} \right| \mathrm{d}^4K = |\det(\Lambda^\nu{}_\mu)|\, \mathrm{d}^4K = \mathrm{d}^4K \ , \tag{3.12}$$

da die Determinante von Lorentz–Transformationen ± 1 ist.

(ii) bleibt das Argument der δ–Funktion invariant, da es nur vom (lorentz-invarianten) Skalarprodukt $K'^2 = K^2$ abhängt,

$$\delta(K'^2 - m^2) = \delta(K^2 - m^2) \; . \tag{3.13}$$

(iii) ändert sich der Träger der Θ–Funktion nicht,

$$\Theta(k_0') = \Theta(k_0) \; , \tag{3.14}$$

weil Lorentz–Transformationen das Vorzeichen der Energie nicht ändern.

Nun berechnen wir mit Hilfe der bekannten Relation

$$\delta(f(k_0)) = \sum_i \frac{1}{|f'(k_{0,i})|} \, \delta(k_0 - k_{0,i}) \; , \quad f(k_{0,i}) = 0 \; ,$$

wobei in unserem Fall $f(k_0) = K^2 - m^2 = k_0^2 - E_k^2$, also $k_{0,\pm} = \pm E_k$ und $|f'(k_{0,\pm})| = 2E_k$, das lorentz-invariante Integral (3.11)

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4} \, 2\pi \, \delta(K^2 - m^2) \, \Theta(k_0) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4} \, \frac{2\pi}{2E_k} \, [\delta(k_0 - E_k) + \delta(k_0 + E_k)] \, \Theta(k_0) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \, \frac{1}{2E_k} \int \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \, 2\pi \, \delta(k_0 - E_k) \Theta(k_0) \\ &\equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \, \frac{1}{2E_k} \; . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Die zweite δ–Funktion in der ersten Zeile trägt aufgrund der Θ–Funktion nicht zum Integral bei. Da die linke Seite von Gl. (3.15) lorentz-invariant ist, muss es auch die rechte sein. Damit ist gezeigt, dass sich in Gl. (3.10) die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ bzw. $\hat{a}(\vec{k})$ wie das Feld $\hat{\phi}(X)$ transformieren, also ebenso wie dieses **Lorentz–Skalare** sind.

Zur Quantisierung einer Theorie genügt es natürlich nicht, irgendwelche Symbole mit "Hütchen" zu versehen. Wir müssen **Vertauschungsrelationen** für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aufstellen. Dazu erinnern wir uns zunächst daran, wie dies in der Ein-Teilchen-Mechanik vonstatten geht. In der klassischen Mechanik hat ein Teilchen eine gewisse Position $\vec{x}$ und besitzt einen gewissen Impuls $\vec{p} = \partial L / \partial \dot{\vec{x}}$. In der Quantenmechanik werden aus x_i und p_i **Operatoren**, $\hat{x}_i$ und $\hat{p}_i$, die die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \; , \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \, \delta_{ij} \; , \quad i, j = x, y, z \; , \tag{3.16}$$

erfüllen.

In einer feldtheoretischen Beschreibung übernimmt das Feld $\phi(X)$ die Rolle der Ortskoordinate $\vec{x}$, und das **kanonisch konjugierte Feld**

$$\pi(X) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi(X))} \tag{3.17}$$

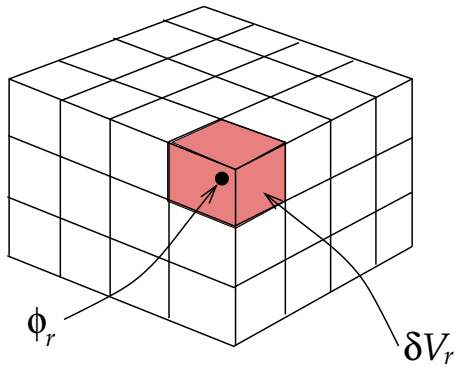


Abbildung 3.2: Diskretisierung des räumlichen Volumens.

übernimmt die Rolle des Impulses $\vec{p}$. Um Vertauschungsrelationen für $\hat{\phi}(X)$ und $\hat{\pi}(X)$ aufzustellen, gehen wir zunächst einen Schritt zurück und diskretisieren das räumliche Volumen, s. Abb. 3.2.

In der Zelle r mit Volumen δV_r nimmt das Feld den Wert $\phi_r(t)$ zur Zeit t an. Damit sind wir effektiv von einer feldtheoretischen Beschreibung wieder zu einer quantenmechanischen Beschreibung eines Vielteilchensystems mit den Freiheitsgraden ("Koordinaten") $\phi_r(t)$, $r = 1, 2, \ldots$, übergegangen. Wir benötigen nun noch die zu diesen "Koordinaten" korrespondierenden kanonisch konjugierten Impulse. Dann können wir Vertauschungsrelationen für Koordinaten und Impulse fordern. Zum Schluss bilden wir den Kontinuumslimes, indem wir das Zellenvolumen δV_r gegen null gehen lassen. Dies liefert dann die gesuchten Vertauschungsrelationen für $\hat{\phi}(X)$ und $\hat{\pi}(X)$.

Die Lagrange–**Funktion** in der Zelle r ist

$$L_r = \delta V_r \, \mathcal{L}_r \ , \tag{3.18}$$

wobei

$$\mathcal{L}_r \equiv \mathcal{L}(\phi_r, \dot{\phi}_r; t) \tag{3.19}$$

die Lagrange–**Dichte** in der Zelle r ist. Der kanonisch konjugierte **Impuls** in der Zelle r ist

$$p_r(t) \equiv \frac{\partial L_r}{\partial \dot{\phi}_r(t)} = \delta V_r \, \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{\phi}_r(t)} = \delta V_r \, \pi_r(t) \ , \tag{3.20}$$

wobei $\pi_r(t)$ das kanonisch konjugierte Feld in der Zelle r zum Zeitpunkt t ist. Wir machen nun das Feld $\phi_r(t)$ und den kanonisch konjugierten Impuls $p_r(t)$ zu **Operatoren**, indem wir (die aus der Quantenmechanik bekannten) Vertauschungsrelationen für diese Größen postulieren,

$$\left[\hat{\phi}_r(t), \hat{\phi}_s(t)\right] = [\hat{p}_r(t), \hat{p}_s(t)] = 0 \ , \quad \left[\hat{\phi}_r(t), \hat{p}_s(t)\right] = i \, \delta_{rs} \ . \tag{3.21}$$

Ersetzen wir $\hat{p}_r(t)$ durch $\hat{\pi}_r(t) = \hat{p}_r(t)/\delta V_r$, so folgt

$$\left[\hat{\phi}_r(t), \hat{\phi}_s(t)\right] = [\hat{\pi}_r(t), \hat{\pi}_s(t)] = 0 \ , \quad \left[\hat{\phi}_r(t), \hat{\pi}_s(t)\right] = i \, \frac{\delta_{rs}}{\delta V_r} \ . \tag{3.22}$$

Im Kontinuumslimes $\delta V_r \to 0$ geht die rechte Seite der letzten Vertauschungsrelation gegen unendlich, falls $r = s$, also wenn die Feldoperatoren $\hat{\phi}_r(t)$ und $\hat{\pi}_s(t)$ sich in derselben Zelle, bzw. im Kontinuumslimes am selben Ort befinden. Falls nicht, ist der Kommutator null. Dieser Sachverhalt wird im Kontinuumslimes natürlich durch eine δ–Funktion im Ort ausgedrückt. Im Kontinuumslimes werden die Vertauschungsrelationen (3.22) daher zu

$$\left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\phi}(t,\vec{x}')\right] = [\hat{\pi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{x}')] = 0 \ , \quad \left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}(t,\vec{x}')\right] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \ . \tag{3.23}$$

Man beachte, dass dies **Gleichzeit-Vertauschungsrelationen** sind, d.h. dass die Feldoperatoren zur **selben Zeit** t genommen werden. Dies scheint die relativistische Kovarianz der Theorie zunächst zu zerstören. Wir werden diese Vertauschungsrelationen aber lediglich nutzen, um entsprechende Vertauschungsrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ bzw. $\hat{a}(\vec{k})$ abzuleiten.

Wir definieren zunächst die Fourier–Moden

$$f_k(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}}\, e^{-iK\cdot X} \ . \tag{3.24}$$

Diese Funktionen bilden ein **orthonormales Funktionensystem** unter dem Skalarprodukt

$$\langle A^*, B\rangle \equiv \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, A^*(X)\, i \overleftrightarrow{\partial}_0\ B(X) \equiv \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \{A^*(X)\, i\partial_0 B(X) - [i\partial_0 A^*(X)]\, B(X)\} \ , \tag{3.25}$$

d.h.

$$\langle f_k^*, f_{k'}\rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, f_k^*(X)\, i \overleftrightarrow{\partial}_0\ f_{k'}(X) = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \ . \tag{3.26}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\langle f_k^*, f_{k'}\rangle &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \{f_k^*(X)\, i\partial_0 f_{k'}(X) - [i\partial_0 f_k^*(X)]\, f_{k'}(X)\} \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \frac{1}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{4E_k E_{k'}}} \left[e^{iK\cdot X}\, E_{k'}\, e^{-iK'\cdot X} + E_k\, e^{iK\cdot X} e^{-iK'\cdot X}\right] \\
&= \frac{E_{k'} + E_k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_k E_{k'}}}\, e^{i(E_k - E_{k'})t} \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\
&= \frac{E_{k'} + E_k}{(2\pi)^3\sqrt{4E_k E_{k'}}}\, e^{i(E_k - E_{k'})t}\, (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \equiv \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \ ,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

da für $\vec{k} = \vec{k}'$ auch $E_k = E_{k'}$, q.e.d.

Ganz analog zeigt man

$$\langle f_k, f_{k'}\rangle = \langle f_k^*, f_{k'}^*\rangle = 0 \ , \tag{3.28}$$

weil dann im Zähler in der letzten Zeile von Gl. (3.27) anstelle von $E_{k'} + E_k$ eben $E_{k'} - E_k$ bzw. $-E_{k'} + E_k$ steht, was für $\vec{k} = \vec{k}'$ gegen null geht.

Die Fourier–Entwicklung (3.10) lautet nun

$$\hat{\phi}(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_k}} \left[f_k(X)\, \hat{a}(\vec{k}) + f_k^*(X)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k})\right] \ . \tag{3.29}$$

Wir berechnen nun

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}\, f_k^*(X)\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\hat{\phi}(X) \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{k'}}}\,\left[f_k^*(X) i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\; f_{k'}(X)\hat{a}(\vec{k}') + f_k^*(X) i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\; f_{k'}^*(X)\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{k}'\,\sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}}\,\left[\langle f_k^*, f_{k'}\rangle\,\hat{a}(\vec{k}') + \langle f_k^*, f_{k'}^*\rangle\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] = \hat{a}(\vec{k})\;, \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

wobei wir die Glgen. (3.26) und (3.28) benutzt haben. Ganz analog zeigt man

$$
\hat{a}^\dagger(\vec{k}) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}\,\hat{\phi}(X)\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\; f_k(X)\;. \qquad (3.31)
$$

Nun können wir, basierend auf den Gleichzeit-Vertauschungsrelationen (3.23), Vertauschungsrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ableiten. Es ist

$$
\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathrm{d}^3\vec{x}'\,(2\pi)^3\sqrt{4E_kE_{k'}}\,\left[f_k^*(X)\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\hat{\phi}(X)\,,\,\hat{\phi}(X')\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\; f_{k'}(X')\right]\;, \qquad (3.32)
$$

wobei wir die abkürzende Schreibweise $(X'^\mu) = (t, \vec{x}')^T$ benutzt haben, d.h. die Zeitvariable soll bei X^μ und X'^μ **denselben** Wert annehmen. Wir berechnen zuerst den Kommutator in Gl. (3.32),

$$
\begin{aligned}
&\left[f_k^*(X)\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\hat{\phi}(X)\,,\,\hat{\phi}(X')\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\; f_{k'}(X')\right] \qquad (3.33) \\
&= f_k^*(X)\left[i\partial_0\,\hat{\phi}(X)\,,\,\hat{\phi}(X')\right] i\partial_0 f_{k'}(X') - [i\partial_0 f_k^*(X)]\left[\hat{\phi}(X)\,,\,\hat{\phi}(X')\right] i\partial_0 f_{k'}(X') \\
&- f_k^*(X)\left[i\partial_0\,\hat{\phi}(X)\,,\,i\partial_0\,\hat{\phi}(X')\right] f_{k'}(X') + [i\partial_0 f_k^*(X)]\left[\hat{\phi}(X)\,,\,i\partial_0\,\hat{\phi}(X')\right] f_{k'}(X')\;.
\end{aligned}
$$

Nun ist für das neutrale skalare Feld

$$
\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi\;, \qquad (3.34)
$$

wie man sich mit Hilfe der Lagrange–Dichte (2.32) leicht überzeugt. Also wird Gl. (3.33) zu

$$
\begin{aligned}
&\left[f_k^*(X)\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\hat{\phi}(X)\,,\,\hat{\phi}(X')\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\; f_{k'}(X')\right] \\
&= -f_k^*(X)\left[\hat{\pi}(X)\,,\,\hat{\phi}(X')\right]\partial_0 f_{k'}(X') + [\partial_0 f_k^*(X)]\left[\hat{\phi}(X)\,,\,\hat{\phi}(X')\right]\partial_0 f_{k'}(X') \\
&\quad + f_k^*(X)\,[\hat{\pi}(X)\,,\,\hat{\pi}(X')]\, f_{k'}(X') - [\partial_0 f_k^*(X)]\left[\hat{\phi}(X)\,,\,\hat{\pi}(X')\right] f_{k'}(X') \\
&= \{f_k^*(X)\, i\partial_0 f_{k'}(X') - [i\partial_0 f_k^*(X)]\, f_{k'}(X')\}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \\
&\equiv f_k^*(X)\, i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;\; f_{k'}(X')\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\;, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

wobei wir die Gleichzeit-Vertauschungsrelationen (3.23) benutzt haben. Gleichung (3.32) wird damit zu

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,(2\pi)^3\sqrt{4E_kE_{k'}}\,f_k^*(X)\,i\,\overleftrightarrow{\partial}_0\;f_{k'}(X)\\ &\equiv (2\pi)^3\sqrt{4E_kE_{k'}}\,\langle f_k^*, f_{k'}\rangle\\ &\equiv 2E_k\,(2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\;, \end{aligned} \tag{3.36}$$

wobei wir Gl. (3.26) benutzt haben. Dies ist schon eine der gesuchten Vertauschungsrelationen. Ganz ähnlich zeigt man

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')\right] = \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] = 0\;. \tag{3.37}$$

Der Beweis stützt sich auf die Glgen. (3.28).

4.12.2020

Nun definieren wir einen Operator $\hat{N}(\vec{k})$ durch die Relation

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \equiv 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{N}(\vec{k})\;. \tag{3.38}$$

Die δ–Funktion mit Argument null stört hier nicht weiter, sie ist lediglich eine Folge dessen, dass wir in einem unendlich großen räumlichen Volumen arbeiten. In einem endlichen Volumen $V = L^3$ sind die Impulse der ebenen Wellen diskretisiert, $k_i = (2\pi/L)n_i\,,\; n_i \in \mathbb{Z}\,,\; i = x, y, z$, so dass das Fourier–Integral

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = V\,\delta^{(3)}_{\vec{k},\vec{k}'}\;. \tag{3.39}$$

Im Limes $V \to \infty$ werden die Impulse kontinuierlich und das Kronecker–Delta zur δ–Funktion,

$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\;. \tag{3.40}$$

Damit können wir für $\vec{k} = \vec{k}'$ die Relation

$$\lim_{V\to\infty} V \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(0) \tag{3.41}$$

aufstellen. Der Term $(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)$ auf der rechten Seite von Gl. (3.38) ist also eigentlich als das (unendlich große) Volumen V des Systems zu interpretieren.

Der Operator $\hat{N}(\vec{k})$ kommutiert mit $\hat{N}(\vec{k}')$. Unter Benutzung von

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,,\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}')\right] &= \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}') - \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}')\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\\ &- \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}') + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}')\\ &= \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}') - \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}')\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\\ &- \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}') + \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})\\ &= \hat{a}^\dagger(\vec{k})\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right]\hat{a}(\vec{k}') - \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\left[\hat{a}(\vec{k}'), \hat{a}^\dagger(\vec{k})\right]\hat{a}(\vec{k})\\ &= 2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\,\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}') - \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k})\right]\\ &\equiv 0\;, \end{aligned} \tag{3.42}$$

wobei wir zum zweiten Gleichheitszeichen im letzten Term die Vertauschungsrelation (3.37) und zum vierten die Vertauschungsrelation (3.36) angewendet haben, erhalten wir

$$\left[\hat{N}(\vec{k})\,,\,\hat{N}(\vec{k}')\right] = \frac{1}{4E_kE_{k'}(2\pi)^6\left[\delta^{(3)}(0)\right]^2}\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,,\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}')\right] \equiv 0\,. \tag{3.43}$$

Dies bedeutet, dass der Fock–Raum von einer Basis aus **Produktzuständen**

$$|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ldots\rangle \equiv \bigotimes_{i=1}^{\infty}|n(\vec{k}_i)\rangle \tag{3.44}$$

aufgepannt wird. Hierbei sind die $|n(\vec{k}_i)\rangle$ **Eigenzustände** zum Operator $\hat{N}(\vec{k}_i)$ mit den **Eigenwerten** $n(\vec{k}_i)$,

$$\hat{N}(\vec{k}_i)\,|n(\vec{k}_i)\rangle = n(\vec{k}_i)\,|n(\vec{k}_i)\rangle\,. \tag{3.45}$$

In Gl. (3.44) haben wir stillschweigend die Impulse als abzählbar unendliche Menge angenommen. In einem endlichen Volumen V ist das korrekt, vgl. Gl. (3.39), aber im Limes $V\to\infty$ ist das streng genommen nicht richtig, da die Impulse ein Kontinuum an Werten annehmen. In diesem Limes ist die Notation in Gl. (3.44) lediglich symbolisch zu verstehen.

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
\left[\hat{N}(\vec{k})\,,\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\right] &= \frac{1}{2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,,\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\right]\\
&= \frac{1}{2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) - \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right]\\
&= \frac{1}{2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + 2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}) - \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right]\\
&= \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

wobei wir zum dritten Gleichheitszeichen die Vertauschungsrelation (3.36) benutzt haben. Analog

$$\begin{aligned}
\left[\hat{N}(\vec{k})\,,\,\hat{a}(\vec{k})\right] &= \frac{1}{2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,,\,\hat{a}(\vec{k})\right]\\
&= \frac{1}{2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) - \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right]\\
&= \frac{1}{2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\left[\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) - 2E_k(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{a}(\vec{k}) - \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right]\\
&= -\hat{a}(\vec{k})\,.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Mit diesen Relationen bestimmen wir nun den Eigenwert des Operators $\hat{N}(\vec{k})$ im Zustand $\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle$,

$$\begin{aligned}
\hat{N}(\vec{k})\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle &= \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,\hat{N}(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\right]\,|n(\vec{k})\rangle\\
&= \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,\left[\hat{N}(\vec{k})+1\right]\,|n(\vec{k})\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,\left[n(\vec{k})+1\right]\,|n(\vec{k})\rangle\\
&= \left[n(\vec{k})+1\right]\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle\,.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Dies bedeutet, dass $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ den Eigenwert $n(\vec{k})$ des Zustands $|n(\vec{k})\rangle$ **um eins erhöht**. Ganz analog

$$\begin{aligned}
\hat{N}(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle &= \left[\hat{a}(\vec{k})\,\hat{N}(\vec{k}) - \hat{a}(\vec{k})\right]\,|n(\vec{k})\rangle \\
&= \hat{a}(\vec{k})\,\left[\hat{N}(\vec{k}) - 1\right]\,|n(\vec{k})\rangle = \hat{a}(\vec{k})\,\left[n(\vec{k}) - 1\right]\,|n(\vec{k})\rangle \\
&= \left[n(\vec{k}) - 1\right]\,\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle\,. \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\hat{a}(\vec{k})$ den Eigenwert $n(\vec{k})$ des Zustands $|n(\vec{k})\rangle$ **um eins erniedrigt**. Die Glgen. (3.48) und (3.49) rechtfertigen die Bezeichnungen **Erzeugungsoperator** für $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$, **Vernichtungsoperator** für $\hat{a}(\vec{k})$ und **Teilchenzahloperator** für $\hat{N}(\vec{k})$. Erzeugt und vernichtet werden dabei **Teilchen mit 3–Impuls** $\vec{k}$. Im Einklang mit Gl. (3.45) mißt der Teilchenzahloperator $\hat{N}(\vec{k})$ die **Anzahl** von Teilchen mit 3–Impuls $\vec{k}$.

Wir berechnen nun den **Hamilton–Operator**. In Übungsaufgabe H3.1 haben wir den Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ für das neutrale skalare Feld bestimmt. Gemäß Gl. (2.54) brauchen wir die (00)–Komponente,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\hat{\Theta}^{00}(X) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\left[(\partial_0\hat{\phi})^2 + (\vec{\nabla}\hat{\phi})^2 + m^2\hat{\phi}^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{d}^3\vec{k}'}{(2\pi)^6 4E_kE_{k'}}\int \mathrm{d}^3\vec{x} \\
&\times \Big\{\left[\hat{a}(\vec{k})(-iE_k)e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,iE_k\,e^{iK\cdot X}\right]\left[\hat{a}(\vec{k}')(-iE_{k'})e^{-iK'\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,iE_{k'}\,e^{iK'\cdot X}\right] \\
&\quad + \left[\hat{a}(\vec{k})\,i\vec{k}e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,(-i\vec{k})\,e^{iK\cdot X}\right]\cdot\left[\hat{a}(\vec{k}')\,i\vec{k}'e^{-iK'\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,(-i\vec{k}')\,e^{iK'\cdot X}\right] \\
&\quad + m^2\left[\hat{a}(\vec{k})\,e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\,e^{iK\cdot X}\right]\left[\hat{a}(\vec{k}')e^{-iK'\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\,e^{iK'\cdot X}\right]\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{d}^3\vec{k}'}{(2\pi)^6 4E_kE_{k'}}\Bigg[(-E_kE_{k'} - \vec{k}\cdot\vec{k}' + m^2)\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}')\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{-i(K+K')\cdot X} \\
&\qquad + (E_kE_{k'} + \vec{k}\cdot\vec{k}' + m^2)\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{-i(K-K')\cdot X} \\
&\qquad + (E_kE_{k'} + \vec{k}\cdot\vec{k}' + m^2)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}')\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{i(K-K')\cdot X} \\
&\qquad + (-E_kE_{k'} - \vec{k}\cdot\vec{k}' + m^2)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{i(K+K')\cdot X}\Bigg]\,. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Die Fourier–Integrale sind

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{\pm i(K+K')\cdot X} &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')\,e^{\pm i(E_k+E_{k'})t} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')\,e^{\pm 2iE_kt}\,, \\
\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,e^{\pm i(K-K')\cdot X} &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\,e^{\pm i(E_k-E_{k'})t} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\,. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor in der ersten und vierten Zeile von Gl. (3.50) verschwindet jedoch, wenn wir die durch die δ–Funktion erzwungene Bedingung $\vec{k} = -\vec{k}'$ benutzen,

$$-E_kE_{k'} - \vec{k}\cdot\vec{k}' + m^2 \overset{\vec{k}=-\vec{k}'}{\longrightarrow} -E_k^2 + \vec{k}^{\,2} + m^2 \equiv 0\,. \qquad (3.52)$$

In der zweiten und dritten Zeile dagegen erhalten wir mit Hilfe der entsprechenden δ–Funktion

$$E_k E_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}' + m^2 \quad \stackrel{\vec{k}=\vec{k}'}{\longrightarrow} \quad E_k^2 + \vec{k}^{\,2} + m^2 \equiv 2E_k^2 \,. \tag{3.53}$$

Damit wird Gl. (3.50) zu

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 4E_k^2}\, 2E_k^2 \left[\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{4} \left[2\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{4} \left[4E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{N}(\vec{k}) + 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\right] \\
&= (2\pi)^3\delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, E_k \left[\hat{N}(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right] \,,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

wobei wir von der ersten zur zweiten Zeile die Vertauschungsrelation (3.36) und von der zweiten zur dritten Zeile die Definition (3.38) des Teilchenzahloperators angewendet haben. Gleichung (3.54) hat eine physikalisch anschauliche Interpretation: Der Teilchenzahloperator $\hat{N}(\vec{k})$ zählt die Teilchen in Zuständen mit Impuls $\vec{k}$. Dann wird über alle Impulsmoden mit dem Gewicht E_k integriert. Der Vorfaktor stellt, wie schon erwähnt, das (hier unendlich große) Volumen des Systems dar und wird lediglich aus Dimensionsgründen gebraucht, bzw. um aus dem Hamilton–Operator eine extensive Größe zu machen. Aber was stellt der Term 1/2 in der eckigen Klammer dar? Dies ist die vom harmonischen Oszillator wohlbekannte **Nullpunktsenergie**. Wir werden darauf weiter unten im Detail zu sprechen kommen.

Ganz analog zum Hamilton–Operator können wir auch den **Impuls–Operator** bestimmen. Mit Übungsaufgabe H3.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{P}^i &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \hat{\Theta}^{0i}(X) = -\int \mathrm{d}^3\vec{x}\, (\partial_0\hat{\phi})\partial_i\hat{\phi} \\
&= (2\pi)^3\delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, k^i \left[\hat{N}(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right] \equiv (2\pi)^3\delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, k^i\, \hat{N}(\vec{k}) \,.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Der Beweis ist Gegenstand von Übungsaufgabe H9.1. Der Faktor 1/2 in der eckigen Klammer (der wieder von den Nullpunktsschwingungen herrührt) kann diesmal einfach weggelassen werden, weil das Integral über die i–te Impulskomponente aus Symmetriegründen (der Integrand ist eine ungerade Funktion von k^i) verschwindet.

Wir verschaffen uns nun Klarheit über das **Eigenwertspektrum des Teilchenzahloperators** $\hat{N}(\vec{k})$. Offenbar wäre die Bezeichnung "Teilchenzahloperator" ungerechtfertigt, wenn $\hat{N}(\vec{k})$ negative Eigenwerte hätte. Es ist also sicher zu stellen, dass $n(\vec{k}) \geq 0\ \forall\, \vec{k}$. Dazu betrachten wir den Hilbert–Raum-Zustand $\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle$. Die Norm dieses Zustands ist

$$\begin{aligned}
\langle n(\vec{k})|\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,2E_k\,\langle n(\vec{k})|\hat{N}(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle \\
&= n(\vec{k})\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,2E_k\,\langle n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle \,,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

wobei wir die Glgen. (3.38) und (3.45) benutzt haben. Weil der Zustand $|n(\vec{k})\rangle$ eine positive Norm hat, $\langle n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle > 0$, ist das Vorzeichen der Norm des Zustands $\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle$ also identisch mit dem Vorzeichen von $n(\vec{k})$.

Als Hilbert–Raum-Zustand sollte der Zustand $\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle$ ebenfalls eine positive Norm haben. Dies bedeutet wiederum, dass der Eigenwert $n(\vec{k})$ **nicht negativ** sein sollte. Aber der Vernichtungsoperator $\hat{a}(\vec{k})$, wirkend auf den Zustand $|n(\vec{k})\rangle$, reduziert den Eigenwert dieses Zustands um eins. Um also zu verhindern, dass durch sukzessives Anwenden des Vernichtungsoperators irgendwann ein Zustand mit negativem $n(\vec{k})$ generiert wird, muss es also einen Zustand $|0\rangle$ geben, für den gilt

$$\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle \equiv 0\ . \tag{3.57}$$

Der Zustand $|0\rangle$ ist der sog. **Vakuumzustand**. Da das Ergebnis der Operation (3.57) bereits null ergibt, kann weiteres Anwenden von Vernichtungsoperatoren keine neuen Hilbert–Raum-Zustände erzeugen. Die Teilchenzahl des Vakuums kann nicht weiter reduziert werden, da es bereits keinerlei Teilchen enthält,

$$\hat{N}(\vec{k})\,|0\rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,2E_k}\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle \equiv 0\ , \tag{3.58}$$

d.h. der Vakuumzustand hat den Eigenwert $n(\vec{k}) \equiv 0$.

Wir können nun die Überlegungen zur Norm des Zustands $\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle$ abschließen. Falls $n(\vec{k}) > 0$, so ist auch die Norm dieses Zustands positiv, $\langle n(\vec{k})|\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,\hat{a}(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle > 0$. Falls aber $n(\vec{k}) = 0$, so muss es sich bei $|n(\vec{k})\rangle$ um den Vakuumzustand gehandelt haben, $|n(\vec{k})\rangle \equiv |0\rangle$. Aber dann ist $\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle \equiv \hat{a}(\vec{k})\,|0\rangle \equiv 0$ **kein** Zustand des Hilbert–Raums. Also sind lediglich Zustände $\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle$ für **positive** $n(\vec{k}) > 0$ wohldefinierte Hilbert–Raum-Zustände und diese haben eben positive Norm.

Man beachte, dass dies auch das Vakuum einschließt. Sei nämlich $|1_{\vec{k}}\rangle$ ein Zustand, wo sich genau **ein** Teilchen mit Impuls $\vec{k}$ im System befindet. Für diesen Zustand ist dann $n(\vec{k}) = 1$ und, da der Vernichtungsoperator den Eigenwert um eins reduziert, $\hat{a}(\vec{k})\,|1_{\vec{k}}\rangle \sim |0\rangle$. Nach den vorangegangenen Überlegungen zur Norm des Zustands $\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle$ hat der Vakuumzustand dann ebenfalls positive Norm, $\langle 0|0\rangle > 0$.

Man kann den Zustand $|1_{\vec{k}}\rangle$ aus dem Vakuumzustand durch Anwenden eines entsprechenden Erzeugungsoperators generieren,

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle \equiv |1_{\vec{k}}\rangle\ . \tag{3.59}$$

Offenbar gilt

$$\hat{N}(\vec{k})\,|1_{\vec{k}}\rangle = 1\,|1_{\vec{k}}\rangle\ . \tag{3.60}$$

Wenn man diese Überlegung durch wiederholtes Anwenden von $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ weiter verfolgt, so kommt man zu dem Schluss, dass $n(\vec{k})$ **nichtnegativ ganzzahlig** ist, $n(\vec{k}) \in \mathbb{N}_0$. Damit ist das Eigenwertspektrum des Teilchenzahloperators eindeutig festgelegt.

Wir betrachten nun das **Eigenwertspektrum des Hamilton–Operators**. Dieses ist gemäß Gl. (3.54) und nach den vorangegangenen Überlegungen zum Eigenwertspektrum des Teilchenzahloperators **positiv definit**,

$$\langle\hat{H}\rangle \equiv \langle\psi|\,\hat{H}\,|\psi\rangle > 0\ \ \forall\,|\psi\rangle\ , \tag{3.61}$$

denn $\langle \hat{N}(\vec{k}) \rangle \geq 0$, und alle anderen Terme und Faktoren in Gl. (3.54) sind positiv definit.

Wir können Gl. (3.54) aber sogar eine **physikalische Interpretation** geben. Offenbar ist

$$\hat{H}_{\text{osc}}(\vec{k}) \equiv E_k \left[\hat{N}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right] \tag{3.62}$$

der Hamilton–Operator für einen **einzelnen harmonischen Oszillator** mit der **Eigenfrequenz** E_k. Damit ist ein (nichtwechselwirkendes) quantenfeldtheoretisches System (neutraler skalarer Teilchen) nichts anderes als ein **Ensemble von unendlich vielen harmonischen Oszillatoren** mit den Eigenfrequenzen E_k. Der Hamilton–Operator (3.54) dieses Systems ist einfach die Summe (bzw. im Kontinuumslimes das Integral) über die Hamilton–Operatoren (3.62) dieser Oszillatoren,

$$\hat{H} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \, \hat{H}_{\text{osc}}(\vec{k}) \; . \tag{3.63}$$

Die Nullpunktsenergie des gesamten Systems ist der Erwartungswert von $\hat{H}$ im Vakuumzustand, der sog. **Vakuumerwartungswert** des Hamilton–Operators,

$$\begin{aligned} H_0 \equiv \langle 0|\hat{H}|0\rangle &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \, E_k \, \langle 0| \, \hat{N}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \, |0\rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \, E_k \, \frac{1}{2} \langle 0|0\rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \, \frac{E_k}{2} \; , \end{aligned} \tag{3.64}$$

wobei wir angenommen haben, dass der Vakuumzustand auf eins normiert ist, $\langle 0|0\rangle = 1$. Das Integral in Gl. (3.64) ist ganz offensichtlich divergent, der Vakuumerwartungswert der Energie ist also **unendlich**. Dies stellt aber kein echtes Problem dar, da wir alle Energien **relativ** zur Vakuumenergie messen können. Wir definieren den **renormierten Hamilton–Operator**

$$\hat{H}_{\text{ren}} \equiv \hat{H} - H_0 = \hat{H} - \langle 0|\hat{H}|0\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \, E_k \, \hat{N}(\vec{k}) \; . \tag{3.65}$$

Dies ist das erste und einfachste Beispiel für die Beseitigung von Unendlichkeiten durch **Renormierung** einer physikalischen Größe. Wir werden sehen, dass solche Unendlichkeiten in der Quantenfeldtheorie immer wieder auftreten.

Der Vakuumerwartungswert von $\hat{H}_{\text{ren}}$ ist offenbar null,

$$\langle 0|\hat{H}_{\text{ren}}|0\rangle = \langle 0|\hat{H}|0\rangle - \langle 0|H_0|0\rangle = H_0 - H_0 = 0 \; , \tag{3.66}$$

also ist das Spektrum von $\hat{H}_{\text{ren}}$ lediglich positiv **semi-**definit, $\langle \hat{H}_{\text{ren}} \rangle \geq 0$.

Wenn wir die Herleitung des Hamilton–Operators in Gl. (3.54) im Detail untersuchen, erkennen wir, dass Nullpunktsenergie (der Term 1/2) daher rührt, dass wir die Vertauschungsrelation

$$\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) = \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + 2E_k \, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$$

benutzt haben, um die Reihenfolge von Vernichtungs- und Erzeugungsoperator zu vertauschen. Der Vertauschungsrest, der zur Nullpunktsenergie führt, würde nicht auftreten, wenn wir die Reihenfolge dieser Operatoren ändern dürften, **ohne** dass ein Vertauschungsrest auftritt. Dies kann man formal durch die sog. **Normalordnung** von Operatoren erreichen. Im sog. **normalgeordneten Produkt** von Operatoren (symbolisiert durch Doppelpunkte, die die normal zu ordnenden Operatoren einschließen) werden alle Vernichtungsoperatoren **rechts** von den Erzeugungsoperatoren angeordnet, also z.B.

$$: \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) : \equiv \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \ . \tag{3.67}$$

Die Reihenfolge der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren untereinander spielt keine Rolle, da diese jeweils unter sich vertauschen. Der **normalgeordnete Hamilton–Operator** ist (vgl. Herleitung in Gl. (3.54))

$$\begin{aligned} : \hat{H} : \ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{4}\ : \left[\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\right] := \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{4}\,2\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{4}\,4E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{N}(\vec{k}) = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,E_k\,\hat{N}(\vec{k}) \\ &\equiv \hat{H}_{\mathrm{ren}} \ . \end{aligned} \tag{3.68}$$

Das quantisierte Klein–Gordon–Feld beschreibt **Bosonen**. Um dies zu sehen, betrachten wir den Zustand

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle = C_+(n(\vec{k}))\,|n(\vec{k})+1\rangle \ . \tag{3.69}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass der Erzeugungsoperator den Eigenwert $n(\vec{k})$ um eins erhöht, d.h. der Zustand auf der linken Seite muss proportional zum Zustand $|n(\vec{k})+1\rangle$ sein. Die Proportionalitätskonstante, die wir im folgenden bestimmen werden, haben wir mit $C_+(n(\vec{k}))$ bezeichnet. Gleichung (3.69) läßt sich sofort auf die Produktzustände (3.44) verallgemeinern,

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)\,|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ \ldots\ ,n(\vec{k}_i)\,,\ldots\rangle = C_+(n(\vec{k}_i))\,|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ \ldots\ ,n(\vec{k}_i)+1\,,\ \ldots\rangle \ . \tag{3.70}$$

Die Proportionalitätskonstante $C_+(n(\vec{k}))$ läßt sich aus der Normierung der Zustände $|n(\vec{k})\rangle$ berechnen. Wenn wir annehmen, dass **alle** Eigenzustände zum Teilchenzahloperator auf eins normiert sind, $\langle n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle = \langle n(\vec{k})+1|n(\vec{k})+1\rangle \equiv 1$, dann folgt aus dem Quadrat der Norm des Zustands (3.69)

$$\begin{aligned} &|C_+(n(\vec{k}))|^2\,\langle n(\vec{k})+1|n(\vec{k})+1\rangle \equiv |C_+(n(\vec{k}))|^2 \\ &= \langle n(\vec{k})|\,\hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle = \langle n(\vec{k})|\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,|n(\vec{k})\rangle \\ &= 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\langle n(\vec{k})|\,\hat{N}(\vec{k})+1\,|n(\vec{k})\rangle = 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\left[n(\vec{k})+1\right]\,\langle n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle \\ &\equiv 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\left[n(\vec{k})+1\right] \ . \end{aligned} \tag{3.71}$$

Wählen wir die (i.a. komplexe) Proportionalitätskonstante als reelle Zahl, so ergibt sich

$$C_+(n(\vec{k})) = \sqrt{2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\left[n(\vec{k})+1\right]} \ . \tag{3.72}$$

Analog zu Gl. (3.69) haben wir die Relation

$$\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle = C_-(n(\vec{k}))\,|n(\vec{k})-1\rangle\ . \tag{3.73}$$

Das Quadrat der Norm dieser Gleichung lautet

$$\begin{aligned}
&|C_-(n(\vec{k}))|^2\,\langle n(\vec{k})-1|n(\vec{k})-1\rangle \equiv |C_-(n(\vec{k}))|^2 = \langle n(\vec{k})|\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle \\
&= \ 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\langle n(\vec{k})|\,\hat{N}(\vec{k})\,|n(\vec{k})\rangle = 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,n(\vec{k})\,\langle n(\vec{k})|n(\vec{k})\rangle \\
&\equiv \ 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,n(\vec{k})\ .
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Wählen wir die Proportionalitätskonstante wieder als reelle Zahl, so ergibt sich

$$C_-(n(\vec{k})) = \sqrt{2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,n(\vec{k})}\ . \tag{3.75}$$

Für die Produktzustände (3.44) haben wir daher

$$\begin{aligned}
&\hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)\,|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ \ldots\ ,n(\vec{k}_i)\,,\ldots\rangle \\
&= \ \sqrt{2E_{k_i}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\left[n(\vec{k}_i)+1\right]}\,|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ \ldots\ ,n(\vec{k}_i)+1\,,\ldots\rangle\ , \\
&\hat{a}(\vec{k}_i)\,|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ \ldots\ ,n(\vec{k}_i)\,,\ldots\rangle \\
&= \ \sqrt{2E_{k_i}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,n(\vec{k}_i)}\,|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ \ldots\ ,n(\vec{k}_i)-1\,,\ldots\rangle\ .
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Die Produktzustände können aus dem Vakuumzustand durch wiederholtes Anwenden von

$$\frac{1}{\sqrt{2E_{k_i}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}}\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)$$

generiert werden,

$$|n(\vec{k}_1)\,,n(\vec{k}_2)\,,\ \ldots\ ,n(\vec{k}_i)\,,\ldots\rangle = \prod_i \left[\frac{\hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)}{\sqrt{2E_{k_i}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}}\right]^{n(\vec{k}_i)} \frac{1}{\sqrt{n(\vec{k}_i)!}}\,|0\rangle\ . \tag{3.77}$$

Der Faktor $1/\sqrt{n(\vec{k}_i)!}$ erklärt sich aus der ersten Gl. (3.76): danach liefert jedes Anwenden eines Erzeugungsoperators einen Faktor, der proportional zu $\sqrt{n(\vec{k}_i)+1}$ ist, wobei $n(\vec{k}_i)$ die **momentane** Anzahl von Teilchen mit Impuls $\vec{k}_i$ ist. Ausgehend vom Vakuumzustand ergibt dies bei $n(\vec{k}_i)$–maligen Anwenden des Erzeugungsoperators $\hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)$ gerade einen Faktor $\sqrt{n(\vec{k}_i)!}$, der durch den entsprechenden Faktor im Nenner kompensiert wird.

Weil es keine Einschränkung an die möglichen Werte von $n(\vec{k}_i)$ gibt (außer dass sie ganzzahlig positiv semi-definit sein müssen), können sich also **beliebig viele** Teilchen im Quantenzustand mit Impuls $\vec{k}_i$ befinden. Dies ist gerade die Eigenschaft von **Bosonen**, die sie von Fermionen, für die das Pauli-Prinzip gilt, unterscheidet.

Wir besprechen nun noch die **Normierung von Einteilchen-Zuständen**. Ein Zustand mit einem einzigen Teilchen mit Impuls $\vec{k}$ ist nach der vorangegangenen Diskussion

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle \;. \tag{3.78}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle &= \langle 0|\,\hat{a}(\vec{k}')\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\left[\hat{a}(\vec{k}'),\hat{a}^\dagger(\vec{k})\right]|0\rangle + \langle 0|\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}')\,|0\rangle \\
&= 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})\;,
\end{aligned} \tag{3.79}$$

wobei wir wieder angenommen haben, dass der Vakuumzustand auf eins normiert ist, $\langle 0|0\rangle \equiv 1$. Die Einteilchen-Zustände $|\vec{k}\rangle$ sind also in Lorentz–**kovarianter** Weise normiert.

Die **Einteilchen-Wellenfunktion** $\psi_{\vec{k}}(X)$ für ein Teilchen mit festem Impuls $\vec{k}$ am Raum-Zeit-Punkt X berechnet sich zu

$$\psi_{\vec{k}}(X) = \langle 0|\hat{\phi}(X)|\vec{k}\rangle \;. \tag{3.80}$$

Der "bra" auf der linken Seite ist der adjungierte Zustand zum "ket"

$$\hat{\phi}^\dagger(X)|0\rangle \;. \tag{3.81}$$

Dieser Zustand **erzeugt** am Raum-Zeit-Punkt X ein Teilchen aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$. Die Wellenfunktion (3.80) ist dann nichts anderes als die Projektion dieses Zustands auf einen Impuls-Eigenzustand $|\vec{k}\rangle$, d.h. sie mißt, wie groß der Beitrag dieses Impuls-Eigenzustands zum Zustand $\hat{\phi}^\dagger(X)|0\rangle$ ist. Setzen wir Gl. (3.10) in Gl. (3.80) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\psi_{\vec{k}}(X) &= \langle 0|\hat{\phi}(X)|\vec{k}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}\left[\langle 0|\hat{a}(\vec{k}')|\vec{k}\rangle e^{-iK'\cdot X} + \langle 0|\hat{a}^\dagger(\vec{k}')|\vec{k}\rangle e^{iK'\cdot X}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}\,\langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle\,e^{-iK'\cdot X} = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E_{k'}}\,2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k})\,e^{-iK'\cdot X} \\
&= e^{-iK\cdot X} \equiv e^{-i(E_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\;.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Hier haben wir von der ersten zur zweiten Zeile den zum "ket" (3.78) gehörenden "bra" benutzt, sowie die Tatsache, dass ein Erzeugungsoperator nach links auf das Vakuum angewendet null ergibt (der zum "ket" (3.57) entsprechende "bra"). Die Wellenfunktion (3.82) ist ganz offenbar eine **ebene Welle**, wie wir dies für Eigenzustände zum Impuls auch erwarten.

11.12.2020

3.2 Das geladene skalare Feld

Der Unterschied zum neutralen skalaren Feld ist, dass das geladene skalare Feld **komplexwertig** ist, $\Phi^*(X) \neq \Phi(X)$. Daher gibt es nun keine Gl. (3.7) entsprechende Relation

zwischen den Fourier–Amplituden $a_+(\vec{k})$ und $a_-(\vec{k})$, sie sind unabhängig. Auch die Feldoperatoren $\hat{\Phi}(X)$ und $\hat{\Phi}^\dagger(X)$ sind unabhängige Größen, $\hat{\Phi}^\dagger(X) \neq \hat{\Phi}(X)$. Wir müssen daher bei der kanonischen Quantisierung **zwei voneinander unabhängige** Sätze von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einführen und schreiben die Fourier–Zerlegung der Feldoperatoren in der Form

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[\hat{a}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + \hat{b}^\dagger(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] , \\
\hat{\Phi}^\dagger(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[\hat{b}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] .
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Es gilt offenbar $(\hat{\Phi}^\dagger)^\dagger = \hat{\Phi}$. Wir werden sehen, dass die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgende Bedeutung haben:

(i) $\hat{a}(\vec{k})$ vernichtet ein **Teilchen** mit Impuls $\vec{k}$ und **positiver** Ladung,

(ii) $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ erzeugt ein **Teilchen** mit Impuls $\vec{k}$ und **positiver** Ladung,

(iii) $\hat{b}(\vec{k})$ vernichtet ein **Anti-Teilchen** mit Impuls $\vec{k}$ und **negativer** Ladung,

(iv) $\hat{b}^\dagger(\vec{k})$ erzeugt ein **Anti-Teilchen** mit Impuls $\vec{k}$ und **negativer** Ladung.

Wir müssen nun wieder Vertauschungsrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren herleiten. Dies kann auf analoge Weise wie beim neutralen skalaren Feld über die Gleichzeit-Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren $\hat{\Phi}$ bzw. $\hat{\Phi}^\dagger$ geschehen. Das Resultat ist vollkommen analog zu den Glgen. (3.36) und (3.37),

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] &= \left[\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')\right] = 2E_k\,(2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') , \\
\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')\right] &= \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] = \left[\hat{b}(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}')\right] = \left[\hat{b}^\dagger(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')\right] \\
= \left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}')\right] &= \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}')\right] = \left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')\right] = \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')\right] = 0 .
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Wir berechnen nun den **Ladungsoperator** des komplexen Klein–Gordon–Feldes. Die quantisierte Version von Gl. (2.90) erhalten wir, indem wir die Felder durch die entspre-

chenden Feldoperatoren ersetzen,

$$
\begin{aligned}
\hat{Q} &= i \int \mathrm{d}^3\vec{x} \left[\hat{\Phi}^\dagger \partial_t \hat{\Phi} - \left(\partial_t \hat{\Phi}^\dagger\right) \hat{\Phi}\right] \\
&= i \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\, \mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^6 4 E_k E_{k'}} \int \mathrm{d}^3\vec{x} \\
&\times \left\{ \left[\hat{b}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] (-iE_{k'}) \left[\hat{a}(\vec{k}\,') e^{-iK'\cdot X} - \hat{b}^\dagger(\vec{k}\,')\, e^{iK'\cdot X}\right] \right. \\
&\quad \left. - (-iE_k) \left[\hat{b}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} - \hat{a}^\dagger(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] \left[\hat{a}(\vec{k}\,')\, e^{-iK'\cdot X} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}\,')\, e^{iK'\cdot X}\right] \right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\, \mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^6 4 E_k E_{k'}} \left[(E_{k'} - E_k)\, \hat{b}(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}\,') \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{-i(K+K')\cdot X} \right. \\
&\qquad - (E_{k'} + E_k)\, \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^\dagger(\vec{k}\,') \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{-i(K-K')\cdot X} \\
&\qquad + (E_{k'} + E_k)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}\,') \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{i(K-K')\cdot X} \\
&\qquad \left. - (E_{k'} - E_k)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{b}^\dagger(\vec{k}\,') \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, e^{i(K+K')\cdot X} \right] . \qquad (3.85)
\end{aligned}
$$

Mit den Glgen. (3.51) verschwinden der erste und der vierte Term und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\hat{Q} &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^\dagger(\vec{k})\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}^\dagger(\vec{k}) \hat{b}(\vec{k}) - 2E_k\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)\right] , \qquad (3.86)
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt die erste Vertauschungsrelation (3.84) benutzt haben. Definieren wir nun den **Teilchenzahloperator** durch die Gleichung

$$
\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) \equiv 2E_k\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)\, \hat{N}(\vec{k}) , \qquad (3.87)
$$

vgl. Gl. (3.38), und analog den **Anti-Teilchenzahloperator** durch

$$
\hat{b}^\dagger(\vec{k}) \hat{b}(\vec{k}) \equiv 2E_k\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)\, \hat{\bar{N}}(\vec{k}) , \qquad (3.88)
$$

so können wir den Ladungsoperator (3.86) schreiben als

$$
\hat{Q} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\hat{N}(\vec{k}) - \hat{\bar{N}}(\vec{k}) - 1\right] . \qquad (3.89)
$$

An dieser Gleichung wird offensichtlich, dass die Ladung der Anti-Teilchen der der Teilchen **entgegengesetzt** ist, d.h. **negativ**, falls die Teilchen **positive** Ladung tragen. Der letzte Term stellt den Vakuumerwartungswert der Ladung dar,

$$
\langle 0|\hat{Q}|0\rangle = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} . \qquad (3.90)
$$

Sie ist wieder unendlich groß, d.h. wir müssen wieder **renormieren**, um einen physikalisch sinnvollen Ausdruck zu erhalten. Wir definieren den **renormierten Ladungsoperator**, indem wir den Vakuumerwartungswert der Ladung von $\hat{Q}$ subtrahieren,

$$\hat{Q}_{\text{ren}} \equiv \hat{Q} - \langle 0|\hat{Q}|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\hat{N}(\vec{k}) - \hat{\bar{N}}(\vec{k})\right] \equiv :\hat{Q}: \ . \tag{3.91}$$

Im letzten Schritt haben wir wieder die Normalordnung ausgenutzt; sie entfernt offensichtlich den Vertauschungsrest, der bei Vertauschen von $\hat{b}(\vec{k})$ und $\hat{b}^\dagger(\vec{k})$ in Gl. (3.86) auftritt, d.h. genau den Vakuumerwartungswert der Ladung,

$$:\hat{b}(\vec{k})\hat{b}^\dagger(\vec{k}): = \hat{b}^\dagger(\vec{k})\hat{b}(\vec{k}) \ . \tag{3.92}$$

Wir geben noch den **Hamilton–Operator**,

$$\hat{H} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, E_k\left[\hat{N}(\vec{k}) + \hat{\bar{N}}(\vec{k}) + 1\right] \ , \tag{3.93}$$

des geladenen skalaren Feldes an. Die Rechnung erfolgt analog zum neutralen skalaren Fall, vgl. Gl. (3.54) und wird als Übungsaufgabe H9.2 gestellt. Den (unendlichen) Vakuumbeitrag kann man wieder durch Renormierung oder Normalordnung entfernen,

$$\hat{H}_{\text{ren}} \equiv \hat{H} - \langle 0|\hat{H}|0\rangle \equiv :\hat{H}: = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, E_k\left[\hat{N}(\vec{k}) + \hat{\bar{N}}(\vec{k})\right] \ . \tag{3.94}$$

Offenbar tragen Anti-Teilchen **negative** Ladung, aber **positive** Energie. Ganz analog berechnet man auch den **Impulsoperator** (s. Übungsaufgabe H9.2),

$$\hat{P}^i = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, k^i\left[\hat{N}(\vec{k}) + \hat{\bar{N}}(\vec{k}) + 1\right] \ . \tag{3.95}$$

Hier ist keine Renormierung oder Normalordnung nötig, der Vakuumerwartungswert verschwindet, weil der Integrand eine ungerade Funktion von k^i ist,

$$\langle 0|\hat{P}^i|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, k^i \equiv 0 \ . \tag{3.96}$$

Man beachte, dass der Impuls der Anti-Teilchen in **dieselbe** Richtung zeigt wie der der Teilchen.

Zum Schluss dieses Abschnitts berechnen wir noch Kommutatoren von Feldoperatoren bei **beliebigen** Zeiten,

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{\Phi}(X), \hat{\Phi}^\dagger(Y)\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{d}^3\vec{k}'}{(2\pi)^6 4E_k E_{k'}}\left\{\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')\right] e^{-i(K\cdot X - K'\cdot Y)} + \left[\hat{b}^\dagger(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}')\right] e^{i(K\cdot X - K'\cdot Y)}\right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\left[e^{-iK\cdot(X-Y)} - e^{iK\cdot(X-Y)}\right] \equiv i\bar{\Delta}(X-Y) \ .
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Hier haben wir für das erste Gleichheitszeichen nur die Kommutatoren von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren berücksichtigt, die nicht verschwinden. Für das zweite Gleichheitszeichen haben wir dann die Vertauschungsrelationen in der ersten Zeile von Gl. (3.84) benutzt. Das letzte Gleichheitszeichen stellt die Definition der Lorentz–invarianten Funktion $\bar{\Delta}(X)$ dar, also

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}(X-Y) &= i\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\left[e^{iK\cdot(X-Y)} - e^{-iK\cdot(X-Y)}\right] \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\left[e^{iE_k(x_0-y_0)}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-iE_k(x_0-y_0)}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right] \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\left[e^{iE_k(x_0-y_0)} - e^{-iE_k(x_0-y_0)}\right] \\
&= -2\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\, \sin\left[E_k(x_0-y_0)\right] \ . \qquad (3.98)
\end{aligned}$$

Hier haben wir von der zweiten zur dritten Zeile im ersten Term die Variablensubstitution $\vec{k} \to -\vec{k}$ durchgeführt (was das Vorzeichen von $E_k = \sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}$ nicht ändert). Von der dritten zur vierten Zeile haben wir die Euler-Relation $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ausgenutzt.

Offensichtlich ist

$$\lim_{x_0 \to y_0} \bar{\Delta}(X-Y) = 0 \ , \qquad (3.99)$$

und daher haben wir die Gleichzeit-Vertauschungsrelation

$$\left[\hat{\Phi}(t,\vec{x}), \hat{\Phi}^\dagger(t,\vec{y})\right] = 0 \ . \qquad (3.100)$$

Die Kommutatoren

$$\left[\hat{\Phi}(X), \hat{\Phi}(Y)\right] = \left[\hat{\Phi}^\dagger(X), \hat{\Phi}^\dagger(Y)\right] = 0 \qquad (3.101)$$

verschwinden aufgrund der Vertauschungsrelationen (3.84).

3.3 Das Dirac–Feld

Die Lösung der Dirac–Gleichung ist ein 4-Spinor. Man unterscheidet Dirac–Spinoren zu **positiver** und **negativer Energie**. Erstere lauten

$$u(\vec{k}, s) = \sqrt{E_k + m}\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2\, \chi^{(s)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{E_k + m}\, \chi^{(s)} \end{pmatrix} \ , \qquad (3.102)$$

welche **Teilchen** mit **positiver** Energie, Impuls $\vec{k}$ und Spin s beschreiben. Der 2-Spinor $\chi^{(s)}$ ist hier definiert als

$$\chi^{(+1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \chi^{(-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \qquad (3.103)$$

Die Dirac–Spinoren zu negativer Energie lauten

$$v(\vec{k},s) = \sqrt{E_k + m} \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{E_k+m}\,\eta^{(-s)} \\ \mathbb{1}_2\,\eta^{(-s)} \end{pmatrix} , \tag{3.104}$$

welche **Teilchen** mit **negativer** Energie, Impuls $-\vec{k}$ und Spin $-s$ beschreiben. Der 2-Spinor $\eta^{(-s)}$ ist definiert als

$$\eta^{(-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \eta^{(+1/2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.105}$$

Das Vorzeichen in der oberen Komponente von $\eta^{(+1/2)}$ ist dabei reine Konvention. Wir werden sehen, dass Teilchen mit negativer Energie, Impuls $-\vec{k}$ und Spin $-s$ gerade **Anti-Teilchen** mit **positiver** Energie, Impuls $+\vec{k}$ und Spin $+s$ entsprechen.

Die Spinoren (3.102) und (3.104) erfüllen die **Orthogonalitätsrelationen**

$$\begin{aligned} u^\dagger(\vec{k},s)\,u(\vec{k},s') &= 2E_k\,\delta_{s,s'} , \\ v^\dagger(\vec{k},s)\,v(\vec{k},s') &= 2E_k\,\delta_{s,s'} , \\ u^\dagger(\vec{k},s)\,v(-\vec{k},s') &= 0 , \\ v^\dagger(-\vec{k},s)\,u(\vec{k},s') &= 0 , \end{aligned} \tag{3.106}$$

wie man sich durch Nachrechnen leicht überzeugt. Sie erfüllen darüberhinaus die **Vollständigkeitsrelationen**

$$\begin{aligned} \sum_s u_\alpha(\vec{k},s)\,\bar{u}_\beta(\vec{k},s) &= (\not{K}+m)_{\alpha\beta} , \\ \sum_s v_\alpha(\vec{k},s)\,\bar{v}_\beta(\vec{k},s) &= (\not{K}-m)_{\alpha\beta} , \end{aligned} \tag{3.107}$$

wobei $(K^\mu) = (E_k, \vec{k})^T$ der 4-Impulsvektor auf der Massenschale $E_k = \sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}$ ist.

Die Spinoren zu positiver Energie erfüllen die Dirac–Gleichung in der Form

$$(\not{K} - m)\,u(\vec{k},s) = 0 , \tag{3.108}$$

während die zu negativer Energie der Dirac–Gleichung

$$(\not{K} + m)\,v(\vec{k},s) = 0 \tag{3.109}$$

genügen.

Die Fourier–Zerlegung des **klassischen** Dirac–Feldes lautet

$$\psi(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{s=\pm 1/2} \left[b_s(\vec{k})\,u(\vec{k},s)\,e^{-iK\cdot X} + d_s^*(\vec{k})\,v(\vec{k},s)\,e^{iK\cdot X} \right] . \tag{3.110}$$

Diese Gleichung ist analog der entsprechenden für das geladene skalare Feld. Den einzigen Unterschied bilden die Dirac–Spinoren $u(\vec{k},s)$ und $v(\vec{k},s)$ und die Summe über die Spins.

Da das Dirac–Feld eine **Ladung** trägt, ist es **komplexwertig**, und deshalb sind die beiden Fourier–Amplituden $b_s(\vec{k})$ und $d_s^*(\vec{k})$ voneinander **unabhängig** und können nicht durch komplexe Konjugation miteinander in Beziehung gesetzt werden. Auch dies ist völlig analog zum geladenen skalaren Feld.

Das **hermitesch konjugierte** (d.h. transponierte und komplex konjugierte) Dirac–Feld lautet

$$\psi^\dagger(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{s=\pm 1/2} \left[d_s(\vec{k})\, v^\dagger(\vec{k},s)\, e^{-iK\cdot X} + b_s^*(\vec{k})\, u^\dagger(\vec{k},s)\, e^{iK\cdot X} \right] . \tag{3.111}$$

Das klassische Dirac–Feld (3.110) erfüllt die Dirac–Gleichung,

$$\begin{aligned} &(i\not{\partial} - m)\,\psi(X) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{s=\pm 1/2} \left[b_s(\vec{k})\,(\not{K} - m)\, u(\vec{k},s)\, e^{-iK\cdot X} - d_s^*(\vec{k})\,(\not{K} + m)\, v(\vec{k},s)\, e^{iK\cdot X} \right] \\ &= 0 , \end{aligned} \tag{3.112}$$

wobei wir die Glgen. (3.108) und (3.109) benutzt haben. Ähnlich zeigt man, dass auch das hermitesch konjugierte Feld (3.111) die entsprechend hermitesch konjugierte Dirac–Gleichung erfüllt.

Wir berechnen nun die **Energie** des **klassischen** Dirac–Feldes. Dazu müssen wir zunächst das **kanonisch konjugierte Feld** π aus der Dirac–Lagrange–Dichte (2.111) berechnen,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \bar{\psi}(i\gamma^0) \equiv i\,\psi^\dagger . \tag{3.113}$$

Per Definition ist die **Hamilton–Dichte** $\mathcal{H}$ die Legendre–Transformierte der Lagrange–Dichte,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\partial_0\psi - \mathcal{L} \\ &= i\,\psi^\dagger\partial_0\psi - \bar{\psi}\,(i\not{\partial} - m)\,\psi = \bar{\psi}\, i\gamma^0\partial_0\psi - \bar{\psi}\left(i\gamma^0\partial_0 + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} - m\right)\psi \\ &= \bar{\psi}\left(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m\right)\psi . \end{aligned} \tag{3.114}$$

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir die (00)–Komponente des Energie-Impuls-Tensors, Θ^{00}, berechnen. Lösungen der Dirac–Gleichung erfüllen selbige, d.h. Gl. (2.114), also gilt für diese

$$i\gamma^0\partial_0\psi = \left(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m\right)\psi . \tag{3.115}$$

Falls ψ eine Lösung der Dirac–Gleichung ist, können wir die Hamilton–Dichte (3.114) also auch schreiben als

$$\mathcal{H}\big|_{\psi \text{ ist Lösung der Dirac–Gl.}} = \bar{\psi}\, i\gamma^0\partial_0\psi = i\psi^\dagger\partial_0\psi . \tag{3.116}$$

Die Energie für Lösungen der Dirac–Gleichung lautet also

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathcal{H} = i\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\psi^\dagger(X)\,\partial_0\psi(X) \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^6 4E_kE_{k'}} \sum_{s,s'} \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\left[d_s(\vec{k})\,v^\dagger(\vec{k},s)\,e^{-iK\cdot X} + b_s^*(\vec{k})\,u^\dagger(\vec{k},s)\,e^{iK\cdot X}\right] \\
&\qquad\qquad \times(-iE_{k'})\left[b_{s'}(\vec{k}\,')\,u(\vec{k}\,',s')\,e^{-iK'\cdot X} - d_{s'}^*(\vec{k}\,')\,v(\vec{k}\,',s')\,e^{iK'\cdot X}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^6 4E_kE_{k'}}\,E_{k'} \\
&\times \sum_{s,s'}\Big[d_s(\vec{k})\,b_{s'}(\vec{k}\,')\,v^\dagger(\vec{k},s)\,u(\vec{k}\,',s')\,e^{-i(E_k+E_{k'})t}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}\,') \\
&\quad - d_s(\vec{k})\,d_{s'}^*(\vec{k}\,')\,v^\dagger(\vec{k},s)\,v(\vec{k}\,',s')\,e^{-i(E_k-E_{k'})t}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}\,') \\
&\quad + b_s^*(\vec{k})\,b_{s'}(\vec{k}\,')\,u^\dagger(\vec{k},s)\,u(\vec{k}\,',s')\,e^{i(E_k-E_{k'})t}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}\,') \\
&\quad - b_s^*(\vec{k})\,d_{s'}^*(\vec{k}\,')\,u^\dagger(\vec{k},s)\,v(\vec{k}\,',s')\,e^{i(E_k+E_{k'})t}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}\,')\Big]\ , \qquad (3.117)
\end{aligned}
$$

wobei wir nach dem Ausmultiplizieren der eckigen Klammern gleich die Relationen (3.51) benutzt haben. Die Terme in der ersten und vierten Zeile verschwinden aufgrund der dritten und vierten Orthogonalitätsrelation (3.106). Die verbleibenden Terme lassen sich mit Hilfe der ersten und zweiten Orthogonalitätsrelation (3.106) weiter vereinfachen,

$$
\begin{aligned}
H &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\,\frac{1}{2}\sum_{s,s'}\left[b_s^*(\vec{k})\,b_{s'}(\vec{k}) - d_s(\vec{k})\,d_{s'}^*(\vec{k})\right]\,2E_k\,\delta_{s,s'} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\,E_k\sum_{s}\left[b_s^*(\vec{k})\,b_s(\vec{k}) - d_s(\vec{k})\,d_s^*(\vec{k})\right]\ . \qquad (3.118)
\end{aligned}
$$

Nun sehen wir uns mit einem schwerwiegenden Problem konfrontiert: die Energie H ist offenbar **nicht** positiv-definit. Falls z.B. $b_s(\vec{k}) = 0\ \forall\,\vec{k}, s$ während $d_s(\vec{k}) \neq 0$ für wenigstens ein $\vec{k}$ und s, so ist die Energie sogar **negativ**! Wir werden sehen, dass die **Quantisierung** des Dirac–Feldes dieses Problem löst, aber nur, wenn wir fordern, dass Dirac–Teilchen **Fermionen** sind (wie es das Spin-Statistik-Theorem für Teilchen mit halbzahligem Spin auch verlangt), d.h. dass die zu Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erhobenen Fourier–Amplituden $\hat{b}_s(\vec{k})$, $\hat{b}^\dagger(\vec{k})$, $\hat{d}_s(\vec{k})$ und $\hat{d}^\dagger(\vec{k})$ **Anti-Vertauschungsrelationen** erfüllen.

Wir quantisieren nun die Felder (3.110) und (3.111),

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\sum_{s=\pm 1/2}\left[\hat{b}_s(\vec{k})\,u(\vec{k},s)\,e^{-iK\cdot X} + \hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\,v(\vec{k},s)\,e^{iK\cdot X}\right]\ , \\
\hat{\psi}^\dagger(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\sum_{s=\pm 1/2}\left[\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\,u^\dagger(\vec{k},s)\,e^{iK\cdot X} + \hat{d}_s(\vec{k})\,v^\dagger(\vec{k},s)\,e^{-iK\cdot X}\right]\ . \qquad (3.119)
\end{aligned}
$$

Die Interpretation der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wird folgende sein:

(i) $\hat{b}_s(\vec{k})$ vernichtet ein **Teilchen** mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s,

(ii) $\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})$ erzeugt ein **Teilchen** mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s,

(iii) $\hat{d}_s(\vec{k})$ vernichtet ein **Anti-Teilchen** mit Impuls $+\vec{k}$ und Spin $+s$,

(iv) $\hat{d}_s^\dagger(\vec{k})$ erzeugt ein **Anti-Teilchen** mit Impuls $+\vec{k}$ und Spin $+s$.

Wie im Fall des geladenen skalaren Feldes tragen Anti-Teilchen **entgegengesetzte** Ladung wie Teilchen.

Der Hamilton–Operator läßt sich sofort hinschreiben; er folgt aus einer Rechnung, die vollkommen analog zu der ist, die zu Gl. (3.118) geführt hat (man muss beim Ausmultiplizieren natürlich die Reihenfolge der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren beachten, aber dies haben wir in der obigen Herleitung schon bei den Fourier–Amplituden, die lediglich reine Zahlen sind, getan),

$$\begin{aligned} \hat{H} &= i \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \hat{\psi}^\dagger(X)\, \partial_0 \hat{\psi}(X) = \dots \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\, E_k \sum_s \left[\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\, \hat{b}_s(\vec{k}) - \hat{d}_s(\vec{k})\, \hat{d}_s^\dagger(\vec{k}) \right] . \end{aligned} \tag{3.120}$$

Dieser Ausdruck hat nach wie vor das Problem mit negativen Energien, wenn wir **Vertauschungsrelationen** für $\hat{d}_s(\vec{k})$ und $\hat{d}_s^\dagger(\vec{k})$ fordern würden, weil dann der zweite Term umgeschrieben werden könnte in

$$-\hat{d}_s(\vec{k})\, \hat{d}_s^\dagger(\vec{k}) = -\hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\, \hat{d}_s(\vec{k}) - 2E_k\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = -\, 2E_k\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \left[\hat{\bar{N}}_s(\vec{k}) + 1 \right] ,$$

wobei $\hat{\bar{N}}_s(\vec{k})$ der **Teilchenzahloperator** für **Anti-**Teilchen mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s ist. Dieser hat, wie üblich, positiv semi-definite Eigenwerte und daher ist das Problem mit den negativen Energien aufgrund des negativen Vorzeichens vor diesem Ausdruck (noch) nicht gelöst.

Die Situation stellt sich jedoch anders dar, wenn wir **Anti-Vertauschungsrelationen** für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren fordern,

$$\left\{ \hat{b}_s(\vec{k}), \hat{b}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} = \left\{ \hat{d}_s(\vec{k}), \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} = 2E_k\, \delta_{s,s'}\, (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') , \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{b}_s(\vec{k}), \hat{b}_{s'}(\vec{k}') \right\} &= \left\{ \hat{b}_s^\dagger(\vec{k}), \hat{b}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} = \left\{ \hat{d}_s(\vec{k}), \hat{d}_{s'}(\vec{k}') \right\} = \left\{ \hat{d}_s^\dagger(\vec{k}), \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} \\ = \left\{ \hat{b}_s(\vec{k}), \hat{d}_{s'}(\vec{k}') \right\} &= \left\{ \hat{b}_s^\dagger(\vec{k}), \hat{d}_{s'}(\vec{k}') \right\} = \left\{ \hat{b}_s(\vec{k}), \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} = \left\{ \hat{b}_s^\dagger(\vec{k}), \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} = 0 . \end{aligned}$$

Man beachte die Analogie zu den entsprechenden Relationen (3.84) im Fall des geladenen skalaren Feldes. Mit der ersten Vertauschungsrelation schreibt sich der Hamilton–Operator nun

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\, E_k \sum_s \left[\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\, \hat{b}_s(\vec{k}) + \hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\, \hat{d}_s(\vec{k}) - 2E_k\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right] \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, E_k \sum_s \left[\hat{N}_s(\vec{k}) + \hat{\bar{N}}_s(\vec{k}) - 1 \right] , \end{aligned} \tag{3.122}$$

wobei wir **Teilchenzahloperatoren** für Teilchen und Antiteilchen mit Impuls $\vec{k}$ und Spin s über die Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\hat{b}_s(\vec{k}) &= 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{N}_s(\vec{k})\ , \\ \hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\hat{d}_s(\vec{k}) &= 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{\bar{N}}_s(\vec{k})\ , \end{aligned} \tag{3.123}$$

definiert haben. Der Hamilton–Operator (3.122) ist zwar aufgrund des letzten Terms in eckigen Klammern immer noch nicht positiv definit, aber man kann dies beheben, indem man den Vakuumerwartungswert der Energie,

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = -(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,2E_k\ , \tag{3.124}$$

abzieht (der Faktor 2 vor E_k resultiert aus den zwei Spin-Einstellmöglichkeiten). Der **renormierte Hamilton–Operator** ist **positiv semi-definit**, wie wir es erwarten,

$$\hat{H}_{\mathrm{ren}} = \hat{H} - \langle 0|\hat{H}|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,E_k\sum_s\left[\hat{N}_s(\vec{k}) + \hat{\bar{N}}_s(\vec{k})\right]\ . \tag{3.125}$$

Man beachte, dass **Normalordnung** von fermionischen Operatoren bei Vertauschen von einem Erzeugungs- und einem Vernichtungsoperator jeweils ein zusätzliches Minuszeichen bedingt, also z.B.

$$:\hat{d}_s(\vec{k})\,\hat{d}_s^\dagger(\vec{k}):\ = -\hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\,\hat{d}_s(\vec{k})\ . \tag{3.126}$$

Dann gilt auch

$$\hat{H}_{\mathrm{ren}} \equiv :\hat{H}:\ . \tag{3.127}$$

Die Anti-Vertauschungsrelationen (3.121) haben noch eine weitere Konsequenz. Man betrachte z.B. den Zustand

$$\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle\ ,$$

bei dem man versucht, zwei Teilchen mit **demselben** Impuls $\vec{k}$ und Spin s aus dem Vakuum zu erzeugen. Aufgrund der Anti-Vertauschungsrelationen (3.121) ist dieser Zustand aber identisch mit seinem negativem, d.h. er muss verschwinden,

$$\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle = -\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle \equiv 0\ ; \tag{3.128}$$

man **kann nicht** zwei Teilchen mit denselben Quantenzahlen im selben Zustand haben. Dies ist gerade die Manifestation des **Pauli–Prinzips**, es handelt sich also bei den Quanten des Dirac–Feldes um **Fermionen**. Die Anti-Vertauschungsrelationen stellen sicher, dass das Pauli–Prinzip erfüllt ist.

Nun betrachten wir den **Ladungsoperator** (wir unterdrücken den Faktor e, der streng

genommen noch auftreten sollte)

$$\begin{aligned}
\hat{Q} &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\hat{\mathcal{J}}^0(X) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\hat{\psi}^\dagger(X)\,\hat{\psi}(X) \\
&= \ldots = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_s \left[\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\,\hat{b}_s(\vec{k}) + \hat{d}_s(\vec{k})\,\hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_s \left[\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\,\hat{b}_s(\vec{k}) - \hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\,\hat{d}_s(\vec{k}) + 2E_k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\right] \\
&= (2\pi)^3\delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_s \left[\hat{N}_s(\vec{k}) - \hat{\bar{N}}_s(\vec{k}) + 1\right] ,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

wobei wir die Rechnung ein wenig abgekürzt haben, weil sie vollkommen analog zu der verläuft, die zu Gl. (3.118) geführt hat. Die **renormierte** bzw. **normalgeordnete** Version des Ladungsoperators lautet

$$\hat{Q}_{\text{ren}} = :\hat{Q}: = \hat{Q} - \langle 0|\hat{Q}|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_s \left[\hat{N}_s(\vec{k}) - \hat{\bar{N}}_s(\vec{k})\right] . \tag{3.130}$$

Offensichtlich tragen Anti-Teilchen zwar **positive** Energie, vgl. Gl. (3.125), aber **entgegengesetzte** Ladung wie Teilchen.

Zum Schluss dieses Abschnitts berechnen wir noch die Gleichzeit-Anti-Vertauschungsrelationen zwischen $\hat{\psi}(t,\vec{x})$ und $\hat{\psi}^\dagger(t,\vec{y})$ (da $\hat{\psi}^\dagger$ wegen Gl. (3.113) proportional zum kanonisch konjugierten Feldoperator $\hat{\pi}$ ist, erwarten wir ein nicht-triviales Ergebnis)

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{\psi}_\alpha(t,\vec{x}),\, \hat{\psi}_\beta^\dagger(t,\vec{x}\,')\right\} &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^6 4E_k E_{k'}} \sum_{s,s'} \\
\times \quad & \Big(\left\{\hat{b}_s(\vec{k}), \hat{b}_{s'}^\dagger(\vec{k}\,')\right\} u_\alpha(\vec{k},s) u_\beta^\dagger(\vec{k}\,',s')\, e^{-i(K\cdot X - K'\cdot X')} \\
& + \left\{\hat{d}_s^\dagger(\vec{k}), \hat{d}_{s'}(\vec{k}\,')\right\} v_\alpha(\vec{k},s) v_\beta^\dagger(\vec{k}\,',s')\, e^{i(K\cdot X - K'\cdot X')}\Big) .
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Hier haben wir $X'^\mu \equiv (t,\vec{x}\,')^T$ abgekürzt und nach Einsetzen der Fourier-Zerlegung (3.119) für die Feldoperatoren und Ausmultiplizieren lediglich die nichtverschwindenden Antikommutatoren aufgeführt. Benutzen wir nun Gl. (3.121) für letztere, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{\psi}_\alpha(t,\vec{x}),\, \hat{\psi}_\beta^\dagger(t,\vec{x}\,')\right\} &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_s \\
\times \quad & \left[u_\alpha(\vec{k},s) u_\beta^\dagger(\vec{k},s)\, e^{+i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} + v_\alpha(\vec{k},s) v_\beta^\dagger(\vec{k},s)\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\right] \\
= \quad & \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left\{\left[(\not{K} + m)\gamma_0\right]_{\alpha\beta} e^{+i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} + \left[(\not{K} - m)\gamma_0\right]_{\alpha\beta} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\right\} ,
\end{aligned} \tag{3.132}$$

wobei wir im letzten Schritt die Vollständigkeitsrelation (3.107) mit $\bar{u} = u^\dagger\gamma_0$, $\bar{v} = v^\dagger\gamma_0$ verwendet haben. Substituieren wir im zweiten Term die Integrationsvariable $\vec{k} \to -\vec{k}$, so können wir den Ebenen-Wellen-Faktor ausklammern und es heben sich wegen

$$\not{K} = E_k\gamma_0 - \vec{k}\cdot\vec{\gamma} \overset{\vec{k}\to-\vec{k}}{\longrightarrow} E_k\gamma_0 + \vec{k}\cdot\vec{\gamma}$$

einige Terme zwischen dem ersten und zweiten Term weg. Wir erhalten wegen $(\gamma_0\gamma_0)_{\alpha\beta} \equiv (\mathbb{1}_4)_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}$

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(t,\vec{x}),\, \hat{\psi}^\dagger_\beta(t,\vec{x}\,')\right\} = \delta_{\alpha\beta} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{+i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} \equiv \delta_{\alpha\beta}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,') \;. \tag{3.133}$$

Dies ergibt wegen Gl. (3.113)

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}_\beta(t,\vec{x}\,')\right\} = i\delta_{\alpha\beta}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,') \;, \tag{3.134}$$

also die kanonische **Anti-**Vertauschungsrelation zwischen Feldern und kanonisch konjugierten Feldern.

Ganz analog berechnet man

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(t,\vec{x}),\, \hat{\psi}_\beta(t,\vec{x}\,')\right\} = \left\{\hat{\psi}^\dagger_\alpha(t,\vec{x}),\, \hat{\psi}^\dagger_\beta(t,\vec{x}\,')\right\} = 0 \;. \tag{3.135}$$

16.12.2020

3.4 Das Photon–Feld

Masselose Vektorfelder, d.h. **Eichfelder**, haben, wie wir aus der Vorlesung "Elektrodynamik" wissen, **zwei transversale Polarisationsfreiheitsgrade**. Die **Lorentz–kovariante** mathematische Beschreibung geschieht in Form des 4–Vektorpotentials A^μ, welches als Lorentz–Vektor jedoch **vier** Komponenten bzw. Freiheitsgrade besitzt. Bei der Quantisierung von Eichfeldern gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten, mit den zusätzlichen (und daher **unphysikalischen**) Freiheitsgraden umzugehen:

(i) Man kann die unphysikalischen Freiheitsgrade mit Hilfe der **Eichfreiheit** bei der Wahl des Eichfeldes **explizit** eliminieren. Dabei legt man die Eichung **vollständig** fest. Lediglich die physikalischen Freiheitsgrade werden quantisiert. Dies hat aber den Verlust der Lorentz–Kovarianz zur Folge.

(ii) Man quantisiert die unphysikalischen Freiheitsgrade mit und erhält die Kovarianz der Formulierung. Die überflüssige Information, die in diesen Freiheitsgraden steckt, muss dann aber in der Beschreibung physikalischer Prozesse sorgfältig isoliert werden.

Wir wenden uns zunächst der ersten Möglichkeit zu. Da Freiheitsgrade interner Symmetriegruppen bei diesen Überlegungen keine Rolle spielen, fokussieren wir uns im folgenden der Einfachheit halber auf das elektromagnetische Eichfeld; Gluonen oder elektroschwache Eichfelder werden vollkommen analog behandelt.

3.4.1 Quantisierung in vollständig fixierter Eichung

Die Lagrange–Dichte des elektromagnetischen Feldes ist in Gl. (2.129) gegeben. Die resultierenden Bewegungsgleichungen sind die (inhomogenen) Maxwell-Gleichungen (2.138) (in Abwesenheit von elektrischen Ladungsströmen j^ν verschwindet die Inhomogenität). Setzen wir die Definition (2.130) des Feldstärketensors ein, so erhalten wir

$$\Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \;. \tag{3.136}$$

Die Lagrange–Dichte (2.129) ist invariant unter $U(1)$–Eichtransformationen (2.97) des 4–Vektorpotentials A^μ. Sei A^μ ein Eichfeld (in einer zunächst nicht weiter spezifizierten Eichung) und wählen wir beispielsweise die skalare Funktion $\Lambda(X)$ als Lösung der Gleichung

$$\Box\Lambda(X) = -e\,\partial_\mu A^\mu(X)\ , \tag{3.137}$$

so erhalten für die 4–Divergenz des nach Gl. (2.97) **transformierten** Eichfeldes

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\partial^\mu\Lambda = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e}\,\Box\Lambda = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e}\,(-e\,\partial_\mu A^\mu) \equiv 0\ . \tag{3.138}$$

Dies ist die sog. **Lorenz–Eichung**. Genauer gesagt, wählt man eine skalare Funktion Λ, welche die Differentialgleichung (3.137) für ein gegebenes Eichfeld A^μ erfüllt und addiert deren 4–Gradienten zu diesem Eichfeld gemäß Gl. (2.97), so ist das entsprechend **transformierte** Eichfeld A'^μ in **Lorenz–Eichung**.

Das transformierte Eichfeld A'^μ erfüllt ebenfalls die Bewegungsgleichung (3.136), die sich jetzt aber aufgrund der Lorenz–Eichbedingung (3.138) vereinfacht,

$$\Box A'^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A'^\mu = \Box A'^\nu = 0\ . \tag{3.139}$$

Dies sind vier homogene Wellengleichungen für die vier Komponenten von A'^ν. Obwohl diese vier Wellengleichungen voneinander entkoppelt sind, sind sie dennoch nicht voneinander unabhängig: die Lorenz–Eichbedingung (3.138) verknüpft alle vier Komponenten miteinander. Im Prinzip kann sie auch benutzt werden, um eine der Komponenten (und hier zweckmäßigerweise eine der unphysikalischen) durch die anderen drei auszudrücken.

Da das elektromagnetische Feld jedoch nur **zwei** unabhängige Freiheitsgrade besitzt, ist **eine** dieser drei Komponenten immer noch **unphysikalisch**. Der Grund dafür ist, dass, obwohl wir die Eichfreiheit benutzt haben, um eine unphysikalische Komponente zu eliminieren, die Lorenz–Eichung nicht **alle** Komponenten von A'^μ **vollständig** festlegt, oder mit anderen Worten, A'^μ **eindeutig** macht. Um dies zu sehen, nehmen wir an, dass A'^μ ein Eichfeld in Lorenz–Eichung ist, also Gl. (3.138) erfüllt. Wir können nun eine **weitere** Eichtransformation durchführen,

$$A'^\mu \longrightarrow A''^\mu = A'^\mu + \frac{1}{e}\,\partial^\mu\Lambda'\ . \tag{3.140}$$

Wir wählen nun Λ' so, dass es die homogene Wellengleichung

$$\Box\Lambda' = 0 \tag{3.141}$$

erfüllt. Dann ist das neue Eichfeld A''^μ **ebenfalls in Lorenz–Eichung**,

$$\partial_\mu A''^\mu = \partial_\mu A'^\mu + \frac{1}{e}\,\Box\Lambda' \equiv 0\ , \tag{3.142}$$

weil schon A'^μ in Lorenz–Eichung war. Dennoch unterscheidet sich A''^μ von A'^μ. D.h. die Lorenz–Eichbedingung legt A'^μ nicht vollständig fest, q.e.d.

Wir nutzen nun diese sog. **residuale Eichfreiheit** und wählen Λ' so, dass

$$\partial_0\Lambda' = -e\,A'_0\ . \tag{3.143}$$

Es stellt sich die Frage, ob diese Forderung einen Widerspruch zur Bedingung (3.141) impliziert. Nehmen wir an, dass Λ' nach wie vor diese Gleichung erfüllt. Da A'^{μ} in Lorenz–Eichung ist, erhalten wir aus den Glgen. (3.141) und (3.143) als Bedingung an Λ', dass

$$\Delta\Lambda' = \left(-\Box + \partial_0^2\right)\Lambda' = \partial_0^2\Lambda' = -e\,\partial_0 A_0' = e\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' \,. \tag{3.144}$$

Da die räumliche und zeitliche Abhängigkeit von $\Lambda'(X)$ voneinander unabhängig sind, ist es kein Problem, sowohl Gl. (3.143) als auch Gl. (3.144) zu fordern, womit dann automatisch auch Gl. (3.141) erfüllt ist.

Gleichung (3.143) bedeutet, dass die **Zeitkomponente** des transformierten Eichfelds A''^{μ} verschwindet,

$$A_0'' = A_0' + \frac{1}{e}\,\partial_0\Lambda' = A_0' + \frac{1}{e}(-e\,A_0') \equiv 0 \,. \tag{3.145}$$

Damit vereinfacht sich auch die Lorenz–Eichbedingung (3.142) für das Eichfeld A''^{μ},

$$\partial_\mu A''^{\mu} = \partial_0 A_0'' + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}'' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}'' = 0 \,. \tag{3.146}$$

Die beiden Eichbedingungen (3.145) und (3.146) nennt man **Strahlungseichung**. Sie legen das Eichfeld A''^{μ} **vollständig** fest. Man spricht daher auch von **vollständig fixierter Eichung**. Im folgenden lassen wir den Doppelstrich am Eichfeld der Übersichtlichkeit halber weg; falls nicht anders vereinbart, sei A^{μ} bereits in Strahlungseichung.

Der aufmerksame Leser wird feststellen, dass die Bedingung (3.146) nichts anderes als die **Coulomb–Eichung** ist, die wir schon aus der Vorlesung "Elektrodynamik" (Abschnitt 1.3.4) kennen. Die Bedingung (3.145) ist die sog. **temporale axiale Eichung**. Axiale Eichbedingungen haben in der Regel die Form

$$n_\mu A^{\mu} = 0 \,. \tag{3.147}$$

Für die temporale axiale Eichung ist dann speziell $n^{\mu} = (1,0,0,0)^T$ zu wählen.

Die Strahlungseichbedingungen (3.145) und (3.146) eliminieren ganz offensichtlich **alle** unphysikalischen Komponenten des 4–Vektorpotentials: die zeitliche Komponente verschwindet aufgrund von Gl. (3.145) identisch, $A_0 = 0$, und Gl. (3.146) kann benutzt werden, um eine der räumlichen Komponenten von A^{μ} zu eliminieren. Damit bleiben nur die physikalischen Komponenten von A^{μ} übrig.

Wir quantisieren nun das elektromagnetische Feld in Strahlungseichung. Dabei orientieren wir uns, soweit dies möglich ist, an der Quantisierung des neutralen skalaren Feldes in Abschnitt 3.1. Zunächst berechnen wir die **kanonisch konjugierten Felder**,

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0 \,, \tag{3.148}$$

da die Lagrange–Dichte nicht von $\partial_0 A_0$ abhängt. Dass das zu A_0 kanonisch konjugierte Feld verschwindet, bedeutet, dass A_0 kein unabhängiger Freiheitsgrad ist. In der Tat haben wir mit Hilfe der temporal-axialen Eichbedingung (3.145) A_0 bereits explizit eliminiert. Die anderen kanonisch konjugierten Felder lauten

$$\pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -\frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -\frac{1}{2}\left(F^{0i} - F^{i0}\right) = F^{i0} \equiv E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_0 A^i \,, \tag{3.149}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (3.145) benutzt haben.

Nun fordern wir **Gleichzeit-Vertauschungsrelationen** in Analogie zum neutralen skalaren Fall, Gl. (3.23), also

$$\left[\hat{A}_i(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] = i\, g_i{}^j \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,') \,. \tag{3.150}$$

Hier ist anzumerken, dass das **ko**variante Vektorpotential A_i kanonisch konjugiert zum **kontra**varianten Feld π^i ist, vgl. Gl. (3.149); dies erklärt die Stellung der Lorentz–Indizes auf der linken Seite der Gleichung. Auf der rechten Seite bemerken wir, dass $g_i{}^j \equiv \delta_{ij}$, also genau was wir erwarten, nämlich dass der Kommutator verschwindet, wenn $i \neq j$. Für $i = j$ haben wir dann eine Gleichzeit-Vertauschungsrelation wie im neutralen skalaren Fall, Gl. (3.23).

Leider ist Gl. (3.150) **inkorrekt**, sie kann nicht die richtige Gleichzeit-Vertauschungsrelation darstellen. Dies sieht man daran, dass diese Gleichung nicht im Einklang mit der Strahlungseichbedingung (3.146) ist. Bilden wir nämlich die 3–Divergenz der linken Seite von Gl. (3.150), so erhalten wir

$$\partial^i \left[\hat{A}_i(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] = \left[\partial^i \hat{A}_i(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] = 0 \,, \tag{3.151}$$

aufgrund von Gl. (3.146), während die rechte Seite offensichtlich nicht verschwindet,

$$i\, \partial^j \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,') \neq 0 \,. \tag{3.152}$$

Dieser Widerspruch wird dadurch aufgelöst, dass wir eine **modifizierte** Gleichzeit-Vertauschungsrelation fordern. Um diese abzuleiten, ersetzen wir zunächst den metrischen Tensor auf der rechten Seite von Gl. (3.150) durch einen allgemeinen Rang-2 Tensor $\Delta_i{}^j$,

$$\left[\hat{A}_i(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] = i\, \Delta_i{}^j \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,') \,. \tag{3.153}$$

Der Tensor $\Delta_i{}^j$ kann keine gewöhnliche Zahl sein, denn sonst kommen wir in ähnliche Schwierigkeiten wie mit dem metrischen Tensor in Gl. (3.150). Es wird sich herausstellen, dass es sich um einen **Differentialoperator** handelt, also **Ableitungen** nach den Komponenten des Ortsvektors $\vec{x}$ enthält, $\Delta_i{}^j \equiv \Delta_i{}^j[\vec{\nabla}]$. Seine Form wird nun so bestimmt, dass die modifizierte Gleichzeit-Vertauschungsrelation (3.153) im Einklang mit der Strahlungseichbedingung (3.146) ist. Dazu benutzen wir die Fourier–Darstellung der δ–Funktion und die Tatsache, dass der Differentialoperator $\Delta_i{}^j$ auf den Ortsvektor $\vec{x}$ wirkt, also unter das Fourier–Integral gezogen werden kann. Ziehen wir noch der Zweckmäßigkeit halber den kovarianten Index i nach oben, machen ihn also zum kontravarianten Index, so erhalten wir

$$\left[\hat{A}^i(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] = i\, \Delta^{ij}[\vec{\nabla}] \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} = i \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \Delta^{ij}[i\vec{k}]\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} \,. \tag{3.154}$$

Im letzten Schritt haben wir noch ausgenutzt, dass wirkend auf ebene Wellen $\Delta^{ij}[\vec{\nabla}] \equiv \Delta^{ij}[i\vec{k}]$. Bilden wir nun von dieser Gleichung die 3–Divergenz, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i \left[\hat{A}^i(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] = i \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \Delta^{ij}[i\vec{k}]\, \partial_i\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} \\ &= i \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \Delta^{ij}[i\vec{k}]\, (ik^i)\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} = -\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, k^i\, \Delta^{ij}[i\vec{k}]\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} \,. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Da die ebenen Wellen ein linear unabhängiges Funktionensystem darstellen, kann diese Gleichung nur dann korrekt sein, wenn

$$k^i\,\Delta^{ij}[i\vec{k}] = 0 \tag{3.156}$$

gilt. Dies bedeutet, dass $\Delta^{ij}[i\vec{k}]$ der **Projektionsoperator** auf den zweidimensionalen Unterraum **orthogonal** zur durch $\vec{k}$ definierten Richtung sein muss,

$$\Delta^{ij}[i\vec{k}] = -\delta^{ij} + \frac{k^i\,k^j}{\vec{k}^{\,2}}\ . \tag{3.157}$$

Man rechnet leicht nach, dass dieser Projektor Gl. (3.156) erfüllt,

$$k^i\,\Delta^{ij}[i\vec{k}] = -k^i\,\delta^{ij} + k^i\,\frac{k^i\,k^j}{\vec{k}^{\,2}} = -k^j + \frac{\vec{k}^{\,2}\,k^j}{\vec{k}^{\,2}} = 0\ .$$

Mit anderen Worten, $\Delta^{ij}[i\vec{k}]$ projiziert auf den Unterraum, der **transversal** zum Wellenzahlvektor $\vec{k}$ des Eichfeldes, also zur Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle, steht. Dieser transversale Unterraum wird, wie wir aus der Vorlesung "Elektrodynamik" (Abschnitt 4.1.3) wissen, durch die beiden (linear unabhängigen) **Polarisationsvektoren** aufgespannt. Da die beiden Polarisationsvektoren den physikalischen Freiheitsgraden des Eichfelds entsprechen, wird also mit $\Delta^{ij}[i\vec{k}]$ auf den **physikalischen Unterraum** projiziert.

Setzen wir Gl. (3.157) in Gl. (3.154) ein, so erhalten wir als korrekte Gleichzeit-Vertauschungsrelation

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A}^i(t,\vec{x}),\,\hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] &= i\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\Delta^{ij}[i\vec{k}]\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} = -i\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left(\delta^{ij}-\frac{k^i\,k^j}{\vec{k}^{\,2}}\right)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\\
&= -i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\,\partial^j}{\Delta}\right)\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')}\\
&= -i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\,\partial^j}{\Delta}\right)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,') \equiv i\,\Delta^{ij}[\vec{\nabla}]\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,')\ .
\end{aligned} \tag{3.158}$$

Hier haben wir die Wirkung von $\vec{\nabla}$ auf ebene Wellen durch die Ersetzung $\vec{k}\to -i\vec{\nabla}$ rückgängig gemacht, so dass wir den Operator $\Delta^{ij}[\vec{\nabla}]$ wieder vor das Integral ziehen konnten.

Die beiden anderen Gleichzeit-Vertauschungsrelationen, die wir noch fordern müssen, lauten

$$\left[\hat{A}^i(t,\vec{x}),\,\hat{A}^j(t,\vec{x}\,')\right] = \left[\hat{\pi}^i(t,\vec{x}),\,\hat{\pi}^j(t,\vec{x}\,')\right] = 0\ . \tag{3.159}$$

Die Bewegungsgleichungen (3.136) vereinfachen sich in Strahlungseichung zu

$$\Box\vec{A} = 0\ . \tag{3.160}$$

Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung lautet

$$\vec{A}(X) = \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\sum_{\lambda=1}^{2}\vec{\varepsilon}^{\,(\lambda)}(\vec{k})\left[a^{(\lambda)}(\vec{k})\,e^{-iK\cdot X} + a^{(\lambda)*}(\vec{k})\,e^{iK\cdot X}\right]\ , \tag{3.161}$$

mit $(K^\mu) = (E_k, \vec{k})^T$. Dies ist vollkommen analog zur allgemeinen Lösung der Klein–Gordon–Gleichung für das neutrale skalare Feld. Da auch das Eichfeld $\vec{A}$ reell ist, sind die beiden Fourier–Amplituden vor den ebenen Wellenfaktoren $e^{\pm iK\cdot X}$ durch komplexe Konjugation miteinander verknüpft. Der einzige Unterschied zum neutralen skalaren Feld ist das Auftreten der beiden **Polarisationsvektoren** $\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})$, $\lambda = 1, 2$, die die Basisvektoren des physikalischen Unterraumes transversal zu $\vec{k}$ bilden, in dem auch der Vektor $\vec{A}$ liegt. Dies garantiert dann auch die **Transversalität** der elektromagnetischen Felder (s. Vorlesung "Elektrodynamik", Abschnitt 4.1.2). Man beachte, dass es zu **jedem** $\vec{k}$ zwei Polarisationsvektoren gibt.

Wir überprüfen nun durch Einsetzen, dass Gl. (3.161) eine Lösung der Wellengleichung (3.160) ist,

$$0 = \Box\vec{A}(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})(-K^2) \left[a^{(\lambda)}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + a^{(\lambda)*}(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] . \tag{3.162}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Polarisationsvektoren und der ebenen Wellen kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn

$$K^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad E_k^2 = \vec{k}^{\,2} \quad \Longleftrightarrow \quad E_k = |\vec{k}| \equiv k\ . \tag{3.163}$$

Dies ist die (erwartete) Dispersionsrelation für masselose Teilchen.

Die Bedingung (3.146) besagt

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(X) = i \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})\cdot\vec{k} \left[a^{(\lambda)}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} - a^{(\lambda)*}(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] , \tag{3.164}$$

was (aufgrund der linearen Unabhängigkeit der ebenen Wellen) nur erfüllt werden kann, wenn

$$\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})\cdot\vec{k} = 0\ . \tag{3.165}$$

Dies ist die Transversalitätsbedingung für die Polarisationsvektoren $\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})$. Da es nur zwei unabhängige Richtungen gibt, die transversal zu $\vec{k}$ stehen, kann es auch nur zwei linear unabhängige Polarisationsvektoren geben, $\vec{\varepsilon}^{(1)}(\vec{k})$ und $\vec{\varepsilon}^{(2)}(\vec{k})$, d.h. die Summe über λ in Gl. (3.161) hat in der Tat nur zwei Terme, $\lambda = 1, 2$. Die zwei Polarisationsvektoren können **orthogonal** zueinander gewählt werden,

$$\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k})\cdot\vec{\varepsilon}^{(\lambda')}(\vec{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}\ . \tag{3.166}$$

Nun quantisieren wir das Eichfeld (3.161), indem wir die Fourier–Amplituden zu Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren erheben,

$$\hat{\vec{A}}(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] , \tag{3.167}$$

Für den Feldoperator des kanonisch konjugierten Feldes erhalten wir aufgrund von Gl. (3.149)

$$\hat{\vec{\pi}}(X) = -\partial_0\hat{\vec{A}}(X) = i \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} - \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\, e^{iK\cdot X}\right] , \tag{3.168}$$

Mit Hilfe der Gleichzeit-Vertauschungsrelationen (3.158) und (3.159) können wir nun die Vertauschungsrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$ und $\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})$ bestimmen. Dies verläuft vollkommen analog zum Fall des neutralen skalaren Feldes, s. Abschnitt 3.1, der einzige Unterschied ist das Auftreten der Polarisationsvektoren. Wir stellen diese Rechnung als Übungsaufgabe H10 (i). Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}),\, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}\,')\right] &= 2k\,\delta_{\lambda\lambda'}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}\,')\;, \\ \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}),\, \hat{a}^{(\lambda')}(\vec{k}\,')\right] &= \left[\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}),\, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}\,')\right] = 0\;. \end{aligned} \tag{3.169}$$

Der Hamilton–Operator ist (für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes s. Gl. (1.106) der Vorlesung "Elektrodynamik")

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\left(\hat{\vec{E}}^{\,2} + \hat{\vec{B}}^{\,2}\right)\;. \tag{3.170}$$

In Übungsaufgabe H10 (ii) ist zu zeigen, dass man dies in Strahlungseichung in die Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\left(\hat{\vec{\pi}}^{\,2} - \hat{\vec{A}}\cdot\Delta\hat{\vec{A}}\right) \tag{3.171}$$

bringen kann ($\hat{\vec{\pi}} \equiv -\partial_0\hat{\vec{A}}$, s. Gl. (3.149)). Setzt man dann die Glgen. (3.167) und (3.168) ein, so erhält man nach kurzer Rechnung (die man in Übungsaufgabe H10 (iii) nachvollziehen soll)

$$\hat{H} = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k}\,k\sum_{\lambda=1}^{2}\left[\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}) + \frac{1}{2}\,2k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\right]\;. \tag{3.172}$$

Führt man nun den **Teilchenzahloperator für Photonen mit Polarisation λ und Impuls $\vec{k}$** über die Relation

$$2k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{N}^{(\lambda)}(\vec{k}) \equiv \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}) \tag{3.173}$$

ein, so erhalten wir als Endergebnis

$$\hat{H} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,k\sum_{\lambda=1}^{2}\left[\hat{N}^{(\lambda)}(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right]\;. \tag{3.174}$$

Dieser Ausdruck ist wiederum sehr anschaulich interpretierbar: es wird die Zahl der Photonen mit Polarisation λ und Impuls $\vec{k}$ gemessen und anschließend über alle Polarisationen und Impulse summiert (bzw. integriert). Die Nullpunktsenergie kann man wieder durch Renormierung oder Normalordnung beseitigen,

$$\hat{H}_{\mathrm{ren}} \equiv \hat{H} - \langle 0|\hat{H}|0\rangle = :\hat{H}: = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,k\sum_{\lambda=1}^{2}\hat{N}^{(\lambda)}(\vec{k})\;. \tag{3.175}$$

18.12.2020

3.4.2 Kovariante Quantisierung

Es ist nicht notwendig, die Lorentz–Kovarianz bei der Quantisierung des Eichfeldes aufzugeben, man kann das Eichfeld auch in einer **kovarianten Eichung**, z.B. der **Lorenz–Eichung** (3.138), quantisieren. Dann benötigt man aber Gleichzeit-Vertauschungsrelationen für **alle** vier Komponenten des Eichfeldes $\hat{A}^\mu$ und die des zugehörigen kanonisch konjugierten Feldes $\hat{\pi}^\nu \equiv \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\hat{A}_\nu)$,

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}_\mu(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}_\nu(t,\vec{x}')\right] &= i\, g_{\mu\nu}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\ , \\ \left[\hat{A}_\mu(t,\vec{x}),\, \hat{A}_\nu(t,\vec{x}')\right] &= [\hat{\pi}_\mu(t,\vec{x}),\, \hat{\pi}_\nu(t,\vec{x}')] = 0\ . \end{aligned} \tag{3.176}$$

Nun ergibt sich aber das Problem, dass, wie wir schon in Gl. (3.148) gesehen haben, $\pi_0 = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0 A^0) \equiv 0$. Daher sollte der erste Kommutator (3.176) für $\mu = \nu = 0$ verschwinden, und nicht gleich $i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$ sein. Um die Kovarianz zu erhalten, benötigen wir also ein π_0, welches nicht verschwindet. Dies bedingt aber, dass wir die Lagrange–Dichte ändern. Dies wiederum würde im allgemeinen die Bewegungsgleichungen verändern, was wir im Prinzip vermeiden sollten.

Eine Änderung der Lagrange–Dichte ist nur dann erlaubt, wenn sie zu **eichäquivalenten** Bewegungsgleichungen für A^μ führt, d.h. zu den Maxwell–Gleichungen in einer **bestimmten Eichung**, in unserem Fall also der Lorenz–Eichung, s. Gl. (3.139). Wir suchen also nach der Lagrange–Dichte, die gemäß den Euler–Lagrange–Gleichungen (2.30) für Felder **direkt** auf die Maxwell–Gleichungen in der Form (3.139) führt. Diese Lagrange–Dichte nennt man dann **eichfixierte Lagrange–Dichte**. Wir versuchen es mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, \left(\partial_\lambda A^\lambda\right)^2\ , \tag{3.177}$$

d.h. wir addieren den **eichfixierenden** Term $-\frac{1}{2}\left(\partial_\lambda A^\lambda\right)^2$ zur gewohnten Lagrange–Dichte des elektromagnetischen Feldes. Die Bewegungsgleichungen nach Euler–Lagrange lauten dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\mu\left(\partial_\lambda A^\lambda g^{\mu\nu}\right) \\ &= \Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu + \partial^\nu\partial_\lambda A^\lambda \equiv \Box A^\nu\ , \end{aligned} \tag{3.178}$$

also genau das erwünschte Resultat (3.139) der Maxwell–Gleichungen in Lorenz–Eichung!

Im allgemeinen kann man den eichfixierenden Term noch mit einer Konstante multiplizieren, so dass

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}\, (\partial\cdot A)^2\ . \tag{3.179}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$0 = \Box A^\nu - (1-\lambda)\partial^\nu\partial\cdot A\ . \tag{3.180}$$

Die Wahl $\lambda = 1$ führt wieder auf das Resultat (3.178). Im Kontext der Quantenfeldtheorie bezeichnet man diese Wahl (d.h. die Lorenz–Eichung) auch als **Feynman–Eichung**.

Das kanonisch konjugierte Feld π_0, welches aus der eichfixierten Lagrange–Dichte (3.179) folgt, ist nicht mehr trivial,

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} = -\lambda\, \partial \cdot A \; . \tag{3.181}$$

In Feynman–(Lorenz–)Eichung ist dann

$$\pi_0 = -\partial \cdot A \; . \tag{3.182}$$

Aber dies ist wiederum ein Problem, denn die Lorenz–Eichbedingung (3.138) impliziert, dass dieser Ausdruck null ist! Also wäre wieder $\hat{\pi}_0 = 0$ und wir hätten wiederum einen Widerspruch in der ersten Vertauschungsrelation (3.176)!

Der Ausweg aus diesem Dilemma ist, dass man das Verschwinden von π_0 bzw. die Lorenz–Eichbedingung (3.138) **nicht auf dem Operator-Niveau fordern darf**, d.h.

$$\hat{\pi}_0 = -\lambda\, \partial \cdot \hat{A} \neq 0 \; , \tag{3.183}$$

weil dies, wie gerade gezeigt, zum Widerspruch mit der Vertauschungsrelation (3.176) führen würde. Man darf dies aber auf dem **Niveau der Erwartungswerte** fordern,

$$\langle \psi | \hat{\pi}_0 | \psi \rangle = -\lambda \langle \psi | \partial \cdot \hat{A} | \psi \rangle = 0 \; , \tag{3.184}$$

Dies ist streng genommen eine Forderung an den physikalischen Zustand $|\psi\rangle$, und nicht an den Operator $\hat{\pi}_0$.

Momentan stellen wir keine zusätzlichen Bedingungen (wie die Eichbedingung (3.138)) an den Feldoperator $\hat{A}^\nu$. Wir fordern lediglich, dass er der Bewegungsgleichung

$$\Box \hat{A}^\nu = 0 \tag{3.185}$$

genügt. Die Lösung ist offensichtlich

$$\hat{A}_\mu(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\lambda=0}^{3} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\, e^{-iK\cdot X} + \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\, e^{iK\cdot X} \right] \; , \tag{3.186}$$

wobei wiederum $K^\mu = (E_k, \vec{k})^T$ mit $E_k = k$. Der Unterschied zum Eichfeld in Strahlungseichung ist, dass $\hat{A}_\mu$ immer noch **vier** unabhängige Feldkomponenten hat und dementsprechend **vier** Polarisationsvektoren $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, auftreten. Diese Polarisationsvektoren müssen linear unabhängig sein, was man am einfachsten dadurch erreicht, dass man sie 4–orthogonal wählt,

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \varepsilon^{(\lambda')\mu}(\vec{k}) \equiv \varepsilon^{(\lambda)}(\vec{k}) \cdot \varepsilon^{(\lambda')}(\vec{k}) = g^{\lambda\lambda'} \; . \tag{3.187}$$

Dies impliziert, dass $\varepsilon^{(0)\mu}(\vec{k})$ ein **zeitartiger** Vektor ist und $\varepsilon^{(i)\mu}(\vec{k})$, $i = 1, 2, 3$, **raumartige** Vektoren sind.

Betrachten wir nun ein Photon, welches sich in z–Richtung bewegt, $K^\mu = (k, 0, 0, k)^T$. Wir wählen

$$\varepsilon^{(0)\mu}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \varepsilon^{(1)\mu}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \varepsilon^{(2)\mu}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \varepsilon^{(3)\mu}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{3.188}$$

Es gilt

$$K \cdot \varepsilon^{(1,2)}(\vec{k}) = 0 , \tag{3.189}$$

d.h. für die Wahl (3.188) sind $\varepsilon^{(1,2)\mu}(\vec{k})$ **4–transversal** zum 4–Impulsvektor K^μ. Dies bedeutet auch, dass die Polarisationsvektoren $\varepsilon^{(1,2)\mu}(\vec{k})$ die **physikalischen** Polarisationsfreiheitsgrade repräsentieren. Ferner haben wir

$$K \cdot \varepsilon^{(0)}(\vec{k}) = k > 0 , \quad K \cdot \varepsilon^{(3)}(\vec{k}) = -k < 0 . \tag{3.190}$$

Das sog. **zeitartige Photon**, welches zum Polarisationsvektor $\varepsilon^{(0)\mu}(\vec{k})$ gehört, und das sog. **longitudinale Photon**, repräsentiert durch den Polarisationsvektor $\varepsilon^{(3)\mu}(\vec{k})$, stellen die **unphysikalischen** Freiheitsgrade dar.

Da wir keine weiteren Bedingungen (wie die Lorenz–Eichbedingung (3.138)) an $\hat{A}^\mu$ stellen, ist $\hat{\pi}_0 \neq 0$, und es bestehen keinerlei Bedenken, die Vertauschungsrelationen (3.176) zu fordern. Legt man diese zugrunde, so kann man aus diesen dann Vertauschungsrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$ und $\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})$ ableiten. Dazu bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_0 &= -\partial \cdot \hat{A} = -\partial_0 \hat{A}^0 - \vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{A}} , \\ \hat{\pi}_i &= \hat{F}_{i0} = \partial_i \hat{A}_0 - \partial_0 \hat{A}_i . \end{aligned} \tag{3.191}$$

Räumliche Ableitungen von $\hat{A}_\nu$ in der Gleichzeit-Vertauschungsrelation (3.176) werden aber bezüglich des Arguments $\vec{x}\,'$ genommen. Wir dürfen die Ableitung daher aus dem Kommutator herausziehen und erhalten dann Kommutatoren von zwei $\hat{A}_\mu$–Feldern, welche miteinander vertauschen. Es bleiben also lediglich zeitliche Ableitungen zu berücksichtigen,

$$\left[\hat{A}_\mu(t, \vec{x}),\, \hat{\pi}_\nu(t, \vec{x}\,')\right] = -\left[\hat{A}_\mu(t, \vec{x}),\, \partial_0 \hat{A}_\nu(t, \vec{x}\,')\right] = i\, g_{\mu\nu}\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}\,') . \tag{3.192}$$

Die weitere Rechnung ist Gegenstand der Übungsaufgabe H11 und führt auf

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}),\, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}\,')\right] &= -2k\, g^{\lambda\lambda'}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}\,') , \\ \left[\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}),\, \hat{a}^{(\lambda')}(\vec{k}\,')\right] &= \left[\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}),\, \hat{a}^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}\,')\right] = 0 . \end{aligned} \tag{3.193}$$

Diese Vertauschungsrelationen sehen auf den ersten Blick unschuldig aus. In der Tat hat man für $\lambda = 1, 2, 3$ die üblichen Relationen, denen wir auch beim skalaren Feld begegnet sind. Aber das zusätzliche Minus-Zeichen bei $\lambda = 0$ ist problematisch, da es zur Folge hat, dass Zustände mit einem zeitartigen Photon **negative Norm** haben. Betrachten wir nämlich den Zustand

$$\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})|0\rangle = \mathcal{N}\, |1^{(0)}_{\vec{k}}\rangle , \tag{3.194}$$

so hat dieser Zustand die (quadrierte) Norm

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}|^2 \langle 1^{(0)}_{\vec{k}} | 1^{(0)}_{\vec{k}} \rangle &= \langle 0 | \, \hat{a}^{(0)}(\vec{k}) \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k}) \, | 0 \rangle = \langle 0 | \, \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k}) \hat{a}^{(0)}(\vec{k}) - 2k \, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \, | 0 \rangle \\ &= -2k \, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \, \langle 0 | 0 \rangle \equiv -2k \, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \; , \end{aligned} \tag{3.195}$$

wenn wir annehmen, dass der Vakuumzustand auf eins normiert ist, also

$$\langle 1^{(0)}_{\vec{k}} | 1^{(0)}_{\vec{k}} \rangle = -\frac{2k}{|\mathcal{N}|^2} \, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) < 0 \; . \tag{3.196}$$

Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren? Fock–Raum-Zustände sollten an und für sich positive Norm haben. Man kann sich zudem leicht davon überzeugen, dass die (quadrierte) Norm eines Zustands mit $n^{(0)}(\vec{k})$ zeitartigen Photonen mit Impuls $\vec{k}$ proportional zu $(-1)^{n^{(0)}(\vec{k})}$ ist, also hat der Fock–Raum eine **indefinite Metrik**. Ein weiteres Problem tritt auf, wenn wir den Hamilton–Operator berechnen. Wie in Übungsaufgabe H11 zu zeigen, ist der renormierte Hamilton–Operator

$$\hat{H}_{\text{ren}} = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \, k \left[\sum_{\lambda=1}^{3} \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) \hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k}) - \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k}) \hat{a}^{(0)}(\vec{k}) \right] \; , \tag{3.197}$$

d.h. zeitartige Photonen tragen mit **negativem** Vorzeichen zur Energie bei. Das Minus-Zeichen vor dem letzten Term ergibt einen **negativen Erwartungswert** für die Energie in Zuständen mit einem zeitartigen Photon,

$$\begin{aligned} \langle 1^{(0)}_{\vec{k}} | \, \hat{H}_{\text{ren}} \, | 1^{(0)}_{\vec{k}} \rangle &= -\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q} \, q \, \langle 1^{(0)}_{\vec{k}} | \, \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{q}) \hat{a}^{(0)}(\vec{q}) \, | 1^{(0)}_{\vec{k}} \rangle \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{2(2\pi)^3} \, \frac{1}{|\mathcal{N}|^2} \, \langle 0 | \, \hat{a}^{(0)}(\vec{k}) \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{q}) \hat{a}^{(0)}(\vec{q}) \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k}) \, | 0 \rangle \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{2(2\pi)^3} \, \frac{1}{|\mathcal{N}|^2} \, \langle 0 | \, \left[\hat{a}^{(0)}(\vec{k}), \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{q}) \right] \left[\hat{a}^{(0)}(\vec{q}), \hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k}) \right] \, | 0 \rangle \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}}{2(2\pi)^3} \, \frac{1}{|\mathcal{N}|^2} \, (-2k)^2 \, (2\pi)^6 \, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \, \delta^{(3)}(0) \, \langle 0 | 0 \rangle \\ &= -\frac{2k^2}{|\mathcal{N}|^2} \, (2\pi)^3 \, \delta^{(3)}(0) < 0 \; . \end{aligned} \tag{3.198}$$

Hier haben wir von der ersten zur zweiten Zeile Gl. (3.194) und von der dritten zur vierten Zeile Gl. (3.193) benutzt. Von der zweiten zur dritten Zeile haben wir ausgenutzt, dass ein Vernichtungsoperator wirkend auf den Vakuumzustand null ergibt.

Das negative Vorzeichen ist aber eine Konsequenz der negativen (quadratischen) Norm (3.196) der Zustände mit einem zeitartigen Photon. Der renormierte Hamilton–Operator selbst hat **positiv-semidefinite Eigenwerte**. Um dies zu sehen, betrachten wir den **Teilchenzahloperator** für zeitartige Photonen. Er ist durch die Relation

$$2k \, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \, \hat{N}^{(0)}(\vec{k}) = -\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k}) \hat{a}^{(0)}(\vec{k}) \tag{3.199}$$

definiert. Das negative Vorzeichen sorgt dafür, dass der Eigenwert von $\hat{N}^{(0)}(\vec{k})$ in einem Zustand mit einem zeitartigen Photon mit Impuls $\vec{k}$ gleich $+1$ ist,

$$\begin{aligned}
\hat{N}^{(0)}(\vec{k})\,|1^{(0)}_{\vec{k}}\rangle &= -\frac{1}{2k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\,\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})\hat{a}^{(0)}(\vec{k})\,\frac{1}{\mathcal{N}}\,\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= -\frac{1}{2k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\,\frac{1}{\mathcal{N}}\,\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})\,\left[\hat{a}^{(0)}(\vec{k}),\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})\right]\,|0\rangle \\
&= -\frac{1}{2k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}\,\frac{1}{\mathcal{N}}\,\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})\,(-2k)(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,|0\rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}}\,\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})\,|0\rangle = |1^{(0)}_{\vec{k}}\rangle\;. \qquad (3.200)
\end{aligned}$$

Die Definition (3.199) ist also korrekt. Das negative Vorzeichen sorgt dafür, dass das negative Vorzeichen aus der Vertauschungsrelation (3.193) bei zeitartigen Photonen aufgehoben wird. Mit den durch die Relation

$$2k\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,\hat{N}^{(\lambda)}(\vec{k}) = \hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\;, \quad \lambda = 1,2,3\;, \qquad (3.201)$$

definierten Teilchenzahloperatoren für raumartige Photonen lautet also der renormierte Hamilton–Operator (3.197)

$$\hat{H}_{\text{ren}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,k\sum_{\lambda=0}^{3}\hat{N}^{(\lambda)}(\vec{k})\;, \qquad (3.202)$$

und da alle Teilchenzahloperatoren positiv semi-definite Eigenwerte haben, hat auch $\hat{H}_{\text{ren}}$ positiv semi-definite Eigenwerte, q.e.d.

Wir hatten gesehen, dass wir die Lorenz–Eichbedingung (3.138) nicht als Operator-Identität (3.183) fordern dürfen, sondern lediglich auf der Ebene der Erwartungswerte, Gl. (3.184). Wir betrachten nun

$$\partial\cdot\hat{A}\,|\psi\rangle = \left(\partial\cdot\hat{A}^{(+)} + \partial\cdot\hat{A}^{(-)}\right)|\psi\rangle\;, \qquad (3.203)$$

wobei

$$\begin{aligned}
\hat{A}^{(+)}_{\mu}(X) &= \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k}\sum_{\lambda=0}^{3}\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\vec{k})\,\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\,e^{-iK\cdot X}\;, \qquad (3.204)\\
\hat{A}^{(-)}_{\mu}(X) &= \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k}\sum_{\lambda=0}^{3}\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(\vec{k})\,\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\,e^{iK\cdot X} \equiv \left[\hat{A}^{(+)}_{\mu}(X)\right]^{\dagger}\;. \qquad (3.205)
\end{aligned}$$

Da $\hat{A}^{(+)}_{\mu}(X)$ nur **Vernichtungsoperatoren** enthält, erhalten wir aus Gl. (3.203) für den Vakuumzustand $|\psi\rangle \equiv |0\rangle$

$$\partial\cdot\hat{A}\,|0\rangle = \left(\partial\cdot\hat{A}^{(+)} + \partial\cdot\hat{A}^{(-)}\right)|0\rangle \equiv \partial\cdot\hat{A}^{(-)}|0\rangle\;. \qquad (3.206)$$

I.a. ist dieser Ausdruck aber nicht null, da $\hat{A}_\mu^{(-)}(X)$ **Erzeugungsoperatoren** enthält. Damit können wir nicht fordern, dass $\partial \cdot \hat{A}\,|\psi\rangle = 0$, da dies schon für den Vakuumzustand nicht zutrifft. Wir können aber die weniger restriktive Bedingung

$$\partial \cdot \hat{A}^{(+)}|\psi\rangle = 0 \tag{3.207}$$

an **physikalische** Zustände $|\psi\rangle$ stellen. Für den Vakuumzustand ist diese Bedingung aufgrund der Definition (3.204) automatisch erfüllt. Wir fordern nun, dass dies für **alle** physikalischen Zustände $|\psi\rangle$ gelten soll. Dies hat die Konsequenz, dass der **Erwartungswert** der Lorenz–Eichbedingung in physikalischen Zuständen

$$\begin{aligned} \langle\psi|\,\partial \cdot \hat{A}\,|\psi\rangle &= \langle\psi|\,\partial \cdot \hat{A}^{(+)} + \partial \cdot \hat{A}^{(-)}\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,\partial \cdot \hat{A}^{(-)}\,|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\,\left(\partial \cdot \hat{A}^{(-)}\right)^\dagger\,|\psi\rangle^* = \langle\psi|\,\partial \cdot \hat{A}^{(+)}\,|\psi\rangle^* = \langle\psi|\,\partial \cdot \hat{A}^{(+)}\,|\psi\rangle \equiv 0\,. \end{aligned} \tag{3.208}$$

Hier haben wir in der ersten Zeile die Bedingung (3.207) benutzt, um den ersten Term zum Verschwinden zu bringen. Von der ersten zur zweiten Zeile haben wir dann die Definition des adjungierten Operators ausgenutzt. Sodann wurde Gl. (3.205), die Tatsache, dass Erwartungswerte reell sind, und zum Schluss nochmals die Bedingung (3.207) benutzt. Insgesamt sehen wir aus dieser Rechnung, dass die Bedingung (3.207) dafür sorgt, dass die Lorenz–Eichbedingung auf dem Niveau der Erwartungswerte, Gl. (3.184), erfüllt ist. Die Bedingung (3.207) wurde zuerst von Gupta und Bleuler formuliert. Man spricht dementsprechend von der **Quantisierung nach Gupta und Bleuler**.

Die Gupta–Bleuler–Quantisierungsvorschrift (3.207) löst auch das Problem mit den negativen Erwartungswerten des renormierten Hamilton–Operators. Es gilt dann nämlich mit Gl. (3.204)

$$0 = \partial \cdot \hat{A}^{(+)}|\psi\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\lambda=0}^{3} (-iK) \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\vec{k})\,\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\,e^{-iK\cdot X}\,|\psi\rangle\,, \tag{3.209}$$

was wegen der linearen Unabhängigkeit der ebenen Wellen nur erfüllt werden kann, wenn

$$\sum_{\lambda=0}^{3} K \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(\vec{k})\,\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\,|\psi\rangle = 0\,. \tag{3.210}$$

Aber für die physikalischen, **transversalen** Polarisationsvektoren gilt Gl. (3.189), also bleibt

$$\left[K \cdot \varepsilon^{(0)}(\vec{k})\,\hat{a}^{(0)}(\vec{k}) + K \cdot \varepsilon^{(3)}(\vec{k})\,\hat{a}^{(3)}(\vec{k})\right]\,|\psi\rangle = 0\,. \tag{3.211}$$

Aber aufgrund von Gl. (3.190) gilt auch $K \cdot \varepsilon^{(0)}(\vec{k}) = -K \cdot \varepsilon^{(3)}(\vec{k})$, also folgt

$$\left[\hat{a}^{(0)}(\vec{k}) - \hat{a}^{(3)}(\vec{k})\right]\,|\psi\rangle = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \hat{a}^{(0)}(\vec{k})\,|\psi\rangle = \hat{a}^{(3)}(\vec{k})\,|\psi\rangle\,. \tag{3.212}$$

Dies bedeutet wiederum, dass zeitartige Photonen **identisch** mit longitudinalen Photonen sind, denn die Wirkung des Vernichtungsoperators für ein zeitartiges Photon ist identisch mit der des Vernichtungsoperators für ein longitudinales Photon. Daher enthalten **physikalische** Zustände stets **Mischungen** von zeitartigen und longitudinalen Photonen, sie

können nicht einfach nur ein zeitartiges Photon enthalten. In der Tat erhalten wir aus Gl. (3.212)

$$\langle\psi|\,\hat{a}^{(0)\dagger}(\vec{k})\hat{a}^{(0)}(\vec{k})\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,\hat{a}^{(3)\dagger}(\vec{k})\hat{a}^{(3)}(\vec{k})\,|\psi\rangle\ , \tag{3.213}$$

und daher heben sich die Beiträge der zeitartigen und der longitudinalen Photonen in Erwartungswerten des renormierten Hamilton–Operators (3.197) in physikalischen Zuständen gegeneinander weg,

$$\langle\psi|\,\hat{H}_{\text{ren}}\,|\psi\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k}\,k\sum_{\lambda=1}^{2}\langle\psi|\,\hat{a}^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{k})\,|\psi\rangle\ . \tag{3.214}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem Erwartungswert von $\hat{H}_{\text{ren}}$ in Strahlungseichung, vgl. Gl. (3.175), lediglich die physikalischen, transversalen Polarisationfreiheitsgrade tragen zu einer physikalisch meßbaren Größe wie der Energie bei.

13.1.2021

4 Pfadintegral–Formulierung der Quantenmechanik

In diesem Kapitel behandeln wir die Pfadintegral–Formulierung der Quantenmechanik. Der besseren Wiedererkennung wegen restaurieren wir Faktoren $\hbar$.

4.1 Propagatoren

Wir betrachten die Schrödinger–Gleichung für (zeitabhängige) **Schrödinger–Bild-Zustände** $|\psi(t)\rangle_S$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle_S \ , \tag{4.1}$$

wobei

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(t, \hat{\vec{x}}) \tag{4.2}$$

der Hamilton–Operator des Systems ist. Die Zeitabhängigkeit von $\hat{H}(t)$ ist hier ausschließlich eine **explizite**, falls beispielsweise das externe Potential $V(t, \hat{\vec{x}})$ zeitlich variiert. In der Regel sind Operatoren im Schrödinger–Bild zeitunabhängig. Die formale Lösung von Gl. (4.1) lautet (vgl. Abschnitt 3.3 der Vorlesung "Quantenmechanik I")

$$|\psi(t)\rangle_S = \hat{U}(t, 0) |\psi(0)\rangle_S \ , \tag{4.3}$$

mit dem **Zeitentwicklungsoperator**

$$\hat{U}(t, 0) = \hat{T} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathrm{d}t' \, \hat{H}(t')\right] \ . \tag{4.4}$$

Hier ist $\hat{T}$ der **Zeitordnungsoperator**. Der Zeitentwicklungsoperator ist **unitär**,

$$\hat{U}^\dagger(t, 0) = \hat{T} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathrm{d}t' \, \hat{H}(t')\right] = \hat{T} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_t^0 \mathrm{d}t' \, \hat{H}(t')\right] = \hat{U}(0, t) = \hat{U}^{-1}(t, 0) \ . \tag{4.5}$$

Er besitzt zudem die **Konvolutionseigenschaft**

$$\hat{U}(t_f, 0)\hat{U}(0, t_i) \equiv \hat{U}(t_f, t_i) \ . \tag{4.6}$$

Heisenberg–Bild-Zustände $|\psi\rangle_H$ stimmen zu einem festem Zeitpunkt, z.B. $t = 0$, mit den Schrödinger–Bild-Zuständen überein,

$$|\psi\rangle_H \equiv |\psi(0)\rangle_S \ . \tag{4.7}$$

Die **Wellenfunktion** $\psi(t,\vec{x})$ berechnet sich aus den Hilbert–Raum-Zuständen $|\psi(t)\rangle_S$ durch Projektion auf Ortsraum-Zustände $|\vec{x}\rangle$,

$$\psi(t,\vec{x}) \equiv \langle\vec{x}|\psi(t)\rangle_S = \langle\vec{x}|\,\hat{U}(t,0)\,|\psi(0)\rangle_S = \langle\vec{x}|\,\hat{U}(t,0)\,|\psi\rangle_H \ , \tag{4.8}$$

wobei wir die Glgen. (4.3) und (4.7) benutzt haben. Wir definieren nun die **zeitentwickelten Ortsraum-Zustände**

$$|t,\vec{x}\rangle \equiv \hat{U}(0,t)\,|\vec{x}\rangle = \hat{T}\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t'\,\hat{H}(t')\right]|\vec{x}\rangle = \hat{U}^\dagger(t,0)\,|\vec{x}\rangle \ . \tag{4.9}$$

Man beachte die Stellung der Argumente; in der Regel würde man für eine Zeitentwicklung von 0 nach t die umgekehrte Reihenfolge erwarten. Wie wir jedoch sehen werden, ist die oben angegebene die korrekte. Die Wellenfunktion (4.8) ist damit auch identisch mit

$$\psi(t,\vec{x}) = \langle t,\vec{x}|\psi\rangle_H \ . \tag{4.10}$$

Ortsraum-Zustände sind **vollständig**,

$$\mathbb{1} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\,|\vec{x}_i\rangle\langle\vec{x}_i| \ , \tag{4.11}$$

wobei der Index i lediglich aus Gründen der Notation eingeführt wird. Wir zeigen nun, dass auch die zeitentwickelten Ortsraum-Zustände (4.9) vollständig sind,

$$\begin{aligned}\mathbb{1} &= \hat{U}(0,t_i)\,\hat{U}(t_i,0) = \hat{U}(0,t_i)\,\mathbb{1}\,\hat{U}(t_i,0) = \hat{U}(0,t_i)\int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\,|\vec{x}_i\rangle\langle\vec{x}_i|\,\hat{U}(t_i,0) \\ &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\,\hat{U}(0,t_i)\,|\vec{x}_i\rangle\langle\vec{x}_i|\,\hat{U}(t_i,0) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\,|t_i,\vec{x}_i\rangle\langle t_i,\vec{x}_i| \ , \quad \text{q.e.d.}\end{aligned} \tag{4.12}$$

Hier haben wir im letzten Schritt die Definition (4.9) der zeitentwickelten Ortsraum-Zustände benutzt. Gleichung (4.12) bedeutet, dass die Ortsraum-Zustände $|\vec{x}_i\rangle$ auch nach Zeitentwicklung zum Zeitpunkt t_i vollständig sind.

Durch Einschieben der vollständigen Eins (4.12) können wir die Wellenfunktion (4.10) auch schreiben als

$$\psi(t,\vec{x}) = \langle t,\vec{x}|\psi\rangle_H = \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\,\langle t,\vec{x}|t_i,\vec{x}_i\rangle\langle t_i,\vec{x}_i|\psi\rangle_H \equiv \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\,K(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i)\,\psi(t_i,\vec{x}_i) \ , \tag{4.13}$$

wobei

$$K(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i) \equiv \langle t,\vec{x}|t_i,\vec{x}_i\rangle \tag{4.14}$$

die **quantenmechanische Übergangsamplitude** für einen Übergang vom Zustand $|t_i,\vec{x}_i\rangle$ zum Zustand $|t,\vec{x}\rangle$ ist. Die entsprechende **Übergangswahrscheinlichkeit** ist

$$P(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i) = |\langle t,\vec{x}|t_i,\vec{x}_i\rangle|^2 \equiv |K(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i)|^2 \ . \tag{4.15}$$

Gleichung (4.13) hat eine einfache **physikalische Interpretation**. Falls man die Lösung $\psi(t_i,\vec{x}_i)$ der Schrödinger-Gleichung zum Zeitpunkt t_i an **allen** Orten $\vec{x}_i$ kennt, so kann man die Lösung $\psi(t,\vec{x})$ zum Zeitpunkt t am Ort $\vec{x}$ durch Multiplikation mit $K(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i)$ und

Integration über alle Orte $\vec{x}_i$ konstruieren. Man sagt, die Übergangsamplitude $K(t, \vec{x}; t_i, \vec{x}_i)$ **propagiert** die Lösung $\psi(t_i, \vec{x}_i)$ vom Raum-Zeit-Punkt $(t_i, \vec{x}_i)$ zum Raum-Zeit-Punkt $(t, \vec{x})$. Deshalb nennt man $K(t, \vec{x}; t_i, \vec{x}_i)$ auch den (vollen) **Propagator** der Theorie. Die Situation ist bildlich in Abb. 4.1 dargestellt. Hier haben wir uns auf den Fall der **kausalen Propagation**, $t > t_i$, beschränkt. Man kann natürlich auch die **antikausale Propagation**, $t < t_i$, betrachten.

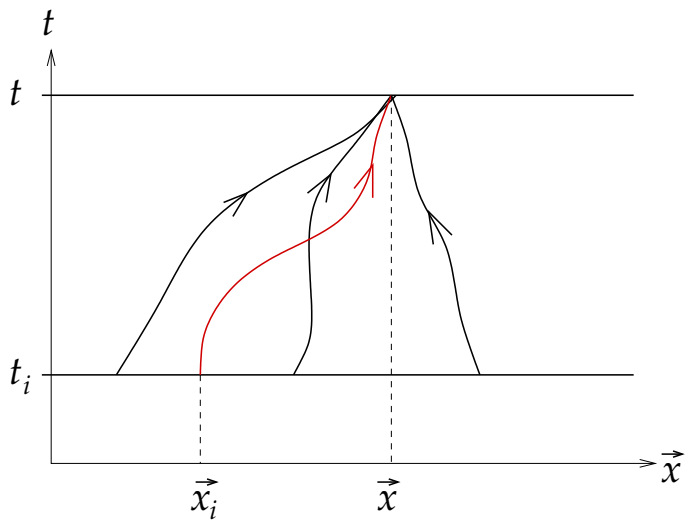


Abbildung 4.1: Propagation der Lösung $\psi(t_i, \vec{x}_i)$ zum Zeitpunkt t am Ort $\vec{x}$ mit Hilfe des Propagators $K(t, \vec{x}; t_i, \vec{x}_i)$.

Der Propagator hat eine interessante Konvolutionseigenschaft,

$$\begin{aligned} K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) &= \langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \langle t_f, \vec{x}_f | t, \vec{x} \rangle \langle t, \vec{x} | t_i, \vec{x}_i \rangle \\ &\equiv \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, K(t_f, \vec{x}_f; t, \vec{x})\, K(t, \vec{x}; t_i, \vec{x}_i)\ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei wir die vollständige Eins (4.12) (nach entsprechender Umbenennung $t_i \to t$, $\vec{x}_i \to \vec{x}$) eingeschoben haben. Physikalisch bedeutet dies, dass die Propagation von $(t_i, \vec{x}_i)$ nach $(t_f, \vec{x}_f)$ auch als Propagation von $(t_i, \vec{x}_i)$ nach $(t, \vec{x})$ und dann von $(t, \vec{x})$ nach $(t_f, \vec{x}_f)$ betrachtet werden kann. Man beachte aber, dass man über **alle** möglichen Zwischenpunkte $\vec{x}$ zum Zeitpunkt t integrieren muss, vgl. Abb. 4.2.

Die Konvolutionseigenschaft (4.16) hilft beim Verständnis des berühmten **Doppelspalt-Experimentes** für Elektronen. Wir nehmen an, dass alle Elektronen von einer Quelle bei $(t_i, \vec{x}_i)$ mit fester Geschwindigkeit ausgesendet werden. Ferner soll der Zwischenzeitpunkt t in Gl. (4.16) derjenige sein, an dem die Elektronen den Doppelspalt passieren. Den Schirm erreichen sie dann zum Zeitpunkt t_f, s. Abb. 4.3.

Wir nehmen an, dass beide Spalten gleich groß sind und die Fläche $\Delta F = \Delta x \Delta y$ frei lassen. Desweiteren habe die Blende die Dicke Δz, so dass das von den Spalten gebildete Volumen $\Delta V = \Delta F \Delta z$ ist. Die Elektronen können den Doppelspalt natürlich nicht passieren, wenn sie auf der Blende des Doppelspaltes landen; sie müssen genau die beiden

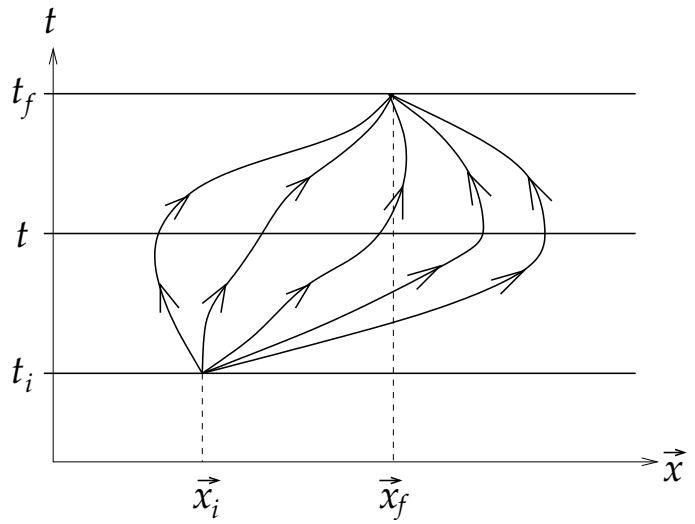


Abbildung 4.2: Veranschaulichung der Konvolutionseigenschaft (4.16).

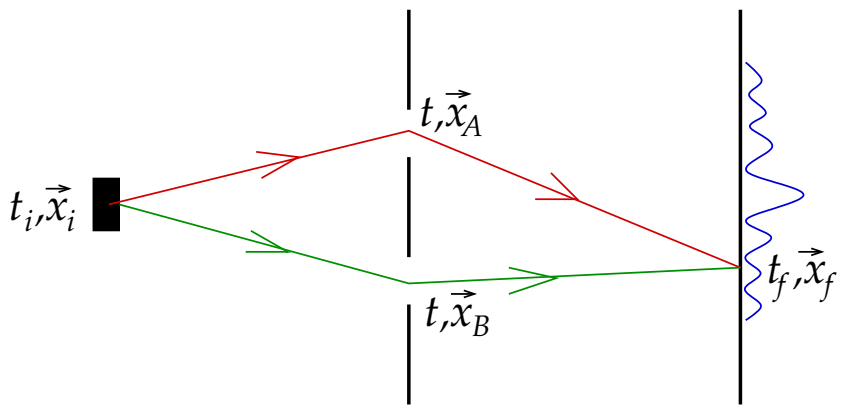


Abbildung 4.3: Das Doppelspalt-Experiment.

Spalten bei $\vec{x}_A$ und $\vec{x}_B$ treffen. Daher reduziert sich das Volumenintegral in Gl. (4.16) auf

$$K(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i) \simeq \Delta V\ \left[K(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x}_A)\,K(t,\vec{x}_A;t_i,\vec{x}_i) + K(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x}_B)\,K(t,\vec{x}_B;t_i,\vec{x}_i)\right]\ . \tag{4.17}$$

Hierbei haben wir angenommen, dass sich das Produkt $K(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x}_A)\,K(t,\vec{x}_A;t_i,\vec{x}_i)$ über das Volumen ΔV des Spaltes bei $\vec{x}_A$ nicht wesentlich ändert, so dass man diesen Faktor aus dem Integral über $\mathrm{d}^3\vec{x}$ herausziehen darf, und entsprechendes auch für den Beitrag des Spaltes bei $\vec{x}_B$ zum Integral. Die quantenmechanische Übergangsamplitude für Elektronen von der Quelle am Raum-Zeit-Punkt $(t_i,\vec{x}_i)$ zu einem Punkt $\vec{x}_f$ auf dem Schirm bei der Zeit t_f ist dann gemäß Gl. (4.15)

$$\begin{aligned} P(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i) &= |K(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)|^2 \\ &= \Delta V^2\left\{|K(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x}_A)\,K(t,\vec{x}_A;t_i,\vec{x}_i)|^2 + |K(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x}_B)\,K(t,\vec{x}_B;t_i,\vec{x}_i)|^2\right. \\ &\qquad \left. + 2\,\mathrm{Re}\left[K(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x}_A)\,K(t,\vec{x}_A;t_i,\vec{x}_i)\,K^*(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x}_B)\,K^*(t,\vec{x}_B;t_i,\vec{x}_i)\right]\right\}\ . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Der letzte Term ist nicht positiv semi-definit. Er ist die Ursache für die wohlbekannten quantenmechanischen Interferenzeffekte, die zu einem Beugungsmuster mit Maxima (konstruktive Interferenz) und Minima (destruktive Interferenz) auf dem Schirm führen.

4.2 Pfadintegrale

Die **Pfadintegral-Formulierung** der Quantenmechanik (s. Kapitel 3 der Vorlesung "Quantenmechanik II") nutzt die Konvolutionseigenschaft (4.16) des Propagators bis zum Extremen aus: es werden zunächst N Zwischenzeiten t_j, $j = 1, \ldots, N$, im Abstand $t_{j+1} - t_j = \tau$ eingeführt, vgl. Abb. 4.4, und dann der Limes $N \to \infty$ gebildet. Dabei soll gleichzeitig $\tau \to 0$ gehen, so dass das Zeitintervall $t_f - t_i \equiv (N+1)\tau$ konstant bleibt.

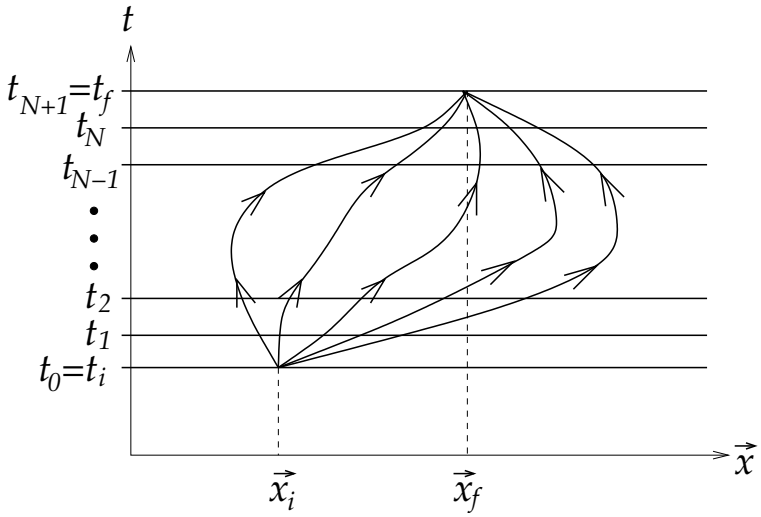


Abbildung 4.4: Zur Herleitung der Pfadintegral-Darstellung des Propagators.

N–faches Anwenden der Konvolutionseigenschaft (4.16) liefert zunächst

$$\langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{x}_1 \cdots \mathrm{d}^3\vec{x}_N \, \langle t_f, \vec{x}_f | t_N, \vec{x}_N \rangle \langle t_N, \vec{x}_N | t_{N-1}, \vec{x}_{N-1} \rangle \cdots \langle t_1, \vec{x}_1 | t_i, \vec{x}_i \rangle \; . \tag{4.19}$$

Man beachte, dass bei jedem Zwischenzeitschritt t_j über den gesamten Raum $\mathrm{d}^3\vec{x}_j$ integriert wird. Das quantenmechanische Teilchen nimmt also **alle** möglichen Wege, um von $(t_i, \vec{x}_i)$ nach $(t_f, \vec{x}_f)$ zu gelangen.

Wir betrachten nun einen der Terme in Gl. (4.19), die Übergangsamplitude vom Zwischenzeitschritt t_j zum nächsten Zeitschritt t_{j+1}, im Detail:

$$\langle t_{j+1}, \vec{x}_{j+1} | t_j, \vec{x}_j \rangle = \langle \vec{x}_{j+1} | \, \hat{U}(t_{j+1}, 0) \hat{U}(0, t_j) \, | \vec{x}_j \rangle = \langle \vec{x}_{j+1} | \, \hat{U}(t_{j+1}, t_j) \, | \vec{x}_j \rangle \; , \tag{4.20}$$

wobei wir die Glgen. (4.6) und (4.9) benutzt haben. Der Zeitentwicklungsoperator kann als Taylor–Reihe entwickelt werden,

$$\hat{U}(t_{j+1}, t_j) = \hat{T} \, \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathrm{d}t \, \hat{H}(t) \right] = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathrm{d}t \, \hat{H}(t) + O(\tau^2) \; , \tag{4.21}$$

wobei der Term n–ter Ordnung proportional zur n–ten Potenz des Zeitintervalls $\tau = t_{j+1} - t_j$ ist. Da wir am Ende $\tau \to 0$ gehen lassen, können wir alle Terme von höherer Ordnung in τ im Folgenden unterdrücken. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert nun

$$\hat{U}(t_{j+1}, t_j) \simeq 1 - \frac{i}{\hbar}\,\hat{H}(\bar{t}_j)\,\tau\ , \tag{4.22}$$

wobei $\bar{t}_j$ ein Zeitwert im Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ ist. Da wir $\tau \to 0$ gehen lassen, können wir diesen Zeitwert o.B.d.A. auch als arithmetisches Mittel von t_j und t_{j+1} wählen,

$$\bar{t}_j \equiv \frac{t_{j+1} + t_j}{2}\ .$$

Setzen wir Gl. (4.22) in Gl. (4.20) ein, so erhalten wir

$$\langle t_{j+1}, \vec{x}_{j+1} | t_j, \vec{x}_j \rangle \simeq \langle \vec{x}_{j+1} | \vec{x}_j \rangle - \frac{i}{\hbar}\,\tau\,\langle \vec{x}_{j+1} |\,\hat{H}(\bar{t}_j)\,| \vec{x}_j \rangle\ . \tag{4.23}$$

Die Ortsraum-Zustände sind orthogonal,

$$\langle \vec{x}_{j+1} | \vec{x}_j \rangle \equiv \delta^{(3)}(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}\cdot(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)\right]\ . \tag{4.24}$$

Der Hamilton–Operator ist eine Funktion von Impuls- und Ortsoperator,

$$\hat{H}(t) \equiv H(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}, t)\ , \tag{4.25}$$

also

$$\hat{H}(t)\,|\vec{x}_j\rangle \equiv H(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}, t)\,|\vec{x}_j\rangle = H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_j, t)\,|\vec{x}_j\rangle\ . \tag{4.26}$$

Der Hamilton–Operator ist aber auch hermitesch, $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, also

$$\langle \vec{x}_{j+1} |\,\hat{H}(t) = \langle \vec{x}_{j+1} |\,H(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}, t) = \langle \vec{x}_{j+1} |\,H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_{j+1}, t)\ . \tag{4.27}$$

Für das in Gl. (4.23) auftretende Matrixelement des Hamilton–Operators erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}_{j+1} |\,\hat{H}(\bar{t}_j)\,| \vec{x}_j \rangle &= \langle \vec{x}_{j+1} |\,H(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}, \bar{t}_j)\,| \vec{x}_j \rangle \\
&= \langle \vec{x}_{j+1} |\,H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_j, \bar{t}_j)\,| \vec{x}_j \rangle = \langle \vec{x}_{j+1} |\,H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_{j+1}, \bar{t}_j)\,| \vec{x}_j \rangle \\
&= \langle \vec{x}_{j+1} |\,\frac{1}{2}\left[H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_{j+1}, \bar{t}_j) + H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_j, \bar{t}_j)\right]\,| \vec{x}_j \rangle\ .
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Entwickeln wir die beiden Hamilton–Operatoren nach Taylor um das arithmetische Mittel zwischen den Punkten $\vec{x}_j$ und $\vec{x}_{j+1}$,

$$\bar{\vec{x}}_j \equiv \frac{\vec{x}_{j+1} + \vec{x}_j}{2}\ ,$$

so erhalten wir

$$H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_j, \bar{t}_j) = H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j) + \vec{\nabla} H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\cdot(\vec{x}_j - \bar{\vec{x}}_j) + O[(\vec{x}_j - \bar{\vec{x}}_j)^2]\ , \tag{4.29}$$

bzw.

$$H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_{j+1}, \bar{t}_j) = H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j) + \vec{\nabla} H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j) \cdot (\vec{x}_{j+1} - \bar{\vec{x}}_j) + O[(\vec{x}_{j+1} - \bar{\vec{x}}_j)^2] \,. \tag{4.30}$$

Nehmen wir nun an, dass das Teilchen in einem (infinitesimalen) Zeitschritt τ keine großen (finiten) Sprünge im Ortsraum macht, so können wir Terme von der Ordnung $O(\vec{x}_j - \bar{\vec{x}}_j)$ bzw. $O(\vec{x}_{j+1} - \bar{\vec{x}}_j)$ vernachlässigen und approximieren

$$\frac{1}{2}\left[H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_{j+1}, \bar{t}_j) + H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}_j, \bar{t}_j)\right] \simeq H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j) \,. \tag{4.31}$$

Nun müssen wir noch die Wirkung des Impulsoperators in $H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)$ berücksichtigen. Zu diesem Zweck schieben wir zwei vollständige Einsen von Impuls-Zuständen,

$$\mathbb{1} = \int \mathrm{d}^3\vec{p}\, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| \,, \tag{4.32}$$

zwischen die Ortsraum-Zustände und dem Hamilton–Operator in Gl. (4.28) ein,

$$\langle\vec{x}_{j+1}|\, H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\, |\vec{x}_j\rangle = \int \mathrm{d}^3\vec{p}_j'\, \mathrm{d}^3\vec{p}_j\, \langle\vec{x}_{j+1}|\vec{p}_j'\rangle\langle\vec{p}_j'|\, H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\, |\vec{p}_j\rangle\langle\vec{p}_j|\vec{x}_j\rangle \,. \tag{4.33}$$

Nun benutzen wir die Definition der ebenen Wellen als Überlapp zwischen Impuls- und Ortsraum-Zuständen sowie die Orthogonalität der Impuls-Zustände,

$$\begin{aligned}
\langle\vec{x}_{j+1}|\vec{p}_j'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}_j' \cdot \vec{x}_{j+1}\right) \,, \\
\langle\vec{p}_j|\vec{x}_j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_j \cdot \vec{x}_j\right) \,, \\
\langle\vec{p}_j'|\, H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\, |\vec{p}_j\rangle &= H(\vec{p}_j, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\, \langle\vec{p}_j'|\vec{p}_j\rangle = H(\vec{p}_j, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\, \delta^{(3)}(\vec{p}_j' - \vec{p}_j) \,,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

und erhalten

$$\langle\vec{x}_{j+1}|\, H(\hat{\vec{p}}, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\, |\vec{x}_j\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3}\, H(\vec{p}_j, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{p}_j \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)\right] \,. \tag{4.35}$$

Setzen wir dies in Gl. (4.23) ein und benutzen Gl. (4.24), so erhalten wir das bis auf Terme der Ordnung $O(\tau^2)$ exakte Resultat

$$\begin{aligned}
\langle t_{j+1}, \vec{x}_{j+1}|t_j, \vec{x}_j\rangle &\simeq \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \left[1 - \frac{i}{\hbar}\tau\, H(\vec{p}_j, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{p}_j \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)\right] \\
&\simeq \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\vec{p}_j \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j) - \tau\, H(\vec{p}_j, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j)\right]\right\} \,,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

wobei wir im letzten Schritt die Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion bis zur Ordnung $O(\tau)$ ausgenutzt haben. Setzen wir dieses Resultat nun in Gl. (4.19) ein, so

erhalten wir mit $t_i \equiv t_0$ und $t_f \equiv t_{N+1}$

$$\begin{aligned}
\langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle &= \int \left[\prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}^3 \vec{x}_j \right] \left[\prod_{j=0}^{N} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N} \left[\vec{p}_j \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j) - \tau\, H(\vec{p}_j, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j) \right] \right\} \\
&= \int \left[\prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}^3 \vec{x}_j \right] \left[\prod_{j=0}^{N} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N} \tau \left[\vec{p}_j \cdot \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\tau} - H(\vec{p}_j, \bar{\vec{x}}_j, \bar{t}_j) \right] \right\} \\
&\underset{\tau \to 0}{\overset{N \to \infty}{\longrightarrow}} \int \mathcal{D}\vec{x}\, \mathcal{D}\vec{p} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H(\vec{p}, \vec{x}, t) \right] \right\} . \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Definition der Ableitung,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{x}} ,$$

des Riemann–Integrals,

$$\lim_{\tau \to 0} \sum_{j=0}^{N} \tau = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t ,$$

sowie die abkürzende Schreibweise

$$\lim_{N \to \infty} \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}^3 \vec{x}_j \equiv \mathcal{D}\vec{x} , \quad \lim_{N \to \infty} \prod_{j=0}^{N} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \equiv \mathcal{D}\vec{p} \qquad (4.38)$$

benutzt. Gleichung (4.37) ist die sog. **Pfadintegral-Darstellung** des Propagators. Man beachte, dass über **alle** Pfade im Ortsraum zu integrieren ist, die vom fest vorgegebenen Anfangspunkt $\vec{x}(t_i) = \vec{x}_i$ zum fest vorgegebenen Endpunkt $\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f$ führen. Desweiteren integriert man **ohne Einschränkung** über **alle** Werte des Impulses. Dies erinnert an das **modifizierte Hamiltonsche Prinzip** aus der analytischen Mechanik (s. Abschnitt 3.3 der Vorlesung "Theoretische Physik II: Klassische Mechanik").

Es ist bemerkenswert, dass **keine** Operatoren mehr auftreten, die Impulse $\vec{p}$ und Orte $\vec{x}$ in Gl. (4.37) sind **klassische** Größen. Die **quantenmechanische Natur** des Propagators verbirgt sich hinter der Tatsache, dass das Teilchen **alle möglichen** Wege im Phasenraum (mit der Einschränkung, dass Anfangs- und Endpunkt im Ortsraum festgelegt sind) durchlaufen kann, nicht nur den klassischen Weg. Jeder Weg trägt mit dem **komplexwertigen** Gewicht bzw. Phasenfaktor

$$\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H(\vec{p}, \vec{x}, t) \right] \right\}$$

zum Pfadintegral bei. Dies wiederum führt zu den wohlbekannten quantenmechanischen Interferenzeffekten, vgl. das obige Beispiel des Doppelspalt-Experiments.

Falls die Hamilton–Funktion (wie üblich) **quadratisch** in den Impulsen ist,

$$H(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(t, \vec{x}) , \qquad (4.39)$$

so kann man die Pfadintegral-Darstellung (4.37) durch Ausintegrieren der Impulse noch etwas vereinfachen. Das j-te Impulsintegral über den Phasenfaktor lautet dann

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\vec{p}_j\cdot(\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j) - \tau\,\frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m} - \tau\,V(\bar{t}_j,\vec{\bar{x}}_j)\right]\right\} \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\,V(\bar{t}_j,\vec{\bar{x}}_j)} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[-\frac{i\tau}{2m\hbar}\,\vec{p}_j^{\,2} + \frac{i}{\hbar}\,\vec{p}_j\cdot(\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j)\right] . \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Das Integral ist vom Typ eines verschobenen Gauß–Integrals,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ax^2-bx} = e^{b^2/(4a)}\sqrt{\frac{\pi}{a}} . \qquad (4.41)$$

(NB: Dies gilt auch, wenn a und b imaginäre Zahlen sind, wie in Gl. (4.40).) Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\vec{p}_j\cdot(\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j) - \tau\,\frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m} - \tau\,V(\bar{t}_j,\vec{\bar{x}}_j)\right]\right\} \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\,V(\bar{t}_j,\vec{\bar{x}}_j)}\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\sqrt{\frac{2m\hbar\,\pi}{i\tau}}^{\,3} \exp\left[-\frac{(\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j)^2}{4\hbar^2}\,\frac{2m\hbar}{i\tau}\right] \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\,i\tau}}^{\,3} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j}{\tau}\right)^2 - V(\bar{t}_j,\vec{\bar{x}}_j)\right]\right\} . \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in Gl. (4.37) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle t_f,\vec{x}_f|t_i,\vec{x}_i\rangle &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\,i\tau}}^{\,3(N+1)} \int\left[\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}^3\vec{x}_j\right] \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j}{\tau}\right)^2 - V(\bar{t}_j,\vec{\bar{x}}_j)\right]\right\} \\
&\xrightarrow[\tau\to 0]{N\to\infty} \mathcal{N}\int\mathcal{D}\vec{x}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\,\left[\frac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} - V(t,\vec{x})\right]\right\} \\
&\equiv \mathcal{N}\int\mathcal{D}\vec{x}\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\,L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)\right] \\
&\equiv \mathcal{N}\int\mathcal{D}\vec{x}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,S[\vec{x}(t)]\right\} . \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Normierungskonstante

$$\mathcal{N} \equiv \lim_{\substack{N\to\infty\\ \tau\to 0}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\,i\tau}}^{\,3(N+1)} \qquad (4.44)$$

eingeführt, sowie die Definition von Lagrange–Funktion und Wirkung benutzt.

Gleichung (4.43) ist folgendermaßen zu interpretieren: das quantenmechanische Teilchen durchläuft **jeden möglichen** Pfad vom fest vorgegebenen Anfangsort $\vec{x}_i$ zum fest vorgegebenen Endort $\vec{x}_f$. Für jeden dieser Pfade ist die Wirkung $S[\vec{x}(t)]$ zu berechnen und in das Argument des Phasenfaktors einzusetzen. Abschließend werden diese Phasenfaktoren

über alle möglichen Pfade aufsummiert (integriert). Der **klassische Pfad** ist bekanntlich derjenige, bei dem die Wirkung **extremal** oder **stationär** wird, vgl. Gl. (2.5). Diese Bedingung führt dann auf die **klassischen Bewegungsgleichungen**, nämlich die Euler–Lagrange–Gleichungen. Typischerweise ist das Extremum der Wirkung ein **Minimum**, d.h. das Argument des Phasenfaktors ist klein, so dass der Phasenfaktor **am geringsten** für Pfade in der Nähe des klassischen Pfades oszilliert. Die Phasenfaktoren von Pfaden weitab vom klassischen Pfad dagegen haben große Argumente und oszillieren daher stark. Dies führt zu **destruktiver Interferenz** dieser Beiträge. Im klassischen Limes, $\hbar \to 0$, wird das Verhältnis $S[\vec{x}(t)]/\hbar$ beliebig groß und es interferieren **alle** Pfade **mit Ausnahme** des klassischen Pfades destruktiv miteinander, so dass nur der Beitrag des letzteren überlebt. Dann ist der Propagator einfach

$$\lim_{\hbar\to 0} \langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle = \mathcal{N} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\vec{x}_{\text{klass.}}(t)] \right\} . \tag{4.45}$$

Durch eine Entwicklung der Wirkung um den klassischen Pfad bis zur quadratischen Ordnung in den Ableitungen der Wirkung kann man auch explizit quantenmechanische Korrekturen zu diesem Resultat berechnen (dies ist äquivalent zur sog. WKB-Näherung in der Quantenmechanik).

15.1.2021

4.3 Störungstheorie

Mit Hilfe der Pfadintegral-Darstellung des Propagators erhält man eine physikalisch sehr anschauliche Interpretation von Streuprozessen. Dazu benötigen wir die **Störungstheorie**, d.h. wir multiplizieren das Potential mit einer Zahl $\lambda > 0$ und betrachten zunächst den Fall $\lambda \ll 1$. Am Schluss der Rechnung setzen wir dann $\lambda = 1$.

Zunächst entwickeln wir den Phasenfaktor in Gl. (4.43), der das Potential enthält, in eine Taylor–Reihe,

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, \lambda\, V(t,\vec{x}) \right] = 1 - \frac{i\,\lambda}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, V(t,\vec{x}) - \frac{\lambda^2}{2\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}t'\, V(t,\vec{x})\, V(t',\vec{x}) + \dots . \tag{4.46}$$

Setzen wir dies wieder in den Propagator (4.43) ein, so erhalten wir die sog. **Born–Reihe**

$$K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = K_0(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\, K_n(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) , \tag{4.47}$$

wobei

$$K_0(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\vec{x}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, \frac{m}{2}\, \dot{\vec{x}}^2 \right) \tag{4.48}$$

der **freie Propagator**, d.h. der Propagator im **wechselwirkungsfreien Fall** $V(t,\vec{x}) \equiv 0$ ist. Der freie Propagator kann analytisch berechnet werden. Dazu gehen wir wieder zur diskretisierten Version

$$K_0(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i\tau}}^{\,3(N+1)} \int \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{x}_j\, \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N} \tau\, \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j}{\tau} \right)^2 \right] \tag{4.49}$$

über und benutzen die in Übungsaufgabe H13 (iv) zu beweisende Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \, e^{i\gamma\left[(x_1-a)^2+(x_2-x_1)^2+\ldots+(b-x_N)^2\right]} = \sqrt{\frac{i^N \pi^N}{(N+1)\gamma^N}} \, \exp\left[\frac{i\,\gamma}{N+1}\,(b-a)^2\right] \,. \tag{4.50}$$

Mit $\gamma \equiv m/(2\hbar\tau)$ und $t_f - t_i = (N+1)\tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} K_0(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i\tau}}^{3(N+1)} \sqrt{\frac{(2\pi\hbar\, i\tau)^N}{(N+1)m^N}}^{3} \exp\left[\frac{i\,m}{2\hbar\tau(N+1)}\,(\vec{x}_f - \vec{x}_i)^2\right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i(t_f - t_i)}}^{3} \exp\left[\frac{i\,m\,(\vec{x}_f - \vec{x}_i)^2}{2\,\hbar\,(t_f - t_i)}\right] \,. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Wenn wir uns auf **kausale Propagation**, $t_f > t_i$, beschränken, so können wir diesen Ausdruck noch mit $\Theta(t_f - t_i)$ multiplizieren,

$$K_0(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i(t_f - t_i)}}^{3} \exp\left[\frac{i\,m\,(\vec{x}_f - \vec{x}_i)^2}{2\,\hbar\,(t_f - t_i)}\right] \Theta(t_f - t_i) \,. \tag{4.52}$$

Der Term erster Ordnung in der Born–Reihe lautet

$$K_1(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = -\frac{i}{\hbar}\,\mathcal{N} \int \mathcal{D}\vec{x} \, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, \frac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2\right) \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, V(t, \vec{x}) \,, \tag{4.53}$$

bzw. in diskretisierter Form

$$\begin{aligned} & K_1(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i\tau}}^{3(N+1)} \sum_{\ell=0}^{N} \tau \int \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{x}_j \, \exp\left[\frac{i\,m}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{N} (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)^2\right] V(t_\ell, \vec{x}_\ell) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\ell=0}^{N} \tau \int \mathrm{d}^3\vec{x}_\ell \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i\tau}}^{3(N-\ell+1)} \int \prod_{j=\ell+1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{x}_j \, \exp\left[\frac{i\,m}{2\hbar\tau} \sum_{j=\ell}^{N} (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)^2\right] \right\} \\ &\qquad \times V(t_\ell, \vec{x}_\ell) \left\{ \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i\tau}}^{3\ell} \int \prod_{j=1}^{\ell-1} \mathrm{d}^3\vec{x}_j \, \exp\left[\frac{i\,m}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{\ell-1} (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)^2\right] \right\} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\ell=0}^{N} \tau \int \mathrm{d}^3\vec{x}_\ell \, K_0(t_f, \vec{x}_f; t_\ell, \vec{x}_\ell)\, V(t_\ell, \vec{x}_\ell)\, K_0(t_\ell, \vec{x}_\ell; t_i, \vec{x}_i) \\ &\xrightarrow[\tau \to 0]{N \to \infty} -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, K_0(t_f, \vec{x}_f; t, \vec{x})\, V(t, \vec{x})\, K_0(t, \vec{x}; t_i, \vec{x}_i) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, K_0(t_f, \vec{x}_f; t, \vec{x})\, V(t, \vec{x})\, K_0(t, \vec{x}; t_i, \vec{x}_i) \,. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Hier haben wir im letzten Schritt die Integrationsgrenzen nach $\pm\infty$ geschoben, da die Intervalle $(-\infty, t_i)$ und (t_f, ∞) aufgrund der Kausalität des freien Propagators (4.52) nichts

zum Integral beitragen. Die Interpretation dieses Resultates ist folgende: das Teilchen propagiert **frei** vom Raum-Zeit-Punkt $(t_i, \vec{x}_i)$ zum Raum-Zeit-Punkt $(t, \vec{x})$. Dort wird es vom Potential $V(t, \vec{x})$ beeinflusst. Danach propagiert es wieder **frei** bis zum Raum-Zeit-Punkt $(t_f, \vec{x}_f)$. Die Situation ist in Abb. 4.5 dargestellt. Man beachte, dass über alle Zeiten t und alle Orte $\vec{x}$ integriert wird, also das Potential im Prinzip zu jedem Zeitpunkt t und an jedem Ort $\vec{x}$ auf das Teilchen wirken kann, allerdings nur einmal, davor und danach propagiert letzteres frei.

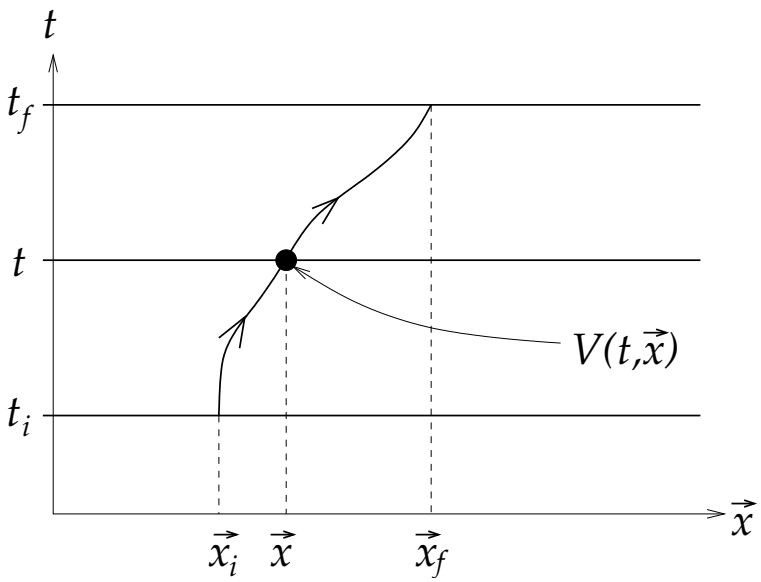


Abbildung 4.5: Graphische Interpretation des ersten Terms der Born–Reihe.

Ganz analog leitet man auch den zweiten Term der Born–Reihe her,

$$K_2(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \int \mathrm{d}^3\vec{x}_1\, \mathrm{d}^3\vec{x}_2\, K_0(t_f, \vec{x}_f; t_2, \vec{x}_2)\, V(t_2, \vec{x}_2) \times K_0(t_2, \vec{x}_2; t_1, \vec{x}_1)\, V(t_1, \vec{x}_1)\, K_0(t_1, \vec{x}_1; t_i, \vec{x}_i)\ . \quad (4.55)$$

Man beachte, dass sich der Faktor 1/2, der bei der Entwicklung der Exponentialfunktion auftritt, gegen einen Faktor 2 weghebt, der dadurch zustande kommt, dass es im Integral über t_1 und t_2 **zwei** mögliche Anordnungen der Zwischenzeitpunkte gibt: $t_2 \geq t_1$ und $t_1 \geq t_2$. Daher bekommt man einmal einen Beitrag vom Produkt $V(t_2, \vec{x}_2)\, V(t_1, \vec{x}_1)$ für $t_2 \geq t_1$ und einen weiteren Beitrag $V(t_2, \vec{x}_2)\, V(t_1, \vec{x}_1)$, wenn $t_1 \geq t_2$. Nach Umbenennung der Integrationsvariablen $t_2 \leftrightarrow t_1$, $\vec{x}_2 \leftrightarrow \vec{x}_1$ sind diese beiden Terme identisch. Der zweite Term der Born–Reihe ist in Abb. 4.6 graphisch veranschaulicht. Das Potential wirkt nun zweimal auf das Teilchen, bei den Raum-Zeit-Punkten $(t_1, \vec{x}_1)$ und $(t_2, \vec{x}_2)$, dazwischen propagiert es frei. Wieder muss man über alle möglichen Positionen dieser Raum-Zeit-Punkte integrieren. Die Kausalitätseigenschaft des freien Propagators (4.52) sorgt aber dafür, dass $t_i \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$.

Die Lösung (4.13) der Schrödinger–Gleichung lautet nun nach Einsetzen der Born–Reihe

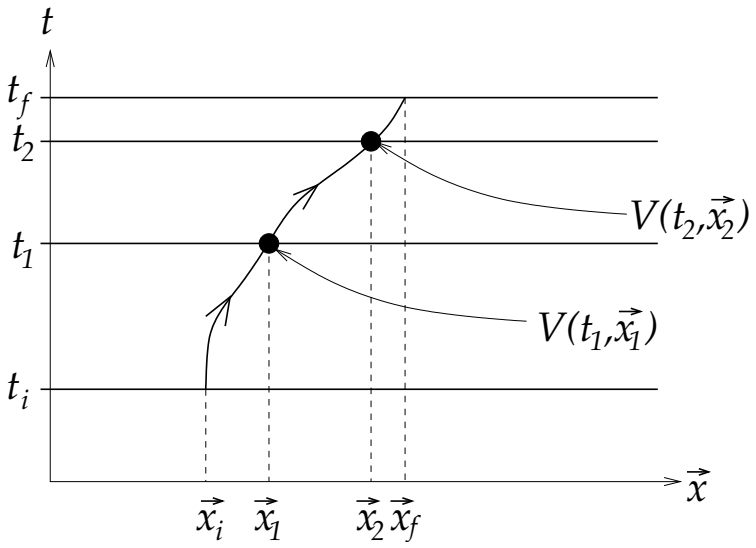


Abbildung 4.6: Graphische Interpretation des zweiten Terms der Born–Reihe.

(4.47) für $\lambda = 1$

$$
\begin{aligned}
\psi(t_f,\vec{x}_f) &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, K(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)\,\psi(t_i,\vec{x}_i) \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)\,\psi(t_i,\vec{x}_i) \\
&- \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x})\,V(t,\vec{x}) \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, K_0(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i)\,\psi(t_i,\vec{x}_i) \\
&+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x})\,V(t,\vec{x}) \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1 \int \mathrm{d}^3\vec{x}_1 \\
&\qquad \times K_0(t,\vec{x};t_1,\vec{x}_1)\,V(t_1,\vec{x}_1) \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, K_0(t_1,\vec{x}_1;t_i,\vec{x}_i)\,\psi(t_i,\vec{x}_i) \\
&+ \ldots \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)\,\psi(t_i,\vec{x}_i) \\
&- \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x})\,V(t,\vec{x})\,\psi(t,\vec{x})\,. \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

Hier haben wir die rot markierten Terme wieder zur Lösung $\psi(t,\vec{x})$ der Schrödinger–Gleichung zusammengefasst.

4.4 Die Streumatrix

Wir betrachten nun einen **Streuprozess**, bei dem die Teilchen bei $t = \pm\infty$ **wechselwirkungsfrei** sind. Für freie Teilchen können wir als Wellenfunktion Eigenzustände zum Impuls $\vec{p}$ und zur Energie E, d.h. **ebene Wellen** ansetzen. Für den Anfangszustand, bzw.

für das **einlaufende** Teilchen ist die Wellenfunktion dann

$$\psi_{\text{in}}(t_i, \vec{x}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(E_i t_i - \vec{p}_i \cdot \vec{x}_i\right)\right] \equiv \langle t_i, \vec{x}_i | \vec{p}_i \rangle_{\text{in}} \ , \tag{4.57}$$

wobei $E_i \equiv E(\vec{p}_i)$ die Energie des einlaufenden Teilchens ist. Der Index "in" gibt an, dass es sich um Zustände des einlaufenden (engl. *in-going*) Teilchens handelt. Für den Endzustand, d.h. das **auslaufende** Teilchen ist die Wellenfunktion entsprechend

$$\psi_{\text{out}}(t_f, \vec{x}_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(E_f t_f - \vec{p}_f \cdot \vec{x}_f\right)\right] \equiv \langle t_f, \vec{x}_f | \vec{p}_f \rangle_{\text{out}} \ , \tag{4.58}$$

wobei nun $E_f \equiv E(\vec{p}_f)$ die Energie des auslaufenden Teilchens ist. Der Index "out" gibt an, dass es sich um Zustände des auslaufenden (engl. *out-going*) Teilchens handelt.

Wir fragen nun nach der quantenmechanischen Amplitude für die Streuung vom Anfangszustand $|\vec{p}_i\rangle_{\text{in}}$ in den Endzustand $|\vec{p}_f\rangle_{\text{out}}$, der sog. **Streumatrix**,

$$\begin{aligned}
S_{fi} &\equiv {}_{\text{out}}\langle \vec{p}_f | \vec{p}_i \rangle_{\text{in}} \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_f \, {}_{\text{out}}\langle \vec{p}_f | t_f, \vec{x}_f \rangle \langle t_f, \vec{x}_f | \vec{p}_i \rangle_{\text{in}} \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_f \, \mathrm{d}^3\vec{x}_i \, {}_{\text{out}}\langle \vec{p}_f | t_f, \vec{x}_f \rangle \langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle \langle t_i, \vec{x}_i | \vec{p}_i \rangle_{\text{in}} \\
&\equiv \int \mathrm{d}^3\vec{x}_f \, \mathrm{d}^3\vec{x}_i \, \psi^*_{\text{out}}(t_f, \vec{x}_f) \, K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) \, \psi_{\text{in}}(t_i, \vec{x}_i) \\
&\equiv \int \mathrm{d}^3\vec{x}_f \, \psi^*_{\text{out}}(t_f, \vec{x}_f) \, \psi(t_f, \vec{x}_f) \ .
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Hier haben wir zunächst zwei vollständige Einsen von zeitentwickelten Ortsraum-Zuständen eingeschoben und sodann die Definition (4.14) des Propagators sowie Gl. (4.13) für die zum Raum-Zeit-Punkt $(t_f, \vec{x}_f)$ entwickelte einlaufende Wellenfunktion $\psi_{\text{in}}(t_i, \vec{x}_i)$ benutzt,

$$\psi(t_f, \vec{x}_f) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}_i \, K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) \, \psi_{\text{in}}(t_i, \vec{x}_i) \ . \tag{4.60}$$

Man beachte, dass wir den Index "in" bei $\psi(t_f, \vec{x}_f)$ nun weglassen, da die im Intervall $[t_i, t_f]$ stattfindende Wechselwirkung (die im vollen Propagator $K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i)$ berücksichtigt ist) diese Wellenfunktion in nicht-trivialer Weise ändert. Insbesondere wird durch den in diesem Zeitintervall stattfindenden Streuprozess der Anfangsimpuls $\vec{p}_i$ verändert.

Das Resultat (4.59) ist der **quantenmechanische Überlapp** der Lösung $\psi(t_f, \vec{x}_f)$ des vollen Streuproblems (mit dem vorgegebenen Anfangszustand $\psi_{\text{in}}(t_i, \vec{x}_i)$, in dem das Teilchen den festen Impuls $\vec{p}_i$ hat) mit dem auslaufenden Zustand $\psi_{\text{out}}(t_f, \vec{x}_f)$, der Eigenzustand zum Impuls $\vec{p}_f$ ist. Oder mit anderen Worten, die Streumatrix S_{fi} mißt den Anteil einer ebenen Welle mit Impuls $\vec{p}_f$ im Endzustand $\psi(t_f, \vec{x}_f)$, wobei letzterer sich aus dem Anfangszustand mit festem Impuls $\vec{p}_i$ entwickelt hat.

Setzen wir nun die Born–Reihe (4.47) für den vollen Propagator ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_f\, \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, \psi^*_{\text{out}}(t_f,\vec{x}_f)\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)\, \psi_{\text{in}}(t_i,\vec{x}_i) \\ &- \frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^3\vec{x}_f\, \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3\vec{x}\, \psi^*_{\text{out}}(t_f,\vec{x}_f)\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x})\, V(t,\vec{x})\, K_0(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i)\, \psi_{\text{in}}(t_i,\vec{x}_i) \\ &+ \ldots\,, \end{aligned} \tag{4.61}$$

wobei wir nur den Term der nullten und ersten Ordnung der Born–Reihe explizit aufgeführt haben und für letzteren Gl. (4.54) eingesetzt haben.

Eine ebene Welle, die wechselwirkungsfrei von $(t_i,\vec{x}_i)$ nach $(t_f,\vec{x}_f)$ propagiert, ist immer noch eine ebene Welle,

$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)\, \psi_{\text{in}}(t_i,\vec{x}_i) \equiv \psi_{\text{in}}(t_f,\vec{x}_f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3}\, \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(E_i t_f - \vec{p}_i\cdot\vec{x}_f\right)\right]\,, \tag{4.62}$$

wie in Übungsaufgabe P13 gezeigt werden soll. Also ist der erste Term in Gl. (4.61)

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^3\vec{x}_f\, \mathrm{d}^3\vec{x}_i\, \psi^*_{\text{out}}(t_f,\vec{x}_f)\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)\, \psi_{\text{in}}(t_i,\vec{x}_i) &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}_f\, \psi^*_{\text{out}}(t_f,\vec{x}_f)\, \psi_{\text{in}}(t_f,\vec{x}_f) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3\vec{x}_f\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[(E_f-E_i)\,t_f - (\vec{p}_f-\vec{p}_i)\cdot\vec{x}_f\right]\right\} \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\,(E_f-E_i)\,t_f\right]\, \delta^{(3)}(\vec{p}_f-\vec{p}_i) = \delta^{(3)}(\vec{p}_f-\vec{p}_i)\,, \end{aligned} \tag{4.63}$$

weil aufgrund der δ–Funktion $E_f = E(\vec{p}_f) = E(\vec{p}_i) = E_i$.

Alle Terme höherer Ordnung in Gl. (4.61) kürzen wir mit iT_{fi} ab, wobei der Faktor i Konvention ist und T_{fi} die sog. **Übergangsmatrix** darstellt. Während die δ–Funktion die Amplitude dafür ist, dass keine Streuung stattfindet, also dass Anfangs- und Endimpuls identisch sind, $\vec{p}_f = \vec{p}_i$, so stellt iT_{fi} die Amplitude dafür da, dass eine Streuung stattgefunden hat, also dass sich der Endimpuls vom Anfangsimpuls unterscheidet, $\vec{p}_f \neq \vec{p}_i$. Die Streumatrix (4.61) lautet dann kompakt

$$S_{fi} = \delta^{(3)}(\vec{p}_f-\vec{p}_i) + iT_{fi}\,. \tag{4.64}$$

4.5 Feynman–Diagramme

Es gibt eine einfache diagrammatische Notation für die Born–Reihe (4.47) des vollen Propagators,

$$\begin{aligned} K(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i) &= K_0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i) \\ &- \frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3\vec{x}\, K_0(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x})\, V(t,\vec{x})\, K_0(t,\vec{x};t_i,\vec{x}_i) + \ldots\,, \end{aligned} \tag{4.65}$$

s. Abb. 4.7.

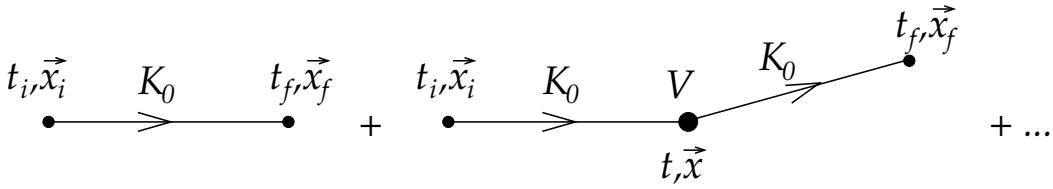
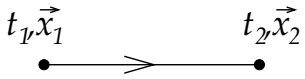


Abbildung 4.7: Diagrammatische Darstellung der Born–Reihe in Form von Feynman–Diagrammen.

Diese Notation geht auf R.P. Feynman zurück; diese Diagramme heißen deshalb auch **Feynman–Diagramme**. Mit Hilfe der **Feynman–Regeln** für die gleichnamigen Diagramme lassen sich diese wieder in mathematische Formeln übersetzen. Die **Feynman–Regeln im Ortsraum** lauten:

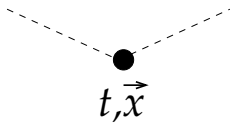
(i) Eine **Linie** zwischen zwei Raum-Zeit-Punkten $(t_1, \vec{x}_1)$ und $(t_2, \vec{x}_2)$ symbolisiert einen freien Propagator,

$$K_0(t_2, \vec{x}_2; t_1, \vec{x}_1) =$$



(ii) Ein **Vertex** am Raum-Zeit-Punkt $(t, \vec{x})$ symbolisiert einen Faktor

$$-\frac{i}{\hbar}\, V(t, \vec{x}) =$$



Eine Integration über alle möglichen Werte $(t, \vec{x})$ ist impliziert.

Man kann die Feynman–Regeln auch im **Impulsraum** formulieren. Dazu müssen alle Objekte Fourier–transformiert werden. Der freie Propagator lautet in Fourier–Darstellung

$$\tilde{K}_0(E_2, \vec{p}_2; E_1, \vec{p}_1) = (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(P_2 - P_1)\, \frac{i\hbar}{E_2 - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + i\epsilon}\ , \tag{4.66}$$

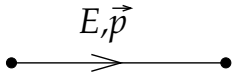
wie in Übungsaufgabe H12.1 (i) zu zeigen ist. Ohne die genaue Form des Potentials $V(t, \vec{x})$ zu kennen, können wir nur die Definition des Fourier–transformierten Vertexes angeben,

$$\tilde{V}(\omega, \vec{q}) = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3\vec{x}\, V(t, \vec{x})\, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\,(\omega t - \vec{q}\cdot\vec{x})\right]\ . \tag{4.67}$$

Setzen wir dies in die Born–Reihe (4.65) ein und identifizieren die Fourier–Koeffizienten auf der linken und rechten Seite der Gleichung, so erhalten wir folgende **Feynman–Regeln im Impulsraum**:

(i) Eine **Linie** symbolisiert einen Faktor

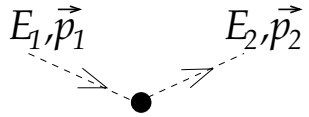
$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\, \frac{i\hbar}{E - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + i\epsilon} =$$



also im wesentlichen den freien Propagator (4.66) im Impulsraum.

(ii) Ein **Vertex** symbolisiert einen Faktor

$$-\frac{i}{\hbar}\,(2\pi\hbar)^4\tilde{V}(\omega,\vec{q}) =$$



An jedem Vertex gilt Energie-Impuls-Erhaltung, d.h. die Summe der einlaufenden Energien und Impulse sind identisch mit denen der auslaufenden, $\omega = E_2 - E_1$, $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$.

Der Beweis dieser Regeln erfolgt in Übungsaufgabe H12.2.

4.6 Green–Funktionen

20.1.2021

In diesem Abschnitt erläutern wir den Zusammenhang zwischen Propagator und Green–Funktionen. Es wird sich herausstellen, dass der **freie Propagator** bis auf einen Faktor identisch ist mit der **Green–Funktion** der freien Schrödinger–Gleichung. Um dies zu sehen, erinnern wir uns, wie wir die **volle** Schrödinger–Gleichung mit Hilfe der Methode der Green–Funktionen lösen würden. Dazu müssen wir zunächst beachten, dass diese Methode für **inhomogene** Differentialgleichungen geeignet ist, die Schrödinger–Gleichung aber zunächst eine **homogene** Differentialgleichung ist. Wir können aber den Potential-Term auf die andere Seite bringen,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\right)\psi(t,\vec{x}) = V(t,\vec{x})\,\psi(t,\vec{x}) \equiv j(t,\vec{x})\ . \tag{4.68}$$

Dies sieht formal aus wie eine lineare partielle Differentialgleichung mit der "Inhomogenität" $j(t,\vec{x})$. Streng genommen hängt diese natürlich gemäß ihrer Definition selbst von der Lösung $\psi(t,\vec{x})$ der Differentialgleichung ab. Wir ignorieren dies aber für den Moment und überlegen uns, wie wir diese Differentialgleichung lösen können. Die **allgemeine** Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung ist bekanntlich eine Superposition der **allgemeinen** Lösung der **homogenen** Differentialgleichung und einer **speziellen** Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung. Die **homogene** Differentialgleichung lautet

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\right)\psi_0(t,\vec{x}) = 0\ . \tag{4.69}$$

Ihre **allgemeine** Lösung ist eine Superposition ebener Wellen,

$$\psi_0(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}\,\tilde{\psi}_0(\vec{p})\,\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\,(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})\right]\ , \tag{4.70}$$

wobei die Energie die nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ erfüllt. Die Fourier–Koeffizienten müssen noch an Anfangs- und Randbedingungen angepasst werden. Man beachte, dass die Wahl

$$\tilde{\psi}_0(\vec{p}) \equiv \sqrt{2\pi\hbar}^3\,\delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{p}) \tag{4.71}$$

genau die einlaufende ebene Welle (4.57) mit Impuls $\vec{p}_i$ und Energie $E_i = E(\vec{p}_i)$ in der Diskussion der Streumatrix in Abschnitt 4.4 ergibt.

Eine **spezielle** Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung erhält man mit Hilfe der Methode der Green–Funktionen. Die **Green–Funktion** $G_0(t,\vec{x};t',\vec{x}')$ der homogenen Schrödinger–Gleichung (4.69) ist definiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)G_0(t,\vec{x};t',\vec{x}')=\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\;, \tag{4.72}$$

erfüllt also die inhomogene Schrödinger–Gleichung (4.68) mit einer (vierdimensionalen) δ–Funktion als Inhomogenität. Eine **spezielle** Lösung der **inhomogenen** Schrödinger–Gleichung (4.68) ist dann gegeben durch

$$\psi_S(t,\vec{x})=\int \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{x}'\,G_0(t,\vec{x};t',\vec{x}')\,j(t',\vec{x}')\;, \tag{4.73}$$

denn

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\right)\psi_S(t,\vec{x}) &= \int \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{x}'\,\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\right)G_0(t,\vec{x};t',\vec{x}')\,j(t',\vec{x}')\\ &= \int \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3\vec{x}'\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,j(t',\vec{x}')\\ &\equiv j(t,\vec{x})\;,\quad \text{q.e.d.}\end{aligned} \tag{4.74}$$

Die **allgemeine** Lösung der **inhomogenen** Schrödinger–Gleichung (4.68) ist dann

$$\begin{aligned}\psi(t_f,\vec{x}_f) &= \psi_0(t_f,\vec{x}_f)+\psi_S(t_f,\vec{x}_f)\\ &= \psi_0(t_f,\vec{x}_f)+\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\vec{x}\,G_0(t_f,\vec{x}_f;t,\vec{x})\,V(t,\vec{x})\,\psi(t,\vec{x})\;.\end{aligned} \tag{4.75}$$

Man vergleiche dieses Ergebnis mit Gl. (4.56). Falls dort $\psi(t_i,\vec{x}_i)$ eine Superposition von ebenen Wellen ist, analog zur allgemeinen Lösung (4.70) der homogenen Schrödinger-Gleichung, so wird nach Gl. (4.62) diese Superposition durch Konvolution mit dem freien Propagator $K_0(t_f,\vec{x}_f;t_i,\vec{x}_i)$ einfach zum Raum-Zeit-Punkt $(t_f,\vec{x}_f)$ transportiert, bleibt aber nach wie vor eine Superposition ebener Wellen. Wir können also den ersten Term in Gl. (4.56) mit dem ersten Term $\psi_0(t_f,\vec{x}_f)$ in Gl. (4.75) identifizieren. Dann muss aber auch der zweite Term in Gl. (4.56) mit dem zweiten in Gl. (4.75) übereinstimmen. Dies bedeutet wiederum, dass

$$K_0(t,\vec{x};t',\vec{x}')\equiv i\hbar\,G_0(t,\vec{x};t',\vec{x}')\;, \tag{4.76}$$

d.h. bis auf einen Faktor $i\hbar$ sind Propagator und Green–Funktion identisch.

4.7 Das erzeugende Funktional für Korrelationsfunktionen

Wir betrachten die Übergangsamplitude

$$\langle T',\vec{Q}'|T,\vec{Q}\rangle^J=\mathcal{N}\int\mathcal{D}\vec{q}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_T^{T'}\mathrm{d}\tau\,\left[L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\tau)+\hbar\,\vec{J}(\tau)\cdot\vec{q}(\tau)\right]\right\}\;, \tag{4.77}$$

d.h. die schon bekannte Übergangsamplitude (4.43), nun aber modifiziert durch Anwesenheit einer externen **Quelle** $\vec{J}(\tau)$, die an die Koordinaten $\vec{q}(\tau)$ koppelt. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass die Quelle $\vec{J}(\tau)$ nur in einem Zeitintervall $[t, t']$ von null verschieden ist, wobei $T < t$ und $t' < T'$, d.h. $[t, t'] \subset [T, T']$. Wir werden später $T \to -\infty$ und $T' \to +\infty$ gehen lassen.

Wir schieben nun auf der linken Seite von Gl. (4.77) zwei vollständige Einsen von zeitentwickelten Ortsraum-Zuständen ein,

$$\langle T', \vec{Q}\,'|T, \vec{Q}\rangle^J = \int \mathrm{d}^3\vec{q}\,'\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,\langle T', \vec{Q}\,'|t', \vec{q}\,'\rangle\langle t', \vec{q}\,'|t, \vec{q}\,\rangle^J\langle t, \vec{q}\,|T, \vec{Q}\rangle\ . \tag{4.78}$$

Hier haben wir das Superskript "J" am ersten und dritten Skalarprodukt weggelassen, da die Quelle $\vec{J}(t)$ in den Intervallen $[T, t]$ und $[t', T']$ verschwindet.

Nun ist

$$\langle T', \vec{Q}\,'|t', \vec{q}\,'\rangle = \langle \vec{Q}\,'|\,\hat{U}(T', 0)\,\hat{U}(0, t')\,|\vec{q}\,'\rangle = \langle \vec{Q}\,'|\,\hat{U}(T', t')\,|\vec{q}\,'\rangle\ . \tag{4.79}$$

Nehmen wir zusätzlich noch an, dass das System im Zeitintervall $[t', T']$ **statisch** ist, d.h. der Hamilton–Operator nicht explizit zeitabhängig ist, so gilt

$$\hat{U}(T', t') = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(T'-t')}$$

und, nach Einschieben eines vollständigen Satzes von Eigenfunktionen zum Hamilton–Operator,

$$\mathbb{1} = \sum\!\!\!\!\!\!\int_m |m\rangle\langle m|\ , \quad \hat{H}\,|m\rangle = E_m\,|m\rangle\ , \tag{4.80}$$

folgt aus Gl. (4.79)

$$\begin{aligned}\langle T', \vec{Q}\,'|t', \vec{q}\,'\rangle &= \sum\!\!\!\!\!\!\int_m \langle \vec{Q}\,'|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(T'-t')}\,|m\rangle\langle m|\vec{q}\,'\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_m \langle \vec{Q}\,'|m\rangle\langle m|\vec{q}\,'\rangle\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(T'-t')} \\ &\equiv \sum\!\!\!\!\!\!\int_m \phi_m(\vec{Q}\,')\,\phi_m^*(\vec{q}\,')\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(T'-t')}\ . \end{aligned} \tag{4.81}$$

Ganz analog folgt

$$\langle t, \vec{q}\,|T, \vec{Q}\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int_n \phi_n(\vec{q})\,\phi_n^*(\vec{Q})\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-T)}\ . \tag{4.82}$$

Setzen wir die Glgen. (4.81) und (4.82) in Gl. (4.78) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\langle T', \vec{Q}\,'|T, \vec{Q}\rangle^J \\ &= \sum\!\!\!\!\!\!\int_{m,n} \int \mathrm{d}^3\vec{q}\,'\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,\phi_m(\vec{Q}\,')\,\phi_m^*(\vec{q}\,')\,\langle t', \vec{q}\,'|t, \vec{q}\,\rangle^J\phi_n(\vec{q})\,\phi_n^*(\vec{Q})\,e^{\frac{i}{\hbar}[E_m(t'-T')+E_n(T-t)]}\ . \end{aligned} \tag{4.83}$$

Nun "rotieren" wir die Zeitachse um einen kleinen Winkel $-\delta$, $\delta > 0$, in der **komplexen** Zeitebene, s. Abb. 4.8. Dies bedeutet, dass alle Zeiten in der obigen Formel mit einem Phasenfaktor $e^{-i\delta}$ multipliziert werden, d.h.

$$t' - T' \longrightarrow (t' - T')e^{-i\delta}\ , \quad T - t \longrightarrow (T - t)e^{-i\delta}\ .$$

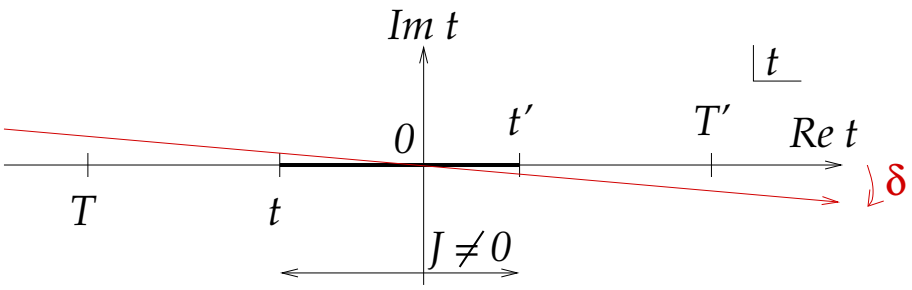


Abbildung 4.8: Rotation der Zeitachse in der komplexen Zeitebene. O.B.d.A. haben wir angenommen, dass der Nullpunkt der reellen Zeitachse im Intervall $[t, t']$ liegt.

Dann ist aber

$$\mathrm{Re}\,\frac{i}{\hbar}\,E_m(t'-T') \longrightarrow \mathrm{Re}\,\frac{i}{\hbar}\,E_m(t'-T')e^{-i\delta} = \frac{E_m}{\hbar}\,(t'-T')\,\sin\delta \overset{T'\to+\infty}{\simeq} -\frac{E_m}{\hbar}\,T'\,\sin\delta < 0\,, \tag{4.84}$$

wenn wir zusätzlich noch annehmen, dass $E_m > 0\;\forall\; m$. Ganz analog folgt

$$\mathrm{Re}\,\frac{i}{\hbar}\,E_n(T-t) \longrightarrow \mathrm{Re}\,\frac{i}{\hbar}\,E_n(T-t)e^{-i\delta} = \frac{E_n}{\hbar}\,(T-t)\,\sin\delta \overset{T\to-\infty}{\simeq} \frac{E_n}{\hbar}\,T\,\sin\delta < 0\,. \tag{4.85}$$

Dies bedeutet aber, dass im Limes $T \to -\infty$, $T' \to +\infty$ **alle** Terme in Gl. (4.83) **exponentiell gedämpft** sind. Der dominante Term ist der, der **am wenigsten** gedämpft ist, d.h. der mit dem kleinsten Argument der Exponentialfunktion. Dies ist der Term für $m = n = 0$, also der **Grundzustand**,

$$\lim_{\substack{T'\to+\infty\\ T\to-\infty}} \langle T', \vec{Q}'|T, \vec{Q}\rangle^J \simeq \phi_0(\vec{Q}')\,\phi_0^*(\vec{Q})\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)} \int \mathrm{d}^3\vec{q}'\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,\phi_0^*(t', \vec{q}')\,\langle t', \vec{q}'|t, \vec{q}\rangle^J \phi_0(t, \vec{q})\,, \tag{4.86}$$

wobei wir

$$e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\,\phi_0(\vec{q}) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\,\langle\vec{q}|0\rangle = \langle\vec{q}|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,|0\rangle = \langle\vec{q}|\hat{U}(t,0)|0\rangle \equiv \langle t, \vec{q}|0\rangle \equiv \phi_0(t, \vec{q})\,, \tag{4.87}$$

und entsprechend

$$\phi_0^*(\vec{q}')\,e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t'} = \langle 0|t', \vec{q}'\rangle = \phi_0^*(t', \vec{q}') \tag{4.88}$$

benutzt haben (hierbei voraussetzend, dass $\hat{H}$ nicht explizit zeitabhängig ist). Gleichung (4.86) läßt sich noch etwas umstellen,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{T'\to+\infty\\ T\to-\infty}} \frac{\langle T', \vec{Q}'|T, \vec{Q}\rangle^J}{\phi_0(\vec{Q}')\,\phi_0^*(\vec{Q})\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)}} &= \int \mathrm{d}^3\vec{q}'\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,\phi_0^*(t', \vec{q}')\,\langle t', \vec{q}'|t, \vec{q}\rangle^J \phi_0(t, \vec{q})\\ &= \int \mathrm{d}^3\vec{q}'\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,\langle 0|t', \vec{q}'\rangle\,\langle t', \vec{q}'|t, \vec{q}\rangle^J \langle t, \vec{q}|0\rangle \equiv \langle 0; t'|0; t\rangle^J\,.\end{aligned} \tag{4.89}$$

Das Bra $\langle 0;t'|$ ist der **Grund-** oder **Vakuumzustand zur Zeit** t' und das Ket $|0;t\rangle$ der **Vakuumzustand zur Zeit** t. Das Skalarprodukt auf der rechten Seite ist also die **Übergangsamplitude** vom Grundzustand oder Vakuum bei t zum Vakuum bei t'. Man nennt dies auch die **Vakuum-zu-Vakuum-Übergangsamplitude**. Da man t' so groß machen kann, wie man möchte (solange $t' < T'$) und t so klein wie man möchte (solange $T < t$), können wir für Gl. (4.89) auch schreiben

$$\langle 0;+\infty|0;-\infty\rangle^J \sim \lim_{\substack{T' \to +\infty \\ T \to -\infty}} \langle T', \vec{Q}'|T, \vec{Q}\rangle^J \,. \tag{4.90}$$

Den Nenner auf der linken Seite in Gl. (4.89) haben wir weggelassen, da es sich lediglich um einen numerischen Faktor handelt. Letztendlich benutzen wir noch die Pfadintegral-Darstellung (4.77) der Übergangsamplitude auf der rechten Seite und erhalten (nach Umbenennung der Integrationsvariablen $\tau \to t$)

$$\langle 0;+\infty|0;-\infty\rangle^J \sim \int \mathcal{D}\vec{q}\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \left[L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \hbar\, \vec{J}(t)\cdot\vec{q}(t)\right]\right\} \equiv Z[\vec{J}] \,. \tag{4.91}$$

Die rechte Seite ist offenbar ein **Funktional** der Quelle $\vec{J}(t)$. Man nennt $Z[\vec{J}]$ das **erzeugende Funktional für Korrelationsfunktionen**. Dies bedeutet, dass man Korrelationsfunktionen durch **funktionales Differenzieren** von $Z[\vec{J}]$ nach der Quelle $\vec{J}$ erzeugen kann. Wir werden dies im folgenden genauer erläutern.

Zunächst aber müssen wir uns den Begriff des Funktionals, und wie man es differenziert, in Erinnerung rufen. Betrachten wir zunächst eine gewöhnliche Funktion

$$\begin{aligned} f\ :\ M &\longrightarrow N\,, \qquad M, N \subset \mathbb{R}\,, \\ x &\longmapsto f(x)\,, \quad x \in M\,,\ f(x) \in N\,. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Wir bezeichnen den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen f auf der Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}$ mit $\mathcal{C}^\infty(M)$. Ein **Funktional**

$$\begin{aligned} F\ :\ \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ f &\longmapsto F[f]\,, \end{aligned} \tag{4.93}$$

ordnet ein Element $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ einer reellen Zahl $F[f] \in \mathbb{R}$ zu.

Die **Funktionalableitung** von $F[f]$ nach der Funktion f (genommen an der Stelle y) ist definiert als

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[f(x) + \epsilon\,\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon}\,. \tag{4.94}$$

In Worten berechnet man das Funktional F für eine Funktion, die sich von der Funktion f nur durch eine δ–Funktion an der Stelle y, multipliziert mit ϵ, unterscheidet, und subtrahiert davon das Funktional $F[f]$. Anschließend dividiert man durch ϵ und läßt ϵ gegen null gehen. Diese Definition der Funktionalableitung hat große Ähnlichkeit mit der Definition der gewöhnlichen Ableitung von Funktionen.

Um uns im Ableiten von Funktionalen zu üben, betrachten wir einige Beispiele:

(i) $F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, [f(x) + \epsilon\, \delta(x-y)] - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x-y) \equiv 1\ . \end{aligned} \tag{4.95}$$

(ii) $F_x[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, G(x,y)\, f(y)$. Dieses Funktional hängt außer von der Funktion f auch noch von der Variablen x ab. Es ist also ein **Funktional** von f und eine **Funktion** von x.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{\delta F_x[f(y)]}{\delta f(z)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, G(x,y)\, [f(y) + \epsilon\, \delta(y-z)] - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, G(x,y)\, f(y) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, G(x,y)\, \delta(y-z) \equiv G(x,z)\ . \end{aligned} \tag{4.96}$$

(iii) Für die spezielle Wahl $G(x,y) \equiv \delta(x-y)$ im vorangehenden Beispiel erhalten wir $F_x[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \delta(x-y)\, f(y) \equiv f(x)$.

$$\Longrightarrow \frac{\delta F_x[f(y)]}{\delta f(z)} \equiv \frac{\delta f(x)}{\delta f(z)} \equiv \delta(x-z)\ . \tag{4.97}$$

Man kann also durchaus auch eine gewöhnliche Funktion $f(x)$ funktional nach $f(z)$ ableiten. Das Ergebnis ist eine δ–Funktion mit Träger bei $x = z$. Dieses Ergebnis verallgemeinert das Resultat der gewöhnlichen Ableitung der i–ten nach der j–ten Koordinate, $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}x_j \equiv \delta_{ij}$. Die δ–Funktion spielt also für Funktionen (Variablen mit "kontinuierlichem" Index) die Rolle, die das Kronecker–Delta für Variablen mit diskretem Index innehat.

Nun betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[\vec{J}]}{\delta J_k(t_1)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int \mathcal{D}\vec{q}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \left\{ L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \hbar\, [J_j(t) + \epsilon\, \delta_{kj}\, \delta(t-t_1)]\, q_j(t) \right\} \right) \right. \\ &\qquad \left. - \int \mathcal{D}\vec{q}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \left\{ L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \hbar\, J_j(t) q_j(t) \right\} \right) \right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,\epsilon)^n}{n!} \int \mathcal{D}\vec{q} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, q_k(t)\, \delta(t-t_1) \right]^n e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t [L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \hbar\, \vec{J}(t)\cdot\vec{q}(t)]} \right. \\ &\qquad \left. - \int \mathcal{D}\vec{q}\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t [L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \hbar\, \vec{J}(t)\cdot\vec{q}(t)]} \right\} \\ &= i \int \mathcal{D}\vec{q}\, q_k(t_1)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t [L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \hbar\, \vec{J}(t)\cdot\vec{q}(t)]}\ . \end{aligned} \tag{4.98}$$

Hier haben wir vom ersten zum zweiten Gleichheitszeichen den Anteil der Exponentialfunktion im ersten Pfadintegral, welcher proportional zu ϵ ist, in eine Taylor–Reihe entwickelt. Der $n = 0$–Term dieser Reihe hebt sich gegen das zweite Pfadintegral weg.

In der dann verbleibenden Reihe ist der Term der Ordnung n proportional zu ϵ^{n-1} (nach Division durch den Faktor ϵ im Nenner), und somit überlebt im Limes $\epsilon \to 0$ lediglich der Term $n = 1$ der Taylor–Reihe.

Ganz ähnlich zeigt man

$$\frac{\delta^n Z[\vec{J}]}{\delta J_{k_1}(t_1) \cdots \delta J_{k_n}(t_n)} = i^n \int \mathcal{D}\vec{q}\, q_{k_1}(t_1) \cdots q_{k_n}(t_n)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t [L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \hbar\, \vec{J}(t)\cdot\vec{q}(t)]} \,, \tag{4.99}$$

wobei die Indizes $k_1, \ldots, k_n = x, y$, oder z sind.

Betrachten wir nun die Übergangsamplitude

$$\langle t_f, \vec{q}_f |\, \hat{q}_k(t_j)\, | t_i, \vec{q}_i \rangle \,, \quad t_i < t_j < t_f \,, \quad k = x, y \text{ oder } z \,. \tag{4.100}$$

Wir wiederholen nun die Schritte, die wir in Abschnitt 4.2 durchgeführt haben, um Gl. (4.37) abzuleiten. Zunächst partitionieren wir wieder das Zeitintervall $[t_i, t_f]$ in $N + 1$ gleiche Stücke der Länge τ und schieben vollständige Sätze von zeitentwickelten Ortsraum-Zuständen ein,

$$\begin{aligned} \langle t_f, \vec{q}_f |\, \hat{q}_k(t_j)\, | t_i, \vec{q}_i \rangle \;=\; & \int \prod_{n=1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{q}_n \langle t_f, \vec{q}_f | t_N, \vec{q}_N \rangle \langle t_q, \vec{q}_N | t_{N-1}, \vec{q}_{N-1} \rangle \cdots \\ & \times \langle t_{j+1}, \vec{q}_{j+1} |\, \hat{q}_k(t_j)\, | t_j, \vec{q}_j \rangle \langle t_j, \vec{q}_j | t_{j-1}, \vec{q}_{j-1} \rangle \cdots \langle t_1, \vec{q}_1 | t_i, \vec{q}_i \rangle \,. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Der Satz

$$\mathbb{1} = \int \mathrm{d}^3\vec{q}_j\, | t_j, \vec{q}_j \rangle \langle t_j, \vec{q}_j | \,,$$

ist derjenige, der aus Eigenzuständen zum Operator $\hat{q}_k(t_j)$ besteht,

$$\hat{q}_k(t_j)\, | t_j, \vec{q}_j \rangle = q_k(t_j)\, | t_j, \vec{q}_j \rangle \,. \tag{4.102}$$

Dieser Satz wird in Gl. (4.101) direkt hinter den Operator $\hat{q}_k(t_j)$ eingeschoben, so dass der Operator einfach durch seinen Eigenwert ersetzt werden kann. Damit taucht lediglich dieser Eigenwert als zusätzlicher Faktor auf, aber die weiteren Schritte sind völlig analog zur Herleitung von Gl. (4.37). Wir erhalten als Endergebnis

$$\langle t_f, \vec{q}_f |\, \hat{q}_k(t_j)\, | t_i, \vec{q}_i \rangle = \int \mathcal{D}\vec{q}\mathcal{D}\vec{p}\, q_k(t_j)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, [\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - H(\vec{p},\vec{q},t)]} \,. \tag{4.103}$$

Das Objekt auf der linken Seite bezeichnet man als **Ein-Punkt-Korrelationsfunktion**.

Völlig analog leitet man für $t_i < t_1 < t_2 < t_f$ her, dass

$$\langle t_f, \vec{q}_f |\, \hat{q}_{k_2}(t_2)\, \hat{q}_{k_1}(t_1)\, | t_i, \vec{q}_i \rangle = \int \mathcal{D}\vec{q}\mathcal{D}\vec{p}\, q_{k_1}(t_1)\, q_{k_2}(t_2)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, [\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - H(\vec{p},\vec{q},t)]} \,. \tag{4.104}$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Operator $\hat{q}_{k_2}(t_2)$, der zum **späteren** Zeitpunkt t_2 gehört, **links** vom Operator $\hat{q}_{k_1}(t_1)$ steht, der zum **früheren** Zeitpunkt t_1 gehört. Das sukzessive Einschieben von vollständigen Sätzen von zeitentwickelten Ortsraum-Zuständen stößt daher auf keine Probleme. Dies würde aber nicht so ohne weiteres funktionieren, wenn $t_2 < t_1$ wäre, weil dann der Satz, der zum früheren Zeitpunkt gehört, links von dem

zum späteren Zeitpunkt eingeschoben werden müsste. Wo dieses Problem dagegen nicht auftritt, ist die folgende Amplitude für $t_i < t_2 < t_1 < t_f$,

$$\langle t_f, \vec{q}_f | \, \hat{q}_{k_1}(t_1) \, \hat{q}_{k_2}(t_2) \, | t_i, \vec{q}_i \rangle = \int \mathcal{D}\vec{q} \mathcal{D}\vec{p} \, q_{k_1}(t_1) \, q_{k_2}(t_2) \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{p}, \vec{q}, t)]} \, . \tag{4.105}$$

Offensichtlich spielt die Reihenfolge der Faktoren $q_{k_1}(t_1)$ und $q_{k_2}(t_2)$ unter dem Pfadintegral auf der rechten Seite keine Rolle, daher sind die Glgen. (4.104) und (4.105) identisch. Um die linken Seiten dieser Gleichungen zusammenfassen zu können, benutzen wir den **Zeitordnungsoperator**,

$$\hat{T} \left[\hat{q}_{k_1}(t_1) \, \hat{q}_{k_2}(t_2) \right] = \begin{cases} \hat{q}_{k_1}(t_1) \, \hat{q}_{k_2}(t_2) & \text{für} \quad t_1 > t_2 \, , \\ \hat{q}_{k_2}(t_2) \, \hat{q}_{k_1}(t_1) & \text{für} \quad t_2 > t_1 \, , \end{cases} \tag{4.106}$$

so dass wir die Glgen. (4.104) und (4.105) kompakt schreiben können als

$$\langle t_f, \vec{q}_f | \, \hat{T} \left[\hat{q}_{k_1}(t_1) \, \hat{q}_{k_2}(t_2) \right] \, | t_i, \vec{q}_i \rangle = \int \mathcal{D}\vec{q} \mathcal{D}\vec{p} \, q_{k_1}(t_1) \, q_{k_2}(t_2) \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{p}, \vec{q}, t)]} \, . \tag{4.107}$$

Dies ist eine **Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion**. Dieses Ergebnis läßt sich für n Zeiten t_j, $j = 1, \ldots, n$, verallgemeinern,

$$\langle t_f, \vec{q}_f | \, \hat{T} \left[\hat{q}_{k_1}(t_1) \, \cdots \hat{q}_{k_n}(t_n) \right] \, | t_i, \vec{q}_i \rangle = \int \mathcal{D}\vec{q} \mathcal{D}\vec{p} \, q_{k_1}(t_1) \cdots q_{k_n}(t_n) \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{p}, \vec{q}, t)]} \, . \tag{4.108}$$

Dies ist eine n–**Punkt-Korrelationsfunktion**. Für Hamilton–Funktionen, die quadratisch in den Impulsen sind, s. Gl. (4.39), kann man das Pfadintegral über die Impulse wieder explizit ausführen und erhält

$$\langle t_f, \vec{q}_f | \, \hat{T} \left[\hat{q}_{k_1}(t_1) \, \cdots \hat{q}_{k_n}(t_n) \right] \, | t_i, \vec{q}_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\vec{q} \, q_{k_1}(t_1) \cdots q_{k_n}(t_n) \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)} \, . \tag{4.109}$$

Lassen wir nun noch $t_i \to -\infty$ und $t_f \to +\infty$ gehen, so können wir analog zur Herleitung von Gl. (4.90) zeigen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t_f \to +\infty \\ t_i \to -\infty}} \langle t_f, \vec{q}_f | \, \hat{T} \left[\hat{q}_{k_1}(t_1) \, \cdots \hat{q}_{k_n}(t_n) \right] \, | t_i, \vec{q}_i \rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\vec{q} \, q_{k_1}(t_1) \cdots q_{k_n}(t_n) \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)} \\ &\sim \langle 0; +\infty | \, \hat{T} \left[\hat{q}_{k_1}(t_1) \, \cdots \hat{q}_{k_n}(t_n) \right] \, | 0; -\infty \rangle \, . \end{aligned} \tag{4.110}$$

Vergleichen wir dies mit Gl. (4.99), so sehen wir, dass $Z[\vec{J}]$ das **erzeugende Funktional** für n–**Punkt-Korrelationsfunktionen im Grundzustand** ist,

$$\left. \frac{\delta^n Z[\vec{J}]}{\delta J_{k_1}(t_1) \cdots \delta J_{k_n}(t_n)} \right|_{\vec{J}=0} \sim i^n \langle 0; +\infty | \, \hat{T} \left[\hat{q}_{k_1}(t_1) \, \cdots \hat{q}_{k_n}(t_n) \right] \, | 0; -\infty \rangle \, , \tag{4.111}$$

d.h. durch funktionales Ableiten von $Z[\vec{J}]$ nach der Quelle $\vec{J}$ (die dann anschließend auf null gesetzt wird) erzeugen wir die besagten n–Punkt- Korrelationsfunktionen.

5 Funktionalintegral–Formulierung der Quantenfeldtheorie

22.1.2021

5.1 Das erzeugende Funktional für skalare Felder

In diesem Kapitel leiten wir das quantenfeldtheoretische Analogon zur quantenmechanischen Vakuum-zu-Vakuum-Übergangsamplitude, bzw. zum erzeugenden Funktional für Korrelationsfunktionen, her, das wir in Abschnitt 4.7 besprochen haben. Wir betrachten dabei zunächst generische skalare Felder.

In der Tat müssen wir in der Herleitung des erzeugenden Funktionals gegenüber dem quantenmechanischen Fall nur das Offensichtliche ändern:

(i) Koordinaten $\vec{x}(t)$ werden zu **Feldern** $\phi(t, \vec{x})$.

(ii) Impulse $\vec{p}(t)$ werden zu **kanonisch konjugierten Feldern** $\pi(t, \vec{x}) \equiv \partial\mathcal{L}/\partial[\partial_0\phi(t, \vec{x})]$.

(iii) Ortsraum-Zustände $|\vec{x}\rangle$ werden zu Feld-Zuständen $|\phi(\vec{x})\rangle$. Diese sind **Eigenzustände** zum **Schrödinger–Bild-Feldoperator** $\hat{\phi}(\vec{x})$ zum Zeitpunkt $t = 0$,

$$\hat{\phi}(\vec{x})\,|\phi(\vec{x})\rangle = \phi(\vec{x})\,|\phi(\vec{x})\rangle\ . \tag{5.1}$$

Auch diese Zustände sind **vollständig**,

$$\mathbb{1} = \int \prod_{\vec{x}} \mathrm{d}\phi(\vec{x})\,|\phi(\vec{x})\rangle\langle\phi(\vec{x})|\ . \tag{5.2}$$

Hier ist das Integrationsmaß $\prod_{\vec{x}} \mathrm{d}\phi(\vec{x})$ symbolisch zu verstehen. Wenn wir nämlich den Raum so diskretisieren, wie in Abb. 3.2 gezeigt, ist die Menge aller Punkte $\vec{x}$ abzählbar unendlich (und in einem endlichen Volumen $V < \infty$ sogar abzählbar endlich). Dann ist das Integrationsmaß wohldefiniert: wir müssen an jedem (diskreten) Punkt $\vec{x}$ im Raum über alle Werte von $\phi(\vec{x})$ integrieren. Nun bilden wir den Kontinuumslimes, d.h. wir lassen den Gitterabstand gegen null gehen. Der Einfachheit halber verwenden wir aber dasselbe Symbol für das Integrationsmaß.

Die Feld-Zustände sind auch **orthonormiert**,

$$\langle\phi_a(\vec{x})|\phi_b(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} \delta(\phi_a(\vec{x}) - \phi_b(\vec{x})) \equiv \delta\left[\phi_a - \phi_b\right]\ . \tag{5.3}$$

Die δ–Funktion mit den eckigen Klammern ist eine **funktionale** δ–Funktion, d.h. die Funktionen $\phi_a(\vec{x})$ und $\phi_b(\vec{x})$ müssen an **allen** Orten $\vec{x}$ gleich sein.

(iv) Impuls-Zustände $|\vec{p}\rangle$ werden zu kanonisch konjugierten Feld-Zuständen $|\pi(\vec{x})\rangle$, welche **Eigenzustände** zum **Schrödinger–Bild-Feldoperator** $\hat{\pi}(\vec{x})$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sind,

$$\hat{\pi}(\vec{x})\,|\pi(\vec{x})\rangle = \pi(\vec{x})\,|\pi(\vec{x})\rangle\ . \tag{5.4}$$

Auch diese Zustände sind **vollständig**,

$$\mathbb{1} = \int \prod_{\vec{x}} \frac{\mathrm{d}\pi(\vec{x})}{2\pi}\,|\pi(\vec{x})\rangle\langle\pi(\vec{x})|\ , \tag{5.5}$$

und **orthonormal**,

$$\langle\pi_a(\vec{x})|\pi_b(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} \delta(\pi_a(\vec{x}) - \pi_b(\vec{x})) \equiv \delta\left[\pi_a - \pi_b\right]\ . \tag{5.6}$$

Der Faktor 2π im Nenner des Integrationsmaßes in Gl. (5.5) ist dabei Konvention.

(v) Die Verallgemeinerung des Überlapps (4.34) ist

$$\langle\phi(\vec{x})|\pi(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} \exp\left[i\pi(\vec{x})\phi(\vec{x})\right] = \exp\left[i\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\pi(\vec{x})\phi(\vec{x})\right]\ . \tag{5.7}$$

Wir entwickeln nun den Schrödinger–Bild-Zustand $|\phi(\vec{x})\rangle$ vom Zeitpunkt $t = 0$ zu einer späteren Zeit t. In Analogie zu Gl. (4.9) erhalten wir

$$\hat{U}(0,t)\,|\phi(\vec{x})\rangle = |t,\phi(\vec{x})\rangle \equiv |\phi(t,\vec{x})\rangle\ . \tag{5.8}$$

Auch diese zeitentwickelten Zustände sind vollständig,

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} &= \hat{U}(0,t_j)\,\hat{U}(t_j,0) = \hat{U}(0,t_j)\int\prod_{\vec{x}}\mathrm{d}\phi_j(\vec{x})\,|\phi_j(\vec{x})\rangle\langle\phi_j(\vec{x})|\,\hat{U}(t_j,0)\\
&= \int\prod_{\vec{x}}\mathrm{d}\phi_j(\vec{x})\,\hat{U}(0,t_j)\,|\phi_j(\vec{x})\rangle\langle\phi_j(\vec{x})|\,\hat{U}(t_j,0)\\
&= \int\prod_{\vec{x}}\mathrm{d}\phi_j(\vec{x})\,|t_j,\phi_j(\vec{x})\rangle\langle t_j,\phi_j(\vec{x})| \equiv \int\prod_{\vec{x}}\mathrm{d}\phi_j(\vec{x})\,|\phi_j(t_j,\vec{x})\rangle\langle\phi_j(t_j,\vec{x})|\ .
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Wir betrachten nun die quantenfeldtheoretische Übergangsamplitude

$$\langle t_f,\phi_f(\vec{x})|t_i,\phi_i(\vec{x})\rangle \equiv \langle\phi_f(t_f,\vec{x})|\phi_i(t_i,\vec{x})\rangle\ , \tag{5.10}$$

und partitionieren das Zeitintervall $[t_i, t_f]$ wieder in $N+1$ gleich große Stücke der Länge τ. Wir schieben dann N vollständige Sätze (5.9) von Feld-Zuständen ein, jeweils einen für den Zeitpunkt $t_j = t_i + j\tau$, $j = 1,\ldots,N$,

$$\begin{aligned}
\langle\phi_f(t_f,\vec{x})|\phi_i(t_i,\vec{x})\rangle &= \int\prod_{j=1}^{N}\prod_{\vec{x}}\mathrm{d}\phi_j(\vec{x})\,\langle\phi_f(t_f,\vec{x})|\phi_N(t_N,\vec{x})\rangle\\
&\quad\times\langle\phi_N(t_N,\vec{x})|\phi_{N-1}(t_{N-1},\vec{x})\rangle\cdots\langle\phi_1(t_1,\vec{x})|\phi_i(t_i,\vec{x})\rangle
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Nun betrachten wir den Faktor

$$\begin{aligned}\langle\phi_{j+1}(t_{j+1},\vec{x})|\phi_j(t_j,\vec{x})\rangle &= \langle\phi_{j+1}(\vec{x})|\,\hat{U}(t_{j+1},0)\,\hat{U}(0,t_j)\,|\phi_j(\vec{x})\rangle \\ &= \langle\phi_{j+1}(\vec{x})|\,\hat{U}(t_{j+1},t_j)\,|\phi_j(\vec{x})\rangle\ . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Hier ist

$$\hat{U}(t_{j+1},t_j) = \hat{T}\,\exp\left[-i\int_{t_j}^{t_{j+1}}\mathrm{d}t\,\hat{H}(t)\right] \equiv \hat{T}\,\exp\left[-i\int_{t_j}^{t_{j+1}}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\vec{x}\,\hat{\mathcal{H}}(t,\vec{x})\right] \tag{5.13}$$

der Zeitentwicklungsoperator für das quantenfeldtheoretische System, mit dem **Hamilton–Dichte-Operator** $\hat{\mathcal{H}}(t,\vec{x})$. Dieser Operator hängt von Feldoperatoren und kanonisch konjugierten Feldoperatoren (und u.U. explizit von Raum und Zeit) ab,

$$\hat{\mathcal{H}}(t,\vec{x}) \equiv \mathcal{H}(\hat{\pi}(\vec{x}),\hat{\phi}(\vec{x}),t,\vec{x})\ . \tag{5.14}$$

Um die Abhängigkeit von operatorwertigen Größen loszuwerden, empfiehlt es sich, auch vollständige Sätze (5.5) von kanonisch konjugierten Feld-Zuständen einzuschieben. Analoge Schritte wie die, die zu Gl. (4.37) geführt haben, liefern dann

$$\begin{aligned}\langle\phi_f(t_f,\vec{x})|\phi_i(t_i,\vec{x})\rangle &= \int\left[\prod_{j=1}^{N}\prod_{\vec{x}}\mathrm{d}\phi_j(\vec{x})\right]\left[\prod_{j=0}^{N}\prod_{\vec{x}}\frac{\mathrm{d}\pi_j(\vec{x})}{2\pi}\right] \\ &\times\ \exp\left\{i\sum_{j=0}^{N}\tau\int\mathrm{d}^3\vec{x}\left[\pi_j(\vec{x})\frac{\phi_{j+1}(\vec{x})-\phi_j(\vec{x})}{\tau}-\mathcal{H}(\pi_j(\vec{x}),\phi_j(\vec{x}),t_j,\vec{x})\right]\right\}\ . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Wir bezeichnen nun $\phi_j(\vec{x}) \equiv \phi(t_j,\vec{x})$, $\pi_j(\vec{x}) \equiv \pi(t_j,\vec{x})$. Im Limes $N\to\infty$, $\tau\to 0$ erhalten wir als Endergebnis

$$\begin{aligned}&\langle\phi_f(t_f,\vec{x})|\phi_i(t_i,\vec{x})\rangle \\ &= \int\mathcal{D}\phi(t,\vec{x})\,\mathcal{D}\pi(t,\vec{x})\,\exp\left\{i\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\vec{x}\,[\pi(t,\vec{x})\,\partial_0\phi(t,\vec{x})-\mathcal{H}(\pi,\phi,t,\vec{x})]\right\}\ . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Für neutrale skalare Bosonen ist $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\phi) \equiv \partial_0\phi$. Die Hamilton–Dichte für neutrale skalare Bosonen hatten wir schon in Gl. (3.50) benutzt,

$$\mathcal{H}(\pi,\phi) = \frac{1}{2}\left(\pi^2+\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi+m^2\phi^2\right)\ . \tag{5.17}$$

Also ist

$$\pi\partial_0\phi-\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\left(\pi-\partial_0\phi\right)^2+\frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2-\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi-m^2\phi^2\right] = -\frac{1}{2}\left(\pi-\partial_0\phi\right)^2+\mathcal{L}\ . \tag{5.18}$$

Das Funktionalintegral über die kanonisch konjugierten Felder in Gl. (5.16) ist nun einfach ein verschobenes Gauß–Integral und kann sofort ausgeführt werden. Das Resultat ist eine simple Normierungskonstante, so dass Gl. (5.16) lautet

$$\langle\phi_f(t_f,\vec{x})|\phi_i(t_i,\vec{x})\rangle = \mathcal{N}\int\mathcal{D}\phi(t,\vec{x})\,\exp\left[i\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathcal{L}(\phi,\partial_0\phi,t,\vec{x})\right]\ . \tag{5.19}$$

Dieselben Überlegungen, die auf Gl. (4.91) geführt haben, erlauben nun, das **erzeugende Funktional für n–Punkt-Korrelationsfunktionen** für neutrale skalare Felder anzugeben,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi(X)\, \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4X\, \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, X) + J(X)\phi(X)\right]\right\} \\ &\sim \langle 0; +\infty | 0; -\infty\rangle^J \,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Hier haben wir gleich die relativistisch kovariante Notation benutzt. Das Zeitintegral läuft von $-\infty$ bis $+\infty$.

5.2 Das neutrale skalare Feld

Wir berechnen nun das erzeugende Funktional für ein **nichtwechselwirkendes, neutrales skalares Feld**. Dies geht analytisch, da die wechselwirkungsfreie Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right) \tag{5.21}$$

eine **quadratische Funktion** der Felder ist, das Funktionalintegral über die Felder in Gl. (5.20) mithin einfach ein (verschobenes) Gauß–Integral ist. Wir setzen zunächst Gl. (5.21) in Gl. (5.20) ein,

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi(X)\, \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4X\, \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right) + J\phi\right]\right\} \,, \tag{5.22}$$

und integrieren den kinetischen Term partiell,

$$\int \mathrm{d}^4X\, \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = -\int \mathrm{d}^4X\, \phi\,\Box\phi \quad + \quad \text{Oberflächenterme} \,.$$

Die Oberflächenterme verschwinden, wenn wir annehmen, dass das Feld im Unendlichen null ist. Dies ergibt

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi(X)\, \exp\left\{ -i \int \mathrm{d}^4X\, \left[\frac{1}{2}\,\phi\left(\Box + m^2\right)\phi - J\phi\right]\right\} \,. \tag{5.23}$$

Wie bereits erwähnt, ist dies ein verschobenes Gauß–Integral und kann analytisch angegeben werden.

In Übungsaufgabe H13 (ii) haben wir eine nützliche Formel für verschobene Gauß–Integrale in N Dimensionen bewiesen. Sei A eine symmetrische, positiv-definite, nichtsinguläre $(N \times N)$–Matrix und $\vec{x}$, $\vec{b}$ seien N–dimensionale Vektoren. Dann gilt

$$\int \mathrm{d}^N\vec{x}\, \exp\left(-\frac{1}{2}\,\vec{x}^T\mathrm{A}\,\vec{x} + \vec{b}^T\vec{x}\right) = (2\pi)^{N/2}(\mathrm{det}\mathrm{A})^{-1/2}\, \exp\left(\frac{1}{2}\,\vec{b}^T\mathrm{A}^{-1}\vec{b}\right) \,. \tag{5.24}$$

Hier bedeuten $\vec{x}^T\mathrm{A}\,\vec{x} = \sum_{i,j=1}^N x_i\, A_{ij}\, x_j$ und $\vec{b}^T\vec{x} = \sum_{i=1}^N b_i\, x_i$. Wir wenden diese Formel nun auf Gl. (5.23) an. Dabei ist zum einen zu beachten, dass wir uns die Raum-Zeit

zunächst **endlich** und **diskretisiert** vorstellen müssen, so dass wir eine abzählbar endliche Anzahl von Raum-Zeit-Punkten X_i, $i = 1, \ldots, N$, erhalten. Die Integrationsvariablen $\phi(X_i)$ an diesen Raum-Zeit-Punkten entsprechen dann den Komponenten des Vektors $\vec{x}$ in Gl. (5.24). Am Ende der Rechnung lassen wir das Raum-Zeit-Volumen gegen unendlich und den Gitterabstand zwischen den Raum-Zeit-Punkten gegen null gehen.

Zum anderen ist zu beachten, dass das Argument der Exponentialfunktion in Gl. (5.23) rein **imaginär** ist. Die Konvergenz des Integranden für beliebig große Werte der Felder $\phi(X)$ ist also nicht ohne weiteres gegeben. Dieses Problem werden wir dadurch lösen, dass wir die Zeitvariable t der Minkowski–Raum-Zeit **analytisch zur Euklidschen Raum-Zeit fortsetzen**.

Wir bringen zunächst durch Einfügen einer δ–Funktion das Argument der Exponentialfunktion in Gl. (5.23) in die Form

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi(X)\, \exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, \phi(X)\left(\Box_x + m^2\right)\, \delta^{(4)}(X-Y)\, \phi(Y)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + i\int \mathrm{d}^4X\, J(X)\phi(X)\right] \qquad (5.25) \\ &\equiv \int \mathcal{D}\phi(X)\, \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, \phi(X)\, A(X,Y)\, \phi(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\, J(X)\phi(X)\right]\,, \end{aligned}$$

mit

$$A(X,Y) \equiv -i\left(\Box_x + m^2\right)\, \delta^{(4)}(X-Y)\,. \qquad (5.26)$$

Nun führen die sog. **Euklidsche Zeit** τ ein, indem wir die Minkowski–Zeit **analytisch fortsetzen**,

$$t \longrightarrow -i\tau\,, \quad it \longrightarrow \tau\,. \qquad (5.27)$$

Der **Euklidsche Raum-Zeit-Vektor** ist

$$(\bar{X}^\mu) = (\tau, \vec{x})\,. \qquad (5.28)$$

Man beachte, dass wir keinen Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Vektoren (bzw. Spalten- oder Zeilenvektoren) machen müssen, da die Metrik des vierdimensionalen Euklidschen Raumes einfach

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.29)$$

ist. Das 4-Skalarprodukt des 4-Vektors im Minkowski–Raum wird gemäß Gl. (5.27) analytisch fortgesetzt zu

$$X^2 = X^\mu X_\mu = t^2 - \vec{x}^{\,2} \quad\longrightarrow\quad -\tau^2 - \vec{x}^{\,2} = -\bar{X}^\mu \bar{g}_{\mu\nu}\bar{X}^\nu = -\bar{X}^\mu \bar{X}_\mu = -\bar{X}^2\,. \qquad (5.30)$$

Das infinitesimale 4-Volumenelement wird zu

$$i\,\mathrm{d}^4X = i\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\vec{x} \quad\longrightarrow\quad \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}^4\bar{X}\,, \qquad (5.31)$$

woraus folgt

$$\mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y \quad\longrightarrow\quad -\mathrm{d}^4\bar{X}\,\mathrm{d}^4\bar{Y}\ . \tag{5.32}$$

Der Euklidsche 4-Gradient lautet

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{X}_\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{X}^\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\tau},\,\vec{\nabla}\right)\ . \tag{5.33}$$

Die analytische Fortsetzung des d'Alembert–Operators ist also

$$\Box_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x \quad\longrightarrow\quad -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \Delta_x \equiv -\overline{\Box}_x \equiv -\frac{\partial}{\partial\bar{X}_\mu}\frac{\partial}{\partial\bar{X}^\mu}\ . \tag{5.34}$$

Die analytische Fortsetzung der δ–Funktion in der Zeit ist

$$\begin{aligned} -i\,\delta(t_x - t_y) \quad &= \quad -i\int\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\,e^{-ik_0(t_x-t_y)} = \int\frac{\mathrm{d}(-ik_0)}{2\pi}\,e^{-i(-ik_0)(it_x-it_y)} \\ &\longrightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}\kappa}{2\pi}\,e^{-i\kappa(\tau_x-\tau_y)} \equiv \delta(\tau_x-\tau_y)\ . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Hier haben wir auch die Energie-Variable k_0 analytisch fortgesetzt,

$$k_0 \longrightarrow i\kappa\ , \quad -ik_0 \longrightarrow \kappa\ . \tag{5.36}$$

Man beachte, dass die analytische Fortsetzung in der Energie das umgekehrte Vorzeichen erfordert wie die der Zeit, vgl. Gl. (5.27). Aus Gl. (5.35) folgt nun

$$-\,i\,\delta^{(4)}(X-Y) \quad\longrightarrow\quad \delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\ . \tag{5.37}$$

Nun können wir auch die Matrix (5.26) analytisch fortsetzen. Mit den Glgen. (5.34) und (5.35) lautet diese

$$A(X,Y) \longrightarrow A(\bar{X},\bar{Y}) = (-\overline{\Box}_x + m^2)\,\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y}) = \int\frac{\mathrm{d}^4\bar{K}}{(2\pi)^4}\,e^{-i\bar{K}\cdot(\bar{X}-\bar{Y})}\,(\bar{K}^2+m^2)\ . \tag{5.38}$$

Hier haben wir den Euklidschen 4-Impulsvektor,

$$(\bar{K}^\mu) = (\kappa,\vec{k})\ , \tag{5.39}$$

mit der Euklidschen Energie-Variablen κ, und die Fourier–Darstellung der vierdimensionalen Euklidschen δ–Funktion,

$$\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y}) = \int\frac{\mathrm{d}^4\bar{K}}{(2\pi)^4}\,e^{-i\bar{K}\cdot(\bar{X}-\bar{Y})} = \int\frac{\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^4}\,e^{-i\kappa(\tau_x-\tau_y)-i\,\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ , \tag{5.40}$$

benutzt.

Da $\kappa\in\mathbb{R}$, ist $\bar{K}^2 = \kappa^2+\vec{k}^2 \geq 0$ und die Fourier–Transformierte der Matrix $A(\bar{X},\bar{Y})$ ist **positiv definit**, $\tilde{A}(\bar{K}) = \bar{K}^2+m^2 > 0$ (für $m>0$). Damit ist auch $A(\bar{X},\bar{Y})$ positiv definit. Ferner ist $A(\bar{X},\bar{Y})$ **symmetrisch**, $A(\bar{X},\bar{Y}) = A(\bar{Y},\bar{X})$, wie man an Gl. (5.38) sofort erkennt (substituiere $\bar{K}^\mu \to -\bar{K}^\mu$). Außerdem ist $A(\bar{X},\bar{Y})$ **nicht-singulär**, zumindest in

diskretisierter Raum-Zeit (in der $\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y}) \to a^{-4}\delta^{(4)}_{\bar{X},\bar{Y}}$, mit dem Gitterabstand a und dem vierdimensionalen Kronecker–Delta). Es sind also alle Voraussetzungen gegeben, um die Formel (5.24), zumindest in diskretisierter Raum-Zeit, anwenden zu können. Mit der Identifikation

$$x_i \longrightarrow \phi(\bar{X}) \;, \quad A_{ij} \longrightarrow A(\bar{X},\bar{Y}) \;, \quad b_i \longrightarrow J(\bar{X}) \;, \tag{5.41}$$

wird Gl. (5.25) unter Verwendung der Glgen. (5.31) und (5.32) zu

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi(\bar{X}) \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4\bar{X}\,\mathrm{d}^4\bar{Y}\,\phi(\bar{X})\,A(\bar{X},\bar{Y})\,\phi(\bar{Y}) + \int \mathrm{d}^4\bar{X}\,J(\bar{X})\phi(\bar{X})\right] \\ &= \mathcal{N}(\mathrm{detA})^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4\bar{X}\,\mathrm{d}^4\bar{Y}\,J(\bar{X})\,A^{-1}(\bar{X},\bar{Y})\,J(\bar{Y})\right] \;. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Wir bestimmen nun $A^{-1}(\bar{X},\bar{Y})$. Es gilt mit Gl. (5.38)

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Z}) &= \int \mathrm{d}^4\bar{Y}\,A(\bar{X},\bar{Y})\,A^{-1}(\bar{Y},\bar{Z}) \\ &= \int \mathrm{d}^4\bar{Y}\,(-\overline{\Box}_x + m^2)\,\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\,A^{-1}(\bar{Y},\bar{Z}) \\ &= (-\overline{\Box}_x + m^2)\,A^{-1}(\bar{X},\bar{Z}) \;, \end{aligned} \tag{5.43}$$

d.h. $A^{-1}(\bar{X},\bar{Z})$ ist die **Green–Funktion** der freien Klein–Gordon–Gleichung (in Euklidscher Raum-Zeit)!

Die Fourier–Transformation von $A^{-1}(\bar{X},\bar{Z})$ lautet

$$A^{-1}(\bar{X},\bar{Z}) = \int \frac{\mathrm{d}^4\bar{K}\,\mathrm{d}^4\bar{Q}}{(2\pi)^8}\,e^{-i\bar{K}\cdot\bar{X}}\,\tilde{A}^{-1}(\bar{K},\bar{Q})\,e^{i\bar{Q}\cdot\bar{Z}} \;. \tag{5.44}$$

Dass wir die Fourier–Transformation bezüglich des zweiten Arguments mit einem anderen Vorzeichen im Argument der Exponentialfunktion durchführen, ist reine Konvention. Setzen wir Gl. (5.44) in Gl. (5.43) ein, so erhalten wir

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\bar{K}\,\mathrm{d}^4\bar{Q}}{(2\pi)^8}\,e^{-i\bar{K}\cdot\bar{X}}\,(\bar{K}^2+m^2)\,\tilde{A}^{-1}(\bar{K},\bar{Q})\,e^{i\bar{Q}\cdot\bar{Z}} = \int \frac{\mathrm{d}^4\bar{Q}}{(2\pi)^4}\,e^{-i\bar{Q}\cdot(\bar{X}-\bar{Z})} \;. \tag{5.45}$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$\tilde{A}^{-1}(\bar{K},\bar{Q}) = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(\bar{K}-\bar{Q})\,\frac{1}{\bar{K}^2+m^2} \;. \tag{5.46}$$

Eingesetzt in Gl. (5.44) erhalten wir

$$A^{-1}(\bar{X},\bar{Z}) = \int \frac{\mathrm{d}^4\bar{K}}{(2\pi)^4}\,e^{-i\bar{K}\cdot(\bar{X}-\bar{Z})}\,\frac{1}{\bar{K}^2+m^2} \;. \tag{5.47}$$

Nun können wir die analytische Fortsetzung rückgängig machen. Mit den Glgen. (5.27) und (5.36), sowie $\bar{K}^2 = \kappa^2 + \vec{k}^{\,2} \longrightarrow -k_0^2 + \vec{k}^{\,2} \equiv -K^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} A^{-1}(\bar{X},\bar{Y}) \;\longrightarrow\; A^{-1}(X,Y) &= -i\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-i(-ik_0)(it_x-it_y)-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\,\frac{1}{-K^2+m^2} \\ &= i\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\,\frac{1}{K^2-m^2} \\ &\equiv i\,\Delta(X-Y) \;. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Man beachte, dass für das so definierte $A^{-1}(X,Y)$ mit den Glgen. (5.26) und (5.48) gilt

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4Y\, A(X,Y)A^{-1}(Y,Z) = \\
&= \int \mathrm{d}^4Y (-i)\left(\Box_x + m^2\right)\delta^{(4)}(X-Y)\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(Y-Z)}\,\frac{i}{K^2-m^2} \\
&= \left(\Box_x + m^2\right)\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Z)}\,\frac{1}{K^2-m^2} \equiv -\delta^{(4)}(X-Z)\,, \qquad (5.49)
\end{aligned}$$

also mit einem anderen Vorzeichen als die entsprechende Relation (5.43) im Euklidschen.

Das erzeugende Funktional (5.42) lautet mit Gl. (5.48)

$$Z_0[J] = \mathcal{N}'(\det\Delta)^{1/2}\,\exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\, J(X)\,\Delta(X-Y)\,J(Y)\right]\,, \qquad (5.50)$$

wobei wir wieder Gl. (5.32) benutzt haben und Faktoren i in der Normierungskonstante (jetzt mit $\mathcal{N}'$ bezeichnet) absorbiert haben.

Wir hatten gesehen, dass $A^{-1}(X,Y) \equiv i\,\Delta(X-Y)$ die Green–Funktion der freien Klein–Gordon–Gleichung ist. Die Fourier–Transformierte

$$\tilde{\Delta}(K) = \frac{1}{K^2-m^2} \qquad (5.51)$$

der Green–Funktion $\Delta(X-Y)$ hat Pole auf der reellen k_0–Achse bei

$$k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^{\,2}+m^2} = \pm E_k\,. \qquad (5.52)$$

Wie bei jeder Green–Funktion üblich muss man eine Vorschrift angeben, wie man diese Pole in der komplexen k_0–Ebene umgeht. Wir wählen die sog. **Feynman–Vorschrift**:

$$\tilde{\Delta}_F(K) = \frac{1}{K^2-m^2+i\eta}\,. \qquad (5.53)$$

Die Pole werden dadurch in die komplexe k_0–Ebene verschoben, so dass Integrale entlang der rellen k_0–Achse wohldefiniert werden. Die Pole liegen nun bei

$$k_0^2 = E_k^2 - i\eta \quad\Longrightarrow\quad k_0 = \pm\sqrt{E_k^2-i\eta} \simeq \pm E_k \mp i\,\frac{\eta}{2E_k} \equiv \pm E_k \mp i\delta\,, \qquad (5.54)$$

s. Abb. 5.1.

Wir hatten uns in Abschnitt 4.6 klar gemacht, dass Green–Funktionen (bis auf konstante Faktoren) identisch mit Propagatoren sind. Daher nennt man

$$\Delta_F(X-Y) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)}\,\frac{1}{K^2-m^2+i\eta} \qquad (5.55)$$

den sog. **Feynman–Propagator** für neutrale skalare Bosonen.

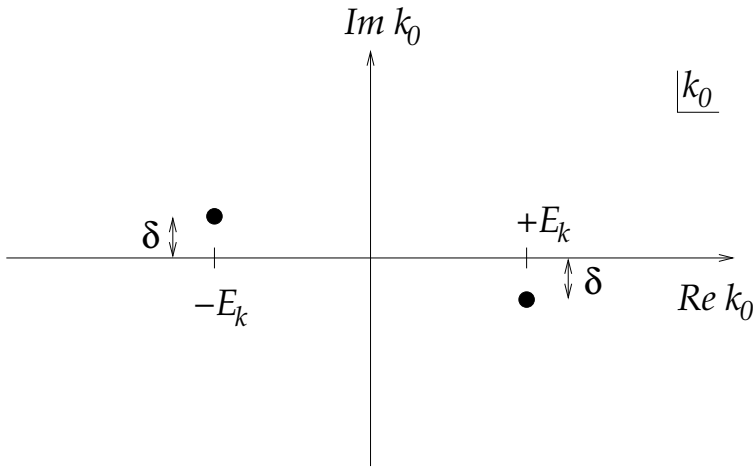


Abbildung 5.1: Feynman–Vorschrift zur Verschiebung der Pole in der komplexen k_0–Ebene.

27.1.2021

Nun berechnen wir aus dem erzeugenden Funktional (5.50) Korrelationsfunktionen. Zunächst wählen wir die Normierungskonstante $\mathcal{N}'$ so, dass

$$Z_0[0] = 1 \ , \tag{5.56}$$

d.h.

$$Z_0[J] = \exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,J(X)\,\Delta_F(X-Y)\,J(Y)\right] \ . \tag{5.57}$$

Aus Gl. (5.20) folgt andererseits, dass

$$Z_0[J] \sim \langle 0;+\infty|0;-\infty\rangle^J \ . \tag{5.58}$$

Wir zeigen nun, dass die Wahl (5.56) dafür sorgt, dass sogar

$$Z_0[J] \equiv \langle 0;+\infty|0;-\infty\rangle^J \tag{5.59}$$

gilt. Zunächst gilt offensichtlich aufgrund von Gl. (5.58), dass

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\,\langle 0;+\infty|0;-\infty\rangle^J \ , \tag{5.60}$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierungskonstanten $\mathcal{N}$. In Abwesenheit äußerer Quellen, $J(X) = 0$, lautet diese Gleichung

$$Z_0[0] = \mathcal{N}\,\langle 0;+\infty|0;-\infty\rangle \ . \tag{5.61}$$

Aber ohne äußere Quellen und im wechselwirkungsfreien Fall geschieht nichts und das einlaufende Vakuum ist identisch mit dem auslaufenden Vakuum,

$$|0;-\infty\rangle \equiv |0;+\infty\rangle \equiv |0\rangle \quad\Longrightarrow\quad \langle 0;+\infty|0;-\infty\rangle \equiv \langle 0|0\rangle = 1 \ , \tag{5.62}$$

also

$$Z_0[0] = \mathcal{N} \; . \tag{5.63}$$

Aber wir hatten vereinbart, dass $Z_0[0] = 1$, s. Gl. (5.56), also $\mathcal{N} \equiv 1$. Dies beweist Gl. (5.59), q.e.d.

Gemäß Gl. (4.111) ist die **Ein-Punkt-Korrelationsfunktion**

$$\begin{aligned}
\langle 0; +\infty |\, \hat{\phi}(X)\, | 0; -\infty \rangle &= -i\, \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(X)}\bigg|_{J=0} = -i\, \frac{\delta}{\delta J(X)}\, e^{-(i/2)\int \mathrm{d}^4U\, \mathrm{d}^4V\, J(U)\, \Delta_F(U-V)\, J(V)}\bigg|_{J=0} \\
&= -i \left[-\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4U\, \mathrm{d}^4V\, \frac{\delta J(U)}{\delta J(X)}\, \Delta_F(U-V)\, J(V) \right. \\
&\qquad \left. -\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4U\, \mathrm{d}^4V\, J(U)\, \Delta_F(U-V)\, \frac{\delta J(V)}{\delta J(X)} \right] Z_0[J] \bigg|_{J=0} \\
&= -i \left[-\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4V\, \Delta_F(X-V)\, J(V) - \frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4U\, J(U)\, \Delta_F(U-X) \right] Z_0[J] \bigg|_{J=0} \\
&= (-i)^2 \int \mathrm{d}^4V\, \Delta_F(X-V)\, J(V)\; Z_0[J] \bigg|_{J=0} \\
&= 0 \; .
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Hier haben wir von der vierdimensionalen Verallgemeinerung von Gl. (4.97),

$$\frac{\delta J(U)}{\delta J(X)} = \delta^{(4)}(U-X) \; , \tag{5.65}$$

und von der Symmetrie des Feynman-Propagators, $\Delta_F(X-Y) \equiv \Delta_F(Y-X)$, Gebrauch gemacht.

Die **Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** lautet gemäß Gl. (4.111)

$$\begin{aligned}
\langle 0; +\infty |\, \hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\, \hat{\phi}(Y) \right]\, | 0; -\infty \rangle &= (-i)^2\, \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(X)\, \delta J(Y)}\bigg|_{J=0} \\
&= -i\, \frac{\delta}{\delta J(X)}\, (-i)^2 \int \mathrm{d}^4V\, \Delta_F(Y-V)\, J(V)\; Z_0[J] \bigg|_{J=0} \\
&= (-i)^3 \left[\Delta_F(Y-X) - i \int \mathrm{d}^4V\, \Delta_F(Y-V)\, J(V) \int \mathrm{d}^4U\, \Delta_F(X-U)\, J(U) \right] Z_0[J] \bigg|_{J=0} \\
&= i\, \Delta_F(X-Y) \quad = \quad Y \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet X \quad ,
\end{aligned} \tag{5.66}$$

wobei wir von der ersten zur zweiten und von der zweiten zur dritten Zeile vom Zwischenresultat in der vorletzten Zeile von Gl. (5.64), sowie wiederholt von der Symmetrie des Feynman-Propagators Gebrauch gemacht haben. Die **Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** ist also offenbar **identisch** mit der **Green–Funktion** der freien Klein–Gordon–Gleichung, bzw. (bis auf einen Faktor i) mit dem **Feynman–Propagator**!

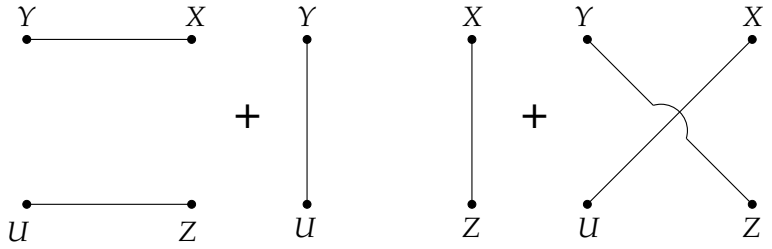
Die **Drei-Punkt-Korrelationsfunktion** ist

$$
\begin{aligned}
\langle 0;+\infty|\,\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\,\hat{\phi}(Y)\,\hat{\phi}(Z)\right]\,|0;-\infty\rangle &= (-i)^3\,\frac{\delta^3 Z_0[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)}\bigg|_{J=0} \\
&= -i\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\,(-i)^3\,\Big[\,\Delta_F(Z-Y) \\
&\qquad - i\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(Z-V)\,J(V)\int \mathrm{d}^4U\,\Delta_F(Y-U)\,J(U)\Big]\,Z_0[J]\bigg|_{J=0} \\
&= (-i)^4\,\Big[-i\,\Delta_F(Z-Y)\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(X-V)\,J(V) \\
&\qquad -i\,\Delta_F(Z-X)\int \mathrm{d}^4U\,\Delta_F(Y-U)\,J(U) \\
&\qquad -i\,\Delta_F(Y-X)\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(Z-V)\,J(V) \\
&\qquad +(-i)^2\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(Z-V)\,J(V)\int \mathrm{d}^4U\,\Delta_F(Y-U)\,J(U) \\
&\qquad\quad \times\int \mathrm{d}^4W\,\Delta_F(X-W)\,J(W)\Big]\,Z_0[J]\bigg|_{J=0} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

Wir benötigen offensichtlich eine **gerade** Anzahl von Funktionalableitungen, um zumindest bei einigen Termen alle Faktoren J zu eliminieren. Bei n-Punkt-Korrelationsfunktionen mit **ungeradem** n bleibt also bei allen Termen immer mindestens ein Faktor J übrig, der die Korrelationsfunktion zum Verschwinden bringt.

Die **Vier-Punkt-Korrelationsfunktion** lautet

$$
\begin{aligned}
\langle 0;+\infty|\,\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\,\hat{\phi}(Y)\,\hat{\phi}(Z)\,\hat{\phi}(U)\right]\,|0;-\infty\rangle &= (-i)^4\,\frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\bigg|_{J=0} \\
&= -i\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\,(-i)^4\,\Big[-i\,\Delta_F(U-Z)\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(Y-V)\,J(V) \\
&\qquad -i\,\Delta_F(U-Y)\int \mathrm{d}^4W\,\Delta_F(Z-W)\,J(W) \\
&\qquad -i\,\Delta_F(Z-Y)\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(U-V)\,J(V) \\
&\qquad +(-i)^2\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(U-V)\,J(V)\int \mathrm{d}^4R\,\Delta_F(Z-R)\,J(R) \\
&\qquad\quad \times\int \mathrm{d}^4W\,\Delta_F(Y-W)\,J(W)\Big]\,Z_0[J]\bigg|_{J=0} \\
&= i\,\Delta_F(X-Y)\,i\,\Delta_F(Z-U) + i\,\Delta_F(X-Z)\,i\,\Delta_F(Y-U) \\
&+ i\,\Delta_F(X-U)\,i\,\Delta_F(Y-Z)
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

$=$ 

. (5.69)

Offenbar werden die vier Punkte X, Y, Z und U auf alle möglichen Weisen mit freien Propagatoren miteinander verbunden. Man beachte, dass sich die Propagatoren im letzten Diagramm **nicht** kreuzen, d.h. es existiert **kein Vertex**, da es solche nur bei **wechselwirkenden** Theorien gibt.

Das Ergebnis (5.69) wird im sog. **Wickschen Theorem** auf n-Punkt-Korrelationsfunktionen beliebiger Ordnung verallgemeinert,

$$\begin{aligned}
&\langle 0;+\infty|\,\hat{T}\left[\hat{\phi}(X_1)\,\cdots\,\hat{\phi}(X_{2N})\right]\,|0;-\infty\rangle \\
&= \frac{1}{2^N N!}\sum_{\mathcal{P}} i\,\Delta_F(X_{P_1}-X_{P_2})\,i\,\Delta_F(X_{P_3}-X_{P_4})\,\cdots\,i\,\Delta_F(X_{P_{2N-1}}-X_{P_{2N}})\,. \qquad (5.70)
\end{aligned}$$

Hier läuft die Summe über die Menge $\mathcal{P}$ aller **Permutationen** $(P_1,\ldots P_{2N})$ des Satzes $(1,\ldots 2N)$. Der Normierungsfaktor berücksichtigt, dass (a) das Paar (P_i,P_j) identisch mit dem Paar (P_j,P_i) ist, da der Propagator eine gerade Funktion von $X_{P_i}-X_{P_j}$ ist (dies ergibt den Faktor 2^N), und (b), dass die Reihenfolge, in der die Paare (P_i,P_j), d.h. also die Propagatoren, angeordnet werden, keine Rolle spielt (dies ergibt den Faktor $N!$).

Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir noch die **physikalische Interpretation** des freien Propagators an. Wir bemerken zunächst, dass im wechselwirkungsfreien Fall ohne äußere Quellen das einlaufende Vakuum gleich dem auslaufenden ist, s. Gl. (5.62). Also ist

$$\begin{aligned}
i\,\Delta_F(X-Y) &= \langle 0;+\infty|\,\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\,\hat{\phi}(Y)\right]\,|0;-\infty\rangle \equiv \langle 0|\,\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\,\hat{\phi}(Y)\right]\,|0\rangle \\
&= \langle 0|\,\hat{\phi}(X)\,\hat{\phi}(Y)\,\Theta(x_0-y_0)+\hat{\phi}(Y)\,\hat{\phi}(X)\,\Theta(y_0-x_0)\,|0\rangle \qquad (5.71)\\
&= \Theta(x_0-y_0)\,\langle 0|\,\hat{\phi}^{(+)}(X)\,\hat{\phi}^{(-)}(Y)\,|0\rangle+\Theta(y_0-x_0)\,\langle 0|\,\hat{\phi}^{(+)}(Y)\,\hat{\phi}^{(-)}(X)\,|0\rangle\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Zerlegung $\hat{\phi}(X)\equiv\hat{\phi}^{(+)}(X)+\hat{\phi}^{(-)}(X)$ mit

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}^{(+)}(X) &= \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}}\,f_k(X)\,\hat{a}(\vec{k})\,,\\
\hat{\phi}^{(-)}(X) &= \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}}\,f_k^*(X)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k})\,, \qquad (5.72)
\end{aligned}$$

benutzt haben. Die physikalische Interpretation von Gl. (5.71) ist nun folgende: Falls $y_0<x_0$, so trägt nur der erste Term bei. Hier wird ein Teilchen bei Y erzeugt und bei X wieder vernichtet. Falls $x_0<y_0$, so ist nur der zweite Term von null verschieden, bei dem ein Teilchen bei X erzeugt und bei Y wieder vernichtet wird. In jedem Fall geschieht die Erzeugung zum früheren und die Vernichtung zum späteren Zeitpunkt. Dazwischen propagiert das Teilchen wechselwirkungsfrei.

5.3 Das geladene skalare Feld

Die Lagrange–Dichte für das **nichtwechselwirkende, geladene skalare Feld** lautet

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \Phi)^* \, \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \; . \tag{5.73}$$

Aber wir erinnern uns daran, dass das komplexe Feld Φ zwei reellen Feldern ϕ_1 und ϕ_2 entspricht, s. Gl. (2.78), also

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2\right) \; . \tag{5.74}$$

Das nichtwechselwirkende, geladene skalare Feld Φ ist also mathematisch äquivalent zu zwei nichtwechselwirkenden, neutralen skalaren Feldern $\phi_{1,2}$. Das erzeugende Funktional für Korrelationsfunktionen kann daher sofort hingeschrieben werden,

$$\begin{aligned} & Z_0[J_1, J_2] \\ &= \int \mathcal{D}\phi_1 \, \mathcal{D}\phi_2 \, \exp\left\{ -i \int \mathrm{d}^4 X \left[\frac{1}{2}\phi_1 (\Box + m^2)\phi_1 - J_1 \phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2 (\Box + m^2)\phi_2 - J_2 \phi_2 \right] \right\} \; . \end{aligned} \tag{5.75}$$

Hier wurde sowohl für ϕ_1 als auch für ϕ_2 Feld eine separate (reellwertige) Quelle eingeführt. Alternativ könnte man auch eine **komplexwertige** Quelle

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 + i J_2\right) \; , \quad J^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 - i J_2\right) \tag{5.76}$$

einführen. Mit Gl. (2.78) berechnen wir dann

$$\begin{aligned} J_1 \phi_1 + J_2 \phi_2 &= J_1 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi + \Phi^*\right) + J_2 \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\Phi - \Phi^*\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 - i J_2\right)\Phi + \Phi^* \frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 + i J_2\right) \\ &\equiv J^* \, \Phi + \Phi^* \, J \; . \end{aligned} \tag{5.77}$$

Die Jacobi–Determinante der Variablentransformation $(\phi_1, \phi_2) \to (\Phi, \Phi^*)$ berechnet man mit Hilfe von Gl. (2.78),

$$\left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(\Phi, \Phi^*)} \right| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\| = \left| \frac{i}{2} + \frac{i}{2} \right| = |i| = 1 \; . \tag{5.78}$$

Also kann man das erzeugende Funktional (5.75) auch durch das komplexe Feld Φ und sein komplex Konjugiertes ausdrücken,

$$Z_0[J, J^*] = \int \mathcal{D}\Phi^* \, \mathcal{D}\Phi \, \exp\left\{ -i \int \mathrm{d}^4 X \left[\Phi^* (\Box + m^2)\Phi - J^* \Phi - \Phi^* J \right] \right\} \; . \tag{5.79}$$

Weil es sich um ein **wechselwirkungsfreies** Feld handelt, faktorisieren die Funktionalintegrale über ϕ_1 und ϕ_2 in Gl. (5.75), und wir können das erzeugende Funktional mit

dem Resultat (5.50) aus dem vorangegangenen Abschnitt sofort analytisch angeben,

$$\begin{aligned} Z_0[J_1, J_2] &= Z_0[J_1]\, Z_0[J_2] \\ &= \mathcal{N} \det\Delta_F \, \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, \Big[J_1(X)\, \Delta_F(X-Y)\, J_1(Y) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \; J_2(X)\, \Delta_F(X-Y)\, J_2(Y) \Big] \right\} \qquad (5.80) \\ &\equiv \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, \big[J_1(X)\, \Delta_F(X-Y)\, J_1(Y) + J_2(X)\, \Delta_F(X-Y)\, J_2(Y) \big] \right\} , \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ wieder so gewählt haben, dass

$$Z_0[0,0] \equiv 1 \; . \qquad (5.81)$$

Machen wir nun die Transformation (5.76) rückgängig,

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \, (J + J^*) \; , \quad J_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \, (J - J^*) \; , \qquad (5.82)$$

und setzen dies in Gl. (5.80) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Z_0[J, J^*] &= \exp\left(-\frac{i}{4} \int \mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, \big\{ [J(X) + J^*(X)] \; \Delta_F(X-Y) \; [J(Y) + J^*(Y)] \right. \qquad (5.83) \\ &\qquad\qquad \left. - \; [J(X) - J^*(X)] \; \Delta_F(X-Y) \; [J(Y) - J^*(Y)] \big\} \right) \\ &= \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, \big[J(X)\, \Delta_F(X-Y)\, J^*(Y) + J^*(X)\, \Delta_F(X-Y)\, J(Y) \big] \right\} . \end{aligned}$$

29.1.2021

5.4 Funktionalintegrale für fermionische Felder

Wir erinnern uns daran, dass fermionische Feldoperatoren **Anti-Vertauschungsrelationen** erfüllen, s. Glgen. (3.134) und (3.135). Aber im Funktionalintegral-Formalismus werden alle Operatoren durch Zahlen (die Eigenwerte der entsprechenden Operatoren) ersetzt. Um die Anti-Vertauschungseigenschaft zu erhalten, und damit letztendlich auch das **Pauli–Prinzip** zu garantieren, benötigen wir daher auch **antivertauschende Zahlen**. Diese Zahlen existieren tatsächlich. Sie wurden 1855 von Hermann Graßmann eingeführt, dem zu Ehren man sie als **Graßmann–Zahlen** bezeichnet.

Die **Generatoren** $C_1, \ldots, C_N$ einer 2^N–dimensionalen **Graßmann–Algebra** erfüllen die Relation

$$\{C_i, C_j\} \equiv C_i C_j + C_j C_i = 0 \; , \quad i, j = 1, \ldots, N \; . \qquad (5.84)$$

Daraus folgt

$$C_i^2 = 0 \; , \quad i = 1, \ldots, N \; . \qquad (5.85)$$

Die Dimensionalität der Graßmann–Algebra kann man wie folgt verstehen. Für N Generatoren kann man nichttriviale Operatoren konstruieren, indem man die Generatoren miteinander multipliziert. In diesen Produkten darf jeder Generator wegen Gl. (5.85) entweder keinmal oder höchstens einmal vorkommen. Die Anzahl der möglichen Operatoren

ist somit 2^N (für jeden der N Generatoren C_i gibt es zwei Möglichkeiten: entweder C_i kommt im Produkt vor oder nicht).

Eine wichtige Folgerung aus Gl. (5.84) ist, dass ein Produkt $C_1 C_2 \cdots C_{2n}$ aus einer geraden Anzahl $2n$ von Graßmann–Zahlen sich unter Vertauschung wie eine gewöhnliche Zahl verhält. Es genügt, dies für $n = 1$ zu zeigen. Sei C_k eine beliebige Graßmann–Zahl. Dann gilt wegen Gl. (5.84) $\forall k \in \mathbb{N}$

$$C_1 C_2 C_k = -C_1 C_k C_2 = C_k C_1 C_2 \,, \text{ q.e.d.} \tag{5.86}$$

Ganz analog zeigt man, dass ein Produkt aus einer ungeraden Anzahl von Graßmann–Zahlen sich unter Vertauschung wie eine Graßmann–Zahl verhält.

Sei f eine in eine Taylor–Reihe entwickelbare Funktion der Graßmann–Variablen C. Da wegen Gl. (5.85) alle Potenzen C^n mit $n \geq 2$ verschwinden, bricht die Taylor–Reihe nach dem zweiten Term ab,

$$f(C) = a_0 + a_1 C \,, \tag{5.87}$$

wobei a_0, a_1 gewöhnliche (d.h. vertauschende, i.a. komplexe) Zahlen sind. Entsprechend erhält man für eine in eine Taylor–Reihe entwickelbare Funktion zweier Graßmann–Variablen C_1, C_2,

$$f(C_1, C_2) = a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_1 C_2 = a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 - a_3 C_2 C_1 \,. \tag{5.88}$$

Hier sind $a_0, \ldots, a_3$ gewöhnliche (i.a. komplexe) Zahlen und für das letzte Gleichheitszeichen haben wir Gl. (5.84) benutzt.

Funktionen von Graßmann–Zahlen sind auch **differenzierbar**. Man unterscheidet **Links-Differentiation**, bzw. die **linksseitige Ableitung**,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\mathrm{L}}}{\partial C_1} f(C_1, C_2) &= a_1 + a_3 C_2 \,, \\ \frac{\partial^{\mathrm{L}}}{\partial C_2} f(C_1, C_2) &= a_2 - a_3 C_1 \,, \end{aligned} \tag{5.89}$$

und **Rechts-Differentiation**, bzw. die **rechtsseitige Ableitung**,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\mathrm{R}}}{\partial C_1} f(C_1, C_2) &= a_1 - a_3 C_2 \,, \\ \frac{\partial^{\mathrm{R}}}{\partial C_2} f(C_1, C_2) &= a_2 + a_3 C_1 \,. \end{aligned} \tag{5.90}$$

Im folgenden benutzen wir ausschließlich die Links-Differentiation und lassen dementsprechend das Superskript "L"weg.

Multiplizieren wir die erste Gl. (5.89) mit C_1, so erhalten wir

$$C_1 \frac{\partial}{\partial C_1} f(C_1, C_2) = a_1 C_1 + a_3 C_1 C_2 \,. \tag{5.91}$$

Andererseits ist

$$C_1 \, f(C_1 C_2) = a_0 C_1 + a_2 C_1 C_2 \,,$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial C_1}\,[C_1\,f(C_1,C_2)] = a_0 + a_2 C_2\ . \tag{5.92}$$

Addieren wir die Glgen. (5.91) und (5.92), so erhalten wir

$$\left(C_1\,\frac{\partial}{\partial C_1} + \frac{\partial}{\partial C_1}\,C_1\right) f(C_1,C_2) = a_1 C_1 + a_3 C_1 C_2 + a_0 + a_2 C_2 \equiv f(C_1,C_2)\ , \tag{5.93}$$

und da die Funktion $f(C_1,C_2)$ beliebig war, muss gelten

$$C_1\,\frac{\partial}{\partial C_1} + \frac{\partial}{\partial C_1}\,C_1 = \left\{C_1, \frac{\partial}{\partial C_1}\right\} = 1\ . \tag{5.94}$$

Völlig analog zeigt man, dass

$$\left\{C_i, \frac{\partial}{\partial C_j}\right\} = \delta_{ij}\ , \quad i,j = 1,\ldots,N\ . \tag{5.95}$$

Leiten wir die zweite Gl. (5.89) nach C_1 und die erste nach C_2 ab, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial C_1}\,\frac{\partial}{\partial C_2} + \frac{\partial}{\partial C_2}\,\frac{\partial}{\partial C_1}\right) f(C_1,C_2) = -a_3 + a_3 = 0\ . \tag{5.96}$$

Da wegen Gl. (5.85) niemals zweite Potenzen der Graßmann–Zahlen C_1 und C_2 auftreten können, kann man dieses Resultat sofort zu

$$\left\{\frac{\partial}{\partial C_i}, \frac{\partial}{\partial C_j}\right\} = 0\ , \quad i,j = 1,\ldots,N\ , \tag{5.97}$$

verallgemeinern. Die Ableitungen nach Graßmann–Zahlen verhalten sich also selbst wie Graßmann–Zahlen, vgl. Gl. (5.84).

Wenn man Graßmann–wertige Funktionen differenzieren kann, so sollte man sie auch **integrieren** können. Dazu führen wir zunächst das "Differential" $\mathrm{d}C_i$ der Graßmann–Zahl C_i ein. Da dieses ebenfalls Graßmann–wertig ist, muss nach Gl. (5.84) gelten

$$\{C_i, \mathrm{d}C_j\} = \{\mathrm{d}C_i, \mathrm{d}C_j\} = 0\ , \quad i,j = 1,\ldots,N\ . \tag{5.98}$$

Für die Funktion (5.87) einer Graßmann–Variablen C ist dann

$$\int \mathrm{d}C\, f(C) = a_0 \int \mathrm{d}C + a_1 \int \mathrm{d}C\, C\ . \tag{5.99}$$

Da aufgrund von Gl. (5.85) niemals höhere Potenzen von C auftreten können, müssen wir lediglich die Integrale $\int \mathrm{d}C$ und $\int \mathrm{d}C\, C$ bestimmen. Der Wert des ersten Integrals folgt aus folgender Überlegung. Es ist (nach geeigneter Umbenennung der Integrationsvariablen)

$$\begin{aligned}\left(\int \mathrm{d}C\right)^2 &= \int \mathrm{d}C_1 \int \mathrm{d}C_2 \equiv \int \mathrm{d}C_1\,\mathrm{d}C_2 = -\int \mathrm{d}C_2\,\mathrm{d}C_1 \equiv -\int \mathrm{d}C_2 \int \mathrm{d}C_1 \\ &= -\left(\int \mathrm{d}C\right)^2\ .\end{aligned} \tag{5.100}$$

Hier haben wir beim dritten Gleichheitszeichen Gl. (5.98) benutzt. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir festlegen, dass

$$\int \mathrm{d}C_i \equiv 0 \ , \quad i = 1, \ldots, N \ . \tag{5.101}$$

Aber was ist nun der Wert von $\int \mathrm{d}C\, C$? Hier haben wir eine gewisse Wahlfreiheit. Es sollte nur nicht ebenfalls null sein, denn dann wäre das Integral (5.99) der Funktion $f(C)$ identisch null, was keinen Sinn ergäbe, denn warum sollte die Ableitung der Funktion einen nicht-trivialen Wert ergeben (nämlich $\mathrm{d}f(C)/\mathrm{d}C = a_1$), aber ihr Integral trivial verschwinden? Da das Produkt von zwei Graßmann–Zahlen $dC_i\, C_i$ sich unter Vertauschung wie eine gewöhnliche (i.a. komplexe) Zahl verhält, können wir nach geeigneter Normierung (d.h. per Definition) festlegen, dass

$$\int \mathrm{d}C_i\, C_i \equiv 1 \ , \quad i = 1, \ldots, N \ . \tag{5.102}$$

Dies führt dann auf das interessante Resultat

$$\int \mathrm{d}C_1\, f(C_1, C_2) = \int \mathrm{d}C_1 (a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_1 C_2) = a_1 + a_3 C_2 \equiv \frac{\partial}{\partial C_1} f(C_1, C_2) \ , \tag{5.103}$$

vgl. Gl. (5.89). Ableiten und Integrieren sind also **identische** Operationen für Graßmann–wertige Funktionen!

Wir betrachten nun zwei Graßmann–Zahlen η und $\bar{\eta}$, d.h.

$$\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0 \ , \quad \eta\bar{\eta} = -\bar{\eta}\eta \ , \quad \int \mathrm{d}\eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta} = 0 \ , \quad \int \mathrm{d}\eta\, \eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta}\, \bar{\eta} = 1 \ . \tag{5.104}$$

Da Terme von der Ordnung $(\bar{\eta}\eta)^n$ mit $n \geq 2$ durch Vertauschen der Graßmann–Zahlen immer in eine Form $\sim \bar{\eta}^n \eta^n$ gebracht werden können, bricht die Taylor–Entwicklung der Funktion $e^{-\bar{\eta}\eta}$ wegen Gl. (5.85) nach dem zweiten Term ab,

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta \ . \tag{5.105}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}\bar{\eta}\, \mathrm{d}\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} &= \int \mathrm{d}\bar{\eta}\, \mathrm{d}\eta\, (1 - \bar{\eta}\eta) = -\int \mathrm{d}\bar{\eta}\, \mathrm{d}\eta\, \bar{\eta}\eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta}\, \mathrm{d}\eta\, \eta\bar{\eta} \\ &= \int \mathrm{d}\bar{\eta} \left(\int \mathrm{d}\eta\, \eta \right) \bar{\eta} = \int \mathrm{d}\bar{\eta}\, \bar{\eta} = 1 \ . \end{aligned} \tag{5.106}$$

Dies verallgemeinern wir nun auf **zweidimensionale Vektoren** von Graßmann–Zahlen,

$$\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \ , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \ , \tag{5.107}$$

so dass

$$\begin{aligned} \bar{\eta}\eta &= \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2 \ , \\ (\bar{\eta}\eta)^2 &= (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2)(\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) = \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 + \bar{\eta}_2\eta_2\bar{\eta}_1\eta_1 \equiv 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \ , \\ (\bar{\eta}\eta)^n &= 0 \quad \forall\, n > 2 \ . \end{aligned} \tag{5.108}$$

Dann gilt

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta + \frac{1}{2}(\bar{\eta}\eta)^2 = 1 - \bar{\eta}_1\eta_1 - \bar{\eta}_2\eta_2 + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \ , \tag{5.109}$$

und

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\bar{\eta}\,\mathrm{d}\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} &= \int \mathrm{d}\bar{\eta}_2\,\mathrm{d}\bar{\eta}_1\,\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\,(1 - \bar{\eta}_1\eta_1 - \bar{\eta}_2\eta_2 + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2) \\
&= \int \mathrm{d}\bar{\eta}_2\,\mathrm{d}\bar{\eta}_1\,\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\,\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \\
&= \int \mathrm{d}\bar{\eta}_2\,\mathrm{d}\bar{\eta}_1\,\mathrm{d}\eta_1 \left(\int \mathrm{d}\eta_2\,\eta_2\right)(-1)^3\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2 \\
&= \int \mathrm{d}\bar{\eta}_2\,\mathrm{d}\bar{\eta}_1 \left(\int \mathrm{d}\eta_1\,\eta_1\right)(-1)^4\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 \\
&= \int \mathrm{d}\bar{\eta}_2 \left(\int \mathrm{d}\bar{\eta}_1\,\bar{\eta}_1\right)\bar{\eta}_2 \equiv 1 \ ,
\end{aligned} \tag{5.110}$$

genau wie im eindimensionalen Fall. Dabei ist die Reihenfolge der einzelnen Integrationsvariablen nach dem ersten Gleichheitszeichen Konvention. Mit einer anderen Reihenfolge müssen wir durch Vertauschen von Graßmann–Variablen entstehende Faktoren -1 entsprechend berücksichtigen. Die Verallgemeinerung von Gl. (5.110) auf mehr als zwei Dimensionen ist ohne Probleme machbar.

Nun transformieren wir mit Hilfe von zwei (aus gewöhnlichen Zahlen bestehenden) (2×2)–Matrizen M und N zu neuen Graßmann–Variablen α und $\bar{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \eta &= M\alpha = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \ , \\
(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = \bar{\eta} &= \bar{\alpha}N = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \ .
\end{aligned} \tag{5.111}$$

Es gilt offensichtlich

$$\eta_1\eta_2 = (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) = (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 \equiv \det M\,\alpha_1\alpha_2 \ . \tag{5.112}$$

Daher ist

$$\int \mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2\,\alpha_1\alpha_2 = -1 = \int \mathrm{d}\eta_1\,\mathrm{d}\eta_2\,\eta_1\eta_2 = \int \mathrm{d}\eta_1\,\mathrm{d}\eta_2 \det M\,\alpha_1\alpha_2 \ , \tag{5.113}$$

also

$$\mathrm{d}\eta_1\,\mathrm{d}\eta_2 = (\det M)^{-1}\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2 \ . \tag{5.114}$$

Ganz analog zeigt man

$$\mathrm{d}\bar{\eta}_2\,\mathrm{d}\bar{\eta}_1 = (\det N)^{-1}\mathrm{d}\bar{\alpha}_2\,\mathrm{d}\bar{\alpha}_1 \ , \tag{5.115}$$

und daher (mit $\det N \det M = \det(NM)$)

$$1 = \int \mathrm{d}\bar{\eta}\,\mathrm{d}\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\,\left(\det(NM)\right)^{-1} e^{-\bar{\alpha}NM\alpha} \ . \tag{5.116}$$

Bezeichnen wir noch $A \equiv NM$, so erhalten wir das Ergebnis

$$\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\, e^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \det A\ . \tag{5.117}$$

Dies läßt sich auf ein **Kontinuum** von Graßmann–Variablen verallgemeinern. Wir führen dazu ein **Graßmann–wertiges Feld** $C(X)$ ein, das an jedem Raum-Zeit-Punkt X^μ existiert. Für dieses Feld gilt in Verallgemeinerung der Gleichungen (5.84), (5.95), (5.101) und (5.102)

$$\{C(X), C(Y)\} = 0\ , \tag{5.118}$$

$$\left\{C(X), \frac{\delta}{\delta C(Y)}\right\} = \delta^{(4)}(X-Y)\ , \tag{5.119}$$

$$\int \mathrm{d}C(X) = 0\ , \tag{5.120}$$

$$\int \mathrm{d}C(X)\, C(X) = 1\ , \tag{5.121}$$

und Gl. (5.117) wird zum **Funktionalintegral** über Graßmann–wertige Funktionen $\bar{C}(X)$ und $C(X)$,

$$\int \mathcal{D}\bar{C}\,\mathcal{D}C\, \exp\left[-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{C}(X)\,A(X,Y)\,C(Y)\right] = \det A\ . \tag{5.122}$$

Man beachte, dass es außer der Tatsache, dass $A = NM$, und dass N und M Matrizen sind, die eine Variablentransformation bewirken, keinerlei Einschränkungen an die Form von A gibt. Die einzige Forderung, die wir im folgenden stellen werden, ist, dass $\det A \neq 0$, d.h. dass A invertierbar ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Diskussion des Analogons der Produktregel für Funktionalableitungen nach Graßmann–wertigen Funktionen. Betrachten wir das Funktional $F[C]$ der Graßmann–wertigen Funktion $C(X)$. Wir nehmen an, dass

$$F[C] = F_+[C] + F_-[C]\ , \tag{5.123}$$

wobei $F_+[C]$ sich wie eine gewöhnliche Zahl unter Vertauschung mit der Graßmann–Funktion $C(X)$ verhält, während $F_-[C]$ sich wie eine Graßmann–Zahl verhält,

$$C(X)F_\pm[C] = \pm F_\pm[C]C(X)\ . \tag{5.124}$$

Zumindest für Funktionale $F[C]$, die sich in eine Taylor–Reihe entwickeln lassen, ist Gl. (5.123) offensichtlich: $F_+[C]$ enthält alle geraden Potenzen von Raum-Zeit-Integralen von $C(X)$, während $F_-[C]$ alle ungeraden Potenzen enthält. Daraus folgt, dass $\delta F_+[C]/\delta C(Y) \sim G_{Y,-}[C]$, wobei $G_{Y,-}[C]$ eine Graßmann–wertige Zahl ist, während $\delta F_-[C]/\delta C(Y) \sim G_{Y,+}[C]$, mit einer gewöhnlichen Zahl $G_{Y,+}[C]$. Weil $F_+[C]$ mit $C(X)$ vertauscht, gilt nach der gewöhnlichen Produktregel

$$\frac{\delta}{\delta C(Y)}\left(C(X)F_+[C]\right) = \frac{\delta C(X)}{\delta C(Y)}F_+[C] + \frac{\delta F_+[C]}{\delta C(Y)}C(X) = \frac{\delta C(X)}{\delta C(Y)}F_+[C] - C(X)\frac{\delta F_+[C]}{\delta C(Y)}\ , \tag{5.125}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass die beiden Graßmann–wertigen Zahlen $C(X)$ und $\delta F_+[C]/\delta C(Y)$ antivertauschen. Andererseits gilt

$$\frac{\delta}{\delta C(Y)}\left(C(X)F_-[C]\right) = -\frac{\delta}{\delta C(Y)}\left(F_-[C]C(X)\right) \ , \tag{5.126}$$

so dass

$$\frac{\delta}{\delta C(Y)}\left(C(X)F_-[C]\right) = \frac{\delta C(X)}{\delta C(Y)}F_-[C] - \frac{\delta F_-[C]}{\delta C(Y)}C(X) = \frac{\delta C(X)}{\delta C(Y)}F_-[C] - C(X)\frac{\delta F_-[C]}{\delta C(Y)} \ , \tag{5.127}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass sich $\delta F_-[C]/\delta C(Y)$ wie eine gewöhnliche Zahl verhält, also mit $C(X)$ vertauscht werden darf. Kombinieren wir die Glgen. (5.123), (5.125) und (5.127), so erhalten wir die allgemeine Produktregel für Graßmann–wertige Zahlen

$$\frac{\delta}{\delta C(Y)}\left(C(X)F[C]\right) = \frac{\delta C(X)}{\delta C(Y)}F[C] - C(X)\frac{\delta F[C]}{\delta C(Y)} \ . \tag{5.128}$$

Daraus folgt

$$\left[C(X)\frac{\delta}{\delta C(Y)} + \frac{\delta}{\delta C(Y)}C(X)\right]F[C] = \frac{\delta C(X)}{\delta C(Y)}F[C] \tag{5.129}$$

und der Vergleich mit Gl. (5.119) ergibt die Relation

$$\frac{\delta C(X)}{\delta C(Y)} = \delta^{(4)}(X-Y) \ , \tag{5.130}$$

genau wie im Fall gewöhnlicher Funktionen, s. Gl. (5.65).

3.2.2021

5.5 Das Dirac–Feld

Wir wenden nun die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts auf das Dirac–Feld an. Die Lagrange–Dichte für das **nichtwechselwirkende Dirac–Feld** war in Gl. (2.111) gegeben,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \ . \tag{5.131}$$

Hier interpretieren wir ψ und $\bar{\psi}$ aber als **Graßmann–wertige** Felder. Das **erzeugende Funktional** für n–Punkt-Korrelationsfunktionen lautet

$$Z_0[\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{i\int \mathrm{d}^4X\left[\mathcal{L}_0 + \bar{\eta}(X)\psi(X) + \bar{\psi}(X)\eta(X)\right]\right\} \ . \tag{5.132}$$

Hier haben wir zwei **Graßmann–wertige Quellfelder**, $\bar{\eta}(X)$ und $\eta(X)$, eingeführt. Funktionales Ableiten nach $\bar{\eta}(X)$ erzeugt Korrelationsfunktionen für $\psi(X)$, solches nach $\eta(X)$ erzeugt Korrelationsfunktionen für $\bar{\psi}(X)$. Wie im wechselwirkungsfreien skalaren

Fall ist das erzeugende Funktional (5.132) analytisch berechenbar. Dazu bringen wir Gl. (5.132) in eine Form, in der wir Gl. (5.122) anwenden können,

$$\begin{aligned} Z_0[\bar\eta,\eta] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi\,\exp\Big\{ i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\psi(X)(i\partial\!\!\!/_x - m)\delta^{(4)}(X-Y)\psi(Y) \\ &\qquad + i\int \mathrm{d}^4X\,\left[\bar\eta(X)\psi(X)+\bar\psi(X)\eta(X)\right]\Big\} \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi\,\exp\Big\{ -\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\psi(X)\,A(X,Y)\,\psi(Y) \\ &\qquad + i\int \mathrm{d}^4X\,\left[\bar\eta(X)\psi(X)+\bar\psi(X)\eta(X)\right]\Big\}\,, \end{aligned} \tag{5.133}$$

mit

$$A(X,Y) = -i(i\partial\!\!\!/_x - m)\delta^{(4)}(X-Y)\,. \tag{5.134}$$

Wir wählen die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ nun so, dass

$$1 = Z_0[0,0] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left[-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\psi(X)\,A(X,Y)\,\psi(Y)\right] \equiv \mathcal{N}\det A\,, \tag{5.135}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (5.122) benutzt haben. Dies bedeutet

$$\mathcal{N} = (\det A)^{-1}\,. \tag{5.136}$$

Nun substituieren wir $\bar\psi(X)$ und $\psi(Y)$ im Exponenten in Gl. (5.133) durch neue Graßmann–wertige Felder

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= \psi(X) - i\int \mathrm{d}^4Y\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y)\,, \\ \bar\alpha(X) &= \bar\psi(X) - i\int \mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(Y)\,A^{-1}(Y,X)\,, \end{aligned} \tag{5.137}$$

was zur Folge hat, dass

$$\begin{aligned} &-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\psi(X)\,A(X,Y)\,\psi(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\,\left[\bar\eta(X)\psi(X)+\bar\psi(X)\eta(X)\right] \\ &\quad = -\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\left[\bar\alpha(X) + i\int \mathrm{d}^4Z\,\bar\eta(Z)\,A^{-1}(Z,X)\right]A(X,Y) \\ &\qquad\qquad \times\left[\alpha(Y) + i\int \mathrm{d}^4U\,A^{-1}(Y,U)\,\eta(U)\right] \\ &\qquad + i\int \mathrm{d}^4X\,\bar\eta(X)\,\left[\alpha(X) + i\int \mathrm{d}^4Y\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y)\right] \\ &\qquad + i\int \mathrm{d}^4X\,\left[\bar\alpha(X) + i\int \mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(Y)\,A^{-1}(Y,X)\right]\eta(X) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\alpha}(X)\,A(X,Y)\,\alpha(Y) - i\int \mathrm{d}^4X\,[\bar{\alpha}(X)\,\eta(X) + \bar{\eta}(X)\,\alpha(X)] \\
&\quad + \int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\eta}(X)\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y) \\
&\quad + i\int \mathrm{d}^4X\,\bar{\eta}(X)\,\alpha(X) - \int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\eta}(X)\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y) \\
&\quad + i\int \mathrm{d}^4X\,\bar{\alpha}(X)\,\eta(X) - \int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\eta}(X)\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y) \\
&= -\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\left[\bar{\alpha}(X)\,A(X,Y)\,\alpha(Y) + \bar{\eta}(X)\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y)\right]\,. \qquad (5.138)
\end{aligned}
$$

Hier haben wir des öfteren von der Identität

$$
\int \mathrm{d}^4Z\,A(X,Z)\,A^{-1}(Z,Y) = \int \mathrm{d}^4Z\,A^{-1}(X,Z)\,A(Z,Y) = \delta^{(4)}(X-Y) \qquad (5.139)
$$

Gebrauch gemacht. Setzen wir Gl. (5.138) mit Gl. (5.136) in Gl. (5.133) ein, so erhalten wir (die Jacobi–Determinante der Variablensubstitution (5.137) ist eins)

$$
\begin{aligned}
Z_0[\bar{\eta},\eta] &= (\det A)^{-1}\int \mathcal{D}\bar{\alpha}\,\mathcal{D}\alpha\,\exp\left[-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\alpha}(X)\,A(X,Y)\,\alpha(Y)\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\eta}(X)\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y)\right] \\
&= (\det A)^{-1}\det A\,\exp\left[-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\eta}(X)\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y)\right] \\
&\equiv \exp\left[-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\eta}(X)\,A^{-1}(X,Y)\,\eta(Y)\right]\,, \qquad (5.140)
\end{aligned}
$$

wobei wir zum zweiten Gleichheitszeichen Gl. (5.122) benutzt haben.

Nun bestimmen wir $A^{-1}(X,Y)$. Mit der Definition (5.134) gilt

$$
\begin{aligned}
\delta^{(4)}(X-Y) &= \int \mathrm{d}^4Z\,A(X,Z)\,A^{-1}(Z,Y) = -i\int \mathrm{d}^4Z\,(i\partial\!\!\!/_x - m)\,\delta^{(4)}(X-Z)\,A^{-1}(Z,Y) \\
&= -i(i\partial\!\!\!/_x - m)\,A^{-1}(X,Y) \equiv (i\partial\!\!\!/_x - m)\,S(X,Y)\,, \qquad (5.141)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
S(X,Y) = -iA^{-1}(X,Y) \qquad (5.142)
$$

offensichtlich die **Green–Funktion der freien Dirac–Gleichung** ist. Wir werden nun zeigen, dass

$$
S(X,Y) \equiv S(X-Y) = (i\partial\!\!\!/_x + m)\,\Delta(X-Y)\,, \qquad (5.143)
$$

mit der in Gl. (5.48) definierten Funktion $\Delta(X-Y)$. Wir wissen bereits, dass diese Funktion bis auf ein Vorzeichen identisch ist mit der Green–Funktion der freien Klein–Gordon–Gleichung,

$$
\begin{aligned}
-(\Box_x + m^2)\Delta(X-Y) &= \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,(K^2-m^2)\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\frac{1}{K^2-m^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)} \equiv \delta^{(4)}(X-Y)\,. \qquad (5.144)
\end{aligned}
$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}(i\partial\!\!\!/ - m)(i\partial\!\!\!/ + m) &= -\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2 = -\frac{1}{2}\left\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\right\}\partial_\mu\partial_\nu - m^2 = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2 \\ &= -(\Box + m^2)\,, \end{aligned} \tag{5.145}$$

wobei wir die Relation

$$\left\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\right\} = 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_4 \tag{5.146}$$

benutzt haben. Gleichung (5.144) können wir also umschreiben in

$$\begin{aligned}\delta^{(4)}(X-Y) &= (i\partial\!\!\!/_x - m)(i\partial\!\!\!/_x + m)\,\Delta(X-Y) \\ &= \int \mathrm{d}^4Z\,(i\partial\!\!\!/_x - m)\,\delta^{(4)}(X-Z)\,(i\partial\!\!\!/_z + m)\,\Delta(Z-Y)\,. \end{aligned} \tag{5.147}$$

Invertieren wir Gl. (5.142) und setzen die Definition (5.134) ein, so erkennen wir, dass

$$S^{-1}(X,Y) = iA(X,Y) = (i\partial\!\!\!/_x - m)\,\delta^{(4)}(X-Y)\,. \tag{5.148}$$

Damit wird aus Gl. (5.147)

$$\int \mathrm{d}^4Z\,S^{-1}(X,Z)\,(i\partial\!\!\!/_z + m)\,\Delta(Z-Y) = \delta^{(4)}(X-Y)\,. \tag{5.149}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $S(U,X)$, integrieren über d^4X und benutzen

$$\int \mathrm{d}^4X\,S(U,X)\,S^{-1}(X,Z) = \delta^{(4)}(U-Z)\,,$$

so folgt daraus

$$(i\partial\!\!\!/_u + m)\,\Delta(U-Y) = \int \mathrm{d}^4X\,S(U,X)\,\delta^{(4)}(X-Y) = S(U,Y)\,, \tag{5.150}$$

also (nach Umbenennung $U \to X$) Gl. (5.143). Dass $S(X,Y)$ lediglich von der Differenz $X-Y$ abhängt, folgt daraus, dass auch $\Delta(X-Y)$ nur von dieser Differenz abhängt.

Wie die Funktion $\Delta(X-Y)$ hat auch die Fourier–Transformierte der Funktion $S(X-Y)$ Pole auf der reellen k_0–Achse, die man in geeigneter Weise in die komplexe k_0–Ebene verschieben muss. Wir wählen wieder die Feynman–Vorschrift,

$$S_F(X-Y) = (i\partial\!\!\!/_x + m)\Delta_F(X-Y) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\,\frac{K\!\!\!/ + m}{K^2 - m^2 + i\eta}\,. \tag{5.151}$$

Mit Gl. (5.142) lautet Gl. (5.140) dann

$$Z_0[\bar\eta,\eta] = \exp\left[-i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(X)\,S_F(X-Y)\,\eta(Y)\right]\,. \tag{5.152}$$

Die **Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** (mit explizit ausgeschriebenen Dirac–Spinor-Indizes) ist

$$\begin{aligned}
\langle 0|\,\hat{T}\left[\hat{\bar{\psi}}_\beta(Y)\,\hat{\psi}_\alpha(X)\right]\,|0\rangle &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\bar{\psi}_\beta(Y)\,\psi_\alpha(X)\,e^{i\int \mathrm{d}^4Z\,\mathcal{L}_0} \\
&= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\bar{\psi}_\beta(Y)\,(-i)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(X)}\,e^{i\int \mathrm{d}^4Z[\mathcal{L}_0+\bar{\eta}(Z)\psi(Z)]}\Big|_{\bar{\eta}=0} \qquad (5.153)\\
&= -(-i)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(X)}\,\mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,(-1)(-i)\frac{\delta}{\delta\eta_\beta(Y)}\,e^{i\int \mathrm{d}^4Z\left[\mathcal{L}_0+\bar{\eta}(Z)\psi(Z)+\bar{\psi}(Z)\eta(Z)\right]}\Big|_{\bar{\eta}=\eta=0}\,.
\end{aligned}$$

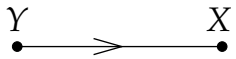
Hier kommt das negative Vorzeichen vor dem Funktionalintegral dadurch zustande, dass man die Funktionalableitung nach $\bar{\eta}_\alpha(X)$, die eine Graßmann–wertige Variable ist, mit der Graßmann–Variable $\bar{\psi}_\beta(Y)$ vertauschen muss, bevor man sie vor das Funktionalintegral ziehen darf (die Vertauschung mit $\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi$ liefert kein zusätzliches Minus-Zeichen, da man hier mit einer **geraden** Anzahl von Graßmann–Variablen vertauscht). Das negative Vorzeichen unter dem Funktionalintegral kommt dadurch zustande, dass man, bevor man die Funktionalableitung nach $\eta_\beta(Y)$ auf $\eta(Z)$ im Exponenten wirken lassen kann, noch mit $\bar{\psi}(Z)$ vertauschen muss.

Wir ziehen nun auch die Funktionalableitung nach $\eta_\beta(Y)$ vor das Funktionalintegral und erkennen, dass das Objekt, das abgeleitet wird, genau das erzeugende Funktional (5.132) ist,

$$\begin{aligned}
\langle 0|\,\hat{T}\left[\hat{\bar{\psi}}_\beta(Y)\,\hat{\psi}_\alpha(X)\right]\,|0\rangle &= (-i)^2\frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}_\alpha(X)\,\delta\eta_\beta(Y)}\,Z_0[\bar{\eta},\eta]|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\
&= (-i)^2\frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}_\alpha(X)\,\delta\eta_\beta(Y)}\,e^{-i\int \mathrm{d}^4U\,\mathrm{d}^4V\,\bar{\eta}(U)\,S_F(U-V)\,\eta(V)}\Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\
&= (-i)^2\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(X)}\,(-1)(-i)\int \mathrm{d}^4U\,\bar{\eta}_\gamma(U)\,S_{F,\gamma\beta}(U-Y)\,Z_0[\bar{\eta},\eta]\Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\
&= (-i)^3(-1)S_{F,\alpha\beta}(X-Y) = -i\,S_{F,\alpha\beta}(X-Y)\,, \qquad (5.154)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\langle 0|\,\hat{T}\left[\hat{\psi}_\alpha(X)\,\hat{\bar{\psi}}_\beta(Y)\right]\,|0\rangle = i\,S_{F,\alpha\beta}(X-Y) = \qquad . \qquad (5.155)$$



Dies entspricht der **Propagation** eines Fermions vom Raum-Zeit-Punkt Y nach X. Da Fermionen in der Regel eine Ladung tragen (elektrische Ladung, Flavor, Farbe, etc.), und der Transport dieser Ladung eine Richtung festlegt, wird dies mit einem zusätzlichen Pfeil am Propagator angedeutet.

Wenn wir die Feldoperatoren noch nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zer-

legen, also

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}^{(+)}(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{s=\pm 1/2} \hat{d}_s^\dagger(\vec{k})\, v(\vec{k},s)\, e^{iK\cdot X} \,, \\
\hat{\psi}^{(-)}(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{s=\pm 1/2} \hat{b}_s(\vec{k})\, u(\vec{k},s)\, e^{-iK\cdot X} \\
\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{s=\pm 1/2} \hat{b}_s^\dagger(\vec{k})\, \bar{u}(\vec{k},s)\, e^{iK\cdot X} \,, \\
\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(X) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \sum_{s=\pm 1/2} \hat{d}_s(\vec{k})\, \bar{v}(\vec{k},s)\, e^{-iK\cdot X} \,,
\end{aligned}
\tag{5.156}
$$

so lautet die linke Seite von Gl. (5.155) explizit

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\, \hat{T}\left[\hat{\psi}_\alpha(X)\, \hat{\bar{\psi}}_\beta(Y)\right] |0\rangle \\
&= \langle 0|\, \hat{\psi}_\alpha^{(-)}(X)\, \hat{\bar{\psi}}_\beta^{(+)}(Y)\, |0\rangle\, \Theta(x_0 - y_0) - \langle 0|\, \hat{\bar{\psi}}_\beta^{(-)}(Y)\, \hat{\psi}_\alpha^{(+)}(X)\, |0\rangle\, \Theta(y_0 - x_0)
\end{aligned}
\tag{5.157}
$$

$=$

.

Im ersten Term wird ein Teilchen bei Y aus dem Vakuum erzeugt und bei X wieder vernichtet (denn die Feldoperatoren enthalten $\hat{b}_s^\dagger(\vec{k})$ und $\hat{b}_s(\vec{k})$). Beim zweiten Term dagegen wird ein **Anti**-Teilchen bei X erzeugt und bei Y vernichtet (denn die Feldoperatoren enthalten $\hat{d}_s^\dagger(\vec{k})$ und $\hat{d}_s(\vec{k})$). Das negative Vorzeichen vor diesem Term ergibt sich aus dem Zeitordungsoperator für Fermionen, wo bei Vertauschung der Operatoren gegenüber der ursprünglichen Reihenfolge ein zusätzliches Minus-Zeichen auftritt. In der letzten Zeile von Gl. (5.157) haben wir diese Situation in Form von Feynman–Diagrammen dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass die Zeit in **beiden** Diagrammen von **links** nach **rechts** verläuft. Da Anti-Teilchen **umgekehrte** Ladung wie Teilchen tragen, zeigt der Pfeil am Propagator nun in die **negative** Zeitrichtung. Man könnte dies so interpretieren, dass Anti-Teilchen "rückwärts" in der Zeit laufen, aber dies ist nicht richtig, auch sie laufen gemäß der Θ–Funktion **vorwärts** in der Zeit (von x_0 nach $y_0 > x_0$). Lediglich der Ladungstransport scheint rückwärts in der Zeit zu laufen, aber es handelt sich eigentlich um **Anti**-Ladungstransport, der vorwärts in der Zeit läuft.

5.2.2021

5.6 Funktionalintegrale für Eichfelder – das Photon–Feld

Beim erzeugenden Funktional für Korrelationsfunktionen von Eichfeldern wie dem Photonfeld sehen wir uns mit einigen **Problemen** konfrontiert. **Naiv** würden wir dafür in Analogie zum neutralen skalaren Feld, s. Gl. (5.22), folgenden Ausdruck hinschreiben,

$$
Z_{0,\mathrm{naiv}}[J] = \int \mathcal{D}A^\mu \, \exp\left[i \int \mathrm{d}^4X \, \left(\mathcal{L}_0 + J_\mu A^\mu\right)\right] \,, \tag{5.158}
$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\, \partial^\mu A^\nu \ . \tag{5.159}$$

Wir sehen nun sofort, dass der Exponent in Gl. (5.158) nur in **quadratischer Ordnung** vom Eichfeld abhängt. Dies liegt nahe, dass es sich wieder um ein verschobenes Gauß–Integral handelt, das wir mit der Formel (5.24) explizit lösen können. Zunächst führen wir im Exponenten eine partielle Integration im Term mit der freien Lagrange–Dichte durch,

$$\begin{aligned} i\int \mathrm{d}^4X\, \mathcal{L}_0 &= -\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\, \partial^\mu A^\nu \\ &= +\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\ (A_\nu\, \Box\, A^\nu - A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu)\ +\ \text{Oberflächenterme} \\ &= \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\, A_\mu\, (\Box\, g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)\, A_\nu \ . \end{aligned} \tag{5.160}$$

Hier haben wir wie gehabt die Oberflächenterme vernachlässigt, da das Feld und seine Ableitungen im Unendlichen verschwinden sollen. Nun führen wir eine spuriose Integration über eine weitere Raum-Zeit-Variable Y ein,

$$\begin{aligned} i\int \mathrm{d}^4X\, \mathcal{L}_0 &= \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, A_\mu(X)\, (\Box_x\, g^{\mu\nu} - \partial_x^\mu\partial_x^\nu)\, \delta^{(4)}(X-Y)\, A_\nu(Y) \\ &\equiv \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, A_\mu(X)\, B^{\mu\nu}(X,Y)\, A_\nu(Y)\ , \end{aligned} \tag{5.161}$$

mit der Matrix

$$B^{\mu\nu}(X,Y) = i\, (\Box_x\, g^{\mu\nu} - \partial_x^\mu\partial_x^\nu)\, \delta^{(4)}(X-Y)\ . \tag{5.162}$$

Diese Matrix ist symmetrisch in den Lorentz–Indizes und in den Raum-Zeit-Variablen X und Y. Sofern sie auch noch positiv definit und nicht-singulär ist, können wir in der Tat (nach analytischer Fortsetzung zu imaginärer Zeit) Gl. (5.24) anwenden und das Resultat für das erzeugende Funktional (5.158) wäre

$$Z_{0,\mathrm{naiv}}[J] = \mathcal{N}'\, \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, J^\mu(X)\, B^{-1}_{\mu\nu}(X,Y)\, J^\nu(Y)\right]\ . \tag{5.163}$$

Nun müssen wir $B^{-1}_{\mu\nu}(X,Y)$ bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst die Fourier–Transformierte von $B^{\mu\nu}(X,Y)$,

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu}(X,Y) &= i\, (\Box_x\, g^{\mu\nu} - \partial_x^\mu\partial_x^\nu) \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)} \\ &= i\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, \left(-K^2\, g^{\mu\nu} + K^\mu K^\nu\right)\, e^{-iK\cdot(X-Y)} \\ &\equiv i\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, \tilde{B}^{\mu\nu}(K)\, e^{-iK\cdot(X-Y)}\ , \end{aligned} \tag{5.164}$$

mit

$$\tilde{B}^{\mu\nu}(K) \equiv -K^2\, g^{\mu\nu} + K^\mu K^\nu \tag{5.165}$$

Wenn die Inverse $B^{-1}_{\mu\nu}(X,Y)$ existiert, so muss auch $\tilde{B}^{-1}_{\mu\nu}(K)$ existieren. Dazu ist es erforderlich, dass

$$\det \tilde{B}^{\mu\nu}(K) \neq 0 \; . \tag{5.166}$$

Um die Determinante von $\tilde{B}^{\mu\nu}(K)$ zu berechnen, bedienen wir uns des folgenden Tricks. Wir führen zunächst einen Projektor auf den **eindimensionalen Raum parallel zu** K^μ ein,

$$E^{\mu\nu} \equiv \frac{K^\mu K^\nu}{K^2} \; . \tag{5.167}$$

Dieser Projektor hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu} K_\nu &= \frac{K^\mu K^\nu}{K^2} K_\nu = K^\mu \; , \\ E^\mu_{\ \mu} &= \frac{K^\mu K_\mu}{K^2} = 1 \; , \\ E^{\mu\lambda} E_\lambda^{\ \nu} &= \frac{K^\mu K^\lambda}{K^2} \frac{K_\lambda K^\nu}{K^2} = \frac{K^\mu K^\nu}{K^2} = E^{\mu\nu} \quad \text{(Idempotenz)} \; . \end{aligned} \tag{5.168}$$

Der Projektor auf den **dreidimensionalen Raum orthogonal zu** K^μ ist dann

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - E^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{K^\mu K^\nu}{K^2} \; . \tag{5.169}$$

Dieser hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu} K_\nu &= g^{\mu\nu} K_\nu - E^{\mu\nu} K_\nu = K^\mu - K^\mu = 0 \; , \\ P^\mu_{\ \mu} &= g^\mu_{\ \mu} - E^\mu_{\ \mu} = 4 - 1 = 3 \; , \\ P^{\mu\lambda} P_\lambda^{\ \nu} &= (g^{\mu\lambda} - E^{\mu\lambda})(g_\lambda^{\ \nu} - E_\lambda^{\ \nu}) = g^{\mu\nu} - 2E^{\mu\nu} + E^{\mu\lambda} E_\lambda^{\ \nu} \\ &= g^{\mu\nu} - E^{\mu\nu} \equiv P^{\mu\nu} \quad \text{(Idempotenz)} \; . \end{aligned} \tag{5.170}$$

Die beiden Projektoren $P^{\mu\nu}$ und $E^{\mu\nu}$ sind **orthogonal**,

$$P^{\mu\lambda} E_\lambda^{\ \nu} = g^{\mu\lambda} E_\lambda^{\ \nu} - E^{\mu\lambda} E_\lambda^{\ \nu} = E^{\mu\nu} - E^{\mu\nu} = 0 \; , \tag{5.171}$$

und **vollständig**,

$$P^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \; . \tag{5.172}$$

Vergleichen wir Gl. (5.165) mit der Definition (5.169) des Projektors $P^{\mu\nu}$, so ist sofort offensichtlich, dass

$$\tilde{B}^{\mu\nu}(K) = -K^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{K^\mu K^\nu}{K^2} \right) = -K^2 \, P^{\mu\nu} \; , \tag{5.173}$$

d.h. $\tilde{B}^{\mu\nu}(K)$ ist **orthogonal** zu K^μ,

$$\tilde{B}^{\mu\nu}(K) K_\nu = -K^2 \, P^{\mu\nu} K_\nu = 0 \; . \tag{5.174}$$

Man sagt, $\tilde{B}^{\mu\nu}(K)$ ist **4–transversal** zu K^μ.

Wir berechnen nun zunächst ganz allgemein die Determinante einer Matrix $A^{\mu\nu}(K)$, die vom 4–Impulsvektor K^μ abhängt. Weil die Projektoren $P^{\mu\nu}$ und $E^{\mu\nu}$ vollständig sind, Gl. (5.172), kann man $A^{\mu\nu}(K)$ als **Tensorzerlegung** in der Form

$$A^{\mu\nu}(K) = A(K)\, P^{\mu\nu} + B(K)\, E^{\mu\nu} \tag{5.175}$$

schreiben, mit Lorentz–skalaren Koeffizienten $A(K)$, $B(K)$, die als Lorentz–Skalare lediglich vom 4–Betragsquadrat K^2 abhängen können. Diese Koeffizienten kann man durch geeignete Projektion aus $A^{\mu\nu}(K)$ berechnen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\, P^{\mu\nu} A_{\mu\nu}(K) &= \frac{1}{3}\left[A(K)\, P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} + B(K)\, E^{\mu\nu} P_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{3}\, A(K)\, P^\mu_{\ \mu} = A(K)\ , \\ E^{\mu\nu} A_{\mu\nu}(K) &= A(K)\, E^{\mu\nu} P_{\mu\nu} + B(K)\, E^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = B(K)\, E^\mu_{\ \mu} = B(K)\ , \end{aligned} \tag{5.176}$$

wobei wir von den Eigenschaften (5.168) und (5.170) Gebrauch gemacht haben. Nun ist

$$A^{\mu\nu}(K) = A^\mu_{\ \lambda}(K)\, g^{\lambda\nu}\ , \tag{5.177}$$

also

$$\det A^{\mu\nu}(K) = \det A^\mu_{\ \lambda}(K) \det g^{\lambda\nu} = -\det A^\mu_{\ \lambda}(K)\ . \tag{5.178}$$

Weiterhin ist (für $A(K) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \ln\det A^\mu_{\ \lambda}(K) &= \mathrm{Tr}\ln A^\mu_{\ \lambda}(K) = \mathrm{Tr}\ln\left[A(K)\, P^\mu_{\ \lambda} + B(K)\, E^\mu_{\ \lambda}\right] \\ &= \mathrm{Tr}\ln\left\{A(K)\, g^\mu_{\ \rho}\left[P^\rho_{\ \lambda} + \frac{B(K)}{A(K)}\, E^\rho_{\ \lambda}\right]\right\} \\ &= \mathrm{Tr}\left(\ln\left[A(K)\, g^\mu_{\ \rho}\right] + \ln\left\{g^\rho_{\ \lambda} - \left[1 - \frac{B(K)}{A(K)}\right]\, E^\rho_{\ \lambda}\right\}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[A(K)-1\right]^n \mathrm{Tr} g^\mu_{\ \rho} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1 - \frac{B(K)}{A(K)}\right]^n \mathrm{Tr} E^\mu_{\ \rho} \\ &= 4\,\ln A(K) + \ln\frac{B(K)}{A(K)} = \ln\left[A(K)^3 B(K)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.179}$$

Hier haben wir die Reihenentwicklungen

$$\ln(x\mathbb{1}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n\mathbb{1}\ , \quad \ln(\mathbb{1} - x\mathrm{A}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,\mathrm{A}^n\ , \tag{5.180}$$

mit einer Matrix A, sowie die Idempotenz des metrischen Tensors und des Projektors $E^{\mu\nu}$ benutzt. Eingesetzt in Gl. (5.178) erhalten wir also

$$\det A^{\mu\nu}(K) = -A(K)^3 B(K)\ . \tag{5.181}$$

Es ist also klar, dass die **Eigenwerte** von $A^{\mu\nu}(K)$ (bis auf das Vorzeichen) identisch mit $A(K)$ (dreifach entartet) und $B(K)$ sind. Die **Inverse** von $A^{\mu\nu}(K)$ ist also

$$A^{-1}_{\mu\nu}(K) = \frac{1}{A(K)}\, P_{\mu\nu} + \frac{1}{B(K)}\, E_{\mu\nu}\ . \tag{5.182}$$

Wir prüfen dies nach,

$$\begin{aligned} A^{-1}_{\mu\lambda}(K)A^{\lambda\nu}(K) &= \left[\frac{1}{A(K)}\,P_{\mu\lambda}+\frac{1}{B(K)}\,E_{\mu\lambda}\right]\left[A(K)\,P^{\lambda\nu}+B(K)\,E^{\lambda\nu}\right] \\ &= P_{\mu\lambda}P^{\lambda\nu}+\frac{B(K)}{A(K)}\,P_{\mu\lambda}E^{\lambda\nu}+\frac{A(K)}{B(K)}\,E_{\mu\lambda}P^{\lambda\nu}+E_{\mu\lambda}E^{\lambda\nu} \\ &= P_\mu^{\ \nu}+E_\mu^{\ \nu}\equiv g_\mu^{\ \nu}\,, \end{aligned} \tag{5.183}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (5.172) benutzt haben. In der Tat ist also die in Gl. (5.182) angegebene Matrix das Inverse von $A^{\mu\nu}(K)$.

Nun wenden wir das Resultat (5.181) auf den Fall $A^{\mu\nu}(K)\equiv\tilde{B}^{\mu\nu}(K)$ an. Durch Vergleich von Gl. (5.173) mit Gl. (5.175) lesen wir sofort ab, dass

$$A(K)\equiv -K^2\,,\quad B(K)\equiv 0\,.$$

Also ist

$$\det\tilde{B}^{\mu\nu}(K)=-(K^2)^3\cdot 0\equiv 0\,, \tag{5.184}$$

d.h. die Inverse $\tilde{B}^{-1}_{\mu\nu}(K)$ existiert nicht! Dies ist das **erste Problem** mit dem naiven Ausdruck (5.158) für das erzeugende Funktional.

Das **zweite Problem** ergibt sich aus folgender Überlegung. Die Lagrange–Dichte (5.159) ist **eichinvariant**, d.h. zwei i.a. **unterschiedliche** Eichfelder A^μ_* und $A'^\mu_*=A^\mu_*+\frac{1}{e}\,\partial^\mu\Lambda\neq A^\mu_*$ sind **eich-äquivalent**, d.h. sie beschreiben **dieselbe** Physik. Im Ausdruck (5.158) wird jedoch über **alle** Eichfeld-Konfigurationen A^μ integriert, also auch über A^μ_* und A'^μ_*. Es wird also eigentlich über **redundante** Information integriert.

Um dieses Problem zu lösen, müßte man das Integrationsmaß $\mathcal{D}A^\mu$ zerlegen in

$$\mathcal{D}A^\mu=\mathcal{D}\bar{A}^\mu\,\mathcal{D}\Lambda\,, \tag{5.185}$$

wobei $\bar{A}^\mu$ die **eich-inäquivalenten** Eichfeld-Konfigurationen sind und Λ die Eichtransformationen, die zwischen den eich-äquivalenten Konfigurationen vermitteln. Idealerweise würde sich dieser letzte Beitrag dann faktorisieren lassen und könnte in der Normierungskonstante des erzeugenden Funktionals absorbiert werden.

Wir werden sehen, dass das Problem der Nicht-Invertierbarkeit von $B^{\mu\nu}(X,Y)$ und die Redundanz bei der Integration über eich-äquivalente Eichfeld-Konfigurationen miteinander zusammenhängen und sich gleichzeitig lösen lassen.

Um das **korrekte** erzeugende Funktional herzuleiten, können wir zwei verschiedene Wege verfolgen, einen **nicht-kovarianten**, ähnlich zur Strahlungseichung bei der kanonischen Quantisierung, und einen **kovarianten**, analog zur Lorenz–Eichung bei der kanonischen Quantisierung.

10.2.2021

5.6.1 Erzeugendes Funktional in vollständig fixierter Eichung

Wir wählen die **axiale Eichung**

$$A^z(X)=0\,, \tag{5.186}$$

also Gl. (3.147) mit $n^\mu = (0,0,0,1)^T$. Das kanonisch konjugierte Feld ist

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = (0, F_{x0}, F_{y0}, F_{z0}) = (0, \vec{\nabla} A_0 + \partial_0 \vec{A}) = (0, -\vec{E}) \,. \tag{5.187}$$

Dies zeigt, dass A^0 kein dynamisches Feld ist, da das kanonisch konjugierte Feld verschwindet, $\pi_0 = 0$. Außerdem ist in axialer Eichung, Gl. (5.186),

$$\pi_z = -E^z = -\pi^z = \partial_z A^0 + \partial_0 A^z \equiv \partial_z A^0 \,. \tag{5.188}$$

Dies ist einfach die z–Komponente des Gradientenfeldes des nicht-dynamischen Feldes A^0. Da in axialer Eichung $A^z = 0$ ist, erwarten wir auch nicht, dass das kanonisch konjugierte Feld π_z unabhängige dynamische Information über das System liefert.

Die einzigen **unabhängigen, dynamischen** Freiheitsgrade sind daher A^x und A^y, mit den zugehörigen kanonisch konjugierten Feldern

$$\begin{aligned} \pi_x &\equiv -\pi^x = \partial_x A^0 + \partial_0 A^x = -E^x \,, \\ \pi_y &\equiv -\pi^y = \partial_y A^0 + \partial_0 A^y = -E^y \,. \end{aligned} \tag{5.189}$$

Diese Freiheitsgrade entsprechen den **physikalischen, transversalen** Polarisationsfreiheitsgraden des elektromagnetischen Feldes. Die **unphysikalischen** Freiheitsgrade sind das **longitudinale** Eichfeld A^z, welches aber in axialer Eichung (5.186) gleich null gesetzt wird, sowie das **zeitartige** Eichfeld A^0 und das zum longitudinalen Eichfeld kanonisch konjugierte Feld $\pi_z = -E^z$. Wir zeigen nun, dass wir diese beiden Größen mit Hilfe des **Gaußschen Gesetzes** (der ersten inhomogenen Maxwell–Gleichung)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \tag{5.190}$$

als **Funktional** der unabhängigen Freiheitsgrade π_x, π_y ausdrücken können (in Abwesenheit äußerer Quellen ist die rechte Seite der inhomogenen Maxwell–Gleichung null). Gleichung (5.190) läßt sich nach $\partial_z E^z$ auflösen,

$$\partial_z E^z = -\partial_x E^x - \partial_y E^y \,, \tag{5.191}$$

und formal integrieren,

$$\begin{aligned} E^z(t,x,y,z) &= -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' \, [\partial_x E^x(t,x,y,z') + \partial_y E^y(t,x,y,z')] + C_E(t,x,y) \\ &= \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' \, [\partial_x \pi_x(t,x,y,z') + \partial_y \pi_y(t,x,y,z')] + C_E(t,x,y) \\ &\equiv E^z[\pi_x, \pi_y] \,. \end{aligned} \tag{5.192}$$

Damit ist E^z, wie behauptet, ein **Funktional** der kanonisch konjugierten Felder π_x und π_y. Formale Integration von Gl. (5.188) liefert dann

$$\begin{aligned} A^0(t,x,y,z) &= -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z'' \, E^z(t,x,y,z'') + C_A(t,x,y) \\ &= -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z'' \int_{z_0}^{z''} \mathrm{d}z' \, [\partial_x \pi_x(t,x,y,z') + \partial_y \pi_y(t,x,y,z')] - (z - z_0) C_E(t,x,y) + C_A(t,x,y) \\ &\equiv A^0[\pi_x, \pi_y] \,. \end{aligned} \tag{5.193}$$

Die Tatsache, dass zwei "Integrationskonstanten" $C_E(t,x,y)$ und $C_A(t,x,y)$ auftreten, zeigt, dass die Eichung noch nicht **vollständig** fixiert ist. Durch Wahl von E^z und A^0 auf der durch $z = z_0$ definierten Raum-Zeit-Fläche,

$$E^z(t,x,y,z_0) \equiv C_E(t,x,y)\ , \quad A^0(t,x,y,z_0) \equiv C_A(t,x,y)\ , \tag{5.194}$$

wird die Eichung jedoch vollständig festgelegt.

Nun berechnen wir die Hamilton–Dichte durch Legendre–Transformation der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}E_iE^i - \frac{1}{4}\epsilon_{ijm}\epsilon^{ijn}B_mB^n = \frac{1}{2}\vec{E}^{\,2} - \frac{1}{2}\delta_{mn}B^mB^n = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2}\right)\ , \tag{5.195}$$

wobei wir die Glgen. (2.135), (2.136) und die Relation $\epsilon_{ijm}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{mn}$ benutzt haben. Bei der Legendre–Transformation müssen die Zeitableitungen der **physikalischen** Freiheitsgrade A^x, A^y durch die entsprechenden kanonisch konjugierten Felder gemäß Gl. (5.189) ersetzt werden. Außerdem ist $E^x = -\pi_x$, $E^y = -\pi_y$, $E^z = E^z[\pi_x, \pi_y]$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \pi_x\partial_0A^x + \pi_y\partial_0A^y - \mathcal{L}_0\,\Big|_{\substack{\partial_0A^x = \pi_x - \partial_xA^0\\ \partial_0A^y = \pi_y - \partial_yA^0}} \\
&= \pi_x(\pi_x - \partial_xA^0) + \pi_y(\pi_y - \partial_yA^0) - \frac{1}{2}\left[\pi_x^2 + \pi_y^2 + (E^z)^2 - \vec{B}^{\,2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\pi_x^2 + \pi_y^2 + (E^z)^2 + \vec{B}^{\,2}\right] - \pi_x\partial_xA^0 - \pi_y\partial_yA^0 - (E^z)^2\ .
\end{aligned} \tag{5.196}$$

Die letzten drei Terme werden unter Benutzung von Gl. (5.188) wie folgt umgeformt

$$\begin{aligned}
\pi_x\partial_xA^0 + \pi_y\partial_yA^0 + (E^z)^2 &= \pi_x\partial_xA^0 + \pi_y\partial_yA^0 + \pi_z\partial_zA^0 \equiv -\vec{\pi}\cdot\vec{\nabla}A^0 \\
&= -\vec{\nabla}\cdot(\vec{\pi}A^0) + A^0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}\ .
\end{aligned} \tag{5.197}$$

Der erste Term liefert bei Integration über den gesamten Raum $\mathrm{d}^3\vec{x}$ einen Oberflächenterm, den wir vernachlässigen können, wenn die Felder im Unendlichen verschwinden. Der zweite Term ist aufgrund des Gaußschen Gesetzes (5.190) null. Also ist für Feldkonfigurationen, die das Gaußsche Gesetz erfüllen (und bis auf Terme, die Oberflächenterme generieren)

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\left[\pi_x^2 + \pi_y^2 + (E^z)^2 + \vec{B}^{\,2}\right]\ . \tag{5.198}$$

Nun können wir das **erzeugende Funktional für n–Punkt-Korrelationsfunktionen** in **vollständig fixierter Eichung** hinschreiben. Dieses ist natürlich identisch mit der **Vakuum-zu-Vakuum-Übergangsamplitude**. Setzen wir die Quellenfelder J_x, J_y für die physikalischen Eichfelder zunächst gleich null, so lautet diese

$$Z_0[0] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\pi_x\,\mathcal{D}\pi_y\,\mathcal{D}A^x\,\mathcal{D}A^y\,\exp\left[i\int \mathrm{d}^4X\,(\pi_x\partial_0A^x + \pi_y\partial_0A^y - \mathcal{H}_0)\right]\ . \tag{5.199}$$

Hierbei ist zu beachten, dass **ausschließlich** über die **physikalischen** Freiheitsgrade A^x, A^y und die zugehörigen kanonisch konjugierten Felder π_x, π_y funktional integriert wird.

Dies kommt daher, dass wir bei der Herleitung des Funktionalintegrals nur vollständige Sätze von **physikalischen** Zuständen einschieben können, also solche, die als Eigenwerte die (unabhängigen) Felder A^x, A^y, π_x und π_y haben.

Zur weiteren Berechnung von $Z_0[0]$ könnten wir nun aufgrund der Form von $\mathcal{H}_0$, Gl. (5.198), argumentieren, dass die Funktionalintegrale über π_x und π_y wieder verschobene Gauß–Integrale sind, sich also analytisch lösen lassen sollten. Dies ist aber bei näherer Betrachtung nicht der Fall: E^z in $\mathcal{H}_0$ ist ein (kompliziertes) Funktional von π_x, π_y, vgl. Gl. (5.192). Die kanonisch konjugierten Felder lassen sich also nicht einfach ausintegrieren. Wir können aber durch einen Trick E^z durch eine **unabhängige** Integrationsvariable ersetzen, indem wir im Funktionalintegral in Gl. (5.199) eine Eins einfügen,

$$1 = \int \mathcal{D}\pi_z \, \delta\left[\pi_z + E^z[\pi_x, \pi_y]\right] \ . \tag{5.200}$$

Die funktionale δ–Funktion erlaubt, überall im Integranden $-E^z$ durch die unabhängige Integrationsvariable π_z zu ersetzen,

$$\begin{aligned} Z_0[0] \ &= \ \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi_x \, \mathcal{D}\pi_y \, \mathcal{D}\pi_z \, \mathcal{D}A^x \, \mathcal{D}A^y \, \delta\left[\pi_z + E^z[\pi_x, \pi_y]\right] \\ &\quad \times \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4X \left[\pi_x \partial_0 A^x + \pi_y \partial_0 A^y - \frac{1}{2}\left(\vec{\pi}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right)\right]\right\} \ . \end{aligned} \tag{5.201}$$

Allerdings ist eine direkte Integration über π_x, π_y immer noch nicht möglich, da diese Variablen nun im Argument der zusätzlich auftretenden δ–Funktion auftauchen. Wir formen die δ–Funktion nun mit Hilfe der bekannten Relation

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\, \delta(x - x_0) \quad \text{für} \quad f(x_0) = 0 \tag{5.202}$$

um. Wir müssen diese Relation allerdings zunächst für funktionale δ–Funktionen verallgemeinern. Die Rolle von der Variablen x wird dabei von der Funktion $\pi_z(X)$ übernommen. Die Rolle der Funktion $f(x)$ spielt zunächst ein beliebiges Funktional $F_X[\pi_z]$ der Funktion π_z, das aber gleichzeitig noch eine **Funktion** des Raum-Zeit-Vektors X^μ sein soll (vgl. Gl. (4.97))

$$\delta\left[F_X[\pi_z]\right] = \frac{1}{\left|\det \frac{\delta F_X[\pi_z]}{\delta \pi_z(Y)}\right|_{\pi_z = \pi_{z,0}}}\, \delta[\pi_z - \pi_{z,0}] \quad \text{für} \quad F_X[\pi_{z,0}] = 0 \ . \tag{5.203}$$

Nur dadurch, dass $F_X[\pi_z]$ auch eine **Funktion** von X^μ ist, tritt auf der linken Seite ebenfalls eine funktionale δ–Funktion auf (ansonsten hätten wir, da Funktionale einfache Zahlenwerte haben, eine gewöhnliche δ–Funktion). Zu beachten ist ferner, dass die gewöhnliche Ableitung der Funktion $f(x)$ im Nenner von Gl. (5.202) durch die **Funktional-Ableitung** von $F_X[\pi_z]$ nach $\pi_z(Y)$ ersetzt wird. Weil aber $F_X[\pi_z]$ auch eine **Funktion** von X^μ ist und nach $\pi_z(Y)$ abgeleitet wird, haben wir bei der funktionalen Ableitung **zwei** Raum-Zeit-Indizes (X und Y), und die gewöhnliche funktionale Ableitung ist durch die **Jacobi–Determinante** der funktionalen Ableitungen zu ersetzen.

Nun suchen wir ein Funktional $F_X[\pi_z]$, welches an der Stelle $\pi_z = \pi_{z,0}$ den Wert null annimmt. Offensichtlich ist dies für

$$F_X[\pi_z] \equiv \int \mathrm{d}^4Y\, \delta^{(4)}(X-Y)\, \vec{\nabla}_y \cdot \vec{\pi}(Y) \equiv \vec{\nabla}_x \cdot \vec{\pi}(X) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}(X) \tag{5.204}$$

für die Funktion

$$\pi_{z,0} = -E^z[\pi_x, \pi_y] \tag{5.205}$$

der Fall, denn wir hatten ja gerade das Gaußsche Gesetz (5.190) benutzt, um E^z als Funktional von π_x, π_y zu bestimmen. Bringen wir die Jacobi–Determinante auf die linke Seite, so nimmt Gleichung (5.203) mit den Glgen. (5.204) und (5.205) die Form

$$\left| \det \frac{\delta\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}(X)}{\delta \pi_z(Y)} \right| \delta[\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}] = \delta\left[\pi_z + E^z[\pi_x, \pi_y]\right] \tag{5.206}$$

an. An welcher Stelle die Jacobi–Determinante auszuwerten ist, muss nun nicht mehr angegeben werden; die δ–Funktion auf der linken Seite der Gleichung sorgt automatisch dafür, dass nur die Funktion $\pi_z = -E^z[\pi_x, \pi_y]$ dafür in Frage kommt. Wir können nun die δ–Funktion in Gl. (5.201) durch Gl. (5.206) ersetzen,

$$\begin{aligned} Z_0[0] \;=\; & \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\vec{\pi}\, \mathcal{D}A^x\, \mathcal{D}A^y\, \delta\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}\right] \det \frac{\delta\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}(X)}{\delta \pi_z(Y)} \\ & \times \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4X \left[\pi_x \partial_0 A^x + \pi_y \partial_0 A^y - \frac{1}{2}\left(\vec{\pi}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right)\right]\right\} . \end{aligned} \tag{5.207}$$

Hierbei haben wir noch diverse Vorzeichen (z.B. das der Jacobi–Determinante) in die neue Normierungskonstante $\mathcal{N}'$ absorbiert. Das Interessante an diesem Ausdruck ist, dass die funktionale δ–Funktion dafür sorgt, dass lediglich Feldkonfigurationen zum Funktionalintegral beitragen, die das Gaußsche Gesetz (5.190) erfüllen.

Um den Ausdruck etwas symmetrischer in Feldern und kanonisch konjugierten Feldern zu gestalten, fügen wir eine weitere spuriose Funktionalintegration ein,

$$1 = \int \mathcal{D}A^z\, \delta[A^z] \,. \tag{5.208}$$

Diese funktionale δ–Funktion erzwingt interessanterweise, dass die Feldkonfigurationen die axiale Eichbedingung (5.186) erfüllen. Weil mit $A^z = 0$ auch $\partial_0 A^z = 0$ gilt, kann man im Exponenten einen Term $\pi_z \partial_z A^0$ dazuaddieren und Gl. (5.207) nun in der Form

$$\begin{aligned} Z_0[0] \;=\; & \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\vec{\pi}\, \mathcal{D}\vec{A}\, \delta[A^z]\, \delta\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}\right] \det \frac{\delta\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}(X)}{\delta \pi_z(Y)} \\ & \times \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4X \left[-\vec{\pi} \cdot \partial_0 \vec{A} - \frac{1}{2}\left(\vec{\pi}^{\,2} + \vec{B}^{\,2}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{5.209}$$

schreiben.

Nun benutzen wir die Fourier–Darstellung der funktionalen δ–Funktion,

$$\delta\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}\right] \sim \int \mathcal{D}A^0 \exp\left(i \int \mathrm{d}^4X\, A^0\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}\right) . \tag{5.210}$$

Eventuell auftretende konstante Faktoren sind dabei unerheblich, sie können in die Normierungskonstante $\mathcal{N}'$ absorbiert werden. Zu diesem Zeitpunkt ist A^0 einfach nur eine Integrationsvariable. Jedoch ist die Bezeichnung nicht zufällig gewählt, wir werden sehen, dass sie die Rolle der Zeitkomponente des Eichfeldes A^μ übernehmen wird. Desweiteren benutzen wir

$$\frac{\delta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}(X)}{\delta\pi_z(Y)} = -\frac{\delta}{\delta\pi_z(Y)}\left[\partial_1\pi_x(X)+\partial_2\pi_y(X)+\partial_3\pi_z(X)\right] = -\partial_3\,\delta^{(4)}(X-Y)\,. \tag{5.211}$$

Hier haben wir die räumlichen Komponenten des 4–Vektors X^μ mit x^i, $i=1,2,3$, abgekürzt (und entsprechend die Ableitung nach diesen Komponenten mit $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$), um sie von den Komponenten des 4–Vektors Y^μ zu unterscheiden. Außerdem haben wir die Relation $\delta\pi_z(X)/\delta\pi_z(Y) = \delta^{(4)}(X-Y)$ benutzt, s. Gl. (4.97). Damit wird Gl. (5.209) zu

$$\begin{aligned} Z_0[0] &= \mathcal{N}''\int \mathcal{D}\vec{\pi}\,\mathcal{D}A^\mu\,\delta[A^z]\det\left[-\partial_3\,\delta^{(4)}(X-Y)\right] \\ &\quad\times\exp\left\{i\int \mathrm{d}^4X\left[A^0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}-\vec{\pi}\cdot\partial_0\vec{A}-\frac{1}{2}\left(\vec{\pi}^{\,2}+\vec{B}^{\,2}\right)\right]\right\} \\ &= \mathcal{N}''\int \mathcal{D}\vec{\pi}\,\mathcal{D}A^\mu\,\delta[A^z]\det\left[-\partial_3\,\delta^{(4)}(X-Y)\right] \\ &\quad\times\exp\left\{i\int \mathrm{d}^4X\left[\vec{\pi}\cdot(-\vec{\nabla}A^0-\partial_0\vec{A})-\frac{1}{2}\left(\vec{\pi}^{\,2}+\vec{B}^{\,2}\right)\right]\right\}\,, \end{aligned} \tag{5.212}$$

wobei zusätzliche Konstanten (z.B. aus Gl. (5.210)) in der neuen Normierungskonstanten $\mathcal{N}''$ absorbiert wurden. Im letzten Schritt haben wir auch noch den Term $A^0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}$ partiell integriert und Oberflächenterme vernachlässigt.

An dieser Stelle ist es nun möglich, die Integration über die kanonisch konjugierten Felder als verschobenes Gauß–Integral durchzuführen, da

$$-\frac{1}{2}\,\vec{\pi}^{\,2}+\vec{\pi}\cdot(-\vec{\nabla}A^0-\partial_0\vec{A}) = -\frac{1}{2}\left(\vec{\pi}+\vec{\nabla}A^0+\partial_0\vec{A}\right)^2+\frac{1}{2}\left(-\vec{\nabla}A^0-\partial_0\vec{A}\right)^2\,. \tag{5.213}$$

Die Integration über die verschobenen kanonisch konjugierten Felder $\vec{\pi}\,' \equiv \vec{\pi}+\vec{\nabla}A^0+\partial_0\vec{A}$ ergibt nur eine irrelevante Konstante, die man in $\mathcal{N}''$ absorbieren kann. Bezeichnen wir

$$-\vec{\nabla}A^0-\partial_0\vec{A} \equiv \vec{E}\,, \tag{5.214}$$

was konsistent mit Gl. (5.187) ist, so erhalten wir mit Gl. (5.195)

$$Z_0[0] = \mathcal{N}'''\int \mathcal{D}A^\mu\,\delta[A^z]\det\left[-\partial_3\,\delta^{(4)}(X-Y)\right]\exp\left(i\int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}_0\right)\,, \tag{5.215}$$

Zum Schluss fügen wir noch ein Quellenfeld J_μ für das Eichfeld A^μ ein, so dass

$$Z_0[J_\mu] = \mathcal{N}'''\int \mathcal{D}A^\mu\,\delta[A^z]\det\left[-\partial_3\,\delta^{(4)}(X-Y)\right]\exp\left[i\int \mathrm{d}^4X\,(\mathcal{L}_0+J_\mu A^\mu)\right]\,, \tag{5.216}$$

Dies ist der korrekte Ausdruck für das erzeugende Funktional in axialer Eichung. Die funktionale δ–Funktion und die Determinante sorgen dafür, dass man nur über **physikalische** Freiheitsgrade und **eich-inäquivalente** Feldkonfigurationen integriert. Da

$$\det\left[-\partial_3\,\delta^{(4)}(X-Y)\right] = const.\ , \tag{5.217}$$

könnte man im Prinzip die Determinante noch aus dem Funktionalintegral herausziehen und in $\mathcal{N}'''$ absorbieren. Um dieses Resultat auf andere Eichungen zu verallgemeinern (bei denen dies u.U. nicht möglich ist), lassen wir das Resultat in der Form (5.216) stehen.

Wir können nun eine Vermutung anstellen, wie Gl. (5.216) auf andere Eichungen verallgemeinerbar ist. Dazu schreiben wir die Eichbedingung ganz allgemein in der Form

$$F_X[A^\mu] = 0\ . \tag{5.218}$$

In einer beliebigen axialen Eichung

$$F_X[A^\mu] = \int \mathrm{d}^4Y\, n_\mu A^\mu(Y)\,\delta^{(4)}(X-Y) \equiv n_\mu A^\mu(X) = 0\ , \tag{5.219}$$

und für $n^\mu = (0,0,0,1)^T$ erhalten wir wieder Gl. (5.186), also

$$F_X[A^\mu] = A^z(X) = 0\ . \tag{5.220}$$

Ein beliebiges Eichfeld A'^μ in **axiale Eichung** zu bringen bedeutet, dass man eine Eichtransformation durchführen kann,

$$A^\mu(X) = A'^\mu(X) + \frac{1}{e}\,\partial^\mu\Lambda(X)\ , \tag{5.221}$$

so dass die z–Komponente des neuen Feldes A^μ verschwindet,

$$F_X[A^\mu] = A^z(X) = A'^z(X) - \frac{1}{e}\,\partial_z\Lambda(X) = 0\ . \tag{5.222}$$

Offensichtlich ist

$$\frac{\delta F_X[A^\mu]}{\delta\Lambda(Y)} = -\frac{1}{e}\,\partial_z\,\frac{\delta\Lambda(X)}{\delta\Lambda(Y)} = -\frac{1}{e}\,\partial_3\,\delta^{(4)}(X-Y)\ . \tag{5.223}$$

Zur besseren Unterscheidung haben wir im letzten Schritt die Ableitung nach der z–Komponente von X^μ wieder mit ∂_3 bezeichnet. Abgesehen von irrelevanten Konstanten, die man in $\mathcal{N}'''$ absorbieren kann, können wir Gl. (5.216) mit den Glgen. (5.220) und (5.223) nun umschreiben in

$$Z_0[J_\mu] = \mathcal{N}'''' \int \mathcal{D}A^\mu\,\delta[F_X\,[A^\mu]]\,\det\frac{\delta F_X[A^\mu]}{\delta\Lambda(Y)}\,\exp\left[i\int \mathrm{d}^4X\,(\mathcal{L}_0 + J_\mu A^\mu)\right]\ , \tag{5.224}$$

Dies ist der korrekte Ausdruck für das erzeugende Funktional in **beliebiger** Eichung (5.218). Wir werden diesen Ausdruck im nächsten Abschnitt noch einmal auf eine andere Weise herleiten.

12.2.2021

5.6.2 Erzeugendes Funktional in kovarianter Eichung

Allgemein kann man Eichtransformationen in der Form (2.210) schreiben. Für das Photonfeld muss man die Ersetzungen $\mathcal{A}^\mu \to A^\mu$ und $g \to -e$ machen, so dass diese Gleichung lautet

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu_U = U A^\mu U^\dagger + \frac{i}{e} \left(\partial^\mu U\right) U^\dagger \ , \tag{5.225}$$

wobei wir das eichtransformierte Feld nun mit A^μ_U bezeichnet haben. In der Tat folgt für eine $U(1)$–Transformation

$$U = e^{-i\Lambda} \ , \quad \partial^\mu U = -i \left(\partial^\mu \Lambda\right) U \ , \tag{5.226}$$

für diese Gleichung

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu_U = e^{-i\Lambda} A^\mu e^{i\Lambda} + \frac{i}{e} (-i) \left(\partial^\mu \Lambda\right) e^{-i\Lambda} e^{i\Lambda} = A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \Lambda \ , \tag{5.227}$$

also der bekannte Ausdruck (2.97).

Wir schreiben nun eine beliebige Eichbedingung als

$$F_X \left[A^\mu_{U_*}\right] = 0 \ , \tag{5.228}$$

was bedeutet, dass das **eichtransformierte** Eichfeld $A^\mu_{U_*}$ die Eichbedingung erfüllt. Zu diesem Zeitpunkt kann dies noch jede beliebige Eichung sein, z.B. die axiale Eichung

$$F_X \left[A^\mu_{U_*}\right] = A^z_{U_*}(X) = 0 \ , \tag{5.229}$$

oder die Lorenz–Eichung

$$F_X \left[A^\mu_{U_*}\right] = \partial_\mu A^\mu_{U_*}(X) = 0 \ . \tag{5.230}$$

Die **spezielle** Eichtransformation

$$U_* = e^{-i\Lambda_*} \tag{5.231}$$

sorgt dafür, dass $A^\mu_{U_*}$ die Eichbedingung erfüllt.

Wir betrachten nun das Funktionalintegral

$$\Delta^{-1}\left[A^\mu\right] \equiv \int \mathcal{D}U \, \delta\left[F_X[A^\mu_U]\right] \ . \tag{5.232}$$

Hier wird funktional über alle **Eichtransformationen** U integriert. Aufgrund der funktionalen δ–Funktion trägt aber nur die **spezielle** Eichtransformation U_* zum Integral bei, da diese gerade Gl. (5.228) erfüllt. Dass das Funktionalintegral selbst ein Funktional des (untransformierten) Eichfelds A^μ ist, folgt aus Gl. (5.227).

Wir zeigen nun, dass das Funktionalintegral (5.232) **eichinvariant** ist. Dazu betrachten wir eine spezielle Eichtransformation U'. Für das entsprechend eichtransformierte Eichfeld $A^\mu_{U'}$ lautet Gl. (5.232) dann

$$\Delta^{-1}\left[A^\mu_{U'}\right] = \int \mathcal{D}U \, \delta\left[F_X[A^\mu_{UU'}]\right] \ . \tag{5.233}$$

Setzen wir nun $UU' \equiv U''$ und benutzen die Tatsache, dass (zumindest für kompakte Gruppen) das Integrationsmaß invariant ist [20],

$$\mathcal{D}U \equiv \mathcal{D}U'' \ , \tag{5.234}$$

so folgt

$$\Delta^{-1}\left[A^\mu_{U'}\right] = \int \mathcal{D}U''\,\delta\left[F_X[A^\mu_{U''}]\right] \equiv \int \mathcal{D}U\,\delta\left[F_X[A^\mu_U]\right] \equiv \Delta^{-1}\left[A^\mu\right] \ , \quad \text{q.e.d.} \ . \tag{5.235}$$

Hier haben wir im zweiten Schritt die Integrationsvariable $U'' \to U$ substitutiert.

Wir fügen nun

$$1 = \Delta\left[A^\mu\right] \int \mathcal{D}U\,\delta\left[F_X[A^\mu_U]\right] \tag{5.236}$$

in das naive erzeugende Funktional (5.158) ein, wobei wir das Quellenfeld J_μ zunächst null setzen,

$$Z_0[0] = \int \mathcal{D}A^\mu\,\Delta\left[A^\mu\right] \int \mathcal{D}U\,\delta\left[F_X[A^\mu_U]\right]\,e^{iS[A^\mu]} \ , \tag{5.237}$$

wobei wir die Wirkung

$$S[A^\mu] \equiv \int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4X\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\partial^\mu A^\nu \tag{5.238}$$

eingeführt haben, um die Notation möglichst kompakt zu halten. Wir können nun das Funktionalintegral über U mit dem über die Eichfelder vertauschen. Das Integrationsmaß $\mathcal{D}A^\mu$ ist eichinvariant,

$$\mathcal{D}A^\mu = \mathcal{D}A^\mu_U \ , \tag{5.239}$$

da man über **alle** Eichfeldkonfigurationen integriert, es also keine Rolle spielt, ob man sie eichtransformiert hat oder nicht. Mit der Eichinvarianz von $\Delta[A^\mu] \equiv \Delta[A^\mu_U]$ erhalten wir

$$Z_0[0] = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A^\mu_U\,\Delta\left[A^\mu_U\right]\,\delta\left[F_X[A^\mu_U]\right]\,e^{iS[A^\mu]} \ , \tag{5.240}$$

wobei wir die Substitution $A^\mu \to A^\mu_U$ im Integrationsmaß und im Funktional $\Delta[A^\mu]$ vorgenommen haben. Desweiteren ist, wie wir wissen, auch die Wirkung eichinvariant,

$$S[A^\mu] \equiv S[A^\mu_U] \ . \tag{5.241}$$

Damit können wir Gl. (5.240) schreiben als

$$\begin{aligned} Z_0[0] &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A^\mu_U\,\Delta\left[A^\mu_U\right]\,\delta\left[F_X[A^\mu_U]\right]\,e^{iS[A^\mu_U]} \\ &\equiv \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A^\mu\,\Delta\left[A^\mu\right]\,\delta\left[F_X[A^\mu]\right]\,e^{iS[A^\mu]} \ , \end{aligned} \tag{5.242}$$

wobei wir im letzten Schritt die Integrationsvariablen wieder in $A^\mu_U \to A^\mu$ umbenannt haben.

Obwohl es so aussieht, als hätten wir gar nichts erreicht, weil wir lediglich das naive erzeugende Funktional (5.158) durch Einfügen einer Eins, Gl. (5.236), umgeformt haben, sind wir doch einen gewaltigen Schritt weitergekommen: wir haben das Funktionalintegral über die Eichtransformationen, $\int \mathcal{D}U$, vom Funktionalintegral über die Eichfeldkonfigurationen absepariert, ähnlich wie wir dies im Zusammenhang mit Gl. (5.185) diskutiert hatten. Es ist jetzt nämlich nicht mehr so, dass wir im Funktionalintegral über A^μ über alle Eichfeldkonfigurationen, also auch über eich-äquivalente, integrieren: die funktionale δ–Funktion mit der Eichbedingung im Argument sorgt dafür, dass **nur** die Eichfeldkonfigurationen in der speziellen Eichung U_* beitragen!

Der letzte Schritt besteht in der Berechnung von $\Delta[A^\mu]$. Da diese Größe eichinvariant ist, können wir eine Eichfeldkonfiguration A^μ wählen, welche sich nur **infinitesimal** von $A^\mu_{U_*}$, d.h. der Nullstelle der funktionalen δ–Funktion in der Definition (5.232) von $\Delta^{-1}[A^\mu]$, unterscheidet. Dann tragen aber nur **infinitesimale** Eichtransformationen U in der Nähe von U_*, $U = U_* e^{-i\Lambda} \simeq U_*(1 - i\Lambda)$, $|\Lambda| \ll 1$, zum Integranden bei, d.h. wir dürfen das Integrationsmaß $\mathcal{D}U$ durch $\mathcal{D}\Lambda$ ersetzen,

$$\Delta^{-1}[A^\mu] = \int \mathcal{D}U\, \delta\left[F_X[A^\mu_U]\right] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta\left[F_X\left[A^\mu + \frac{1}{e}\,\partial^\mu \Lambda\right]\right] , \tag{5.243}$$

wobei wir konstante Faktoren bei der Substitution $U \to \Lambda$ in eine Normierungskonstante $\mathcal{N}$ absorbiert haben. Eine weitere Substitution der Integrationsvariablen

$$\Lambda(X) \longrightarrow F_X\left[A^\mu + \frac{1}{e}\,\partial^\mu \Lambda\right] \equiv F(X) \tag{5.244}$$

liefert

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A^\mu] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta\left[F_X\left[A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu \Lambda\right]\right] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}F \det \frac{\delta\Lambda(Y)}{\delta F(X)}\, \delta\left[F\right] \\ &\equiv \mathcal{N} \det \left.\frac{\delta\Lambda(Y)}{\delta F(X)}\right|_{F(X)=0} , \end{aligned} \tag{5.245}$$

bzw. nach Invertieren

$$\Delta[A^\mu] = \mathcal{N}^{-1} \det \left.\frac{\delta F(X)}{\delta\Lambda(Y)}\right|_{F(X)=0} \equiv \mathcal{N}^{-1} \det \left.\frac{\delta F_X[A^\mu]}{\delta\Lambda(Y)}\right|_{F_X[A^\mu]=0} . \tag{5.246}$$

Setzen wir dies in Gl. (5.242) ein und absorbieren $\int \mathcal{D}U$ und $\mathcal{N}^{-1}$ in eine neue Normierungskonstante $\mathcal{N}''''$, so erhalten wir

$$Z_0[0] = \mathcal{N}'''' \int \mathcal{D}A^\mu \det \frac{\delta F_X[A^\mu]}{\delta\Lambda(Y)}\, \delta\left[F_X[A^\mu]\right]\, e^{iS[A^\mu]} , \tag{5.247}$$

wobei die funktionale δ–Funktion dafür sorgt, dass die Determinante an der richtigen Stelle ($F_X[A^\mu] = 0$) ausgewertet wird. Die funktionale Ableitung von $F_X[A^\mu]$ nach $\Lambda(Y)$ ist wie in Gl. (5.223) zu berechnen, d.h. man ersetzt in der Eichbedingung $F_X[A^\mu] = 0$ das Eichfeld A^μ durch

$$A^\mu(X) = A'^\mu(X) + \frac{1}{e}\,\partial^\mu \Lambda(X) , \tag{5.248}$$

und leitet dann funktional nach $\Lambda(Y)$ ab. In **Lorenz–Eichung**,

$$F_X[A^\mu] \equiv \partial_\mu A^\mu(X) \ , \tag{5.249}$$

würde diese Operation beispielsweise lauten

$$\frac{\delta F_X[A^\mu]}{\delta\Lambda(Y)} = \frac{\delta}{\delta\Lambda(Y)}\,\partial_\mu\left[A'^\mu(X) + \frac{1}{e}\,\partial^\mu\Lambda(X)\right] = \frac{1}{e}\,\partial_\mu\partial^\mu\,\frac{\delta\Lambda(X)}{\delta\Lambda(Y)} = \frac{1}{e}\,\Box_x\,\delta^{(4)}(X-Y) \ . \tag{5.250}$$

Fügen wir jetzt noch im Exponenten in Gl. (5.247) einen Quellenterm $i\int \mathrm{d}^4X\,J_\mu A^\mu$ ein, so erhalten wir wieder Gl. (5.224).

Wir schreiben nun die Determinante der Matrix der Funktionalableitungen in ein Funktionalintegral über **Graßmann–wertige** Felder um. Wir bezeichnen

$$\frac{\delta F_X[A^\mu]}{\delta\Lambda(Y)} \equiv M(X,Y) \ , \tag{5.251}$$

und schreiben

$$\det\left[iM(X,Y)\right] \equiv \int \mathcal{D}\bar\eta\,\mathcal{D}\eta\,\exp\left[-i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(X)\,M(X,Y)\,\eta(Y)\right] \ , \tag{5.252}$$

vgl. Gl. (5.122). Die Graßmann–wertigen Felder $\bar\eta(X), \eta(X)$ entsprechen **keinen physikalischen Teilchen**. Man bezeichnet sie daher als **Geistfelder** oder präziser, nach ihren Erfindern, als **Faddeev–Popov–Geistfelder**. Die Determinante

$$\det\frac{\delta F_X[A^\mu]}{\delta\Lambda(Y)} = \det M(X,Y) \tag{5.253}$$

heißt dementsprechend **Faddeev–Popov–Determinante**. Man beachte, dass die Faddeev–Popov–Geistfelder zwar aus antivertauschenden Zahlen bestehen, aber ihrer Natur nach **Bosonen mit Spin null** darstellen. Gleichung (5.247) nimmt jetzt (inkl. Quellterm) die Form

$$\begin{aligned} Z_0[J_\mu] &= \mathcal{N}'''''\int \mathcal{D}A^\mu\,\mathcal{D}\bar\eta\,\mathcal{D}\eta\,\delta\left[F_X[A^\mu]\right] \\ &\times\ \exp\left[-i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(X)\,M(X,Y)\,\eta(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\,(\mathcal{L}_0 + J_\mu A^\mu)\right] \end{aligned} \tag{5.254}$$

an, wobei wir weitere konstante Normierungsfaktoren (genauer, Faktoren $-i$ aus der Ersetzung $\det \mathrm{M} \to \det[i\mathrm{M}]$) in $\mathcal{N}'''''$ absorbiert haben.

17.2.2021

Zum Schluss legen wir noch die Eichbedingung fest. Wir schreiben

$$F_X[A^\mu] = \partial\cdot A(X) - C(X) \ , \tag{5.255}$$

wobei $C(X)$ ein beliebiges, fest vorgegebenes Feld ist. In Lorenz–Eichung wäre $C(X) = 0$ zu wählen. Man beachte, dass das Feld $C(X)$ keine Auswirkungen auf die Faddeev–Popov–Matrix M hat, da diese aus den **Ableitungen** der Eichbedingung nach Λ besteht. Das erzeugende Funktional (5.254) ist nun eigentlich ein Funktional der Quelle

$J_\mu(X)$ und des Feldes $C(X)$, $Z_0[J_\mu, C]$. Nun multiplizieren wir dieses mit einem Faktor $\exp\left[-i\,\lambda/2\int \mathrm{d}^4X\, C^2(X)\right]$ und bilden das Funktionalintegral über alle Funktionen $C(X)$,

$$Z_{0(\lambda)}[J_\mu] \equiv \int \mathcal{D}C\, \exp\left[-i\,\frac{\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4X\, C^2(X)\right] Z_0[J_\mu, C]\,. \tag{5.256}$$

Die funktionale Abhängigkeit von $C(X)$ wurde nun in eine parametrische Abhängigkeit von λ überführt. Man fragt sich, ob man auch ohne den exponentiellen Gewichtsfaktor über alle Felder $C(X)$ hätte integrieren können. Dieses Funktionalintegral ist aber nicht wohldefiniert. Führt man eine analytische Fortsetzung in die Euklidsche Raum-Zeit durch, so erkennt man, dass dieser Faktor das Funktionalintegral (5.256) zu einem Gauß–Integral macht, also eine konvergenzerzeugende Wirkung hat (wobei wir $\lambda > 0$ voraussetzen).

Setzen wir Gl. (5.254) in Gl. (5.256) ein, so erhalten wir (nach Umbenennung des Normierungsfaktors $\mathcal{N}''''$ in $\mathcal{N}$)

$$\begin{aligned}
Z_{0(\lambda)}[J_\mu] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu\,\mathcal{D}\bar\eta\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}C\,\delta\left[\partial\cdot A - C\right] \\
&\times\ \exp\left[-i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(X)\,M(X,Y)\,\eta(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\,\left(\mathcal{L}_0 + J_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2}\,C^2\right)\right] \\
&= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu\,\mathcal{D}\bar\eta\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}C\,\delta\left[\partial\cdot A - C\right] \\
&\times\ \exp\left\{-i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(X)\,M(X,Y)\,\eta(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\,\left[\mathcal{L}_0 + J_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2}\,(\partial\cdot A)^2\right]\right\} \\
&= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu\,\mathcal{D}\bar\eta\,\mathcal{D}\eta \qquad\qquad (5.257)\\
&\times\ \exp\left\{-i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta(X)\,M(X,Y)\,\eta(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\,\left[\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{2}\,(\partial\cdot A)^2 + J_\mu A^\mu\right]\right\}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass die δ–Funktion $C(X) = \partial\cdot A(X)$ erzwingt, und im letzten Schritt die Relation

$$\int \mathcal{D}C\,\delta\left[\partial\cdot A - C\right] = 1 \tag{5.258}$$

benutzt haben.

In Lorenz–Eichung ist

$$M(X,Y) = \frac{1}{e}\,\Box_x\,\delta^{(4)}(X-Y)\,, \tag{5.259}$$

s. Gl. (5.250), wobei der Faktor $1/e$ üblicherweise auch in der Normierungskonstanten $\mathcal{N}$ absorbiert und daher weggelassen wird. Die Faddeev–Popov–Determinante hängt also **nicht** von den Eichfeldern A^μ ab und entkoppelt daher vom Funktionalintegral über die Eichfelder. Sie liefert nur einen konstanten Beitrag zum erzeugenden Funktional, kann also ebenfalls in $\mathcal{N}$ absorbiert werden. Dies war auch schon in der Diskussion in vollständig fixierter Eichung (Abschnitt 5.6.1) der Fall. Dass die Geistfelder von den Eichfeldern entkoppeln, ist eine generelle Eigenschaft Abelscher Eichtheorien. Wir werden in Abschnitt

5.7 sehen, dass dies für nicht-Abelsche Theorien, wie der für das Yang–Mills–Feld, nicht mehr gilt. Wir können also Gl. (5.257) vereinfachen,

$$Z_{0(\lambda)}[J_\mu] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A^\mu \, \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^4X \, \left[\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{2} \, (\partial \cdot A)^2 + J_\mu A^\mu \right] \right\} \, . \tag{5.260}$$

Vergleichen wir den Exponenten in Gl. (5.260) mit Gl. (3.179), so sehen wir, dass unsere Manipulationen uns genau auf einen zusätzlichen **eichfixierenden Term** $-\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2$ in der Lagrange–Dichte geführt haben! Dieser eichfixierende Term sorgt dafür, dass die Matrix $B^{\mu\nu}(X,Y)$ aus Gl. (5.162) nun einen **4–longitudinalen** Anteil bekommt, so dass sie invertierbar wird. Die entsprechenden Schritte, die uns auf Gl. (5.161) geführt haben, lauten nun

$$\begin{aligned} & i \int \mathrm{d}^4X \, \left[\mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{2} \, (\partial \cdot A)^2 \right] \\ &= \frac{i}{2} \int \mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, A_\mu(X) \left[\Box_x \, g^{\mu\nu} - (1-\lambda) \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right] \delta^{(4)}(X-Y) \, A_\nu(Y) \\ &\equiv \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, A_\mu(X) \, B^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y) \, A_\nu(Y) \, , \end{aligned} \tag{5.261}$$

mit der Matrix

$$B^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y) = i \left[\Box_x \, g^{\mu\nu} - (1-\lambda) \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right] \, \delta^{(4)}(X-Y) \, . \tag{5.262}$$

Fourier–Transformation liefert nun

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y) &= i \left[\Box_x \, g^{\mu\nu} - (1-\lambda) \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right] \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4} \, e^{-iK\cdot(X-Y)} \\ &= i \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4} \, \left[-K^2 \, g^{\mu\nu} + (1-\lambda) K^\mu K^\nu \right] \, e^{-iK\cdot(X-Y)} \\ &\equiv i \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4} \, \tilde{B}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(K) \, e^{-iK\cdot(X-Y)} \, , \end{aligned} \tag{5.263}$$

mit

$$\tilde{B}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(K) \equiv -K^2 \, g^{\mu\nu} + (1-\lambda) K^\mu K^\nu \equiv -K^2 \, P^{\mu\nu} - \lambda \, K^2 \, E^{\mu\nu} \, , \tag{5.264}$$

wobei wir die Projektoren (5.167) und (5.169) benutzt haben. Für $\lambda \neq 0$ besitzt die Matrix $\tilde{B}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(K)$ sowohl einen nichttrivialen 4–longitudinalen wie einen 4–transversalen Anteil, womit sie nach der Diskussion vor Abschnitt 5.6.1 nun klarerweise invertierbar ist,

$$\tilde{B}^{-1}_{(\lambda)\mu\nu}(K) = \frac{1}{K^2} \, P_{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda \, K^2} \, E_{\mu\nu} = \frac{1}{K^2} \left[g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{K_\mu K_\nu}{K^2} \right] \, . \tag{5.265}$$

Die Pole dieser Funktion erfüllen die Energie-Impuls-Relation für Lichtwellen,

$$k_0 = \pm |\vec{k}| \equiv \pm k \, . \tag{5.266}$$

Wir haben auf der rechten Seite von Gl. (5.265) ein zusätzliches Minus-Zeichen eingefügt, weil analog zu Gl. (5.49) im Minkowski-Raum die Gleichung

$$\int \mathrm{d}^4Y\, B^{\mu\rho}_{(\lambda)}(X,Y) B^{-1}_{(\lambda)\rho\nu}(Y,Z) = -g^\mu_\nu\, \delta^{(4)}(X-Z)\ , \tag{5.267}$$

also mit einem zusätzlichen Minus-Zeichen auf der rechten Seite, erfüllt sein soll.

Setzen wir Gl. (5.261) in Gl. (5.260) ein, so erhalten wir für das erzeugende Funktional

$$\begin{aligned} Z_{0(\lambda)}[J_\mu] &= \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A^\mu \\ &\times\ \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, A_\mu(X)\, B^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y)\, A_\nu(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\, J_\mu(X) A^\mu(X)\right] . \end{aligned} \tag{5.268}$$

Dies ist nun ein verschobenes Gauß–Integral, welches in der Tat analytisch berechnet werden kann, weil $B^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y)$ nun invertierbar ist. Wir werden dies nun explizit vorführen, wobei wir wieder analytisch zur **Euklidschen Raum-Zeit** fortsetzen. Neben der Euklidschen Zeit $it \to \tau$ benötigen wir nun noch **Euklidsche Zeitkomponenten** für das Eichfeld und das Quellenfeld,

$$A_0 \longrightarrow i\bar{A}_0\ , \quad J_0 \longrightarrow i\bar{J}_0\ , \tag{5.269}$$

so dass

$$J_\mu A^\mu = J_0 A_0 - \vec{J}\cdot\vec{A} \longrightarrow (i\bar{J}_0)(i\bar{A}_0) - \vec{J}\cdot\vec{A} = -(\bar{J}_0\bar{A}_0 + \vec{J}\cdot\vec{A}) \equiv -\bar{J}_\mu\bar{A}^\mu\ , \tag{5.270}$$

mit den Euklidschen 4–Vektoren

$$(\bar{J}_\mu) = (\bar{J}_0, \vec{J})\ , \quad (\bar{A}^\mu) = (\bar{A}_0, \vec{A})\ . \tag{5.271}$$

Desweiteren berechnen wir mit den Glgen. (5.34), (5.37), (5.264), der analytischen Fortsetzung $\partial/\partial t \to i\partial/\partial\tau$, sowie der Bezeichnung

$$(\bar{\partial}^\mu_x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\bar{X}_\mu}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\bar{X}^\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \vec{\nabla}\right)$$

für den 4–Nabla-Operator im Euklidschen die analytische Fortsetzung des Ausdrucks

$$\begin{aligned} A_\mu(X)\, B^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y)\, A_\nu(Y) \quad &= \quad A_0(X)\, B^{00}_{(\lambda)}(X,Y)\, A_0(Y) - A_0(X)\, B^{0i}_{(\lambda)}(X,Y)\, A^i(Y) \\ &\quad - A^i(X)\, B^{i0}_{(\lambda)}(X,Y)\, A_0(Y) + A^i(X)\, B^{ij}_{(\lambda)}(X,Y)\, A^j(Y) \\ &\longrightarrow \quad i\bar{A}_0(\bar{X})\, i\left[-\overline{\Box}_x - (1-\lambda)\, i\bar{\partial}^0_x\, i\bar{\partial}^0_x\right]\, i\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, i\bar{A}_0(\bar{Y}) \\ &\quad - i\bar{A}_0(\bar{X})\, i\left[-(1-\lambda)\, i\bar{\partial}^0_x\, \bar{\partial}^i_x\right]\, i\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, A^i(\bar{Y}) \\ &\quad - A^i(\bar{X})\, i\left[-(1-\lambda)\, \bar{\partial}^i_x\, i\bar{\partial}^0_x\right]\, i\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, i\bar{A}_0(\bar{Y}) \\ &\quad + A^i(\bar{X})\, i\left[\overline{\Box}_x\, \delta^{ij} - (1-\lambda)\, \bar{\partial}^i_x\, \bar{\partial}^j_x\right]\, i\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, A^j(\bar{Y}) \\ &= \quad \bar{A}_0(\bar{X})\, \left[-\overline{\Box}_x + (1-\lambda)\, \bar{\partial}^0_x\, \bar{\partial}^0_x\right]\, \delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, \bar{A}_0(\bar{Y}) \\ &\quad + \bar{A}_0(\bar{X})\, \left[(1-\lambda)\, \bar{\partial}^0_x\, \bar{\partial}^i_x\right]\, \delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, A^i(\bar{Y}) \\ &\quad + A^i(\bar{X})\, \left[(1-\lambda)\, \bar{\partial}^i_x\, \bar{\partial}^0_x\right]\, \delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, \bar{A}_0(\bar{Y}) \\ &\quad + A^i(\bar{X})\, \left[-\overline{\Box}_x\, \delta^{ij} + (1-\lambda)\, \bar{\partial}^i_x\, \bar{\partial}^j_x\right]\, \delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\, A^j(\bar{Y}) \\ &\equiv \quad \bar{A}_\mu(\bar{X})\, \bar{B}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{X},\bar{Y})\, \bar{A}_\nu(\bar{\bar{Y}})\ , \end{aligned} \tag{5.272}$$

mit

$$\bar{B}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{X},\bar{Y}) \equiv \left[-\overline{\Box}_x\,\delta^{\mu\nu} + (1-\lambda)\,\bar{\partial}^\mu_x\,\bar{\partial}^\nu_x\right]\,\delta^{(4)}(\bar{X}-\bar{Y})\;. \tag{5.273}$$

Die Fourier–Transformierte lautet

$$\tilde{\bar{B}}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{K}) = \bar{K}^2\,\delta^{\mu\nu} - (1-\lambda)\bar{K}^\mu\bar{K}^\nu\;, \tag{5.274}$$

mit dem Euklidschen 4–Impulsvektor (5.39). Die Tensorzerlegung lautet

$$\tilde{\bar{B}}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{K}) = \bar{K}^2\,\bar{P}^{\mu\nu} + \lambda\,\bar{K}^2\,\bar{E}^{\mu\nu}\;, \tag{5.275}$$

mit den Euklidschen Projektionsoperatoren

$$\bar{P}^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - \frac{\bar{K}^\mu\bar{K}^\nu}{\bar{K}^2}\;,\quad \bar{E}^{\mu\nu} = \frac{\bar{K}^\mu\bar{K}^\nu}{\bar{K}^2}\;. \tag{5.276}$$

Aus Gl. (5.275) lesen wir sofort die Eigenwerte von $\tilde{\bar{B}}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{K})$ ab: (i) $\bar{K}^2$ (dreifach entartet) und (ii) $\lambda\,\bar{K}^2$ (einfach entartet). Mit Ausnahme der Nullmode $(\bar{K}^\mu) = (\kappa,\vec{k}) = (0,\vec{0})$ und für $\lambda > 0$ ist $\tilde{\bar{B}}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{K})$ also eine **positiv definite** Matrix. Die Nullmode müssen wir im folgenden ausschließen, aber das ist natürlich, da es kein Photon mit verschwindender Energie und Impuls gibt. Ferner ist $\tilde{\bar{B}}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{K})$ **symmetrisch**. Beides muss dann auch für die Fourier–Transformierte $\bar{B}^{\mu\nu}(\bar{X},\bar{Y})$ gelten. Damit ist (i) $\bar{B}^{\mu\nu}(\bar{X},\bar{Y})$ invertierbar, und (ii) wir können zur Berechnung des erzeugenden Funktionals (im Euklidschen Raum) Gl. (5.24) anwenden. Unter Benutzung der Glgen. (5.31) und (5.32) erhalten wir für das analytisch fortgesetzte erzeugende Funktional

$$\begin{aligned} Z_{0(\lambda)}[\bar{J}_\mu] &= \mathcal{N}'\int\mathcal{D}\bar{A}^\mu \\ &\quad\times\,\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4\bar{X}\,\mathrm{d}^4\bar{Y}\;\bar{A}_\mu(\bar{X})\,\bar{B}^{\mu\nu}_{(\lambda)}(\bar{X},\bar{Y})\,\bar{A}_\nu(\bar{Y}) - \int\mathrm{d}^4\bar{X}\;\bar{J}_\mu(\bar{X})\bar{A}^\mu(\bar{X})\right] \\ &= \mathcal{N}''\left(\det\bar{\mathrm{B}}_{(\lambda)}\right)^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4\bar{X}\,\mathrm{d}^4\bar{Y}\;\bar{J}^\mu(\bar{X})\,\bar{B}^{-1}_{(\lambda)\mu\nu}(\bar{X},\bar{Y})\,\bar{J}^\nu(\bar{Y})\right]\;, \end{aligned} \tag{5.277}$$

bzw., nachdem wir die analytische Fortsetzung rückgängig gemacht haben, für das erzeugende Funktional in der gewöhnlichen Minkowski–Raum-Zeit

$$Z_{0(\lambda)}[J_\mu] = \mathcal{N}''\left(\det\mathrm{B}_{(\lambda)}\right)^{-1/2}\exp\left[-\frac{i}{2}\int\mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\;J_\mu(X)\,\Delta^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X-Y)\,J_\nu(Y)\right]\;, \tag{5.278}$$

mit dem (eichfixierten) **Photon-Propagator**

$$\Delta^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X-Y) \equiv -i\,B^{-1\,\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y)\;. \tag{5.279}$$

Wählen wir für diesen, wie üblich, die Feynman–Vorschrift zur Umgehung der Pole (5.266), so erhalten wir mit Gl. (5.265)

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}_{F(\lambda)}(X-Y) &= (-i)^2\int\frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\,\tilde{B}^{-1\,\mu\nu}_{F(\lambda)}(K) \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\,\frac{1}{K^2+i\eta}\left[-g^{\mu\nu} + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{K^\mu K^\nu}{K^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.280}$$

Der zusätzliche Faktor $-i$ stammt aus der Definition der Fourier–Transformation (5.263). Dort tauchte für $B^{\mu\nu}_{(\lambda)}(X,Y)$ ein Faktor i auf, dementsprechend benötigen wir für die Inverse $B^{-1}_{(\lambda)\mu\nu}(X,Y)$ einen Faktor $-i$, wenn wir Gl. (5.265) benutzen wollen.

Zwei spezielle Eichungen sind von besonderem Interesse:

(i) **Feynman–Eichung:** $\lambda = 1$,

$$\Delta^{\mu\nu}_{F(1)}(X-Y) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)} \tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(1)}(K) \ , \quad \tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(1)}(K) = -\frac{g^{\mu\nu}}{K^2+i\eta} \ . \tag{5.281}$$

(ii) **Landau–Eichung:** $\lambda \to \infty$,

$$\Delta^{\mu\nu}_{F(\infty)}(X-Y) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)}\, \tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(\infty)}(K) \ , \quad \tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(\infty)}(K) = -\frac{P^{\mu\nu}}{K^2+i\eta} \ . \tag{5.282}$$

Zum Schluss normieren wir das erzeugende Funktional (5.278) noch so, dass

$$Z_{0(\lambda)}[0] = 1 \ . \tag{5.283}$$

Dies liefert mit Gl. (5.278) das transparente Resultat

$$Z_{0(\lambda)}[J_\mu] = \exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, J_\mu(X)\, \Delta^{\mu\nu}_{F(\lambda)}(X-Y)\, J_\nu(Y)\right] \ . \tag{5.284}$$

Die **Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** lautet

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{T}\left[\hat{A}^\mu(X)\hat{A}^\nu(Y)\right]|0\rangle &= (-i)^2\, \frac{\delta^2 Z_{0(\lambda)}[J_\rho]}{\delta J_\mu(X)\delta J_\nu(Y)}\bigg|_{J_\rho=0} \\
&= (-i)^2\, \frac{\delta}{\delta J_\mu(X)}\left\{-i\int \mathrm{d}^4Z\, J_\alpha(Z)\, \Delta^{\alpha\nu}_{F(\lambda)}(Z-Y)\, Z_{0(\lambda)}[J_\rho]\right\}_{J_\rho=0} \\
&= i\,\Delta^{\mu\nu}_{F(\lambda)}(X-Y) =
\end{aligned} \tag{5.285}$$

, (5.285)

und ist damit (bis auf einen Faktor i) mit dem Photon-Propagator identisch.

Obwohl der Faddeev–Popov–Anteil des erzeugenden Funktionals für Abelsche Eichtehorien faktorisiert, ist es im Hinblick auf nicht–Abelsche Eichtheorien, die wir im folgenden Abschnitt besprechen werden, sinnvoll, diesen noch einmal genauer zu betrachten und auch (antivertauschende) Quellterme für Faddeev–Popov–Geistfelder einzuführen. Mit Gl. (5.257) haben wir dann

$$\begin{aligned}
Z_{\mathrm{FPG}}[\bar{\alpha},\alpha] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\bar{\eta}\,\mathcal{D}\eta \\
&\times\ \exp\left\{-\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y\, \bar{\eta}(X)\, i\, M(X,Y)\, \eta(Y) + i\int \mathrm{d}^4X\, \left[\bar{\alpha}(X)\eta(X) + \bar{\eta}(X)\alpha(X)\right]\right\} \ .
\end{aligned} \tag{5.286}$$

Eine analoge Rechnung wie im Fall der Fermionen (s. Gl. (5.140)) führt auf

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{FPG}}[\bar{\alpha},\alpha] &= \mathcal{N}\det(i\mathrm{M})\,\exp\left\{-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\alpha}(X)\,[-i\,M^{-1}(X,Y)]\,\alpha(Y)\right\} \\ &\equiv \exp\left\{-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\alpha}(X)\,[-i\,M^{-1}(X,Y)]\,\alpha(Y)\right\}\,, \end{aligned} \tag{5.287}$$

wobei wir im letzten Schritt die Normierungskonstante so gewählt haben, dass

$$Z_{\mathrm{FPG}}[0,0] = 1\,. \tag{5.288}$$

Wir berechnen nun $M^{-1}(X,Y)$. In Lorenz–Eichung gilt gemäß Gl. (5.259) (ohne den in der Normierungskonstanten absorbierten Faktor $1/e$ auf der rechten Seite)

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(X-Y) &= \int \mathrm{d}^4Z\,M(X,Z)\,M^{-1}(Z,Y) = \int \mathrm{d}^4Z\,\Box_x\,\delta^{(4)}(X-Z)\,M^{-1}(Z,Y) \\ &= \Box_x\,M^{-1}(X,Y)\,. \end{aligned} \tag{5.289}$$

Die Funktion $M^{-1}(X,Y)$ ist also die **Green–Funktion** der **Wellengleichung**. Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen in Gl. (5.289), dass diese die Form

$$M^{-1}(X,Y) = -\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\,\frac{1}{K^2} \tag{5.290}$$

hat. Wir bezeichnen mit

$$W_F(X-Y) \equiv -M_F^{-1}(X,Y) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\,\frac{1}{K^2+i\eta} \tag{5.291}$$

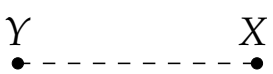
den **Feynman–Propagator für Faddeev–Popov–Geistfelder** und

$$Z_{\mathrm{FPG}}[\bar{\alpha},\alpha] = \exp\left[-i\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\bar{\alpha}(X)\,W_F(X-Y)\,\alpha(Y)\right] \tag{5.292}$$

ist das erzeugende Funktional für n–Punkt-Geist-Korrelationsfunktionen.

Die Zwei-Punkt-Geist-Korrelationsfunktion ist nun

$$\begin{aligned} \langle 0|\,\hat{T}\left[\hat{\eta}(X)\hat{\bar{\eta}}(Y)\right]\,|0\rangle &= (-i)^2\,\frac{\delta^2 Z_{\mathrm{FPG}}[\bar{\alpha},\alpha]}{\delta\alpha(Y)\,\delta\bar{\alpha}(X)}\bigg|_{\bar{\alpha}=\alpha=0} \\ &= (-i)^2\frac{\delta}{\delta\alpha(Y)}\left\{-i\int \mathrm{d}^4Z\,W_F(X-Z)\,\alpha(Z)\,Z_{\mathrm{FPG}}[\bar{\alpha},\alpha]\right\}_{\bar{\alpha}=\alpha=0} \\ &= i\,W_F(X-Y) = \end{aligned} \tag{5.293}$$



.

5.7 Das Yang–Mills–Feld

19.2.2021

Yang–Mills–Felder sind mathematisch komplizierter zu behandeln als das Photon-Feld. Die Komplikationen lassen sich darauf zurückführen, dass das Eichfeld $\mathcal{A}^\mu \equiv A^\mu_a T_a$ nun

matrix-wertig ist und dass die Generatoren T_a der zugrundeliegenden Symmetriegruppe, z.B. $SU(N)$, i.a. nicht mehr vertauschen, vgl. Gl. (2.198),

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \ , \quad a, b, c = 1, \ldots, N^2 - 1 \ .$$

Dies wiederum bewirkt, (i) dass die Faddeev–Popov–Geistfelder nicht mehr von der Dynamik der Eichfelder entkoppeln, sowie, (ii) dass die Eichfelder auch untereinander wechselwirken.

Wir machen uns zunächst den ersten Punkt (i) klar. Dazu betrachten wir die Eichtransformation (2.210), bzw. in der Notation des letzten Abschnitts

$$\mathcal{A}^\mu \quad \longrightarrow \quad \mathcal{A}^\mu_U = U\, \mathcal{A}^\mu\, U^\dagger - \frac{i}{g}\, (\partial^\mu U)\, U^\dagger \ , \tag{5.294}$$

wobei

$$U = e^{i\omega_a T_a} \tag{5.295}$$

ein Element der $SU(N)$ darstellt, mit den Parametern ω_a der Eichtransformation. Es genügt, **infinitesimale** Transformationen zu betrachten, $|\omega_a| \ll 1$, so dass

$$U \simeq \mathbb{1} + i\omega_a T_a \ . \tag{5.296}$$

Eingesetzt in Gl. (5.294) erhalten wir

$$\begin{aligned} T_a A^\mu_{U,a} &\simeq (\mathbb{1} + i\omega_b T_b) T_a A^\mu_a (\mathbb{1} - i\omega_c T_c) - \frac{i}{g}(i\partial^\mu \omega_b T_b)(\mathbb{1} - i\omega_c T_c) \\ &= T_a A^\mu_a + i\omega_b A^\mu_a\, T_b T_a - i\omega_c A^\mu_a\, T_a T_c + \frac{1}{g}\, \partial^\mu \omega_a T_a + O(\omega^2) \\ &= T_a A^\mu_a - i\omega_c A^\mu_b\, [T_b, T_c] + \frac{1}{g}\, \partial^\mu \omega_a T_a + O(\omega^2) \ , \end{aligned} \tag{5.297}$$

wobei wir mehrfach Summationsindizes umbenannt haben. Unter Berücksichtigung der Vertauschungsrelation (2.198) und Vernachlässigung Terme höherer Ordnung in den infinitesimalen Parametern erhalten wir dann

$$T_a\, A^\mu_{U,a} = T_a \left(A^\mu_a + f_{bca} A^\mu_b \omega_c + \frac{1}{g}\, \partial^\mu \omega_a \right) \ , \tag{5.298}$$

bzw.

$$A^\mu_{U,a} = A^\mu_a + f_{abc} A^\mu_b \omega_c + \frac{1}{g}\, \partial^\mu \omega_a \ . \tag{5.299}$$

Nehmen wir an, dass **jedes** der $N^2 - 1$ transformierten Eichfelder $A^\mu_{U,a}$ in Lorenz–Eichung ist,

$$F_X[A^\mu_{U,a}] = \partial_x \cdot A_{U,a}(X) = 0 \ . \tag{5.300}$$

Dann ist die Funktionalmatrix der Ableitung der Eichbedingungen nach den Parametern der Eichtransformation

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_X[A^\mu_{U,a}]}{\delta\omega_b(Y)} &= \frac{\delta}{\delta\omega_b(Y)}\,\partial_x\cdot A_{U,a}(X) \\
&= \frac{\delta}{\delta\omega_b(Y)}\left\{\partial_x\cdot\left[f_{acd}A_c(X)\omega_d(X)+\frac{1}{g}\,\partial_x\omega_a(X)\right]\right\} \\
&= \partial_x\cdot\left[f_{acd}A_c(X)\,\delta_{bd}\,\delta^{(4)}(X-Y)+\frac{1}{g}\,\partial_x\,\delta_{ab}\,\delta^{(4)}(X-Y)\right] \\
&= \left\{f_{acb}\,[\partial_x\cdot A_c(X)+A_c(X)\cdot\partial_x]+\frac{1}{g}\,\delta_{ab}\,\Box_x\right\}\delta^{(4)}(X-Y) \\
&= \frac{1}{g}\left\{\delta_{ab}\,\Box_x-g\,f_{abc}\,[\partial_x\cdot A_c(X)+A_c(X)\cdot\partial_x]\,\right\}\delta^{(4)}(X-Y)\,. \qquad (5.301)
\end{aligned}$$

Bis auf irrelevante Konstanten erhalten wir also für die Faddeev–Popov–Matrix

$$M_{ab}(X,Y)=\left\{\delta_{ab}\,\Box_x-g\,f_{abc}\,[\partial_x\cdot A_c(X)+A_c(X)\cdot\partial_x]\,\right\}\delta^{(4)}(X-Y)\,. \qquad (5.302)$$

Diese Matrix hängt nun **selbst** vom Eichfeld A^μ_a ab und entkoppelt daher **nicht** mehr vom Funktionalintegral über die Eichfelder, wie dies beim Photon-Feld noch der Fall war!

Die Faddeev–Popov–Determinante läßt sich wie gehabt durch ein Funktionalintegral über Faddeev–Popov–Geistfelder ausdrücken, s. Gl. (5.252). Da die Faddeev–Popov–Matrix auch eine $(N^2-1)\times(N^2-1)$–Matrix im Raum der adjungierten Farbindizes ist, benötigen wir nun auch N^2-1 Faddeev–Popov–Felder, d.h. diese tragen wie die Eichfelder einen adjungierten Farb-Index a, der von 1 bis N^2-1 läuft,

$$\begin{aligned}
\det(i\mathrm{M}) &= \int\mathcal{D}\bar\eta_a\,\mathcal{D}\eta_a\,\exp\left[-i\int\mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta_a(X)\,M_{ab}(X,Y)\,\eta_b(Y)\right] \qquad (5.303)\\
&= \int\mathcal{D}\bar\eta_a\,\mathcal{D}\eta_a\,\exp\left[i\int\mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta_a(X)\,W^{-1}_{ab}(X-Y)\,\eta_b(Y)+i\int\mathrm{d}^4X\,gf_{abc}\,\bar\eta_a\partial_\mu(A^\mu_c\eta_b)\right] \\
&= \int\mathcal{D}\bar\eta_a\,\mathcal{D}\eta_a\,\exp\left[i\int\mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\,\bar\eta_a(X)\,W^{-1}_{ab}(X-Y)\,\eta_b(Y)-i\int\mathrm{d}^4X\,gf_{abc}(\partial_\mu\bar\eta_a)\eta_bA^\mu_c\right]\,.
\end{aligned}$$

Hier haben wir von der ersten zur zweiten Zeile Gl. (5.302) eingesetzt, den **inversen freien Propagator**

$$W^{-1}_{ab}(X-Y)\equiv-\delta_{ab}\,\Box_x\,\delta^{(4)}(X-Y) \qquad (5.304)$$

des Faddeev–Popov–Geistfeldes eingeführt, vgl. Gl. (5.291), und im **Geist-Eichfeld–Wechselwirkungsterm** die Integration über d^4Y mit Hilfe der δ–Funktion eliminiert. Von der zweiten zur dritten Zeile haben wir dann im besagten Wechselwirkungsterm eine partielle Integration durchgeführt (und wie gehabt Oberflächenterme vernachlässigt).

Den Geist-Eichfeld-Wechselwirkungsterm bzw. den **Geist-Eichfeld-Vertex** kann man graphisch in Form eines **Feynman–Diagramms** darstellen, s. Abb. 5.2.

Wir kommen nun zur Diskussion von Punkt (ii), der Wechselwirkung der Eichfelder untereinander. Betrachten wir zunächst die Lagrange–Dichte (2.222) des Yang–Mills–Feldes

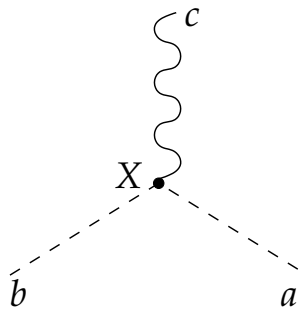


Abbildung 5.2: Geist-Eichfeld-Vertex. Geist-Linien sind durch gestrichelte Linien, das Eichfeld durch eine Schlangenlinie symbolisiert.

und setzen dort den Ausdruck (2.216) für den Feldstärketensor ein,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} &= -\frac{1}{4}\, G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a \\
&= \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu A^a_\nu - \frac{g}{4}\, f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu\right)(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a + g f_{ade} A^\mu_d A^\nu_e) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A^a_\nu\,(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a) - \frac{g}{2}\, f_{ade}(\partial_\mu A^a_\nu) A^\mu_d A^\nu_e - \frac{g}{2}\, f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \partial^\mu A^\nu_a \\
&\quad -\frac{g^2}{4}\, f_{abc} f_{ade}\, A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e \qquad (5.305) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A^a_\nu\,(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a) - g\, f_{abc}(\partial^\mu A^\nu_a) A^b_\mu A^c_\nu - \frac{g^2}{4}\, f_{abc} f_{ade}\, A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e\,.
\end{aligned}$$

Die Wirkung des Yang–Mills–Feldes lautet dann (nach partieller Integration und Vernachlässigung von Oberflächentermen)

$$\begin{aligned}
iS_{\mathrm{YM}}[A^\mu_a] &= i\int \mathrm{d}^4X\, \mathcal{L}_{\mathrm{YM}} \\
&= i\int \mathrm{d}^4X \left[\frac{1}{2} A^a_\mu\,(\Box\, g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)\, A^a_\nu - g\, f_{abc}(\partial^\mu A^\nu_a) A^b_\mu A^c_\nu - \frac{g^2}{4}\, f_{abc} f_{ade}\, A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X \mathrm{d}^4Y\, A^a_\mu(X)\, B^{\mu\nu}_{ab}(X,Y)\, A^b_\nu(Y) \\
&\quad -i\int \mathrm{d}^4X \left[g\, f_{abc}(\partial^\mu A^\nu_a) A^b_\mu A^c_\nu + \frac{g^2}{4}\, f_{abc} f_{ade}\, A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e\right]\,, \qquad (5.306)
\end{aligned}$$

mit

$$B^{\mu\nu}_{ab}(X,Y) \equiv i\,(\Box_x\, g^{\mu\nu} - \partial^\mu_x \partial^\nu_x)\, \delta_{ab}\, \delta^{(4)}(X-Y)\,. \qquad (5.307)$$

Nach Einführung eines eichfixierenden Terms, der die Inversion dieser Matrix erlaubt, erhalten wir, ganz analog zum Fall des Photon-Feldes, vgl. Gl. (5.279), dass das Inverse von $B^{\mu\nu}_{ab}(X,Y)$ (bis auf Faktoren) identisch ist mit dem **freien Propagator** des Eichfeldes,

$$i\Delta^{\mu\nu}_{(\lambda)ab}(X-Y) = B^{-1\,\mu\nu}_{(\lambda)ab}(X,Y) = \qquad . \qquad (5.308)$$

Wählen wir die Feynman–Vorschrift zur Umgehung der Pole in der komplexen Energie-Ebene, so haben wir explizit

$$\Delta^{\mu\nu}_{F(\lambda)ab}(X-Y) = \delta_{ab} \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)}\, \tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(\lambda)}(K)\ , \tag{5.309}$$

mit

$$\tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(\lambda)}(K) = -\frac{1}{K^2+i\eta}\left[g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{K^\mu K^\nu}{K^2}\right]\ . \tag{5.310}$$

Offensichtlich besteht der einzige Unterschied zwischen freiem Propagator des Yang–Mills–Feldes gegenüber dem des Photon-Feldes im zusätzlichen Kronecker–Delta in den adjungierten Farb-Indizes.

Die Terme in der zweiten Zeile in Gl. (5.306) symbolisieren die **Selbstwechselwirkung** des Yang–Mills–Feldes. Es gibt einen **3-Eichfeld-Vertex** und einen **4-Eichfeld-Vertex**, s. Abb. 5.3.

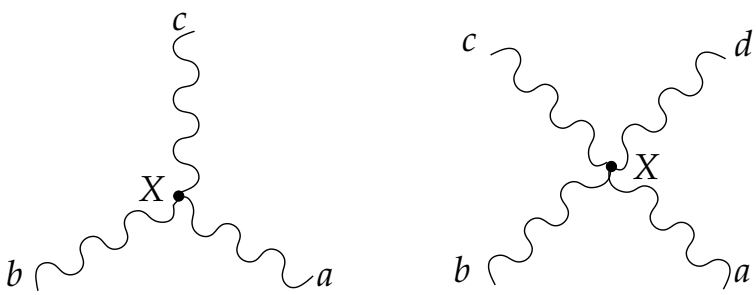


Abbildung 5.3: Die 3- und 4-Eichfeld-Vertizes.

Letztlich lautet das **erzeugende Funktional** für n–Punkt-Korrelationsfunktionen des Yang–Mills–Feldes

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{YM}}[J^\mu_a, \bar{\alpha}_a, \alpha_a] \;=\;& \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu_a\, \mathcal{D}\bar{\eta}_a\, \mathcal{D}\eta_a \\ \times\;& \exp\Bigg\{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\, A^a_\mu(X)\, \Delta^{-1\,\mu\nu}_{(\lambda)ab}(X-Y)\, A^b_\nu(Y) \\ & + i\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y\, \bar{\eta}_a(X)\, W^{-1}_{ab}(X-Y)\, \eta_b(Y) \\ & - i\int \mathrm{d}^4X\, \Bigg[g\, f_{abc}(\partial^\mu A^\nu_a) A^b_\mu A^c_\nu + \frac{g^2}{4}\, f_{abe} f_{cde}\, A^a_\mu A^b_\nu A^\mu_c A^\nu_d \\ & \qquad + g\, f_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)\eta_b A^\mu_c - J^\mu_a A^a_\mu - \bar{\alpha}_a\eta_a - \bar{\eta}_a\alpha_a\Bigg]\Bigg\}\ . \end{aligned} \tag{5.311}$$

Die verschiedenen Wechselwirkungsterme (3- und 4-Eichfeld-Vertizes, Geist-Eichfeld-Vertex) verhindern, dass wir dieses erzeugende Funktional (wie z.B. im Fall des Photon-Feldes, wo es lediglich ein verschobenes Gauß–Integral war) explizit berechnen können. Die Yang–Mills–Theorie ist eine Quantenfeldtheorie **wechselwirkender** Felder. Im nächsten Kapitel werden wir Methoden kennenlernen, um solche Theorien zu behandeln.

6 Wechselwirkende Feldtheorien

14.4.2021

6.1 ϕ^4–Theorie

Wir betrachten die Lagrange–Dichte des neutralen skalaren Feldes mit einer **lokalen 4–Punkt-Wechselwirkung**, d.h. zusätzlich zur Lagrange–Dichte $\mathcal{L}_0$ des freien Klein–Gordon–Feldes, Gl. (2.32), tritt ein Term auf, der **proportional zur vierten Potenz des Feldes** $\phi(X)$ ist,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \ , \\ \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi(X)\,\partial^\mu\phi(X) - m^2\phi^2(X)\right] \ , \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{\lambda}{4!}\,\phi^4(X) \ . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Hierbei ist λ die **Kopplungskonstante**, die die **Stärke** angibt, mit der das Feld $\phi(X)$ mit sich selbst wechselwirkt, und der Nenner 4! ist reine Konvention (es vereinfacht die nachfolgenden Ausdrücke).

Wie sieht das erzeugende Funktional für n–Punkt-Korrelationsfunktionen aus? Per Definition, s. Gl. (5.20), würden wir sofort hinschreiben

$$Z[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\,\exp\left\{iS[\phi] + i\int \mathrm{d}^4X\,J(X)\phi(X)\right\} \ , \tag{6.2}$$

mit der klassischen Wirkung

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L} \ . \tag{6.3}$$

$J(X)$ ist der Quellterm und die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ ist so gewählt, dass

$$Z[0] = 1 \ , \tag{6.4}$$

d.h.

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}\phi\,\exp\left\{iS[\phi]\right\} \ . \tag{6.5}$$

Mit der klassischen Wirkung des **nichtwechselwirkenden** Klein–Gordon–Feldes

$$S_0[\phi] = \int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}_0 \tag{6.6}$$

können wir den Anteil der Wirkung, der den **Wechselwirkungsterm** beinhaltet, im erzeugenden Funktional (6.2) **faktorisieren**,

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[i \int \mathrm{d}^4X \, \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\right] \exp\left\{iS_0[\phi] + i \int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)\right\} . \tag{6.7}$$

Die erste Exponentialfunktion hat die Taylor–Reihendarstellung

$$\exp\left[i \int \mathrm{d}^4X \, \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[\int \mathrm{d}^4X \, \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[-\frac{\lambda}{4!} \int \mathrm{d}^4X \, \phi^4(X)\right]^n , \tag{6.8}$$

wobei wir Gl. (6.1) benutzt haben. Eingesetzt in Gl. (6.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \left[\int \mathrm{d}^4X \, \phi^4(X)\right]^n e^{iS_0[\phi] + i\int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)} \qquad (6.9) \\ &= \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \int \mathrm{d}^4X_1 \cdots \mathrm{d}^4X_n \int \mathcal{D}\phi \, \phi^4(X_1) \cdots \phi^4(X_n) \, e^{iS_0[\phi] + i\int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)} . \end{aligned}$$

Nun ist es aber so, dass jeder Faktor $\phi(X_i)$ vor der Exponentialfunktion aufgrund des Quellterms im Exponenten auch durch eine **Funktionalableitung** nach $J(X_i)$ ersetzt werden kann,

$$\phi(X_i) \, e^{iS_0[\phi] + i\int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)} \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(X_i)} e^{iS_0[\phi] + i\int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)} . \tag{6.10}$$

Benutzen wir dies in Gl. (6.9), und ziehen die Funktionalableitungen nach den Quelltermen aus dem Funktionalintegral über die Felder ϕ heraus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \int \mathrm{d}^4X_1 \cdots \mathrm{d}^4X_n \\ &\qquad \times \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(X_1)}\right]^4 \cdots \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(X_n)}\right]^4 \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_0[\phi] + i\int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)} \\ &= \mathcal{N}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left\{-\frac{\lambda}{4!} \int \mathrm{d}X \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(X)}\right]^4\right\}^n \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_0[\phi] + i\int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)} \\ &\equiv \mathcal{N}' \exp\left[i \int \mathrm{d}^4X \, \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(X)}\right)\right] Z_0[J] , \end{aligned} \tag{6.11}$$

wobei $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'\mathcal{N}''$, wir die Taylor–Reihe wieder als Exponentialfunktion geschrieben und das (auf eins normierte) erzeugende Funktional für **nichtwechselwirkende** skalare Felder,

$$Z_0[J] = \mathcal{N}'' \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{iS_0[\phi] + i \int \mathrm{d}^4X \, J(X)\phi(X)\right\} , \quad \mathcal{N}''^{-1} = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{iS_0[\phi]\right\} , \tag{6.12}$$

eingeführt haben. Letzteres hatten wir aber schon in Gl. (5.57) berechnet,

$$Z_0[J] = \exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,J(X)\,\Delta_F(X-Y)\,J(Y)\right]\,, \tag{6.13}$$

mit dem Feynman–Propagator (5.55) für nichtwechselwirkende, neutrale, skalare Teilchen. Die Normierungskonstante $\mathcal{N}'$ sorgt dafür, dass $Z[0]=1$, also

$$\mathcal{N}'^{-1} = \exp\left[i\int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X)}\right)\right]\,Z_0[J]\Big|_{J=0}\,. \tag{6.14}$$

Gleichung (6.11) mit Gl. (6.13) legt ein **Berechnungsverfahren** für das erzeugende Funktional nahe: wir können die Exponentialfunktion wieder in eine Taylor–Reihe entwickeln und **jeden Term der Reihe explizit berechnen**. Formal ist dies gleichbedeutend mit einer Entwicklung nach **Potenzen der Kopplungskonstanten** λ, also eine **störungstheoretische Entwicklung** oder **Störungsreihe**. Natürlich müssen wir die Berechnung dieser Reihe nach einer endlichen Zahl von Termen abbrechen. Falls aber $\lambda \ll 1$, so steht zu hoffen, dass Terme höherer Ordnung sukzessive kleiner sind als die niedrigerer Ordnung und die Störungsreihe in λ konvergiert.

Im folgenden wollen wir die Störungsreihe in λ exemplarisch bis zur **ersten** Ordnung in λ berechnen. Die Taylor–Reihe der Exponentialfunktion in Gl. (6.11) lautet bis zu dieser Ordnung

$$\exp\left[i\int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X)}\right)\right] = 1 - \frac{i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4X\,\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X)}\right]^4 + O(\lambda^2)\,. \tag{6.15}$$

Eingesetzt in Gl. (6.11) und wirkend auf $Z_0[J]$ reproduziert der Term nullter Ordnung in λ, die Eins, gerade das erzeugende Funktional $Z_0[J]$ der wechselwirkungsfreien Theorie. In erster Ordnung in λ müssen wir nun die vierte Funktionalableitung von $Z_0[J]$ nach dem Quellterm $J(X)$ berechnen. Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X)}\,Z_0[J] &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X)}\,\exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,J(Y)\,\Delta_F(Y-Z)\,J(Z)\right] \\
&= \left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,J(Z) - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4Y\,J(Y)\,\Delta_F(Y-X)\right]Z_0[J] \\
&= -\int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,J(Z)\,Z_0[J]\,,
\end{aligned} \tag{6.16}$$

wobei wir die Symmetrie des Feynman–Propagators, $\Delta_F(X-Y) \equiv \Delta_F(Y-X)$, benutzt und eine Umbenennung der Integrationsvariablen, $Y \to Z$, im zweiten Term vorgenommen haben. Die zweite Funktionalableitung ist

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X)}\right]^2 Z_0[J] = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X)}\left\{-\int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,J(Z)\,Z_0[J]\right\} \\
&= \left\{-\frac{1}{i}\,\Delta_F(0) - \int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,J(Z)\left[-\int \mathrm{d}^4U\,\Delta_F(X-U)\,J(U)\right]\right\}Z_0[J] \\
&= \left[i\,\Delta_F(0) + \int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,J(Z)\,J(U)\right]Z_0[J]\,.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Die dritte Funkionalableitung ist dann

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\right]^3 Z_0[J] \\
&= \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\left\{\left[i\,\Delta_F(0) + \int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,J(Z)\,J(U)\right] Z_0[J]\right\} \\
&= \frac{1}{i}\left[\int \mathrm{d}^4U\,\Delta_F(0)\,\Delta_F(X-U)\,J(U) + \int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(0)\,J(Z)\right] Z_0[J] \\
&\quad + \left[i\,\Delta_F(0) + \int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,J(Z)\,J(U)\right] \\
&\quad \times \left[-\int \mathrm{d}^4V\,\Delta_F(X-V)\,J(V)\right] Z_0[J] \\
&= \left[-3\,i\,\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,J(Z)\right. \\
&\quad \left. - \int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\mathrm{d}^4V\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,\Delta_F(X-V)\,J(Z)\,J(U)\,J(V)\right] Z_0[J]\,,
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

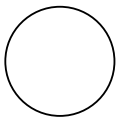
wobei wir einige Integrationsvariablen umbenannt haben, um die Terme geeignet zusammenzufassen. Letztlich berechnen wir noch die vierte Funktionalableitung,

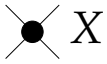
$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\right]^4 Z_0[J] \\
&= \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\left\{\left[-3\,i\,\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,J(Z)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\mathrm{d}^4V\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,\Delta_F(X-V)\,J(Z)\,J(U)\,J(V)\right] Z_0[J]\right\} \\
&= \frac{1}{i}\left[-3\,i\,[\Delta_F(0)]^2 - 3\int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,\Delta_F(0)\,J(Z)\,J(U)\right] Z_0[J] \\
&\quad + \left[-3\,i\,\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4Z\,\Delta_F(X-Z)\,J(Z)\right. \\
&\quad \left. - \int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\mathrm{d}^4V\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,\Delta_F(X-V)\,J(Z)\,J(U)\,J(V)\right] \\
&\quad \times \left[-\int \mathrm{d}^4W\,\Delta_F(X-W)\,J(W)\right] Z_0[J] \\
&= \left\{-\,3\,[\Delta_F(0)]^2 + 6\,i\,\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,J(Z)\,J(U)\right. \\
&\quad + \int \mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,\mathrm{d}^4V\,\mathrm{d}^4W\,\Delta_F(X-Z)\,\Delta_F(X-U)\,\Delta_F(X-V)\,\Delta_F(X-W) \\
&\qquad\qquad \left. \times\, J(Z)\,J(U)\,J(V)\,J(W)\right\} Z_0[J]\,.
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Mit Hilfe der folgenden **Feynman–Regeln** in der Raum-Zeit,

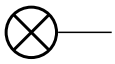
$$i\,\Delta_F(X-Y) \quad = \quad$$

$$, \tag{6.20}$$

$$i\,\Delta_F(0) \quad = \quad$$ 
$$, \tag{6.21}$$

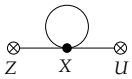
$$-i\lambda \int \mathrm{d}^4X \quad = \quad$$ 

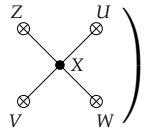
$$, \tag{6.22}$$

$$i \int \mathrm{d}^4X\, J(X) \quad = \quad$$ 
$$, \tag{6.23}$$

läßt sich das Raum-Zeit-Integral über Gl. (6.19), multipliziert mit $-i\lambda/4!$, in Form von Feynman–Diagrammen folgendermaßen darstellen:

$$\int \mathrm{d}^4X \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(X)} \right]^4 \right\} Z_0[J] = \frac{1}{4!} \Bigg(3 \quad + 6 \quad + \quad \Bigg) Z_0[J]\,.$$





(6.24)

Bemerkungen:

(i) Dass sich stets **vier** Linien (Propagatoren) an einem **Vertex** $\sim -i\lambda$ beim Raum-Zeit-Punkt X treffen, liegt daran, dass $\mathcal{L}_{\text{int}}$ **vier** Potenzen des Feldes $\phi(X)$ enthält.

(ii) Der 4–Punkt-Vertex ist proportional zur Kopplungskonstanten λ.

(iii) Die **kombinatorischen Faktoren** vor den einzelnen Termen in Gl. (6.24) kann man sich folgendermaßen klarmachen:

(a) *Erstes Diagramm*: Man nehme einen 4–Punkt-Vertex (6.22) und überlege sich die **verschiedenen Möglichkeiten**, zwei der vier "Beine" zu einer geschlossenen Schleife zu verbinden, um das erste Diagramm zu konstruieren. Das **erste** Bein läßt sich offenbar auf **drei** verschiedene Arten mit jeweils einem anderen Bein zu einer Schleife verbinden:

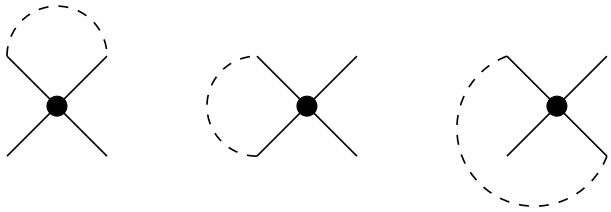


Abbildung 6.1: Es gibt drei Möglichkeiten, ein Bein eines 4–Punkt-Vertex mit einem anderen Bein zu einer Schleife zu verbinden.

Aber dann verbleiben nur noch zwei Beine, die man nur auf eine **einzige** Weise miteinander verbinden kann. Insgesamt erhält man also 3 als kombinatorischen Faktor.

(b) *Zweites Diagramm*: Auch hier muss man sich überlegen, wieviele **verschiedene** Möglichkeiten es gibt, **irgendeines** der vier Beine mit einem anderen zu einer Schleife zu verbinden. Zunächst numerieren wir die Beine des 4–Punkt-Vertex durch:

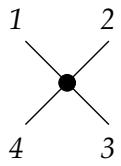


Abbildung 6.2: Numerieren der Beine eines 4–Punkt-Vertex.

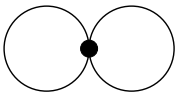
Wie wir gerade unter (a) gesehen haben, gibt es für das Bein Nr. 1 **drei** verschiedene Möglichkeiten, eine Schleife zu konstruieren: (12), (13) und (14). Für das Bein Nr. 2 bleiben dann noch **zwei** verschiedene Kombinationen: (23) und (24). Die letzte verbleibende Kombination, die sich von den anderen unterscheidet, ist dann, Bein Nr. 3 und Bein Nr. 4 miteinander zu verbinden. Insgesamt macht dies also **sechs** verschiedene Möglichkeiten, was den kombinatorischen Faktor erklärt.

Man könnte sich nun fragen, warum es bei diesem Diagramm sechs, aber beim ersten nur drei Möglichkeiten gibt. Denn im Prinzip könnte man beim ersten Diagramm genauso wie beim zweiten argumentieren, dass es für Bein 1 drei Möglichkeiten (die Kombinationen (12), (13), (14)), für Bein 2 dann noch zwei Möglichkeiten (die Kombinationen (23) und (24)) und für Bein 3 dann noch eine Möglichkeit (die Kombination (34)) gibt, zwei Beine miteinander zu verbinden. Der Unterschied ist, dass beim ersten Diagramm jeweils zwei dieser Kombinationen ein Paar bilden, nämlich [(12), (34)], [(13), (24)] und [(14), (23)], weil immer **alle** Beine **paarweise** miteinander verbunden werden müssen, und damit insgesamt nur drei verschiedene Kombinationen existieren.

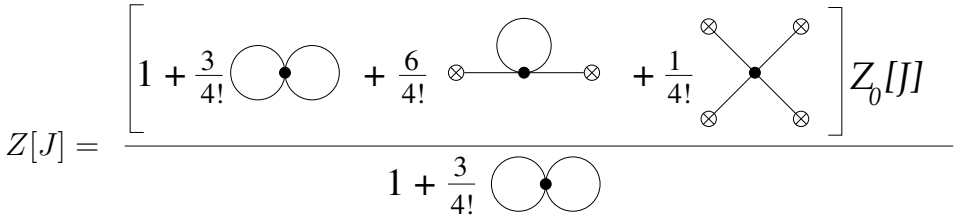
(c) *Drittes Diagramm*: Hier wird nichts miteinander verknüpft, also müssen wir auch keinen kombinatorischen Faktor ermitteln.

16.4.2021

Wir berechnen nun die Normierungskonstante (6.14) des erzeugenden Funktionals bis zur ersten Ordnung in λ,

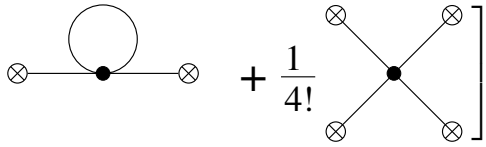
$$\begin{aligned} \mathcal{N}'^{-1} &= \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int \mathrm{d}^4 X \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(X)} \right]^4 + O(\lambda^2) \right\} Z_0[J] \Big|_{J=0} \\ &= 1 + \frac{3}{4!} \quad \text{  } \quad + O(\lambda^2) \,, \end{aligned} \tag{6.25}$$

wobei wir das Resultat (6.24) benutzt und dort einfach $J = 0$ gesetzt haben. Nun setzen wir die Glgen. (6.24) und (6.25) in Gl. (6.11) und erhalten das **erzeugende Funktional für n–Punkt-Korrelationsfunktionen der ϕ^4–Theorie in erster Ordnung in der Kopplungskonstanten λ**,

$Z[J] =$ 

$+ O(\lambda^2)$. (6.26)

Wir dürfen auch den Nenner in eine Taylor–Reihe bis zur ersten Ordnung in λ entwickeln. Wegen $(1+x)^{-1} = 1 - x + O(x^2)$ sehen wir, dass sich das "Doppel-Schleifen-Diagramm" im Zähler gegen das im Nenner weghebt und Gl. (6.26) vereinfacht sich zu

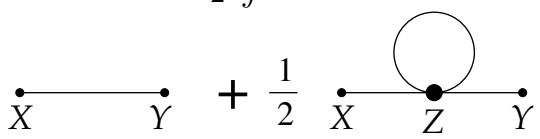
$Z[J] =$ 

$Z_0[J] + O(\lambda^2)$. (6.27)

Dies ist eine generische Eigenschaft für **normierte** erzeugende Funktionale: sog. **Vakuum-Diagramme**, d.h. Diagramme **ohne äußere Beine**, heben sich in Zähler und Nenner gegenseitig weg. Dies gilt **in allen Ordnungen** in der Kopplungskonstanten λ.

Wir berechnen nun die **Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** bzw. den **Propagator** in ϕ^4–Theorie **bis zur Ordnung** $O(\lambda)$ **in Störungstheorie**. Per Definition

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle &= (-i)^2 \left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)}\right|_{J=0} \\
&= (-i)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(X)\delta J(Y)} \left[1 + \frac{6}{4!} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{4!} \right] Z_0[J]\Big|_{J=0} + O(\lambda^2) \\
&= (-i)^2 \left.\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)}\right|_{J=0} \\
&\quad - \frac{i\lambda}{4}\frac{\delta^2}{\delta J(X)\delta J(Y)} \int \mathrm{d}^4Z\, \mathrm{d}^4U\, \mathrm{d}^4V\, J(U)\, i\Delta_F(U-Z)\, i\Delta_F(0)\, i\Delta_F(Z-V)\, J(V) + O(\lambda^2) \\
&= i\,\Delta_F(X-Y) - \frac{i\lambda}{2}\int \mathrm{d}^4Z\, i\Delta_F(X-Z)\, i\Delta_F(0)\, i\Delta_F(Z-Y) + O(\lambda^2)
\end{aligned}$$

$=$ 

$+ O(\lambda^2)$. (6.28)

Hier haben wir Gl. (5.66) benutzt, sowie die Tatsache, dass sämtliche Terme, die nach Ableiten nach $J(X)$ und $J(Y)$ noch Faktoren des Quellterms enthalten, verschwinden. Der Symmetriefaktor 1/2 vor dem zweiten Term läßt sich auch mit kombinatorischen Argumenten verstehen. Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion verbindet zwei Punkte X und Y mit Propagatoren und Vertizes,

Bis zur Ordnung λ benötigen wir einen Vertex $\sim -i\lambda \int \mathrm{d}^4 Z$ zwischen X und Y,

Nun müssen wir die Beine des Vertex mit den Punkten X und Y verbinden. Es gibt vier Möglichkeiten, ein Bein des Vertex mit dem Punkt X zu verbinden. Dann verbleiben noch drei Möglichkeiten, eins der übrigen Beine mit Y zu verbinden. Dies macht insgesamt zwölf Möglichkeiten (bei den verbleibenden Beinen gibt es lediglich eine Weise, sie miteinander zu der geschlossenen Schleife zu verbinden). Im Lagrangian hat der Vertex allerdings noch einen zusätzlichen Faktor $1/4! = 1/24$. Dies ergibt genau $12/24 = 1/2$ als Vorfaktor vor dem zweiten Term in Gl. (6.28).

Physikalisch repräsentiert Gl. (6.28) die Propagation eines Teilchens von Y nach X. Aber nur der erste Term repräsentiert die **freie** Propagation. Der zweite Term stellt eine **Korrektur** der freien Propagation aufgrund der **Wechselwirkung** dar. In der ϕ^4–Theorie bewirkt diese Korrektur eine **Modifikation** der **Masse** des Teilchens. Um dies einzusehen, schreiben wir Gl. (6.28) unter Benutzung von Gl. (5.55) in Fourier–Darstellung um,

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)}\, \frac{i}{K^2 - m^2 + i\eta} \\
&- \frac{i\lambda}{2}\, i\Delta_F(0) \int \mathrm{d}^4 Z \int \frac{\mathrm{d}^4 K\, \mathrm{d}^4 Q}{(2\pi)^8}\, e^{-iK\cdot(X-Z)-iQ\cdot(Z-Y)}\, \frac{i}{K^2 - m^2 + i\eta}\, \frac{i}{Q^2 - m^2 + i\eta} \\
&+ O(\lambda^2) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)}\, \frac{i}{K^2 - m^2 + i\eta} \left[1 - \frac{i\lambda}{2}\, i\Delta_F(0)\, \frac{i}{K^2 - m^2 + i\eta}\right] + O(\lambda^2)
\end{aligned} \tag{6.29}$$

wobei wir

$$\int \mathrm{d}^4 Z\, e^{i(K-Q)\cdot Z} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K - Q)$$

benutzt haben. Nun können wir bis zur Ordnung $O(\lambda)$ den Term in eckigen Klammern auch durch folgenden Ausdruck ersetzen,

$$1 - \frac{i\lambda}{2}\, i\Delta_F(0)\, \frac{i}{K^2 - m^2 + i\eta} = \left[1 + \frac{i\lambda}{2}\, i\Delta_F(0)\, \frac{i}{K^2 - m^2 + i\eta}\right]^{-1} + O(\lambda^2)\,, \tag{6.30}$$

womit aus Gl. (6.29) folgt

$$\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4 K}{(2\pi)^4}\, e^{-iK\cdot(X-Y)}\, \frac{i}{K^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\, i\Delta_F(0) + i\eta} + O(\lambda^2)\,. \tag{6.31}$$

Dies hat formal Ähnlichkeit mit der Fourier–Darstellung (5.55) des freien Propagators, allerdings wurde der Massenterm m^2 durch den Ausdruck

$$m_r^2 \equiv m^2 + \delta m^2 \equiv m^2 + \frac{\lambda}{2}\, i\Delta_F(0) \tag{6.32}$$

ersetzt. Die Wechselwirkung sorgt also für eine **Korrektur** der Masse des Teilchens. m_r bezeichnet man als **physikalische** oder **renormierte** Masse. Um diese explizit zu bestimmen, müssen wir

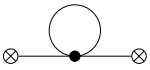
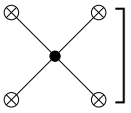
$$\Delta_F(0) \equiv \Delta_F(X-X) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{K^2-m^2+i\eta} \tag{6.33}$$

berechnen. Man macht sich leicht klar, dass dieses Integral **quadratisch ultraviolett (UV–) divergent** ist, d.h. wenn wir als obere Integralgrenze zunächst einen "cut-off" Λ ansetzen, so können wir den Beitrag von Impulsen $K \gg m$ zu $\Delta_F(0)$ abschätzen durch

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\int^{\Lambda} \mathrm{d}K\,K^3\,\frac{1}{K^2} = \lim_{\Lambda\to\infty}\int^{\Lambda} \mathrm{d}K\,K \sim \lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda^2\,. \tag{6.34}$$

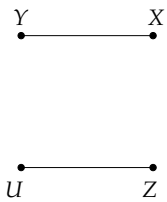
Im Abschnitt über Renormierung werden wir sehen, wie wir diese Divergenzen behandeln können. Zu diesem Zeitpunkt ist es lediglich erforderlich zu bemerken, dass sich der Massenparameter m in der Lagrange–Dichte, die sog. **nackte Masse**, von der physikalischen, renormierten Masse m_r unterscheidet, sobald man Wechselwirkungen anschaltet.

Wir wollen auch noch die **Vier-Punkt-Korrelationsfunktion bis zur Ordnung** $O(\lambda)$ berechnen,

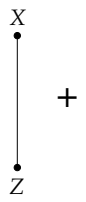
$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\hat{\phi}(Z)\hat{\phi}(U)\right]|0\rangle &= (-i)^4\,\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(Z)\delta J(U)}\bigg|_{J=0}\\
&= (-i)^4\frac{\delta^4}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(Z)\delta J(U)}\left[1+\frac{6}{4!}\right.$$

$$+\frac{1}{4!}$$

$$\left.\right]Z_0[J]\bigg|_{J=0}\\
&\quad +O(\lambda^2)\,.\end{aligned} \tag{6.35}$$

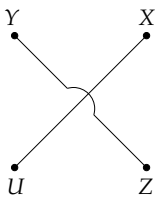
Es ist am besten, dies Term für Term weiter zu berechnen. Der erste Term (die 1 in eckigen Klammern) ergibt einfach die Vier-Punkt-Korrelationsfunktion (5.69) der freien Theorie,

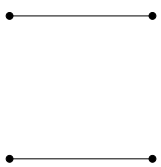
$$\begin{aligned}&(-i)^4\,\frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\bigg|_{J=0}\\
&= i\,\Delta_F(X-Y)\,i\,\Delta_F(Z-U) + i\,\Delta_F(X-Z)\,i\,\Delta_F(Y-U) + i\,\Delta_F(X-U)\,i\,\Delta_F(Y-Z)\end{aligned}$$

$=$


$+$

$+$


$+$


$\equiv\ 3$

. (6.36)

21.4.2021

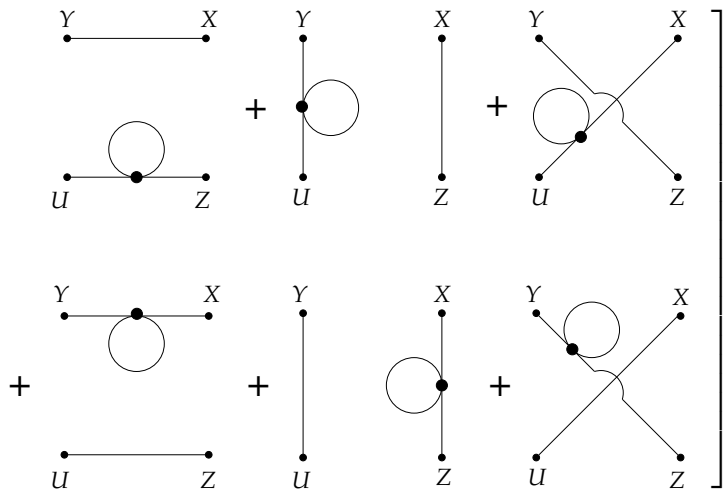
Der zweite Term ist

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i\lambda}{4}\,(-i)^4\frac{\delta^4}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2\,\mathrm{d}^4X_3 \\
&\qquad\qquad \times\, i\Delta_F(X_1-X_2)\,i\Delta_F(0)\,i\Delta_F(X_1-X_3)\,iJ(X_2)\,iJ(X_3)\,Z_0[J]\,\Big|_{J=0} \\
&= -\frac{i\lambda}{4}\,i\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4X_1\,(-i)^3\frac{\delta^3}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)} \\
&\times \Big\{2\int \mathrm{d}^4X_3\,i\Delta_F(X_1-U)\,i\Delta_F(X_1-X_3)\,iJ(X_3)\,Z_0[J] \\
&\quad + \int \mathrm{d}^4X_2\,\mathrm{d}^4X_3\,\mathrm{d}^4X_4\,i\Delta_F(X_1-X_2)\,i\Delta_F(X_1-X_3)\,i\Delta_F(U-X_4) \\
&\qquad\qquad \times\, iJ(X_2)\,iJ(X_3)\,iJ(X_4)\,Z_0[J]\,\Big\}_{J=0} \\
&= -\frac{i\lambda}{4}\,i\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4X_1\,(-i)^2\frac{\delta^2}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\Big\{\,2\,i\Delta_F(X_1-U)\,i\Delta_F(X_1-Z)\,Z_0[J] \\
&+\; 2\int \mathrm{d}^4X_3\,\mathrm{d}^4X_4\,i\Delta_F(X_1-U)\,i\Delta_F(X_1-X_3)\,i\Delta_F(Z-X_4)\,iJ(X_3)\,iJ(X_4) \\
&+\; 2\int \mathrm{d}^4X_3\,\mathrm{d}^4X_4\,i\Delta_F(X_1-Z)\,i\Delta_F(X_1-X_3)\,i\Delta_F(U-X_4)\,iJ(X_3)\,iJ(X_4) \\
&+\; \int \mathrm{d}^4X_2\,\mathrm{d}^4X_3\,i\Delta_F(X_1-X_2)\,i\Delta_F(X_1-X_3)\,i\Delta_F(U-Z)\,iJ(X_2)\,iJ(X_3)\Big\}_{J=0}\,. \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

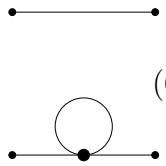
Hier haben wir in den letzten drei Zeilen bereits den Faktor $Z_0[J]$ weggelassen, da die verbleibenden zwei Funktionalableitungen nicht auf diesen Faktor wirken dürfen, weil sonst Quellterme übrig bleiben, die für $J=0$ dann in jedem Fall verschwinden. Also können wir hier gleich $Z_0[J]\equiv Z_0[0]=1$ setzen. Wir leiten weiter funktional ab,

$$
\begin{aligned}
\ldots &= -\frac{i\lambda}{4}\,i\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4X_1\,\Big\{\,2\,i\Delta_F(X_1-U)\,i\Delta_F(X_1-Z)\,i\Delta_F(X-Y) \\
&\quad +2\,i\Delta_F(X_1-U)\,i\Delta_F(X_1-X)\,i\Delta_F(Z-Y)+2\,i\Delta_F(X_1-U)\,i\Delta_F(X_1-Y)\,i\Delta_F(Z-X) \\
&\quad +2\,i\Delta_F(X_1-Z)\,i\Delta_F(X_1-X)\,i\Delta_F(U-Y)+2\,i\Delta_F(X_1-Z)\,i\Delta_F(X_1-Y)\,i\Delta_F(U-X) \\
&\quad +i\Delta_F(X_1-X)\,i\Delta_F(X_1-Y)\,i\Delta_F(U-Z)+i\Delta_F(X_1-Y)\,i\Delta_F(X_1-X)\,i\Delta_F(U-Z)\,\Big\} \\
&= -\frac{i\lambda}{2}\,i\Delta_F(0)\int \mathrm{d}^4X_1\,\Big\{\,i\Delta_F(X-Y)\,i\Delta_F(Z-X_1)\,i\Delta_F(X_1-U) \\
&\quad +i\Delta_F(X-Z)\,i\Delta_F(Y-X_1)\,i\Delta_F(X_1-U)+i\Delta_F(Y-Z)\,i\Delta_F(X-X_1)\,i\Delta_F(X_1-U) \\
&\quad +i\Delta_F(Z-U)\,i\Delta_F(X-X_1)\,i\Delta_F(X_1-Y)+i\Delta_F(Y-U)\,i\Delta_F(X-X_1)\,i\Delta_F(X_1-Z) \\
&\quad +i\Delta_F(X-U)\,i\Delta_F(Y-X_1)\,i\Delta_F(X_1-Z)\,\Big\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}$$



$$\equiv 3$$



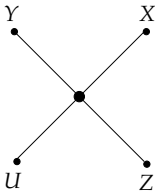
(6.38)

Der dritte Term ist

$$\begin{aligned}
&-\frac{i\lambda}{4!}\,(-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)} \int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2\,\mathrm{d}^4X_3\,\mathrm{d}^4X_4\,\mathrm{d}^4X_5 \\
&\quad \times i\Delta_F(X_1-X_2)\,i\Delta_F(X_1-X_3)\,i\Delta_F(X_1-X_4)\,i\Delta_F(X_1-X_5) \\
&\quad \times\; iJ(X_2)\,iJ(X_3)\,iJ(X_4)\,iJ(X_5)\,Z_0[J]\,\Big|_{J=0}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!}\,4! \int \mathrm{d}^4X_1\,i\Delta_F(X_1-X)\,i\Delta_F(X_1-Y)\,i\Delta_F(X_1-Z)\,i\Delta_F(X_1-U)$$

$$=$$



$$.$$

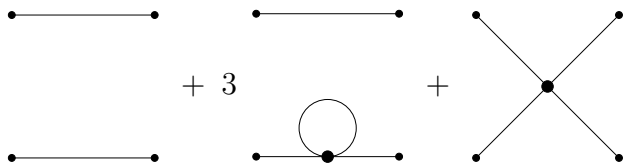
(6.39)

Hier haben wir ausgenutzt, dass die vier Funktionalableitungen die vier Quellterme im Vorfaktor vollständig eliminieren müssen; würden sie darüberhinaus noch auf $Z_0[J]$ wirken, gäbe es nur weitere Quellterme, die für $J=0$ verschwinden würden. Wir können also gleich $Z_0[J] \equiv Z_0[0] = 1$ setzen.

Fassen wir nun die Resultate (6.36), (6.38) und (6.39) zusammen, erhalten wir insgesamt für die Vier-Punkt-Korrelationsfunktion

$$\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\hat{\phi}(Z)\hat{\phi}(U)\right]|0\rangle = (-i)^4\,\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(Z)\delta J(U)}\bigg|_{J=0}$$

$$=\; 3$$



$$+\; 3 \qquad + \qquad + O(\lambda^2)\,. \tag{6.40}$$

Die Vorfaktoren sind wieder leicht mit kombinatorischen Argumenten zu verstehen. Der Faktor 3 vor dem Term der Ordnung $O(\lambda^0)$, also dem nichtwechselwirkenden Term, rührt

daher, dass es drei Möglichkeiten gibt, die vier Punkte X, Y, Z und U mit freien Propagatoren zu verbinden.

Beim zweiten Term müssen wir uns die Möglichkeiten überlegen, die Beine in folgender Anordnung

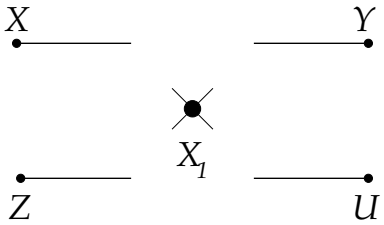


Abbildung 6.3: Ausgangssituation beim Term der Ordnung $O(\lambda)$ in der Vier-Punkt-Korrelationsfunktion.

so zu verbinden, dass sie das entsprechende Diagramm ergeben. Jedes der vier Beine des Vertex kann mit dem Punkt X verbunden werden. Jedes der verbleibenden drei Beine kann dann mit einem der drei verbleibenden Punkte Y, Z oder U verbunden werden. Das ergibt $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten. Die verbleibenden beiden Beine des Vertex kann man dann zu einer Schleife schließen (keine Wahlmöglichkeit) und die verbleibenden freien Punkte können mit einem freien Propagator verbunden werden (keine Wahlmöglichkeit). Auf diese Weise erzeugt man alle Diagramme, bei denen der Punkt X mit einem anderen Punkt verbunden ist und die Propagation von dort nach X (oder umgekehrt) mit einem Wechselwirkungsvertex und anhängender Schleife modifiziert wird.

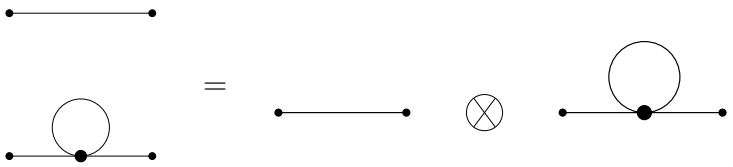
Man könnte X aber auch mit jedem der anderen drei Punkte mittels eines freien Propagators (also ohne Wechselwirkung) verbinden. Dann müssen die verbleibenden beiden Punkte über den Wechselwirkungsvertex miteinander verbunden werden. Für die Verknüpfung des ersten Punktes mit einem der vier Beine des Vertex gibt es vier Möglichkeiten und für die Verbindung des zweiten mit einem der verbleibenden drei Beine drei Möglichkeiten. Die letzten beiden Beine müssen dann zu einer Schleife geschlossen werden. Dies ergibt insgesamt $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten.

Insgesamt haben wir also $36 + 36 = 72 = 2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 4) = 4! \cdot 3$ Möglichkeiten für das zweite Diagramm. Dividieren wir noch durch den Faktor 4! (von $\lambda/4!$ aus der Lagrange–Dichte) erhalten wir genau den Faktor 3.

Für das dritte Diagramm müssen wir in Abb. 6.3 **alle** vier Punkte mit den vier Beinen des Vertex verbinden. Das erste Bein kann mit jedem der vier Punkte X, Y, Z oder U verbunden werden, das zweite noch mit jedem der drei verbleibenden Punkte, das dritte mit einem der zwei verbleibenden Punkte und das letzte schließlich mit dem letzten freien Punkt. Das ergibt genau 4! Möglichkeiten, die den Faktor 1/4! im Wechselwirkungsterm in der Lagrange–Dichte wegheben.

In jeder n–Punkt-Korrelationsfunktion gibt es offenbar Diagramme, welche **unverbundene** Anteile enthalten, d.h. sie sind einfach Produkte von (Teilen von) m–Punkt-Korrelationsfunktionen mit $m < n$. Ein Beispiel ist das zweite Diagramm in Gl. (6.40), welches einfach aus dem Produkt einer freien Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion (5.66) und

der $O(\lambda)$–Korrektur der Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion, s. Gl. (6.28), besteht,



(6.41)

Solche sog. **unverbundenen Diagramme** lassen sich formal eliminieren, indem man zum erzeugenden Funktional für **verbundene** n–Punkt-Korrelationsfunktionen übergeht. Dies wird im nächsten Abschnitt besprochen.

6.2 Das erzeugende Funktional für verbundene n–Punkt–Funktionen

Wir definieren

$$W[J] \equiv -i \ln Z[J] \; . \tag{6.42}$$

Dies ist das erzeugende Funktional für **verbundene n–Punkt-Korrelationsfunktionen**. Wir zeigen dies nicht in voller Allgemeinheit, sondern überzeugen uns am Beispiel der Zwei- und Vier-Punkt-Korrelationsfunktion der ϕ^4–Theorie bis zur Ordnung $O(\lambda)$, dass dieses Funktional lediglich verbundene Korrelationsfunktionen erzeugt.

Die **verbundene Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion** ist

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0} &= -i\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\left(\frac{1}{Z[J]}\,\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\right)\Bigg|_{J=0} \\
&= -i\left(-\frac{1}{Z^2[J]}\,\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\,\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)} + \frac{1}{Z[J]}\,\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right)_{J=0} \\
&= i\,\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\right|_{J=0}\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\right|_{J=0} - i\,\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0} \; ,
\end{aligned} \tag{6.43}$$

wobei wir von der Normierung $Z[0] = 1$ des erzeugenden Funktionals für (gewöhnliche) n–Punkt-Korrelationsfunktionen Gebrauch gemacht haben. Mit der **Ein-Punkt-Korrelationsfunktion**

$$\langle 0|\hat{\phi}(X)|0\rangle = \frac{1}{i}\,\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\right|_{J=0} \tag{6.44}$$

und der Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion

$$\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle = \frac{1}{i^2}\,\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0} \tag{6.45}$$

erhalten wir

$$\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0} = i\,\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle - i\,\langle 0|\hat{\phi}(X)|0\rangle\langle 0|\hat{\phi}(Y)|0\rangle \; . \tag{6.46}$$

In Theorien ohne spontane Symmetriebrechung (vgl. Kap. 7) verschwindet aber die Ein-Punkt-Korrelationsfunktion (genau wie im wechselwirkungsfreien Fall) und daher

$$\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0} = i\,\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle = -i\,\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0}\,. \tag{6.47}$$

Die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion kann sowohl mit Hilfe von $Z[J]$ als auch mit Hilfe von $W[J]$ erzeugt werden; bis auf einen Faktor i ergibt dies das gleiche Resultat. Dies gilt **in allen Ordnungen in der Kopplungskonstanten** λ. Da die Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion per Konstruktion keine unverbundenen Anteile enthält, ist dieses Resultat nicht sonderlich verwunderlich.

Nun berechnen wir die Vier-Punkt-Korrelationsfunktion. Benutzen wir die zweite Zeile von Gl. (6.43) direkt als Zwischenresultat, erhalten wir

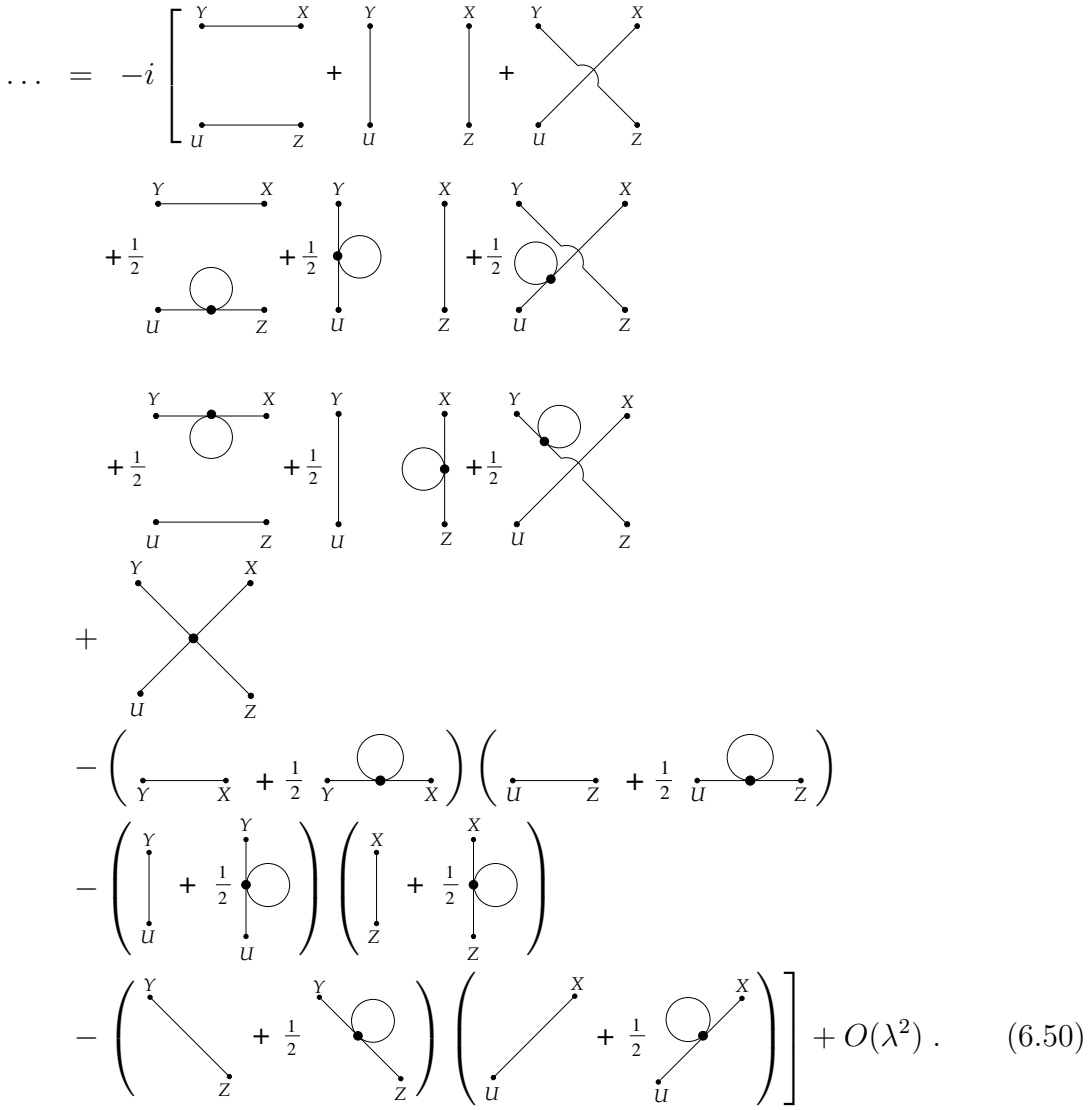
$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right|_{J=0} \\
&= \left.\frac{\delta^2}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\left(\frac{i}{Z^2[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)} - \frac{i}{Z[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right)\right|_{J=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta J(X)}\left(-\frac{2i}{Z^3[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)} + \frac{i}{Z^2[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)}\right. \\
&\qquad + \frac{i}{Z^2[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(U)} + \frac{i}{Z^2[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Z)\,\delta J(U)} \\
&\qquad \left. - \frac{i}{Z[J]}\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right)\Bigg|_{J=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& \frac{6i}{Z^4[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)} - \frac{2i}{Z^3[J]}\left(\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)}\right. \\
& \left. + \frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)} + \frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(U)}\right) \\
& - \frac{2i}{Z^3[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)} + \frac{i}{Z^2[J]}\left(\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(U)}\right. \\
& \left. + \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(Z)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(U)}\right) - \frac{2i}{Z^3[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(U)} \\
& + \frac{i}{Z^2[J]}\left(\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Z)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(U)} + \frac{\delta Z[J]}{\delta J(Z)}\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(U)}\right) \\
& - \frac{2i}{Z^3[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Z)\,\delta J(U)} + \frac{i}{Z^2[J]}\left(\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right. \\
& \left. + \frac{\delta Z[J]}{\delta J(Y)}\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right) + \frac{i}{Z^2[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(X)}\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)} \\
& \left. - \frac{i}{Z[J]}\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right|_{J=0}\,.
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Benutzen wir nun, dass $Z[0] = 1$ und $\delta Z[J]/\delta J(X)|_{J=0} = 0$, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

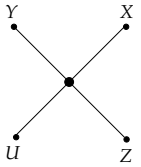
$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right|_{J=0} \\
&= -i\left(\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)} - \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\,\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Z)}\,\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(U)} - \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(U)}\,\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(Y)\,\delta J(Z)}\right)_{J=0} \\
&= -i\left[\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\hat{\phi}(Z)\hat{\phi}(U)\right]|0\rangle - \langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(Z)\hat{\phi}(U)\right]|0\rangle\right. \\
&\qquad - \langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Z)\right]|0\rangle\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(Y)\hat{\phi}(U)\right]|0\rangle \\
&\qquad \left. - \langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(U)\right]|0\rangle\langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(Y)\hat{\phi}(Z)\right]|0\rangle\right] . \qquad (6.49)
\end{aligned}
$$

Nun setzen wir die bis zur Ordnung $O(\lambda)$ berechneten Zwei- und Vier-Punkt-Korrelationsfunktionen (6.28) und (6.40) ein,



Multiplizieren wir die Klammern in den letzten drei Zeilen aus und vernachlässigen dabei Terme von der Ordnung $O(\lambda^2)$, so sehen wir, dass sich alle unverbundenen Diagramme gegenseitig wegheben. Wir erhalten als Endresultat

$$\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)\,\delta J(Z)\,\delta J(U)}\right|_{J=0} = -i$$



, (6.51)

also in der Tat nur den verbundenen Anteil der Vier-Punkt-Korrelationsfunktion (6.40).

23.4.2021

6.3 Die Streumatrix

Die **Streumatrix** (oder kurz, S–Matrix) beschreibt physikalische **Streu-** oder **Zerfallsprozesse**, d.h. den Prozess $n \to m$, bei dem sich n Teilchen im Eingangszustand und m Teilchen im Ausgangszustand befinden. Wir werden in diesem Abschnitt besprechen, wie diese Prozesse und die zugehörige S–Matrix mit den n–Punkt-Korrelationsfunktionen einer gegebenen Theorie zusammenhängen.

Einen gegebenen Anfangszustand, in dem sich eine gewisse Zahl von Teilchen befinden, bezeichnen wir mit $|i\rangle$. Diese Teilchen streuen oder zerfallen in einen Endzustand $|f\rangle$. Das Element S_{fi} der S–Matrix ist definiert als

$$S_{fi} = \langle f; t \to +\infty | \, i; t \to -\infty \rangle \equiv {}_{\text{out}}\langle f | \, i \rangle_{\text{in}} \; . \tag{6.52}$$

Wir nehmen an, dass die Teilchen in den Fock–Raumzuständen $|i\rangle_{\text{in}}$, $|f\rangle_{\text{out}}$ **freie**, d.h. **nicht-wechselwirkende** Teilchen sind. In Abwesenheit langreichweitiger Kräfte ist dies eine gute Näherung.

Befinden sich beispielsweise zwei Teilchen mit den Impulsen $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ im Anfangszustand $|i\rangle_{\text{in}}$, so hat dieser die Form

$$|i\rangle_{\text{in}} = \hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p}_1)\, \hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p}_2)\, |0\rangle \; . \tag{6.53}$$

Ganz ähnlich gilt für einen Endzustand $|f\rangle_{\text{out}}$, in dem sich zwei Teilchen mit den Impulsen $\vec{p}_1{}'$, $\vec{p}_2{}'$ befinden,

$${}_{\text{out}}\langle f | = \langle 0 | \, \hat{a}_{\text{out}}(\vec{p}_1{}')\, \hat{a}_{\text{out}}(\vec{p}_2{}') \; . \tag{6.54}$$

Man könnte nun im Prinzip die Glgen. (6.53) und (6.54) in Gl. (6.52) einsetzen und das Streumatrix-Element S_{fi} berechnen. Das Problem dabei ist, dass wir nicht wissen, wie die *in*–Zustand-Operatoren $\hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p}_i)$ bei $t \to -\infty$ mit den *out*–Zustand-Operatoren $\hat{a}_{\text{out}}(\vec{p}_i{}')$ bei $t \to +\infty$ zusammenhängen.

Anstelle der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p}_i)$, $\hat{a}_{\text{out}}(\vec{p}_i{}')$ können wir auch die Feldoperatoren $\hat{\phi}_{\text{in}}(X)$ und $\hat{\phi}_{\text{out}}(X)$ in der Raum-Zeit betrachten (diese sind nach Gl. (3.10) ja lediglich Linearkombinationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren). Wir benötigen den Zusammenhang zwischen $\hat{\phi}_{\text{in}}(X)$ und $\hat{\phi}_{\text{out}}(X)$, bevor wir S_{fi} berechnen können. Wir postulieren die Existenz eines **unitären Operators** $\hat{S}$, $\hat{S}^\dagger = \hat{S}^{-1}$, welcher diese beiden Feldoperatoren miteinander auf folgende Weise in Beziehung setzt,

$$\hat{\phi}_{\text{out}}(X) = \hat{S}^\dagger \hat{\phi}_{\text{in}}(X) \hat{S} \; , \quad \hat{\phi}^\dagger_{\text{out}}(X) = \hat{S}^\dagger \hat{\phi}^\dagger_{\text{in}}(X) \hat{S} \; . \tag{6.55}$$

Mit Gl. (3.10) folgt daraus

$$\hat{a}_{\text{out}}(\vec{p}) = \hat{S}^\dagger \hat{a}_{\text{in}}(\vec{p})\hat{S} \ , \quad \hat{a}^\dagger_{\text{out}}(\vec{p}) = \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p})\hat{S} \ . \tag{6.56}$$

Analog gilt nach Multiplikation mit $\hat{S}$ von links und mit $\hat{S}^\dagger$ von rechts

$$\hat{\phi}_{\text{in}}(X) = \hat{S}\,\hat{\phi}_{\text{out}}(X)\hat{S}^\dagger \ , \quad \hat{\phi}^\dagger_{\text{in}}(X) = \hat{S}\,\hat{\phi}^\dagger_{\text{out}}(X)\hat{S}^\dagger \ , \tag{6.57}$$

bzw.

$$\hat{a}_{\text{in}}(\vec{p}) = \hat{S}\,\hat{a}_{\text{out}}(\vec{p})\hat{S}^\dagger \ , \quad \hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p}) = \hat{S}\,\hat{a}^\dagger_{\text{out}}(\vec{p})\hat{S}^\dagger \ . \tag{6.58}$$

Damit gilt nun für einen Endzustand $|f\rangle_{\text{out}}$, bei dem sich m Teilchen an den Raum-Zeit-Punkten X_i, $i = 1, \ldots, m$ befinden,

$$\begin{aligned} |f\rangle_{\text{out}} &= \prod_{i=1}^{m} \hat{\phi}_{\text{out}}(X_i)\,|0\rangle = \prod_{i=1}^{m} \hat{S}^\dagger \hat{\phi}_{\text{in}}(X_i)\hat{S}\,|0\rangle = \hat{S}^\dagger \prod_{i=1}^{m} \hat{\phi}_{\text{in}}(X_i)\,\hat{S}|0\rangle \\ &\equiv \hat{S}^\dagger \prod_{i=1}^{m} \hat{\phi}_{\text{in}}(X_i)\,|0\rangle \equiv \hat{S}^\dagger\,|f\rangle_{\text{in}} \ . \end{aligned} \tag{6.59}$$

Hier haben wir von der ersten zur zweiten Zeile benutzt, dass eine unitäre Transformation den Vakuumzustand höchstens um einen Phasenfaktor $e^{i\varphi}$ verändern kann, den wir aber gleich 1 wählen können,

$$\hat{S}|0\rangle = e^{i\varphi}|0\rangle \equiv |0\rangle \ . \tag{6.60}$$

Multiplizieren wir Gl. (6.59) von links mit $\hat{S}$, so erhalten wir

$$|f\rangle_{\text{in}} = \hat{S}\,|f\rangle_{\text{out}} \ . \tag{6.61}$$

Ganz analog zeigt man für einen Anfangszustand mit n Teilchen an den Raum-Zeit-Punkten X_j, $j = 1, \ldots, n$,

$$|i\rangle_{\text{in}} = \prod_{j=1}^{n} \hat{\phi}_{\text{in}}(X_j)\,|0\rangle = \hat{S} \prod_{j=1}^{n} \hat{\phi}_{\text{out}}(X_j)\hat{S}^\dagger\,|0\rangle \equiv \hat{S}\,|i\rangle_{\text{out}} \ , \tag{6.62}$$

wobei wir $\hat{S}^\dagger|0\rangle = e^{-i\varphi}|0\rangle \equiv |0\rangle$ benutzt haben. Daraus folgt nach Multiplikation mit $\hat{S}^\dagger$

$$|i\rangle_{\text{out}} = \hat{S}^\dagger\,|i\rangle_{\text{in}} \ . \tag{6.63}$$

Die Interpretation der Glgen. (6.61) und (6.63) ist, dass der unitäre Operator $\hat{S}$ den *out*–Zustand $|f\rangle_{\text{out}}$ in den *in*–Zustand $|f\rangle_{\text{in}}$ transformiert, und entsprechend dass der adjungierte Operator $\hat{S}^\dagger$ den *in*–Zustand $|i\rangle_{\text{in}}$ in den *out*–Zustand $|i\rangle_{\text{out}}$ transformiert. Wir haben damit erreicht, dass wir S–Matrixelemente S_{fi} nun mit **denselben** Sätzen von Zuständen bzw. Operatoren berechnen können,

$$S_{fi} = {}_{\text{out}}\langle f|\,i\rangle_{\text{in}} \equiv {}_{\text{in}}\langle f|\,\hat{S}\,|\,i\rangle_{\text{in}} \equiv {}_{\text{out}}\langle f|\,\hat{S}\,|\,i\rangle_{\text{out}} \ , \tag{6.64}$$

oder konkret für unser Beispiel mit zwei Teilchen im Anfangs- und Endzustand

$$\begin{aligned} S_{fi} &= {}_{\text{in}}\langle f|\,\hat{S}\,|\,i\rangle_{\text{in}} \equiv \langle 0|\,\hat{a}_{\text{in}}(\vec{p}_1')\,\hat{a}_{\text{in}}(\vec{p}_2')\,\hat{S}\,\hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p}_1)\,\hat{a}^\dagger_{\text{in}}(\vec{p}_2)\,|0\rangle \\ &= {}_{\text{out}}\langle f|\,\hat{S}\,|\,i\rangle_{\text{out}} \equiv \langle 0|\,\hat{a}_{\text{out}}(\vec{p}_1')\,\hat{a}_{\text{out}}(\vec{p}_2')\,\hat{S}\,\hat{a}^\dagger_{\text{out}}(\vec{p}_1)\,\hat{a}^\dagger_{\text{out}}(\vec{p}_2)\,|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{6.65}$$

Die physikalische Fragestellung der Streuung und des Zerfalls ist nun auf die Bestimmung des unitären Operators $\hat{S}$ reduziert.

Betrachten wir die Bewegungsgleichung für das Feld $\phi(X)$, die aus der Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) \tag{6.66}$$

resultiert,

$$(\Box_x + m^2)\phi(X) = \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial\phi(X)} \equiv j(X)\ . \tag{6.67}$$

Die allgemeine Lösung $\phi(X)$ ist die Summe der allgemeinen Lösung $\phi_0(X)$ der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung, die wir mit Hilfe der Methode der Green–Funktionen erhalten können,

$$\phi(X) = \phi_0(X) + \int \mathrm{d}^4Y\, G(X;Y)\, j(Y)\ , \tag{6.68}$$

wobei $G(X;Y)$ die **Green–Funktion** der Klein–Gordon–Gleichung ist,

$$(\Box_x + m^2)G(X;Y) = \delta^{(4)}(X-Y)\ . \tag{6.69}$$

Es ist wohlbekannt (s. Übungsaufgabe H15), dass es verschiedene Typen von Green–Funktionen gibt, die sich durch ihre analytische Struktur in der komplexen Energie-Ebene unterscheiden, z.B. die **retardierte** Green–Funktion $G_{\text{ret}}(X;Y) \sim \Theta(x_0 - y_0)$, die **avancierte** Green–Funktion $G_{\text{adv}}(X;Y) \sim \Theta(y_0 - x_0)$, oder kompliziertere wie die **Feynman**–Green–Funktion $G_F(X;Y)$. Um also die allgemeine Lösung (6.68) vollständig zu spezifizieren, müssen wir die **Randbedingungen** festlegen. Wir tun dies dergestalt, dass wir die **retardierte** Green–Funktion in Verbindung mit der homogenen (nicht-wechselwirkenden) Lösung im **Eingangszustand** und die **avancierte** Green–Funktion in Verbindung mit der homogenen (nicht-wechselwirkenden) Lösung im **Endzustand** benutzen, also

$$\phi(X) = \phi_{\text{in}}(X) + \int \mathrm{d}^4Y\, G_{\text{ret}}(X;Y)\, j(Y)\ , \tag{6.70}$$

bzw.

$$\phi(X) = \phi_{\text{out}}(X) + \int \mathrm{d}^4Y\, G_{\text{adv}}(X;Y)\, j(Y)\ . \tag{6.71}$$

Wir nehmen an, dass die Wechselwirkung $\mathcal{L}_{\text{int}}$ für $x_0 \to \pm\infty$ verschwindet, oder anders ausgedrückt, dass sie bei einem Zeitpunkt $t_{\text{an}} > -\infty$ an- und bei einem Zeitpunkt $t_{\text{aus}} < \infty$ wieder ausgeschaltet wird. Dann gilt

$$\phi_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(X) = \lim_{x_0\to\mp\infty} \phi(X)\ , \tag{6.72}$$

denn der zweite Term in den Glgen. (6.70) und (6.71) verschwindet dann aufgrund der kausalen bzw. antikausalen Eigenschaften der jeweiligen Green–Funktionen. Dies garantiert gleichzeitig, dass die ein- bzw. auslaufenden Lösungen $\phi_{\text{in}}(X)$ bzw. $\phi_{\text{out}}(X)$ Lösungen der homogenen (nicht-wechselwirkenden) Klein–Gordon–Gleichung sind. Damit sind die Glgen. (6.70) und (6.71) konsistent mit Gl. (6.68).

Wir erheben nun die Felder ϕ, ϕ_{in} und ϕ_{out} zu **Feldoperatoren** $\hat{\phi}$, $\hat{\phi}_{\text{in}}$ und $\hat{\phi}_{\text{out}}$ und nehmen an, dass die Glgen. (6.70), (6.71) auch für diese Operatoren Gültigkeit behalten. Man würde nun denken, dass dann zwangsläufig auch Gl. (6.72) für die entsprechenden Operatoren gilt,

$$\hat{\phi}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(X) = \lim_{x_0 \to \mp\infty} \hat{\phi}(X) \; . \tag{6.73}$$

Dies ist die sog. **starke asymptotische Bedingung**. Man kann aber zeigen, dass dies dazu führt, dass überhaupt kein Streu- oder Zerfallsprozess stattfindet. Man darf lediglich die sog. **schwache asymptotische Bedingung** (Lehmann, Symanzik, Zimmermann, 1955) fordern,

$$\langle\alpha|\, \hat{\phi}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(X)\, |\beta\rangle = \lim_{x_0 \to \mp\infty} \langle\alpha|\, \hat{\phi}(X)\, |\beta\rangle \; , \tag{6.74}$$

wobei $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ beliebige Fock–Raumzustände sind.

Nun definieren wir das Funktional

$$\hat{I}[J] = \hat{T}\, \exp\left[i \int \mathrm{d}^4X\, J(X)\, \hat{\phi}(X) \right] \; . \tag{6.75}$$

Ganz offenbar gilt

$$\hat{I}[0] = 1 \; . \tag{6.76}$$

Differenzieren wir funktional bezüglich der Quelle, so erhalten wir

$$\frac{1}{i} \frac{\delta \hat{I}[J]}{\delta J(X)} = \hat{T} \left\{ \hat{\phi}(X)\, \hat{I}[J] \right\} \; , \; \ldots \; , \; \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \hat{I}[J]}{\delta J(X_1) \cdots \delta J(X_n)} = \hat{T} \left\{ \hat{\phi}(X_1) \cdots \hat{\phi}(X_n)\, \hat{I}[J] \right\} \; . \tag{6.77}$$

Die n–Punkt-Korrelationsfunktion

$$\langle 0|\hat{T} \left[\hat{\phi}(X_1) \cdots \hat{\phi}(X_n) \right] |0\rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(X_1) \cdots \delta J(X_n)} \right|_{J=0} \tag{6.78}$$

können wir aufgrund der Normierung (6.76) ausdrücken als

$$\begin{aligned} \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(X_1) \cdots \delta J(X_n)} \right|_{J=0} &= \langle 0|\hat{T} \left[\hat{\phi}(X_1) \cdots \hat{\phi}(X_n) \right] |0\rangle \\ &= \langle 0|\hat{T} \left\{ \hat{\phi}(X_1) \cdots \hat{\phi}(X_n)\, \hat{I}[J] \right\} |0\rangle \Big|_{J=0} \\ &= \langle 0| \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n \hat{I}[J]}{\delta J(X_1) \cdots \delta J(X_n)} |0\rangle \right|_{J=0} \\ &= \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n \langle 0|\hat{I}[J]|0\rangle}{\delta J(X_1) \cdots \delta J(X_n)} \right|_{J=0} \; . \end{aligned} \tag{6.79}$$

Dies gilt für alle n. Aber wenn alle Ableitungen zweier Funktionale übereinstimmen, dann muss das (bis auf unwesentliche additive Konstanten) auch für die Funktionale selbst gelten, also

$$Z[J] = \langle 0|\hat{I}[J]|0\rangle = \langle 0|\, \hat{T}\, \exp\left[i \int \mathrm{d}^4X\, J(X)\, \hat{\phi}(X) \right] |0\rangle \; . \tag{6.80}$$

Nun multiplizieren wir Gl. (6.70) für die Feldoperatoren mit $\hat{I}[J]$ und wenden auf das Resultat den Zeitordnungsoperator an,

$$\begin{aligned}
\hat{T}\left\{\hat{\phi}(X)\,\hat{I}[J]\right\} &= \hat{I}[J]\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X) + \int \mathrm{d}^4Y\, G_{\text{ret}}(X;Y)\,\hat{T}\left\{\hat{j}(Y)\,\hat{I}[J]\right\} \\
&= \hat{I}[J]\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X) + \int \mathrm{d}^4Y\, G_{\text{ret}}(X;Y)\,\hat{T}\left\{(\Box_y + m^2)\hat{\phi}(Y)\,\hat{I}[J]\right\} \\
&= \hat{I}[J]\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X) + \int \mathrm{d}^4Y\, G_{\text{ret}}(X;Y)\,(\Box_y + m^2)\,\hat{T}\left\{\hat{\phi}(Y)\,\hat{I}[J]\right\} \\
&= \hat{I}[J]\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X) + \int \mathrm{d}^4Y\, G_{\text{ret}}(X;Y)\,(\Box_y + m^2)\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta\hat{I}[J]}{\delta J(Y)}\,. \qquad (6.81)
\end{aligned}$$

Hier haben wir in der ersten Zeile benutzt, dass $\hat{\phi}_{\text{in}}(X)$ der einlaufende Zustand bei $x_0 \to -\infty$ ist, also im zeitgeordneten Produkt stets rechts von den Feldoperatoren im Funktional $\hat{I}[J]$ auftritt. Ferner haben wir von der ersten zur zweiten Zeile die Bewegungsgleichung (6.67) benutzt und von der dritten zur vierten Zeile die erste Identität (6.77).

Dieselben Rechenschritte, angewendet auf Gl. (6.71), führen auf das Ergebnis

$$\hat{T}\left\{\hat{\phi}(X)\,\hat{I}[J]\right\} = \hat{\phi}_{\text{out}}(X)\,\hat{I}[J] + \int \mathrm{d}^4Y\, G_{\text{adv}}(X;Y)\,(\Box_y + m^2)\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta\hat{I}[J]}{\delta J(Y)}\,. \qquad (6.82)$$

Subtrahieren wir von diesem Ergebnis Gl. (6.81), so erhalten wir

$$\hat{\phi}_{\text{out}}(X)\,\hat{I}[J] - \hat{I}[J]\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X) = \int \mathrm{d}^4Y\, i\,\bar{\Delta}(X-Y)\,(\Box_y + m^2)\,\frac{\delta\hat{I}[J]}{\delta J(Y)}\,, \qquad (6.83)$$

wobei

$$\bar{\Delta}(X-Y) \equiv G_{\text{adv}}(X;Y) - G_{\text{ret}}(X;Y)\,. \qquad (6.84)$$

Diese Funktion ist identisch mit der in Gl. (3.97) definierten. Dass wir dasselbe Symbol benutzen, ist also kein Zufall. Um dies zu sehen, berechnen wir mit den Ergebnissen von Übungsaufgabe H15

28.4.2021

$$\begin{aligned}
i\,\bar{\Delta}(X-Y) &= i\,G_{\text{adv}}(X;Y) - i\,G_{\text{ret}}(X;Y) \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\left[\frac{1}{K^2-m^2-i\,\mathrm{sgn}(k_0)\eta} - \frac{1}{K^2-m^2+i\,\mathrm{sgn}(k_0)\eta}\right] \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\left[\frac{\Theta(k_0)}{K^2-m^2-i\eta} + \frac{\Theta(-k_0)}{K^2-m^2+i\eta}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\Theta(k_0)}{K^2-m^2+i\eta} - \frac{\Theta(-k_0)}{K^2-m^2-i\eta}\right] \qquad (6.85) \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(X-Y)}\left[\Theta(k_0)\,2\pi i\,\delta(K^2-m^2) - \Theta(-k_0)\,2\pi i\,\delta(K^2-m^2)\right]\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Dirac–Identität

$$\frac{1}{x \pm i\eta} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\,\delta(x) \qquad (6.86)$$

benutzt haben. Nun benutzen wir noch

$$\delta(K^2 - m^2) = \frac{1}{2E_k}\left[\delta(k_0 - E_k) + \delta(k_0 + E_k)\right] \tag{6.87}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} i\,\bar{\Delta}(X-Y) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_k}\left[e^{-iE_k(x_0-y_0)+i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} - e^{iE_k(x_0-y_0)+i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_k}\left[e^{-iK\cdot(X-Y)} - e^{iK\cdot(X-Y)}\right] , \end{aligned} \tag{6.88}$$

wobei wir von der ersten zur zweiten Zeile im zweiten Term die Substitution $\vec{k} \to -\vec{k}$ vorgenommen und in der letzten Zeile die Abkürzung $K^\mu = (E_k, \vec{k})^T$ verwendet haben. Dies ist aber genau Gl. (3.97).

Nun erinnern wir uns an den Zusammenhang (6.55) zwischen $\hat{\phi}_{\text{out}}$ und $\hat{\phi}_{\text{in}}$ und multiplizieren Gl. (6.83) von links mit $\hat{S}$,

$$\hat{\phi}_{\text{in}}(X)\,\hat{S}\,\hat{I}[J] - \hat{S}\,\hat{I}[J]\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X) \equiv \left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \hat{S}\,\hat{I}[J]\right] = \int \mathrm{d}^4Y\, i\,\bar{\Delta}(X-Y)\,(\Box_y + m^2)\,\frac{\delta(\hat{S}\,\hat{I}[J])}{\delta J(Y)} . \tag{6.89}$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für $\hat{S}\hat{I}[J]$. Da aufgrund von Gl. (6.60)

$$\langle 0|\hat{S}\hat{I}[J]|0\rangle \equiv \langle 0|\hat{I}[J]|0\rangle \equiv Z[J] , \tag{6.90}$$

vgl. Gl. (6.80), erwarten wir, dass $\hat{S}\hat{I}[J] \sim Z[J]$. Also machen wir folgenden Ansatz,

$$\hat{S}\hat{I}[J] = \exp\left[\int \mathrm{d}^4Y\,\hat{\phi}_{\text{in}}(Y)(\Box_y + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(Y)}\right] Z[J] . \tag{6.91}$$

Setzen wir dies auf der linken Seite von Gl. (6.89) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \hat{S}\hat{I}[J]\right] &= \left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \exp\left[\int \mathrm{d}^4Y\,\hat{\phi}_{\text{in}}(Y)(\Box_y + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(Y)}\right] Z[J]\right] \\ &= \left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \exp\left[\int \mathrm{d}^4Y\,\hat{\phi}_{\text{in}}(Y)(\Box_y + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(Y)}\right]\right] Z[J] , \end{aligned} \tag{6.92}$$

weil $Z[J]$ einfach eine gewöhnliche Zahl und kein Operator ist und daher aus dem Kommutator herausgezogen werden darf. Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ Operatoren, deren Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ eine gewöhnliche Zahl ist. Für diesen Fall lautet die **Liesche Entwicklungsformel** (manchmal auch Hadamard–Lemma genannt)

$$e^{\hat{B}}\,\hat{A}\,e^{-\hat{B}} = \hat{A} + [\hat{B}, \hat{A}] . \tag{6.93}$$

Daraus folgt nach Multiplikation von rechts mit $e^{\hat{B}}$

$$[\hat{A}, e^{\hat{B}}] = \hat{A}\,e^{\hat{B}} - e^{\hat{B}}\hat{A} = -[\hat{B}, \hat{A}]\,e^{\hat{B}} = [\hat{A}, \hat{B}]\,e^{\hat{B}} . \tag{6.94}$$

Diese Gleichung ist auf den Kommutator in Gl. (6.92) anwendbar, denn mit der Identifizierung $\hat{A} \equiv \hat{\phi}_{\text{in}}(X)$ und $\hat{B} \equiv \hat{\phi}_{\text{in}}(Y)$ gilt

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \hat{\phi}_{\text{in}}(Y)\right] &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_1\,\mathrm{d}^3\vec{k}_2}{(2\pi)^6 4E_{k_1}E_{k_2}} \left[e^{-iK_1\cdot X}\hat{a}(\vec{k}_1) + e^{iK_1\cdot X}\hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\,,\right. \\
&\qquad\qquad \left. e^{-iK_2\cdot Y}\hat{a}(\vec{k}_2) + e^{iK_2\cdot Y}\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_1\,\mathrm{d}^3\vec{k}_2}{(2\pi)^6 4E_{k_1}E_{k_2}} \left\{e^{-iK_1\cdot X+iK_2\cdot Y}[\hat{a}(\vec{k}_1), \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)] + e^{iK_1\cdot X-iK_2\cdot Y}[\hat{a}^\dagger(\vec{k}_1), \hat{a}(\vec{k}_2)]\right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_1\,\mathrm{d}^3\vec{k}_2}{(2\pi)^6 4E_{k_1}E_{k_2}}\, 2E_{k_1}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\left[e^{-iK_1\cdot X+iK_2\cdot Y} - e^{iK_1\cdot X-iK_2\cdot Y}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k}\left[e^{-iK\cdot(X-Y)} - e^{iK\cdot(X-Y)}\right] \equiv i\,\bar{\Delta}(X-Y)\,, \qquad (6.95)
\end{aligned}$$

was in der Tat eine gewöhnliche Zahl (und kein Operator) ist. Wenden wir also Gl. (6.94) auf Gl. (6.92) an, so folgt (der zusätzliche Faktor $(\Box_y + m^2)\delta/\delta J(Y)$ und das Integral über d^4Y stellen keine Probleme dar, sie können wie multiplikative Operatoren, d.h. Zahlen, behandelt werden)

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \hat{S}\hat{I}[J]\right] &= \left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \int \mathrm{d}^4Y\,\hat{\phi}_{\text{in}}(Y)(\Box_y + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(Y)}\right] \\
&\qquad \times \exp\left[\int \mathrm{d}^4Z\,\hat{\phi}_{\text{in}}(Z)(\Box_z + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(Z)}\right] Z[J] \\
&= \int \mathrm{d}^4Y\,\left[\hat{\phi}_{\text{in}}(X), \hat{\phi}_{\text{in}}(Y)\right](\Box_y + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(Y)}\,\hat{S}\hat{I}[J] \\
&= \int \mathrm{d}^4Y\,i\,\bar{\Delta}(X-Y)\,(\Box_y + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(Y)}\,\hat{S}\hat{I}[J]\,, \qquad (6.96)
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile Gl. (6.95) benutzt haben. Dies ist aber genau die rechte Seite von Gl. (6.89). Dies beweist, dass unser Ansatz (6.91) für den Operator $\hat{S}\hat{I}[J]$ korrekt war.

Der letzte Schritt besteht in der Bestimmung von $\hat{S}$. Aufgrund der Normierung (6.76) gilt

$$\hat{S} = \exp\left[\int \mathrm{d}^4X\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X)(\Box_x + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\right] Z[J]\Big|_{J=0}\,. \qquad (6.97)$$

Dies ist nahezu der endgültige Ausdruck für den Operator $\hat{S}$. Man muss lediglich sicherstellen, dass der Anfangszustand nicht mehr Teilchen enthält als die, die man betrachten möchte. Mit anderen Worten, es dürfen in $\hat{S}$ keine Erzeugungsoperatoren rechts von Vernichtungsoperatoren auftreten. Dies wird wie gehabt durch **Normalordnung** erreicht, d.h.

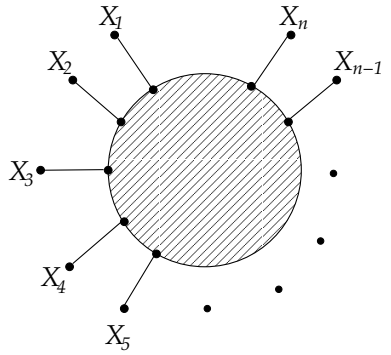
$$\hat{S} = :\exp\left[\int \mathrm{d}^4X\,\hat{\phi}_{\text{in}}(X)(\Box_x + m^2)\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\right]: Z[J]\Big|_{J=0}\,. \qquad (6.98)$$

Man nennt diesen Ausdruck nach den Initialen seiner Entdecker Lehmann, Symanzik und Zimmermann die **LSZ–Reduktionsformel**.

Wie ist dieser Ausdruck zu interpretieren?

(i) Wenn man die Exponentialfunktion in eine Taylor–Reihe entwickelt, so enthält der Term der Ordnung n eine n–te Funktionalableitung nach den Quellen $J(X_i)$, die auf $Z[J]$ wirkt. Dies erzeugt natürlich gerade die n–Punkt-Korrelationsfunktion,

$$\left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(X_1)\cdots\delta J(X_n)}\right|_{J=0} \sim$$

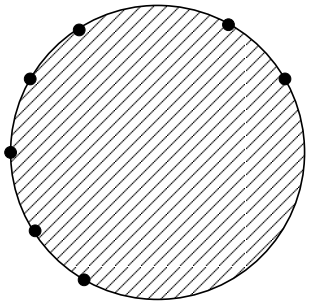


$$\equiv \langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X_1)\cdots\hat{\phi}(X_n)\right]|0\rangle\ .$$

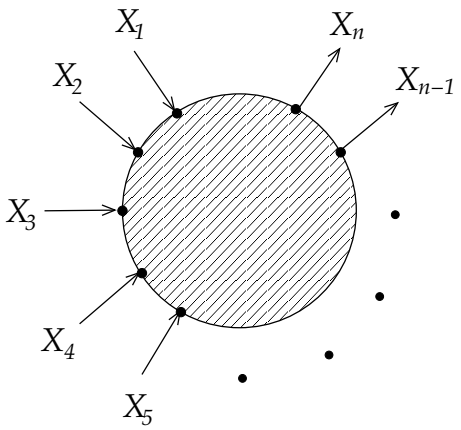
(ii) Die inversen Propagatoren $(\Box_{x_1}+m^2)\cdots(\Box_{x_n}+m^2)$ im Term n–ter Ordnung "amputieren" aufgrund der Relation

$$(\Box_x+m^2)i\Delta_F(X-Y) = -i\delta^{(4)}(X-Y)$$

die externen Beine der n–Punkt-Korrelationsfunktion,

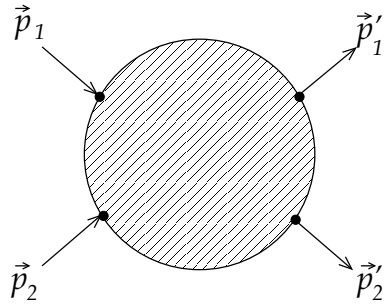


(iii) Die Feldoperatoren $\hat{\phi}_{\text{in}}(X_1)\cdots\hat{\phi}_{\text{in}}(X_n)$ ersetzen die in Schritt (ii) amputierten externen Beine. Sie enthalten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, d.h. sie erzeugen und vernichten Teilchen, z.B.



(iv) Wenn wir das Matrixelement des Operators $\hat{S}$ gemäß Gl. (6.64) zwischen Anfangs- und Endzustand nehmen, so überleben nur Terme in $\hat{S}$ mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die zu den gegebenen Anfangs- und Endzuständen korrespondieren. Z.B. lautet das Streumatrix-Element S_{fi} für die Streuung zweier Teilchen mit Anfangsimpulsen $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ und Endimpulsen $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$

$$S_{fi} = \langle 0|\hat{a}_{\rm in}(\vec{p}_1')\hat{a}_{\rm in}(\vec{p}_2')\,\hat{S}\,\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\vec{p}_1)\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\vec{p}_2)|0\rangle = \qquad . \tag{6.99}$$



Obwohl $\hat{S}$ unendlich viele Terme beinhaltet, spielt nur der Term

$$\sim \hat{a}^\dagger_{\rm in}(\vec{p}_1')\hat{a}^\dagger_{\rm in}(\vec{p}_2')\hat{a}_{\rm in}(\vec{p}_1)\hat{a}_{\rm in}(\vec{p}_2)$$

eine Rolle, weil nur dieser Term erlaubt, nichtverschwindende Kommutatoren

$$[\hat{a}_{\rm in}(\vec{p}_i'), \hat{a}^\dagger_{\rm in}(\vec{p}_i')] = 2E_{p_i'}(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\ , \quad [\hat{a}_{\rm in}(\vec{p}_i), \hat{a}^\dagger_{\rm in}(\vec{p}_i)] = 2E_{p_i}(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\ ,$$

zu bilden. Bei allen anderen Termen gibt es immer mindestens einen Erzeugungs- oder Vernichtungsoperator, der nach links oder rechts auf das Vakuum angewendet null ergibt. Wir werden dies im nächsten Abschnitt am Beispiel der Pion–Nukleon–Streuung ausführlich vertiefen.

30.4.2021

6.4 Yukawa–Theorie: Pion–Nukleon–Streuung

Die Yukawa–Theorie in ihrer einfachsten Form ist eine Feldtheorie, die die Wechselwirkung zwischen Dirac–Fermionen und neutralen skalaren Bosonen beschreibt,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\rm int}\ , \\ \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2)\ , \\ \mathcal{L}_{\rm int} &= g\bar{\psi}\phi\psi\ . \end{aligned} \tag{6.100}$$

Wir werden diese einfachste Variante aber nicht weiter betrachten, sondern eine Version, die etwas größeren physikalischen Bezug besitzt: eine Yukawa–Theorie, die die Wechselwirkung zwischen **Nukleonen** und **Pionen** beschreibt.

Nukleonen bilden ein sog. **Iso-Dublett** im **Isospin-Raum**,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}\ , \tag{6.101}$$

wobei der Index p für das Proton und der Index n für das Neutron steht (selbstverständlich sind sowohl ψ_p wie ψ_n vierkomponentige Dirac–Spinoren, ψ hat also acht Komponenten).

Dieses Iso-Dublett bildet die **fundamentale Darstellung** der sog. **Isospin-Gruppe** $SU(2)_I$, d.h. es transformiert sich wie ein zweidimensionaler Vektor unter $SU(2)_I$–Transformationen,

$$\psi \longrightarrow \psi' = U_f \psi \ , \tag{6.102}$$

wobei

$$U_f = \exp\left(-i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{t}\right) \ \in \ SU(2)_I \tag{6.103}$$

ein Element der $SU(2)_I$ in der **fundamentalen Darstellung** ist. Dies bedeutet, dass $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Vektor der Parameter der $SU(2)_I$ und $\vec{t} = \vec{\tau}/2$ der Vektor der Generatoren der $SU(2)_I$ in der **fundamentalen Darstellung** ist, mit dem Vektor der Pauli–Matrizen $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Da die Pauli–Matrizen (2×2)–Matrizen sind, ist auch U_f eine (2×2)–Matrix, die die Komponenten ψ_p, ψ_n des fundamentalen Iso-Dubletts untereinander transformiert. Der Dirac–adjungierte Spinor transformiert sich gemäß

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = (U_f\psi)^\dagger\,\gamma_0 = \psi^\dagger U_f^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \gamma_0 U_f^\dagger = \bar{\psi}\,U_f^\dagger \ , \tag{6.104}$$

weil Dirac–Matrizen und Elemente der $SU(2)_I$ in verschiedenen Räumen operieren.

Pionen bilden ein **Iso-Triplett** im Isospin-Raum,

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \ . \tag{6.105}$$

Die **physikalischen** Pionen $\pi^\pm, \pi^0$ ergeben sich aus den Komponenten ϕ_i des Iso-Tripletts gemäß

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 \mp i\phi_2\right) \ , \quad \pi^0 = \phi_3 \ . \tag{6.106}$$

Offenbar gilt $\pi^- = (\pi^+)^*$. Das Iso-Triplett bildet die sog. **adjungierte Darstellung** der $SU(2)_I$, und transformiert sich entsprechend wie

$$\vec{\phi} \longrightarrow \vec{\phi}' = U_a \vec{\phi} \ , \tag{6.107}$$

wobei

$$U_a = \exp\left(-i\,\vec{\beta}\cdot\vec{T}\right) \ \in \ SU(2)_I \tag{6.108}$$

ein Element der $SU(2)_I$ in der **adjungierten Darstellung** ist. Der Vektor der Parameter ist $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ und der Vektor der Generatoren in der **adjungierten Darstellung** ist $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$, mit

$$(T_i)_{jk} = -i\,\epsilon_{ijk} \ , \quad i,j,k = 1,2,3 \ . \tag{6.109}$$

Diese Generatoren sind offensichtlich (3×3)–Matrizen, und dementsprechend ist auch U_a eine (3×3)–Matrix, die die Komponenten des Iso-Tripletts untereinander transformiert.

Die Lagrange–Dichte des **nichtwechselwirkenden** Pion-Nukleon-Systems ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} - m^2\vec{\phi}\cdot\vec{\phi}\right) \\ &= \bar{\psi}_p(i\partial\!\!\!/ - M)\psi_p + \bar{\psi}_n(i\partial\!\!\!/ - M)\psi_n + \partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ - m^2\pi^-\pi^+ \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - m^2(\pi^0)^2\right] \ . \end{aligned} \tag{6.110}$$

Man beachte die unterschiedliche Normierung der Terme, die den geladenen Pionen entsprechen, im Vergleich zu denen des neutralen Pions. Dies muss aber so sein, denn wenn wir $\Phi \equiv \pi^+$ identifizieren, ist $\pi^- = (\pi^+)^* \equiv \Phi^*$ und die Terme der geladenen Pionen entsprechen genau der Lagrange–Dichte (2.79) des geladenen skalaren Feldes.

Die Lagrange–Dichte (6.110) ist **invariant** unter (globalen) $SU(2)_I$–Transformationen, da

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi \quad &\longrightarrow \quad \bar{\psi}'(i\partial\!\!\!/ - M)\psi' = \bar{\psi}\, U_f^\dagger (i\partial\!\!\!/ - M) U_f \psi = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M) U_f^\dagger U_f \psi \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi \ , \\
\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} \quad &\longrightarrow \quad \vec{\phi}'\cdot\vec{\phi}' = \phi_i'\phi_i' = (U_a)_{ij}\phi_j (U_a)_{ik}\phi_k = \phi_j (U_a)^T_{ji}(U_a)_{ik}\phi_k \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \phi_j (U_a)^\dagger_{ji}(U_a)_{ik}\phi_k = \phi_j \delta_{jk}\phi_k = \phi_k\phi_k \equiv \vec{\phi}\cdot\vec{\phi} \ .
\end{aligned} \tag{6.111}$$

und analog

$$\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu\vec{\phi}'\cdot\partial^\mu\vec{\phi}' \equiv \partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} \ .$$

Hier haben wir benutzt, dass eine (3×3)–Matrix, die die Komponenten eines **reellwertigen** dreidimensionalen Vektors ineinander transformiert, ebenfalls reellwertig sein muss, d.h. $U_a \in \mathbb{R}$, weshalb $U_a^T \equiv U_a^\dagger$.

Nun stellt sich die Frage, wie der wechselwirkende Anteil $\mathcal{L}_{\text{int}}$ der Lagrange–Dichte aussieht. Wir suchen nach einer Form, die $\vec{\phi}$ mit $\bar{\psi}$ und ψ in einer $SU(2)_I$–**invarianten** Weise koppelt. Die naive Yukawa–Kopplung

$$g\,\bar{\psi}\,\vec{\phi}\,\psi$$

scheidet offenbar sofort aus, denn ein einzelner Isospin-Vektor $\vec{\phi}$ ist niemals invariant. Wir müssen das **Skalarprodukt** mit einem anderen Vektor in der adjungierten Darstellung der $SU(2)_I$ bilden, damit wir eine $SU(2)_I$–Invariante erhalten. Aber wir können nicht einfach einen weiteren Vektor $\vec{\phi}$ nehmen,

$$g\,\bar{\psi}\,\vec{\phi}\cdot\vec{\phi}\,\psi \ ,$$

denn dieser Term enthält **zwei** Felder $\vec{\phi}$ und nicht ein einzelnes. Wir könnten aber das Skalarprodukt von $\vec{\phi}$ mit dem **Vektor** der Pauli–Matrizen nehmen, also

$$g\,\bar{\psi}\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi \ . \tag{6.112}$$

Wir überzeugen uns davon, dass dieser Ausdruck invariant unter $SU(2)_I$–Transformationen ist. Offenbar genügt es, dies für **infinitesimale** Transformationen zu zeigen. Für solche gilt gemäß Gl. (6.107)

$$\begin{aligned}
\vec{\phi} \quad &\longrightarrow \quad \vec{\phi}' = (\mathbb{1} - i\vec{\beta}\cdot\vec{T})\vec{\phi} + O(\beta^2) = \vec{e}_j[\phi_j - i\beta_i(T_i)_{jk}\phi_k] + O(\beta^2) \\
&\qquad = \vec{e}_j(\phi_j - \beta_i\epsilon_{ijk}\phi_k) + O(\beta^2) = \vec{e}_j(\phi_j + \epsilon_{jik}\beta_i\phi_k) + O(\beta^2) \\
&\qquad = \vec{\phi} + \vec{\beta}\times\vec{\phi} + O(\beta^2) \ ,
\end{aligned} \tag{6.113}$$

also

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\phi} \quad \longrightarrow \quad \vec{\tau}\cdot\vec{\phi}' = \vec{\tau}\cdot\vec{\phi} + \vec{\tau}\cdot\vec{\beta}\times\vec{\phi} + O(\beta^2) \ . \tag{6.114}$$

Unter Benutzung der $SU(2)$–Vertauschungsrelation

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk} t_k = i\epsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2} \tag{6.115}$$

können wir den zweiten Term in Gl. (6.114) folgendermaßen umschreiben,

$$\begin{aligned} \vec{\tau}\cdot\vec{\beta}\times\vec{\phi} &= \epsilon_{ijk}\tau_i\beta_j\phi_k = \epsilon_{kij}\tau_k\beta_i\phi_j = (-i)i\epsilon_{ijk}\tau_k\beta_i\phi_j = -2i[t_i,t_j]\beta_i\phi_j \\ &= -i\,\vec{t}\cdot\vec{\beta}\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi} + i\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\vec{t}\cdot\vec{\beta}\,. \end{aligned} \tag{6.116}$$

Damit läßt sich Gl. (6.114) (unter konsistenter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $O(\beta^2)$) wie folgt umformen,

$$\begin{aligned} \vec{\tau}\cdot\vec{\phi} \;\longrightarrow\; \vec{\tau}\cdot\vec{\phi}' &\simeq \vec{\tau}\cdot\vec{\phi} - i\,\vec{t}\cdot\vec{\beta}\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi} + i\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\vec{t}\cdot\vec{\beta} \\ &\simeq (\mathbb{1} - i\vec{t}\cdot\vec{\beta})\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,(\mathbb{1} + i\vec{t}\cdot\vec{\beta}) \\ &\simeq \exp(-i\vec{t}\cdot\vec{\beta})\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\exp(i\vec{t}\cdot\vec{\beta}) \\ &\equiv U_f(\vec{\beta})\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,U_f^\dagger(\vec{\beta})\,. \end{aligned} \tag{6.117}$$

Die Größe $\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}$ transformiert sich also wie eine **Matrix in der fundamentalen Darstellung**. Wenn wir $\bar{\psi}$ und ψ mit den Elementen $U_f^\dagger(\vec{\beta})$ und $U_f(\vec{\beta})$ der fundamentalen Darstellung der $SU(2)_I$ transformieren, d.h. also eine Transformation mit **demselben** Parametervektor $\vec{\beta}$ durchführen, folgt sofort die $SU(2)_I$–Invarianz des Ausdrucks (6.112),

$$g\,\bar{\psi}\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi \;\longrightarrow\; g\,\bar{\psi}'\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}'\,\psi' = g\,\bar{\psi}\,U_f^\dagger(\vec{\beta})U_f(\vec{\beta})\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,U_f^\dagger(\vec{\beta})U_f(\vec{\beta})\psi = g\,\bar{\psi}\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi\,. \tag{6.118}$$

Der Ausdruck (6.112) ist aber noch nicht ganz die korrekte Form für die Wechselwirkungs–Lagrange–Dichte $\mathcal{L}_{\text{int}}$. Wir müssen noch in Betracht ziehen, dass Pionen **pseudoskalare** Teilchen sind, d.h. sie transformieren sich **ungerade** unter **Paritätstransformationen**,

$$\vec{\phi}'(t,\vec{r}) = \mathcal{P}\vec{\phi}(t,\vec{r})\mathcal{P}^\dagger \equiv \eta_P\vec{\phi}(t,-\vec{r}) \equiv -\vec{\phi}(t,-\vec{r})\,. \tag{6.119}$$

Hierbei ist $\mathcal{P}$ der Operator der Paritätstransformation und η_P die **intrinsische Parität** des zu betrachtenden Teilchens. Für Pionen gilt $\eta_P = -1$. Auf der anderen Seite gilt, dass Nukleonen sich **gerade** unter Paritätstransformationen transformieren,

$$\begin{aligned} \psi'(t,\vec{r}) &= S(P)\psi(t,\vec{r}) = \eta_P\gamma_0\psi(t,-\vec{r}) \equiv +\gamma_0\psi(t,-\vec{r})\,, \\ \bar{\psi}'(t,\vec{r}) &= \psi'^\dagger(t,\vec{r})\gamma_0 = \psi^\dagger(t,-\vec{r})\gamma_0^2 = \bar{\psi}(t,-\vec{r})\gamma_0\,, \end{aligned} \tag{6.120}$$

wobei wir die intrinsische Parität $\eta_P = +1$ des Nukleons benutzt haben. Also transformiert sich der Ausdruck (6.112) unter Paritätstransformationen wie folgt

$$g\,\bar{\psi}'(t,\vec{r})\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}'(t,\vec{r})\,\psi'(t,\vec{r}) = -g\,\bar{\psi}(t,-\vec{r})\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}(t,-\vec{r})\,\psi(t,-\vec{r})\,. \tag{6.121}$$

Der Vorzeichenwechsel des räumlichen Arguments spielt hierbei keine Rolle: wenn wir in der Wirkung über den gesamten Raum integrieren, können wir diesen durch die Substitution $\vec{r}\to-\vec{r}$ beheben. Insgesamt bleibt jedoch ein Minuszeichen übrig, was bedeutet, dass sich der Ausdruck (6.112) **ungerade** unter Paritätstransformationen transformiert. Wir

würden jedoch gerne haben, dass sich $\mathcal{L}_{\text{int}}$ **gerade** unter Paritätstransformationen transformiert. Andernfalls würde dies bedeuten, dass die Pion-Nukleon-Wechselwirkung die Parität verletzt, was experimentell niemals beobachtet wurde. Die einfachste Möglichkeit, dies zu beheben, ist ein γ_5 einzufügen,

$$g\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi\ . \tag{6.122}$$

Dies transformiert sich wie folgt (wir lassen im folgenden die Raum-Zeit-Argumente weg; es ist klar, dass wir den Vorzeichenwechsel in der Raumvariable, $\vec{r}\to-\vec{r}$, bei der Paritätstransformation in der Wirkung durch Variablensubstitution $\vec{r}\to-\vec{r}$ bei der räumlichen Integration rückgängig machen können),

$$g\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi \;\longrightarrow\; g\,\bar{\psi}'\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}'\,\psi' = -g\,\bar{\psi}\,\gamma_0\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\gamma_0\,\psi = -g\,\bar{\psi}\,\gamma_0\,\gamma_5\,\gamma_0\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi = g\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi\ , \tag{6.123}$$

wobei wir $\gamma_0\gamma_5=-\gamma_5\gamma_0$ und $\gamma_0^2=1$ benutzt haben. Der Term (6.122) ist aber immer noch nicht ganz der korrekte Ausdruck für $\mathcal{L}_{\text{int}}$, denn er ist (für $g\in\mathbb{R}$) nicht hermitesch, sondern **anti-hermitesch**,

$$\begin{aligned}(g\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi)^\dagger &= g\,\psi^\dagger\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\gamma_5^\dagger\,\bar{\psi}^\dagger = g\,\bar{\psi}\gamma_0\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\gamma_5\,(\psi^\dagger\gamma_0)^\dagger\\ &= -\,g\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\gamma_0^2\,\psi = -\,g\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi\,,\end{aligned} \tag{6.124}$$

wobei wir die Hermitezität von γ_5 und von γ_0 sowie wieder $\gamma_0\gamma_5=-\gamma_5\gamma_0$ benutzt haben. Eine anti-hermitesche Wechselwirkungs–Lagrange–Dichte führt aber zu einer **nicht-unitären** Zeitentwicklung und damit zur Verletzung der Wahrscheinlichkeitserhaltung, was wir unbedingt vermeiden sollten. Glücklicherweise ist dies einfach zu beheben: wir multiplizieren den Ausdruck (6.122) einfach mit einem Faktor i,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = i\,g\,\bar{\psi}\,\gamma_5\,\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}\,\psi = i\,g\,\bar{\psi}^i_\alpha\,\gamma_{5,\alpha\beta}\tau^{ij}_a\,\phi_a\,\psi^j_\beta\ , \tag{6.125}$$

wobei die Indizes die Werte $i,j=1,2$ und $a=1,2,3$ annehmen. Wir haben hier zusätzlich die Dirac–Indizes explizit kenntlich gemacht und der besseren Übersicht halber die fundamentalen Isospin-Indizes als Superskripts geschrieben. In physikalischen Feldern lautet Gl. (6.125)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}} &= i\,g\,(\bar{\psi}_p,\bar{\psi}_n)\gamma_5\begin{pmatrix}\phi_3 & \phi_1-i\phi_2\\ \phi_1+i\phi_2 & -\phi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}\\ &= i\,g\,(\bar{\psi}_p\gamma_5,\bar{\psi}_n\gamma_5)\begin{pmatrix}\pi^0 & \sqrt{2}\,\pi^+\\ \sqrt{2}\,\pi^- & -\pi^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix}\\ &= i\,g\,\left(\bar{\psi}_p\gamma_5\,\pi^0\psi_p-\bar{\psi}_n\gamma_5\,\pi^0\psi_n+\sqrt{2}\,\bar{\psi}_p\gamma_5\,\pi^+\,\psi_n+\sqrt{2}\,\bar{\psi}_n\gamma_5\,\pi^-\,\psi_p\right)\ .\end{aligned} \tag{6.126}$$

Diese Wechselwirkungsterme lassen sich diagrammatisch wie in Abb. 6.4 gezeigt darstellen.

Das **erzeugende Funktional** für n–Punkt-Korrelationsfunktionen ist

$$Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\,\exp\left[i\int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\vec{J}(X)}\,,\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(X)}\,,\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\eta(X)}\right)\right]\,Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta]\ . \tag{6.127}$$

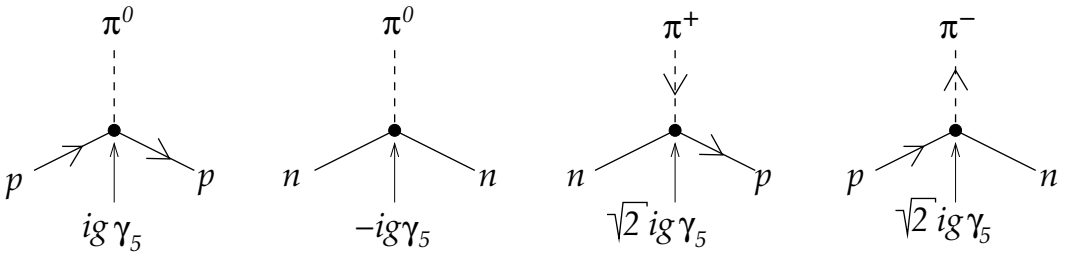


Abbildung 6.4: Diagrammatische Darstellung der Pion-Nukleon-Wechselwirkungsterme aus Gl. (6.126). Die Pfeile an den Linien deuten den Fluß der **positiven elektrischen** Ladung an, wobei beim letzten Diagramm zu beachten ist, dass ein **einlaufendes** π^- einer **auslaufenden** positiven Ladung entspricht.

Hierbei sind (wenn wir wie gehabt die Normierung $Z[0,0,0]=1$ fordern)

$$\mathcal{N}^{-1} = \exp\left[i\int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{J}(X)}\,,\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(X)}\,,\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(X)}\right)\right] Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta]\Big|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0}\,, \tag{6.128}$$

und (aufgrund von Gl. (6.125))

$$\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\vec{J}(X)}\,,\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(X)}\,,\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(X)}\right) = ig\frac{1}{(-i)}\frac{\delta}{\delta\eta^i_\alpha(X)}\,\gamma_{5,\alpha\beta}\tau^{ij}_a\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_a(X)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j_\beta(X)}\,. \tag{6.129}$$

Wie gehabt generieren diese Funktionalableitungen, angewendet auf $Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta]$, genau die Wechselwirkungs–Lagrange–Dichte (6.125). Das zusätzliche Minuszeichen im Nenner vor der Funktionalableitung nach $\eta^i_\alpha(X)$ rührt daher, dass man diese erst mit der Graßmann–Variable $\bar{\psi}^i_\alpha(X)$ (im Term $i\int \mathrm{d}^4X\,\bar{\psi}^i_\alpha(X)\eta^i_\alpha(X)$ im Exponenten von $Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta]$) vertauschen muss, bevor man sie auf $\eta^i_\alpha(X)$ anwenden kann.

Das erzeugende Funktional der nichtwechselwirkenden Theorie läßt sich wie gehabt in geschlossener Form angeben, vgl. Glgen. (5.57) und (5.152),

$$\begin{aligned} &Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta] \\ &= \exp\left\{-i\int \mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\left[\frac{1}{2}\,J_a(Y)\,\Delta_{F,ab}(Y-Z)\,J_b(Z) + \bar{\eta}^i_\gamma(Y)\,S^{ij}_{F,\gamma\delta}(Y-Z)\,\eta^j_\delta(Z)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{6.130}$$

Hierbei ist

$$\Delta_{F,ab}(Y-Z) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(Y-Z)}\frac{\delta_{ab}}{K^2-m^2+i\eta} \tag{6.131}$$

der **freie Feynman–Propagator** des Pionen-Feldes, $a,b=1,2,3$, und

$$S^{ij}_{F,\gamma\delta}(Y-Z) = \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,e^{-iK\cdot(Y-Z)}\frac{\not{K}_{\gamma\delta}+M\delta_{\gamma\delta}}{K^2-M^2+i\eta}\,\delta^{ij} \tag{6.132}$$

der **freie Feynman–Propagator** des Nukleon-Feldes, $i,j=1,2$.

Der Streuoperator ist

$$\hat{S} \;=\; :\exp\left\{\int \mathrm{d}^4X \left[\hat{\phi}_{a,\mathrm{in}}(X)(\Box_x + m^2)\delta_{ab}\,\frac{\delta}{\delta J_b(X)} + \hat{\bar{\psi}}^i_{\alpha,\mathrm{in}}(X)(i\,\partial\!\!\!/_x - M)_{\alpha\beta}\,\delta^{ij}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j_\beta(X)}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\delta}{\delta\eta^i_\alpha(X)}(-i\,\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_x - M)_{\alpha\beta}\,\delta^{ij}\,\hat{\psi}^j_{\beta,\mathrm{in}}(X)\right]\right\} : Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]\Big|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0} . \quad (6.133)$$

Hierzu sind folgende Bemerkungen zu machen:

(i) Der erste Term im Exponenten ist eine direkte Verallgemeinerung des Terms im Exponenten in Gl. (6.98) auf die drei Isospin-Freiheitsgrade $a = 1, 2, 3$ des Pions.

(ii) Der zweite Term im Exponenten ist die Übertragung des Terms im Exponenten in Gl. (6.98) auf Fermionen mit zwei Isospin-Freiheitsgraden $i, j = 1, 2$. Die Funktionalableitung nach $\bar{\eta}(X)$ erzeugt Korrelationsfunktionen von $\psi(X)$. Der Dirac–Operator $(i\partial\!\!\!/_x - M)$ "amputiert" die äußeren Beine und der Feldoperator $\hat{\bar{\psi}}_{\mathrm{in}}$ erzeugt oder vernichtet Fermionen. Der Dirac–adjungierte Feldoperator tritt auf, damit der gesamte Ausdruck ein Poincaré–Skalar ist. Wir haben Dirac–Indizes wieder explizit aufgeführt.

(iii) Der dritte Term im Exponenten ist das Analogon des zweiten Terms, aber mit einer Funktionalableitung nach $\eta(X)$ und einem Feldoperator $\hat{\psi}_{\mathrm{in}}$. Außerdem tritt der Dirac–Operator für das Dirac–adjungierte Feld auf, vgl. Gl. (2.115). Die gesamte Struktur ist wieder Poincaré–invariant. Wieder haben wir die Dirac–Indizes α, β explizit aufgeführt. Das zusätzliche Minuszeichen erklärt sich daraus, dass man die Graßmann–wertige Funktionalableitung nach η zunächst mit der Graßmann-Variable $\bar{\eta}$ im Exponenten von $Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta]$ vertauschen muss, bevor man sie auf η anwenden kann.

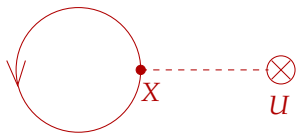
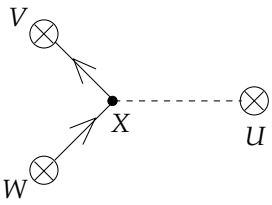
5.5.2021

Nun berechnen wir das erzeugende Funktional bis zur **zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten** g, durch Entwicklung der Exponentialfunktion in Gl. (6.127) bis zum Term zweiter Ordnung. Wir schreiben Dirac–Indizes explizit aus und notieren fundamentale Isospin-Indizes der besseren Übersicht halber als Superskripts,

$$Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta] = \mathcal{N}\left[1 + i\int \mathrm{d}^4X\, ig\,\frac{1}{(-i)}\,\frac{\delta}{\delta\eta^i_\alpha(X)}\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J_a(X)}\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j_\beta(X)}\right.$$
$$+ \frac{i^2}{2}\int \mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4X\, ig\,\frac{1}{(-i)}\,\frac{\delta}{\delta\eta^k_\gamma(Y)}\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J_b(Y)}\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^\ell_\delta(Y)}$$
$$\left. \times\, ig\,\frac{1}{(-i)}\,\frac{\delta}{\delta\eta^i_\alpha(X)}\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J_a(X)}\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j_\beta(X)} + O(g^3)\right]$$
$$\times\, e^{\int \mathrm{d}^4V\,\mathrm{d}^4W\left[\frac{1}{2}\,iJ_c(V)\,i\Delta_{F,cd}(V-W)\,iJ_d(W) + i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mn}_{F,\rho\sigma}(V-W)\,i\eta^n_\sigma(W)\right]} . \quad (6.134)$$

Es empfiehlt sich, die Terme der Ordnung $O(g)$ und $O(g^2)$ separat zu berechnen. Für den Term der Ordnung $O(g)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
Z_g \equiv\; & i \int \mathrm{d}^4X\, ig\, \frac{1}{(-i)}\, \frac{\delta}{\delta\eta^i_\alpha(X)}\, \gamma_{5,\alpha\beta}\, \tau^{ij}_a\, \frac{1}{i}\, \frac{\delta}{\delta J_a(X)} \int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\, i\eta^n_\sigma(W) \\
& \times e^{\int \mathrm{d}^4V\, \mathrm{d}^4W \left[\frac{1}{2}\, iJ_c(V)\, i\Delta_{F,cd}(V-W)\, iJ_d(W) + i\bar\eta^m_\rho(V)\, iS^{mn}_{F,\rho\sigma}(V-W)\, i\eta^n_\sigma(W)\right]} \\
=\; & i \int \mathrm{d}^4X\, ig\, \frac{1}{(-i)}\, \frac{\delta}{\delta\eta^i_\alpha(X)}\, \gamma_{5,\alpha\beta}\, \tau^{ij}_a \int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\, i\eta^n_\sigma(W) \\
& \times \int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\, iJ_d(U) \\
& \times e^{\int \mathrm{d}^4V\, \mathrm{d}^4W \left[\frac{1}{2}\, iJ_c(V)\, i\Delta_{F,cd}(V-W)\, iJ_d(W) + i\bar\eta^m_\rho(V)\, iS^{mn}_{F,\rho\sigma}(V-W)\, i\eta^n_\sigma(W)\right]} \\
=\; & i \int \mathrm{d}^4X\, ig\, \gamma_{5,\alpha\beta}\, \tau^{ij}_a \Bigg[-iS^{ji}_{F,\beta\alpha}(0) \int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\, iJ_d(U) \\
& - \int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\, i\eta^n_\sigma(W) \int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\, iJ_d(U) \\
& \times \int \mathrm{d}^4V\, i\bar\eta^m_\rho(V)\, iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X) \Bigg] Z_0[\vec J, \bar\eta, \eta] \\
=\; & i \int \mathrm{d}^4X \Bigg\{ -ig\, \mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\, \tau_a\, iS_F(0)\right] \int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\, iJ_d(U) \\
& + \int \mathrm{d}^4V\, i\bar\eta^m_\rho(V)\, iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\, ig\, \gamma_{5,\alpha\beta}\, \tau^{ij}_a \int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\, i\eta^n_\sigma(W) \\
& \times \int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\, iJ_d(U) \Bigg] Z_0[\vec J, \bar\eta, \eta]
\end{aligned}
$$

$\equiv$ [−  + ] $Z_0[\vec J, \bar\eta, \eta]$. (6.135)

Hier haben wir in der diagrammatischen Darstellung den Nukleonenpropagator iS_F mit einer durchgezogenen Linie und den Pionenpropagator $i\Delta_F$ mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet. Die Pfeile geben den Nukleonenfluss an, wobei beim zweiten Diagramm der Fluss aus der η–Quelle heraus und in die $\bar\eta$–Quelle hineinfließt. Die geschlossene Schleife im ersten Diagramm entspricht einer Spur über Dirac–und Isospin-Indizes, die wir mit $\mathrm{tr}_{D,I}$ abgekürzt haben. Die Farbkodierung haben wir eingeführt, um bei der Berechnung des Terms zweiter Ordnung die Übersicht zu behalten, welche Terme von diesen beiden Termen erster Ordnung herrühren.

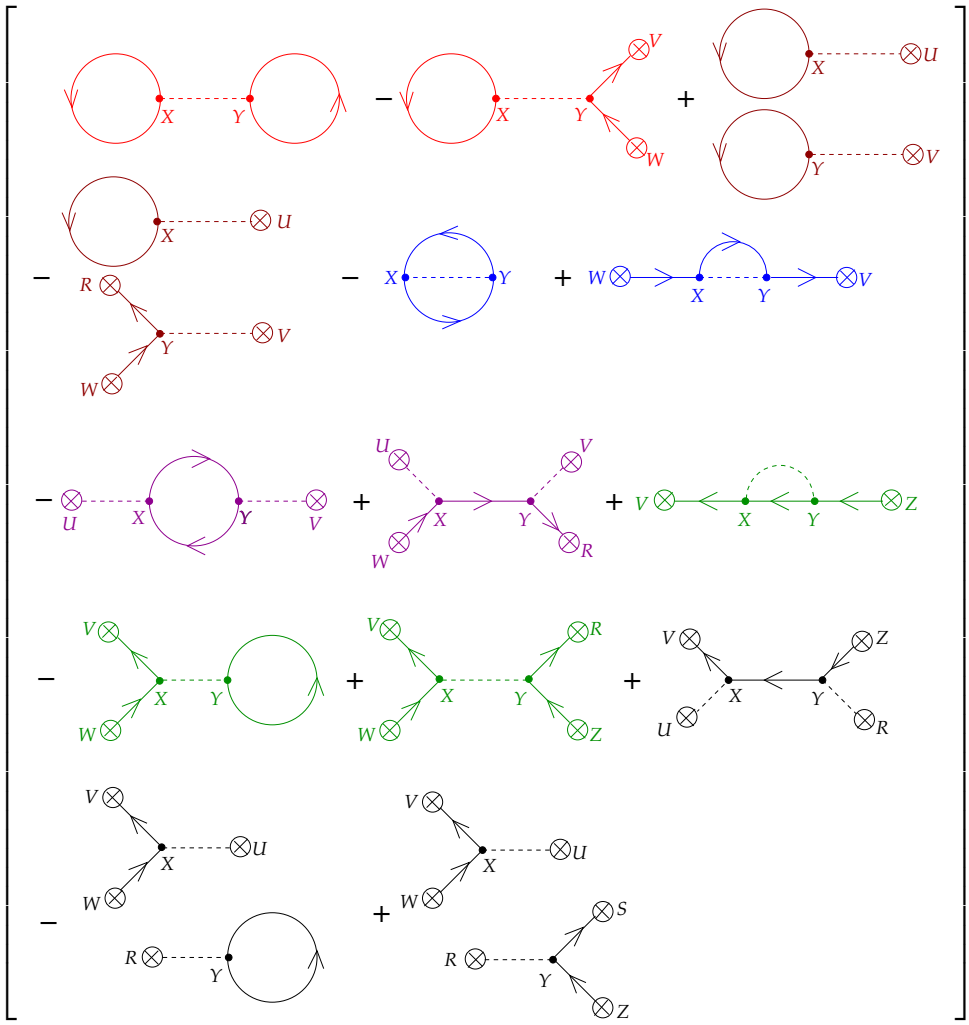
Der Term zweiter Ordnung $\sim O(g^2)$ berechnet sich unter Zuhilfenahme des gerade berechneten Terms (6.135) erster Ordnung wie folgt (die Farbkodierung der einzelnen Terme eines Ausdrucks soll die Zuordnung zu denen des vorangegangenen Ausdrucks erleichtern: Terme in rot und purpur rühren vom roten Term im vorangegangenen Ausdruck her, und entsprechend Terme in blau und violett vom blauen Term, sowie Terme in grün und schwarz vom schwarzen Term),

$$
\begin{aligned}
Z_{g^2} &= \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4Y\, ig\,\frac{1}{(-i)}\,\frac{\delta}{\delta\eta^k_\gamma(Y)}\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J_b(Y)}\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\bar\eta^\ell_\delta(Y)}\,Z_g \\
&= \frac{i^2}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\, ig\,\frac{1}{(-i)}\,\frac{\delta}{\delta\eta^k_\gamma(Y)}\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J_b(Y)} \\
&\times \Bigg\{ -ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(0)\right]\int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U)\int \mathrm{d}^4W\, iS^{\ell n}_{F,\delta\sigma}(Y-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
&+ iS^{\ell i}_{F,\delta\alpha}(Y-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W)\int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U) \\
&+ \int \mathrm{d}^4V\, i\bar\eta^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
&\quad\times\int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U)\int \mathrm{d}^4Z\, iS^{\ell p}_{F,\delta\tau}(Y-Z)\,i\eta^p_\tau(Z)\Bigg\}\,Z_0[\vec J,\bar\eta,\eta] \\
&= \frac{i^2}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\, ig\,\frac{1}{(-i)}\,\frac{\delta}{\delta\eta^k_\gamma(Y)}\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b \\
&\times \Bigg\{ -ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(0)\right]\, i\Delta_{F,ab}(X-Y)\int \mathrm{d}^4W\, iS^{\ell n}_{F,\delta\sigma}(Y-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
&- ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(0)\right]\int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U)\int \mathrm{d}^4W\, iS^{\ell n}_{F,\delta\sigma}(Y-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
&\quad\times\int \mathrm{d}^4V\, i\Delta_{F,bc}(Y-V)\,iJ_c(V) \\
&+ iS^{\ell i}_{F,\delta\alpha}(Y-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W)\,i\Delta_{F,ab}(X-Y) \\
&+ iS^{\ell i}_{F,\delta\alpha}(Y-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
&\quad\times\int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U)\int \mathrm{d}^4V\, i\Delta_{F,bc}(Y-V)\,iJ_c(V) \\
&+ \int \mathrm{d}^4V\, i\bar\eta^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
&\quad\times i\Delta_{F,ab}(X-Y)\int \mathrm{d}^4Z\, iS^{\ell p}_{F,\delta\tau}(Y-Z)\,i\eta^p_\tau(Z) \\
&+ \int \mathrm{d}^4V\, i\bar\eta^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
&\quad\times\int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U)\int \mathrm{d}^4Z\, iS^{\ell p}_{F,\delta\tau}(Y-Z)\,i\eta^p_\tau(Z) \\
&\quad\times\int \mathrm{d}^4R\, i\Delta_{F,bc}(Y-R)\,iJ_c(R)\Bigg\}\,Z_0[\vec J,\bar\eta,\eta]
\end{aligned}
$$

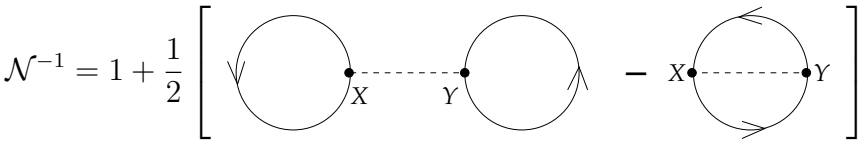
$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{i^2}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\Big\{\, ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(0)\right]\,i\Delta_{F,ab}(X-Y)\,ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_b\,iS_F(0)\right] \\
& \qquad - ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(0)\right]\,i\Delta_{F,ab}(X-Y) \\
& \times \int \mathrm{d}^4V\,i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mk}_{F,\rho\gamma}(V-Y)\,ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b \int \mathrm{d}^4W\,iS^{\ell n}_{F,\delta\sigma}(Y-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
+ \quad & ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(0)\right]\int \mathrm{d}^4U\,i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U) \\
& \times ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_b\,iS_F(0)\right]\int \mathrm{d}^4V\,i\Delta_{F,bc}(Y-V)\,iJ_c(V) \\
- \quad & ig\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(0)\right]\int \mathrm{d}^4U\,i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U)\int \mathrm{d}^4R\,i\bar{\eta}^m_\rho(R)\,iS^{mk}_{F,\rho\gamma}(R-Y) \\
& \times ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\int \mathrm{d}^4W\,iS^{\ell n}_{F,\delta\sigma}(Y-W)\,i\eta^n_\sigma(W)\int \mathrm{d}^4V\,i\Delta_{F,bc}(Y-V)\,iJ_c(V) \\
- \quad & \mathrm{tr}_{D,I}\left[iS_F(Y-X)\,ig\,\gamma_5\,\tau_a\,iS_F(X-Y)\,ig\,\gamma_5\,\tau_b\,i\Delta_{F,ab}(X-Y)\right] \\
+ \quad & \int \mathrm{d}^4V\,i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mk}_{F,\rho\gamma}(V-Y)\,ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\,iS^{\ell i}_{F,\delta\alpha}(Y-X)\,i\Delta_{F,ab}(X-Y) \\
& \times ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\,iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
- \quad & \int \mathrm{d}^4V\,iJ_c(V)\,i\Delta_{F,cb}(V-Y)\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[\,iS_F(X-Y)ig\,\gamma_5\,\tau_b\,iS_F(Y-X)\,ig\,\gamma_5\,\tau_a\right] \\
& \times \int \mathrm{d}^4U\,i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U) \\
+ \quad & \int \mathrm{d}^4V\,iJ_c(V)\,i\Delta_{F,cb}(V-Y)\int \mathrm{d}^4R\,i\bar{\eta}^m_\rho(R)\,iS^{mk}_{F,\rho\gamma}(R-Y)\,ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\,iS^{\ell i}_{F,\delta\alpha}(Y-X) \\
& \times ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\,iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W)\int \mathrm{d}^4U\,i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U) \\
+ \quad & \int \mathrm{d}^4V\,i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\,iS^{jk}_{F,\beta\gamma}(X-Y)ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\;i\Delta_{F,ba}(Y-X) \\
& \times \int \mathrm{d}^4Z\,iS^{\ell p}_{F,\delta\tau}(Y-Z)\,i\eta^p_\tau(Z) \\
- \quad & \int \mathrm{d}^4V\,i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\,iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
& \times i\Delta_{F,ab}(X-Y)\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[ig\,\gamma_5\,\tau_b\,iS_F(0)\right] \\
+ \quad & \int \mathrm{d}^4V\,i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\,iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W)\,i\Delta_{F,ab}(X-Y) \\
& \times \int \mathrm{d}^4R\,i\bar{\eta}^q_\sigma(R)\,iS^{qk}_{F,\sigma\gamma}(R-Y)\,ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\int \mathrm{d}^4Z\,iS^{\ell p}_{F,\delta\tau}(Y-Z)\,i\eta^p_\tau(Z) \\
+ \quad & \int \mathrm{d}^4U\,iJ_d(U)\,i\Delta_{F,da}(U-X)\int \mathrm{d}^4V\,i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a \\
& \times iS^{jk}_{F,\beta\gamma}(X-Y)\,ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b\int \mathrm{d}^4Z\,iS^{\ell p}_{F,\delta\tau}(Y-Z)\,i\eta^p_\tau(Z)\int \mathrm{d}^4R\,i\Delta_{F,bc}(Y-R)\,iJ_c(R) \\
- \quad & \int \mathrm{d}^4V\,i\bar{\eta}^m_\rho(V)\,iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\,ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a\int \mathrm{d}^4W\,iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\,i\eta^n_\sigma(W) \\
& \times \int \mathrm{d}^4U\,i\Delta_{F,ad}(X-U)\,iJ_d(U)\,\mathrm{tr}_{D,I}\left[ig\,\gamma_5\,\tau_b\,iS_F(0)\right]\int \mathrm{d}^4R\,i\Delta_{F,bc}(Y-R)\,iJ_c(R)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int \mathrm{d}^4V\, i\bar{\eta}^m_\rho(V)\, iS^{mi}_{F,\rho\alpha}(V-X)\, ig\,\gamma_{5,\alpha\beta}\,\tau^{ij}_a \int \mathrm{d}^4W\, iS^{jn}_{F,\beta\sigma}(X-W)\, i\eta^n_\sigma(W) \\
&\times \int \mathrm{d}^4U\, i\Delta_{F,ad}(X-U)\, iJ_d(U) \int \mathrm{d}^4S\, i\bar{\eta}^q_\kappa(S)\, iS^{qk}_{F,\kappa\gamma}(S-Y)\, ig\,\gamma_{5,\gamma\delta}\,\tau^{k\ell}_b \\
&\times \int \mathrm{d}^4Z\, iS^{\ell p}_{F,\delta\tau}(Y-Z)\, i\eta^p_\tau(Z) \int \mathrm{d}^4R\, i\Delta_{F,bc}(Y-R)\, iJ_c(R) \Big\}\, Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta] \qquad (6.136)
\end{aligned}
$$

7.5.2021



Die Normierungskonstante (6.128) bestimmt sich dann bis zur Ordnung $O(g^2)$ zu

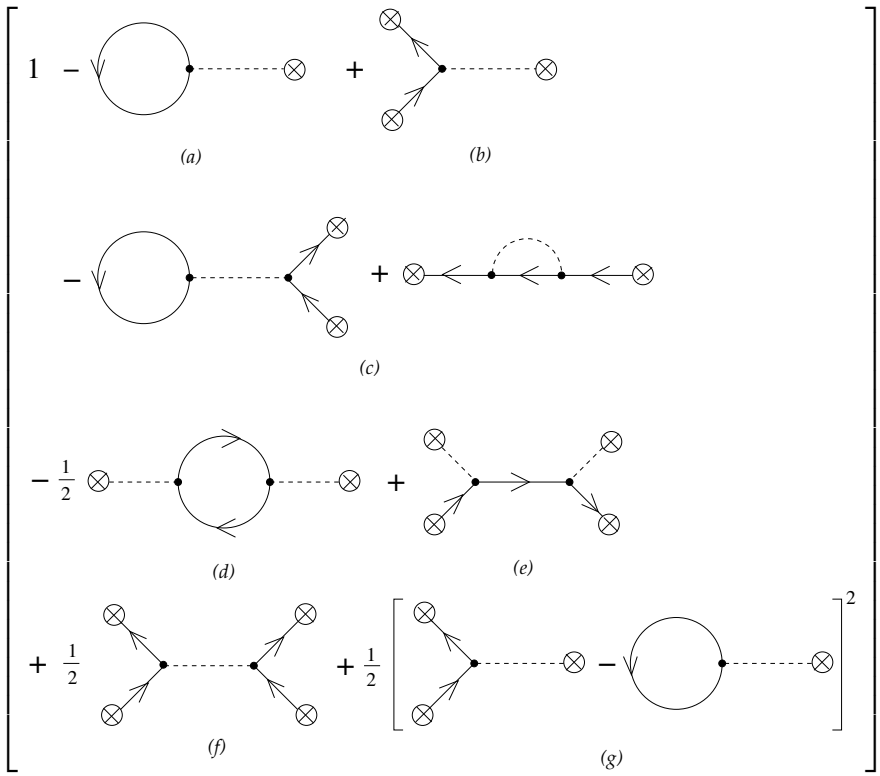


(6.137)

Wiederum heben sich die Vakuumdiagramme im Zähler und Nenner von Gl. (6.127) gegeneinander weg. Wenn wir noch topologisch äquivalente Diagramme zusammenfassen,

erhalten wir bis zur Ordnung $O(g^2)$

$Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta] \simeq$



$Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta]$. (6.138)

Diskussion der einzelnen Diagramme:

(a) Dieses Diagramm der Ordnung $O(g)$ ist das sog. **Kaulquappen-Diagramm** (engl. *tadpole diagram*). Die geschlossene Nukleonenschleife bildet den Kopf und der Pionenpropagator den Schwanz der Kaulquappe.

(b) Dieses Diagramm der Ordnung $O(g)$ ist der **Pion-Nukleon-Vertex**.

(c) Diese beiden Diagramme stellen die Beiträge der Ordnung $O(g^2)$ zur sog. **Nukleon-Selbstenergie** dar. Das erste Diagramm modifiziert die freie Propagation des Nukleons um einen *tadpole*–Einschub, das zweite ist der Beitrag des sog. **Pionaustausches**. Dabei wird ein Pion vom Nukleon emittiert, aber dann wieder von ihm eingefangen.

(d) Dieses Diagramm bildet den Beitrag der Ordnung $O(g^2)$ zur **Pion–Selbstenergie**. Dabei wird die freie Propagation des Pions durch **virtuelle Erzeugung** und **Vernichtung** eines Nukleon-Antinukleon-Paares modifiziert.

(e) Von links nach rechts in der Zeit gelesen stellt dieses Diagramm den Beitrag der Ordnung $O(g^2)$ zur **Pion-Nukleon-Streuung** dar. Ein Nukleon absorbiert ein Pion und emittiert es anschließend wieder. In der QED heißt der entsprechende Prozess (bei dem ein Elektron ein Photon absorbiert und wieder emittiert) **Compton–Streuung**. Liest man das Diagramm aber von unten nach oben in der Zeit, handelt

es sich um die **Vernichtung** eines Nukleon-Antinukleon-Paares mit anschließender **Erzeugung** von zwei Pionen. Umgekehrt, von oben nach unten gelesen, handelt es sich um die **Vernichtung** von zwei Pionen mit **Erzeugung** eines Nukleon-Antinukleon-Paares. Welche dieser Prozesse selektiert werden, entscheiden der jeweils gewählte Anfangs- bzw. Endzustand der S–Matrix. Da in diesen Diagrammen keine Schleifen (engl. *loops*) auftreten, spricht man von Diagrammen auf sog. **Baumgraphen-Niveau** (engl. *tree-level diagrams*).

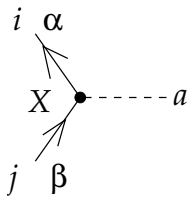
(f) Von unten nach oben gelesen handelt es sich bei diesem Baumgraph um den Beitrag der Ordnung $O(g^2)$ zur **Nukleon-Nukleon-Streuung**. Umgekehrt, von oben nach unten gelesen, handelt es sich um den $O(g^2)$–Beitrag zur **Antinukleon-Antinukleon-Streuung**. Von links nach rechts (oder rechts nach links) gelesen, handelt es sich um den $O(g^2)$–Beitrag zur **Nukleon-Antinukleon-Streuung**. Welche dieser Prozesse im einzelnen selektiert werden, entscheiden wiederum der jeweils gewählte Anfangs- bzw. Endzustand der S–Matrix.

(g) Hierbei handelt es sich lediglich um das Quadrat des $O(g)$–Beitrags, also um unverbundene Diagramme.

Wir fassen im folgenden noch einmal die **Feynman–Regeln in der Raum-Zeit** zusammen, die nötig sind, um Formeln in Diagramme zu übersetzen:

(i) **Pion-Nukleon-Vertex:**

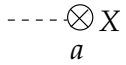
$$i \int \mathrm{d}^4X \, ig \, \gamma_{5,\alpha\beta} \, \tau_a^{ij} =$$



. (6.139)

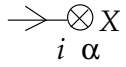
(ii) **Quellterme:**

$$\int \mathrm{d}^4X \, iJ_a(X) =$$



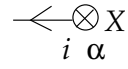
,

$$\int \mathrm{d}^4X \, i\bar{\eta}^i_\alpha(X) =$$



,

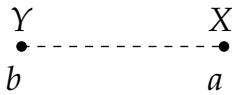
$$\int \mathrm{d}^4X \, i\eta^i_\alpha(X) =$$



. (6.140)

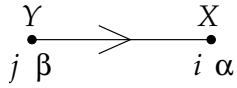
(iii) **Propagatoren:**

$$i\Delta_{F,ab}(X-Y) =$$



,

$$iS^{ij}_{F,\alpha\beta}(X-Y) =$$



. (6.141)

(iv) Jede **geschlossene** Fermionenschleife sorgt für ein zusätzliches Minuszeichen. Dieses haben wir allerdings immer explizit vor den Diagrammen notiert.

Die kombinatorischen Faktoren in Gl. (6.138) lassen sich auch leicht verstehen. Z.B. gibt es bei Diagramm (e) zwei Möglichkeiten, die Nukleonenbeine der beiden Vertizes miteinander zu verknüpfen, aber bei Diagramm (f) nur eine Möglichkeit, vgl. Abb. 6.5. Zusammen mit dem Faktor 1/2 vor dem Term der Ordnung $O(g^2)$ resultieren daraus die in Gl. (6.138) angegebenen Faktoren.

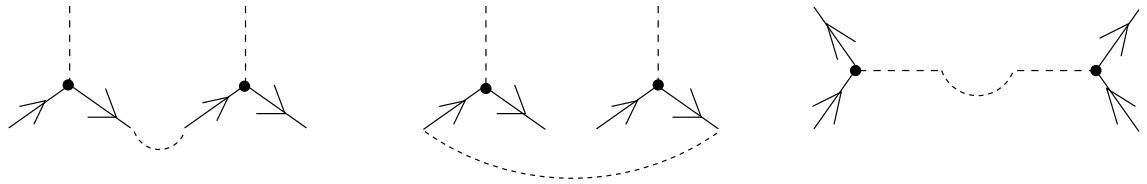


Abbildung 6.5: Es gibt zwei Möglichkeiten, das Diagramm der Pion-Nukleon-Streuung aus zwei Pion-Nukleon-Vertizes zu konstruieren, aber nur eine für das der Nukleon-Nukleon-Streuung.

Wir diskutieren jetzt die Pion-Nukleon-Streuung im Detail. Die Kinematik sei so, dass ein Pion mit Impuls $\vec{k}$ und Isospin a und ein Nukleon mit Impuls $\vec{p}$, Spin s und Isospin i einlaufe und ein Pion mit Impuls $\vec{k}'$ und Isospin b und ein Nukleon mit Impuls $\vec{p}'$, Spin s' und Isospin j auslaufe, vgl. Abb. 6.6.

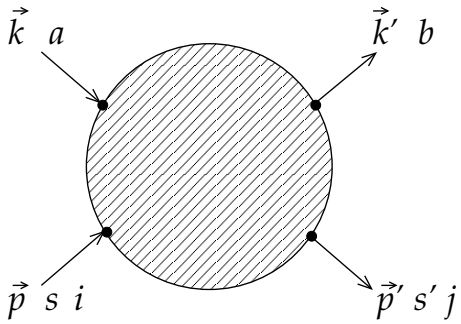


Abbildung 6.6: Kinematik der Pion-Nukleon-Streuung.

Der Eingangszustand ist demzufolge

$$|i\rangle_{\text{in}} = |\vec{p}, s, i\,;\, \vec{k}, a\rangle_{\text{in}} = \hat{b}^\dagger_{si,\text{in}}(\vec{p})\, \hat{a}^\dagger_{a,\text{in}}(\vec{k})\, |0\rangle \ . \tag{6.142}$$

Entsprechend ist der Endzustand

$${}_{\text{out}}\langle f| = {}_{\text{out}}\langle \vec{p}\,', s', j\,;\, \vec{k}\,', b| = \langle 0|\, \hat{b}_{s'j,\text{out}}(\vec{p}\,')\, \hat{a}_{b,\text{out}}(\vec{k}\,') \ . \tag{6.143}$$

Das S–Matrix-Element ist

$$S_{fi} = {}_{\text{out}}\langle f|i\rangle_{\text{in}} = {}_{\text{in}}\langle f|\hat{S}|i\rangle_{\text{in}} = \langle 0|\, \hat{b}_{s'j,\text{in}}(\vec{p}\,')\, \hat{a}_{b,\text{in}}(\vec{k}\,')\, \hat{S}\, \hat{b}^\dagger_{si,\text{in}}(\vec{p})\, \hat{a}^\dagger_{a,\text{in}}(\vec{k})\, |0\rangle \ . \tag{6.144}$$

Bei der Pion-Nukleon-Streuung handelt es sich um eine Vier-Punkt-Korrelationsfunktion (zwei ein- und zwei auslaufende Teilchen). Daher müssen wir die normalgeordnete Exponentialfunktion im Streuoperator (6.133) bis zur **vierten** Ordnung in ihrem Argument entwickeln. Bezeichnen wir

$$\begin{aligned}\hat{A} \;\equiv\; \int \mathrm{d}^4X \Bigg[& \hat{\phi}_{a,\mathrm{in}}(X)(\Box_x + m^2)\delta_{ab}\,\frac{\delta}{\delta J_b(X)} + \hat{\bar{\psi}}^i_{\alpha,\mathrm{in}}(X)(i\,\partial\!\!\!/_x - M)_{\alpha\beta}\,\delta^{ij}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^j_\beta(X)} \\ & - \frac{\delta}{\delta\eta^i_\alpha(X)}(-i\,\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_x - M)_{\alpha\beta}\,\delta^{ij}\,\hat{\psi}^j_{\beta,\mathrm{in}}(X)\Bigg]\,, \end{aligned} \tag{6.145}$$

so lautet der bis zur vierten Ordnung entwickelte Streuoperator

$$\hat{S} \simeq \left(1 + \hat{A} + \frac{1}{2}:\hat{A}^2: + \frac{1}{3!}:\hat{A}^3: + \frac{1}{4!}:\hat{A}^4:\right) Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]\Big|_{\vec{J},\bar{\eta},\eta=0}\,. \tag{6.146}$$

Beim Term erster Ordnung in $\hat{A}$ ist die Normalordnung überflüssig, da lediglich erste Potenzen von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auftreten. Wir setzen diesen Ausdruck in Gl. (6.144) ein und berechnen nun Term für Term. Wir unterdrücken auch den Index "in" an den Operatoren, da keine Verwechslung mehr möglich ist. Für den Term der Ordnung $\hat{A}^0$ erhalten wir mit $Z[0,0,0] = 1$

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle &= \langle 0|\,\left\{\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,'),\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\right\}\left[\hat{a}_b(\vec{k}\,'),\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\right]|0\rangle \\ &= 4E_pE_k\,\delta_{ss'}\,\delta_{ij}\,\delta_{ab}\,(2\pi)^6\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}\,')\,. \end{aligned} \tag{6.147}$$

Hier haben wir beim ersten Gleichheitszeichen benutzt, dass Vernichter (Erzeuger), nach rechts (links) angewendet auf das Vakuum, null ergeben. Für das zweite Gleichheitszeichen haben wir die bekannten Vertauschungsrelationen (3.36) und (3.121), entsprechend erweitert auf Isospin-Indizes, und die Normierung des Vakuumzustands, $\langle 0|0\rangle = 1$, ausgenutzt. Gleichung (6.147) bedeutet, dass **kein** Steuprozess stattgefunden hat, alle Teilchen behalten ihren Impuls und ihre Spin- und Isospin-Quantenzahlen.

Für den Term der Ordnung $\hat{A}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{A}\,Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0}\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^4X \Bigg[\langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{\phi}_c(X)\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle(\Box_x + m^2)\,\frac{\delta Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_c(X)}\Bigg|_{\vec{J},\bar{\eta},\eta=0} \\ &\qquad + \langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{\bar{\psi}}^k_\alpha(X)\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle(i\,\partial\!\!\!/_x - M)_{\alpha\beta}\,\frac{\delta Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta\bar{\eta}^k_\beta(X)}\Bigg|_{\vec{J},\bar{\eta},\eta=0} \\ &\qquad - \frac{\delta Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta\eta^k_\alpha(X)}\Bigg|_{\vec{J},\bar{\eta},\eta=0}(-i\,\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_x - M)_{\alpha\beta}\,\langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{\psi}^k_\beta(X)\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle\Bigg]\,. \end{aligned} \tag{6.148}$$

Setzen wir nun die Fourier–Entwicklung für die Feldoperatoren ein, so erkennen wir, dass wir bei allen Termen den Vakuumerwartungswert einer **ungeraden** Zahl von Erzeugern

oder Vernichtern erhalten. Daher gibt es immer einen überzähligen Vernichter (Erzeuger) der nach rechts (links) auf das Vakuum wirkt. Daher verschwinden alle Terme identisch.

Im Term der Ordnung $\hat{A}^2$ treten folgende Funktionalableitungen auf:

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta J \delta J}\,,\ \frac{\delta^2 Z}{\delta J \delta \bar{\eta}}\,,\ \frac{\delta^2 Z}{\delta J \delta \eta}\,,\ \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta} \delta \eta}\,,\ \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta \delta \eta}\,,\ \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta} \delta \bar{\eta}}\,. \tag{6.149}$$

Von diesen überleben, wenn wir die Quellen anschließend gleich null setzen, lediglich $\delta^2 Z/\delta J \delta J$ und $\delta^2 Z/\delta \bar{\eta} \delta \eta$, weil $\bar{\eta}$ und η in Z stets paarweise auftreten; wenn man nach der einen Quelle ableitet, muss man auch nach der anderen ableiten, um sie zu eliminieren, ansonsten verschwindet der Term, wenn man die Quellterme null setzt. Betrachten wir also zunächst den Term $\sim \delta^2 Z/\delta J \delta J$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,:\hat{\phi}_c(X)(\Box_x+m^2)\frac{\delta}{\delta J_c(X)}\,\hat{\phi}_d(Y)(\Box_y+m^2)\frac{\delta}{\delta J_d(Y)}: \\
&\qquad\qquad \times\, Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]\Big|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0}\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle \\
=\ &\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\left\{(\Box_x+m^2)(\Box_y+m^2)\,\frac{\delta^2 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_c(X)\delta J_d(Y)}\Bigg|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0}\right\} \\
&\qquad \times\,\langle 0|\left\{\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,'),\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\right\}\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,:\hat{\phi}_c(X)\hat{\phi}_d(Y):\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{6.150}$$

Hier haben wir einige Terme umsortiert, indem wir ausgenutzt haben, dass (a) die beiden d'Alembert–Operatoren lediglich auf die Funktionalableitung von Z wirken, (b) dass der fermionische Erzeugungsoperator mit den bosonischen Feldoperatoren und dem bosonischen Vernichter vertauscht und (c) dass die Kombination $\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})$ auch durch den entsprechenden Antikommutator ersetzt werden kann, da ein nach links auf das Vakuum wirkender Erzeuger null ergibt. Der Antikommutator der beiden fermionischen Operatoren ergibt nun aber

$$\left\{\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,'),\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\right\} = 2E_p\,\delta_{ss'}\,\delta_{ij}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\,,$$

d.h. das Nukleon behält seinen ursprünglichen Impuls, Spin und Isospin bei. Dies bedeutet aber wiederum, dass **keine** Streuung stattgefunden hat. Nichtsdestotrotz lohnt es sich für spätere Zwecke, den bosonischen Vakuumerwartungswert zu berechnen,

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,:\hat{\phi}_c(X)\hat{\phi}_d(Y):\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle = \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,'}{(2\pi)^6 4E_qE_{q'}} \\
&\times\ \langle 0|\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,:\left[e^{-iQ\cdot X}\hat{a}_c(\vec{q})+e^{iQ\cdot X}\hat{a}^\dagger_c(\vec{q})\right]\left[e^{-iQ'\cdot Y}\hat{a}_d(\vec{q}\,')+e^{iQ'\cdot Y}\hat{a}^\dagger_d(\vec{q}\,')\right]:\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,'}{(2\pi)^6 4E_qE_{q'}}\Big[e^{-iQ\cdot X-iQ'\cdot Y}\langle 0|\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{a}_c(\vec{q})\,\hat{a}_d(\vec{q}\,')\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle \\
&\qquad + e^{-iQ\cdot X+iQ'\cdot Y}\langle 0|\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{a}^\dagger_d(\vec{q}\,')\,\hat{a}_c(\vec{q})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle \\
&\qquad + e^{iQ\cdot X-iQ'\cdot Y}\ \langle 0|\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{a}^\dagger_c(\vec{q})\,\hat{a}_d(\vec{q}\,')\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle \\
&\qquad + e^{iQ\cdot X+iQ'\cdot Y}\ \langle 0|\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,\hat{a}^\dagger_c(\vec{q})\,\hat{a}^\dagger_d(\vec{q}\,')\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle\Big]\,.
\end{aligned} \tag{6.151}$$

Der erste und letzte Term verschwinden, da sie eine ungerade Zahl von Erzeugern und Vernichtern enthalten. Beim zweiten und dritten Term können wir jeweils die beiden ersten und letzten Operatoren durch die entsprechenden Kommutatoren ersetzen, da die zusätzlichen Terme verschwinden (es wirken dort Vernichter nach rechts bzw. Erzeuger nach links auf das Vakuum). Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, \hat{a}_b(\vec{k}\,') :\hat{\phi}_c(X)\hat{\phi}_d(Y): \hat{a}_a^\dagger(\vec{k})\, |0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,'}{(2\pi)^6 4E_q E_{q'}} \\
&\quad \times \Big[e^{-iQ\cdot X+iQ'\cdot Y} 4E_{k'}E_k\, \delta_{ac}\, \delta_{bd}\, (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}\,' - \vec{q}\,')\, \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \\
&\quad + e^{iQ\cdot X-iQ'\cdot Y} 4E_{k'}E_k\, \delta_{ad}\, \delta_{bc}\, (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}\,' - \vec{q})\, \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}\,') \Big] \\
&= \delta_{ac}\, \delta_{bd}\, e^{-iK\cdot X+iK'\cdot Y} + \delta_{ad}\, \delta_{bc}\, e^{iK'\cdot X-iK\cdot Y} \,. \qquad (6.152)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in Gl. (6.150) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y \left\{ (\Box_x + m^2)(\Box_y + m^2)\, \frac{\delta^2 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_c(X)\delta J_d(Y)}\bigg|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0} \right\} \\
&\qquad\qquad \times \langle 0| \left\{ \hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,'), \hat{b}_{si}^\dagger(\vec{p}) \right\} \hat{a}_b(\vec{k}\,') :\hat{\phi}_c(X)\hat{\phi}_d(Y): \hat{a}_a^\dagger(\vec{k})\, |0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\, 2E_p\, \delta_{ss'}\, \delta_{ij}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,') \int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y \\
&\times \left\{ e^{-iK\cdot X} (\overrightarrow{\Box}_x + m^2)\, \frac{\delta^2 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_a(X)\delta J_b(Y)}\bigg|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0} (\overleftarrow{\Box}_y + m^2)\, e^{iK'\cdot Y} \right. \\
&\qquad \left. + e^{iK'\cdot X} (\overrightarrow{\Box}_x + m^2)\, \frac{\delta^2 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_b(X)\delta J_a(Y)}\bigg|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0} (\overleftarrow{\Box}_y + m^2)\, e^{-iK\cdot Y} \right\} . \qquad (6.153)
\end{aligned}$$

Durch Umbenennen $X \leftrightarrow Y$ erkennen wir, dass die beiden Terme in geschweiften Klammern identisch sind (die beiden Funktionalableitungen nach den Quellen $J_a(X)$, $J_b(Y)$ vertauschen), und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y \left\{ (\Box_x + m^2)(\Box_y + m^2)\, \frac{\delta^2 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_c(X)\delta J_d(Y)}\bigg|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0} \right\} \\
&\qquad\qquad \times \langle 0| \left\{ \hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,'), \hat{b}_{si}^\dagger(\vec{p}) \right\} \hat{a}_b(\vec{k}\,') :\hat{\phi}_c(X)\hat{\phi}_d(Y): \hat{a}_a^\dagger(\vec{k})\, |0\rangle \\
&= 2E_p\, \delta_{ss'}\, \delta_{ij}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,') \int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y \\
&\times \left\{ e^{-iK\cdot X} (\overrightarrow{\Box}_x + m^2)\, \frac{\delta^2 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_a(X)\delta J_b(Y)}\bigg|_{\vec{J}=\bar{\eta}=\eta=0} (\overleftarrow{\Box}_y + m^2)\, e^{iK'\cdot Y} \right\} . \qquad (6.154)
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Term $\sim \delta^2 Z/\delta\bar\eta\delta\eta$, 12.5.2021

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\,\langle 0|\,\hat b_{s'j}(\vec p\,')\,\hat a_b(\vec k\,')\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y \\
&\times\Bigg\{ :\hat{\bar\psi}^k_\alpha(X)(i\partial\!\!\!/_x - M)_{\alpha\beta}\,\frac{\delta^2 Z[\vec J,\bar\eta,\eta]}{\delta\bar\eta^k_\beta(X)\delta\eta^\ell_\gamma(Y)}\bigg|_{\vec J=\bar\eta=\eta=0}(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_y - M)_{\gamma\delta}\,\hat\psi^\ell_\delta(Y): \\
&\quad + (i\partial\!\!\!/_y - M)_{\gamma\delta}\,\frac{\delta^2 Z[\vec J,\bar\eta,\eta]}{\delta\eta^k_\beta(X)\delta\bar\eta^\ell_\delta(Y)}\bigg|_{\vec J=\bar\eta=\eta=0}(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_x - M)_{\beta\alpha}\,:\hat\psi^k_\alpha(X)\hat{\bar\psi}^\ell_\gamma(Y):\Bigg\}\,\hat b^\dagger_{si}(\vec p)\,\hat a^\dagger_a(\vec k)\,|0\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{6.155}
$$

Den bosonischen Vernichtungsoperator können wir ohne weiteres direkt vor den entsprechenden Erzeugungsoperator schreiben, da er mit allen anderen Operatoren vertauscht. Anwenden der Kommutationsrelation (3.36) führt dann zu dem Schluss, dass das Boson seinen Impuls beibehält, dass also wiederum **keine** Streuung stattfindet. Wir berechnen den Ausdruck dennoch für spätere Zwecke weiter,

$$
\begin{aligned}
\ldots &= -\frac{1}{2}\,2E_k\,\delta_{ab}\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec k-\vec k\,')\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y \\
&\times\Bigg\{(i\partial\!\!\!/_x - M)_{\alpha\beta}\,\frac{\delta^2 Z[\vec J,\bar\eta,\eta]}{\delta\bar\eta^k_\beta(X)\delta\eta^\ell_\gamma(Y)}\bigg|_0(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_y - M)_{\gamma\delta}\,\langle 0|\,\hat b_{s'j}(\vec p\,')\,:\hat{\bar\psi}^k_\alpha(X)\,\hat\psi^\ell_\delta(Y):\,\hat b^\dagger_{si}(\vec p)\,|0\rangle \\
&+\ (i\partial\!\!\!/_y - M)_{\gamma\delta}\,\frac{\delta^2 Z[\vec J,\bar\eta,\eta]}{\delta\eta^k_\beta(X)\delta\bar\eta^\ell_\delta(Y)}\bigg|_0(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_x - M)_{\beta\alpha}\,\langle 0|\,\hat b_{s'j}(\vec p\,')\,:\hat\psi^k_\alpha(X)\,\hat{\bar\psi}^\ell_\gamma(Y):\,\hat b^\dagger_{si}(\vec p)\,|0\rangle\Bigg\}\,.
\end{aligned}
\tag{6.156}
$$

Die Vakuumerwartungswerte berechnen wir ganz analog wie den in Gl. (6.152), indem wir die Fourier–Entwicklung (3.119) der Feldoperatoren einsetzen,

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\,\hat b_{s'j}(\vec p\,')\,:\hat{\bar\psi}^k_\alpha(X)\hat\psi^\ell_\delta(Y):\,\hat b^\dagger_{si}(\vec p)\,|0\rangle &= \sum_{r,r'}\int\frac{\mathrm{d}^3\vec q\,\mathrm{d}^3\vec q\,'}{(2\pi)^6 4E_qE_{q'}} \\
\times\langle 0|\,\hat b_{s'j}(\vec p\,')\,:&\Big[e^{-iQ\cdot X}\hat d_{rk}(\vec q)\,\bar v^k_\alpha(\vec q,r)+e^{iQ\cdot X}\hat b^\dagger_{rk}(\vec q)\,\bar u^k_\alpha(\vec q,r)\Big] \\
&\times\Big[e^{-iQ'\cdot Y}\hat b_{r'\ell}(\vec q\,')\,u^\ell_\delta(\vec q\,',r')+e^{iQ'\cdot Y}\hat d^\dagger_{r'\ell}(\vec q\,')\,v^\ell_\delta(\vec q\,',r')\Big]:\,\hat b^\dagger_{si}(\vec p)\,|0\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{6.157}
$$

Alle Terme mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Antiteilchen verschwinden: die, die nur einen dieser Operatoren enthalten, verschwinden, wenn dieser (nach links oder rechts) auf das Vakuum wirkt, und der Term $:\hat d_{rk}(\vec q)\hat d^\dagger_{r'\ell}(\vec q\,'):= -\hat d^\dagger_{r'\ell}(\vec q\,')\hat d_{rk}(\vec q)$ verschwindet ebenfalls, da das Vakuum keine Antiteilchen enthält. Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \sum_{r,r'}\int\frac{\mathrm{d}^3\vec q\,\mathrm{d}^3\vec q\,'}{(2\pi)^6 4E_qE_{q'}}\,\langle 0|\,\hat b_{s'j}(\vec p\,')\,\hat b^\dagger_{rk}(\vec q)\,\hat b_{r'\ell}(\vec q\,')\,\hat b^\dagger_{si}(\vec p)\,|0\rangle\,\bar u^k_\alpha(\vec q,r)\,u^\ell_\delta(\vec q\,',r')\,e^{iQ\cdot X-iQ'\cdot Y} \\
&= \sum_{r,r'}\int\frac{\mathrm{d}^3\vec q\,\mathrm{d}^3\vec q\,'}{(2\pi)^6 4E_qE_{q'}}\,\langle 0|\,\Big\{\hat b_{s'j}(\vec p\,'),\hat b^\dagger_{rk}(\vec q)\Big\}\Big\{\hat b_{r'\ell}(\vec q\,'),\hat b^\dagger_{si}(\vec p)\Big\}\,|0\rangle\,\bar u^k_\alpha(\vec q,r)\,u^\ell_\delta(\vec q\,',r')\,e^{iQ\cdot X-iQ'\cdot Y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r,r'} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,'}{(2\pi)^6 4E_q E_{q'}}\, 2E_q\, \delta_{s'r}\, \delta_{jk}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}\,' - \vec{q})\, 2E_{q'}\, \delta_{sr'}\, \delta_{i\ell}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}\,') \\
&\qquad \times \bar{u}^k_\alpha(\vec{q}, r)\, u^\ell_\delta(\vec{q}\,', r')\, e^{iQ\cdot X - iQ'\cdot Y} \\
&= \delta_{jk}\, \delta_{i\ell}\, \bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,', s')\, u^i_\delta(\vec{p}, s)\, e^{iP'\cdot X - iP\cdot Y} \,. \qquad (6.158)
\end{aligned}
$$

Ganz analog berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\, \hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,') :\hat{\psi}^k_\alpha(X)\hat{\bar{\psi}}^\ell_\gamma(Y): \hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\, |0\rangle &= \sum_{r,r'} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,'}{(2\pi)^6 4E_q E_{q'}} \\
&\times \langle 0|\, \hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,') : \Big[e^{-iQ\cdot X} \hat{b}_{rk}(\vec{q})\, u^k_\alpha(\vec{q}, r) + e^{iQ\cdot X} \hat{d}^\dagger_{rk}(\vec{q})\, v^k_\alpha(\vec{q}, r) \Big] \\
&\qquad \times \Big[e^{-iQ'\cdot Y} \hat{d}_{r'\ell}(\vec{q}\,')\, \bar{v}^\ell_\gamma(\vec{q}\,', r') + e^{iQ'\cdot Y} \hat{b}^\dagger_{r'\ell}(\vec{q}\,')\, \bar{u}^\ell_\gamma(\vec{q}\,', r') \Big] : \hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\, |0\rangle \\
&= -\sum_{r,r'} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}\,\mathrm{d}^3\vec{q}\,'}{(2\pi)^6 4E_q E_{q'}}\, \langle 0|\, \hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\, \hat{b}^\dagger_{r'\ell}(\vec{q}\,')\, \hat{b}_{rk}(\vec{q})\, \hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\, |0\rangle\, u^k_\alpha(\vec{q}, r)\, \bar{u}^\ell_\gamma(\vec{q}\,', r')\, e^{-iQ\cdot X + iQ'\cdot Y} \\
&= -\delta_{ik}\, \delta_{j\ell}\, \bar{u}^j_\gamma(\vec{p}\,', s')\, u^i_\alpha(\vec{p}, s)\, e^{-iP\cdot X + iP'\cdot Y} \,. \qquad (6.159)
\end{aligned}
$$

Das zusätzliche Minuszeichen stammt aus der Definition der Normalordnung für fermionische Operatoren. Setzen wir die Glgen. (6.158) und (6.159) in Gl. (6.156) ein, so resultiert

$$
\begin{aligned}
\ldots &= -\frac{1}{2}\, 2E_k\, \delta_{ab}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}\,') \int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y \qquad (6.160) \\
&\times \left\{ e^{iP'\cdot X} \bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,', s')\, (i\partial\!\!\!/_x - M)_{\alpha\beta} \left. \frac{\delta^2 Z[\vec{J}, \bar{\eta}, \eta]}{\delta\bar{\eta}^j_\beta(X)\delta\eta^i_\gamma(Y)} \right|_0 (-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_y - M)_{\gamma\delta}\, u^i_\delta(\vec{p}, s)\, e^{-iP\cdot Y} \right. \\
&- \left. e^{iP'\cdot Y} \bar{u}^j_\gamma(\vec{p}\,', s')\, (i\partial\!\!\!/_y - M)_{\gamma\delta} \left. \frac{\delta^2 Z[\vec{J}, \bar{\eta}, \eta]}{\delta\eta^i_\beta(X)\delta\bar{\eta}^j_\delta(Y)} \right|_0 (-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_x - M)_{\beta\alpha}\, u^i_\alpha(\vec{p}, s)\, e^{-iP\cdot X} \right\} .
\end{aligned}
$$

Im zweiten Term substituieren wir nun $X \leftrightarrow Y$ und vertauschen die Reihenfolge der funktionalen Ableitungen, was ein zusätzliches Minuszeichen erzeugt. Wir erkennen dann, dass der zweite Term identisch mit dem ersten ist und wir erhalten als Endresultat

$$
\begin{aligned}
\ldots &= -\, 2E_k\, \delta_{ab}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}\,') \int \mathrm{d}^4X\, \mathrm{d}^4Y \qquad (6.161) \\
&\times e^{iP'\cdot X} \bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,', s')\, (i\partial\!\!\!/_x - M)_{\alpha\beta} \left. \frac{\delta^2 Z[\vec{J}, \bar{\eta}, \eta]}{\delta\bar{\eta}^j_\beta(X)\delta\eta^i_\gamma(Y)} \right|_0 (-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_y - M)_{\gamma\delta}\, u^i_\delta(\vec{p}, s)\, e^{-iP\cdot Y} \,.
\end{aligned}
$$

Nun betrachten wir den Term der Ordnung $\hat{A}^3$. Hier treten dritte Funktionalableitungen von $Z[\vec{J}, \bar{\eta}, \eta]$ auf. Allerdings kann man sich wieder auf solche beschränken, in denen $\delta/\delta\bar{\eta}$ und $\delta/\delta\eta$ paarweise auftreten. Von diesen gibt es nur zwei,

$$
\frac{\delta^3 Z}{\delta J^3} \quad \text{und} \quad \frac{\delta^3 Z}{\delta J\, \delta\bar{\eta}\, \delta\eta} \,. \qquad (6.162)
$$

Aber diese Terme werden stets von einer **ungeraden** Anzahl von bosonischen Erzeugungs- oder Vernichtungsoperatoren begleitet, so dass das Endresultat, ähnlich wie beim Term der Ordnung $O(\hat{A})$, null ergibt.

Beim Term der Ordnung $O(\hat{A}^4)$ brauchen wir aus oben genannten Gründen nur die Funktionalableitungen

$$\frac{\delta^4 Z}{\delta J^4}\,,\quad \frac{\delta^4 Z}{\delta J^2\,\delta\bar{\eta}\,\delta\eta}\,,\quad \frac{\delta^4 Z}{\delta\bar{\eta}\,\delta\eta\,\delta\bar{\eta}\,\delta\eta}\,, \tag{6.163}$$

betrachten. Mit der ersten treten nur bosonische Feldoperatoren auf, d.h. das Fermion streut demzufolge nicht. Dieser Term ist daher uninteressant. Mit der letzten treten nur fermionische Feldoperatoren auf, d.h. das Boson streut nicht. Auch dieser Term ist daher für die Pion-Nukleon-Streuung vernachlässigbar. Der zweite Term lautet vollständig ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
&-\frac{12}{4!}\,\langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,:\hat{\phi}_c(X)(\Box_x+m^2)\,\hat{\bar{\psi}}^k_\alpha(Y)(i\partial\!\!\!/_y-M)_{\alpha\beta}\\
&\times\;\frac{\delta^4 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_c(X)\delta\bar{\eta}^k_\beta(Y)\delta\eta^\ell_\gamma(Z)\delta J_d(U)}\bigg|_0(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_z-M)_{\gamma\delta}\,\hat{\psi}^\ell_\delta(Z)(\overleftarrow{\Box}_u+m^2)\hat{\phi}_d(U):\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle\\
&=\;-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,(\Box_x+m^2)(i\partial\!\!\!/_y-M)_{\alpha\beta}\,\frac{\delta^4 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_c(X)\delta\bar{\eta}^k_\beta(Y)\delta\eta^\ell_\gamma(Z)\delta J_d(U)}\bigg|_0\\
&\times(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_z-M)_{\gamma\delta}(\overleftarrow{\Box}_u+m^2)\langle 0|\,\hat{b}_{s'j}(\vec{p}\,')\,\hat{a}_b(\vec{k}\,')\,:\hat{\phi}_c(X)\,\hat{\bar{\psi}}^k_\alpha(Y)\,\hat{\psi}^\ell_\delta(Z)\,\hat{\phi}_d(U):\,\hat{b}^\dagger_{si}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger_a(\vec{k})\,|0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{6.164}$$

Hier haben wir schon einige Terme durch Substitution der Integrationsvariablen zusammengefaßt, was den Faktor 12 in der ersten Zeile erklärt ($[(a-b)+c]^4 \sim \ldots + 6(a-b)^2c^2+\ldots \sim \ldots - 12\,a\,b\,c^2+\ldots$). Wichtig ist nun, sich klarzumachen, dass bei der Berechnung des verbleibenden Vakuumerwartungswertes der bosonische und fermionische Sektor komplett entkoppeln. Wir können daher einfach die vormals erhaltenen Resultate (6.154) und (6.161) kombinieren,

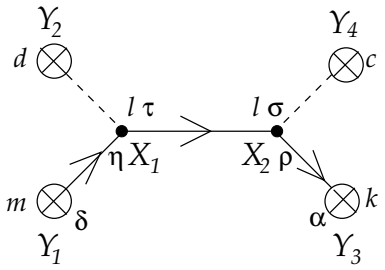
$$\begin{aligned}
\ldots\;&=\;-\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,\mathrm{d}^4U\,e^{iK'\cdot X}\,(\Box_x+m^2)\,e^{iP'\cdot Y}\,\bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,',s')\,(i\partial\!\!\!/_y-M)_{\alpha\beta}\\
&\times\;\frac{\delta^4 Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_b(X)\delta\bar{\eta}^j_\beta(Y)\delta\eta^i_\gamma(Z)\delta J_a(U)}\bigg|_0(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_z-M)_{\gamma\delta}\,u^i_\delta(\vec{p},s)\,e^{-iP\cdot Z}\,(\overleftarrow{\Box}_u+m^2)e^{-iK\cdot U}\,.
\end{aligned} \tag{6.165}$$

Der zusätzliche Faktor 2 gegenüber Gl. (6.164) erklärt sich aus Gl. (6.154), wo ebenfalls ein Faktor 2 auftrat. Bei Gl. (6.161) gab es diesen Faktor zwar auch, aber aufgrund der Tatsache, dass wir hier von Beginn an zwei Mischterme betrachtet hatten. Diese Mischterme sind in Gl. (6.164) bereits im Faktor 12 berücksichtigt.

Der nächste Schritt besteht in der Berechnung der Vier-Punkt-Korrelationsfunktion in Gl. (6.165). Dazu betrachten wir $Z[\vec{J},\bar{\eta},\eta]$ bis zur Ordnung $O(g^2)$, Gl. (6.136). Wenn wir einige oder alle Funktionalableitungen auf den Faktor $Z_0[\vec{J},\bar{\eta},\eta]$ wirken lassen, erzeugen wir weitere unverbundene Diagramme, die nichts mit der Pion-Nukleon-Streuung zu tun haben. Die Funktionalableitungen müssen also auf die Terme (a) bis (g) in Gl. (6.138) wirken. Da wir anschließend alle Quellterme null setzen, müssen wir Sorge tragen, dass **alle** Quellterme durch die Funktionalableitungen "amputiert" werden, ansonsten verschwindet der entsprechende Term. Also kommen nur zwei der aufgeführten Diagramme in Frage: (e)

und der Mischterm beim Ausmultiplizieren von (g). Aber letzterer ist ein unverbundenes Diagramm, hat also wieder nichts mit dem Streuprozess eines Pions an einem Nukleon zu tun. Wir brauchen also lediglich Diagramm (e) betrachten, vgl. Gl. (6.138),

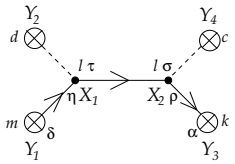
14.5.2021



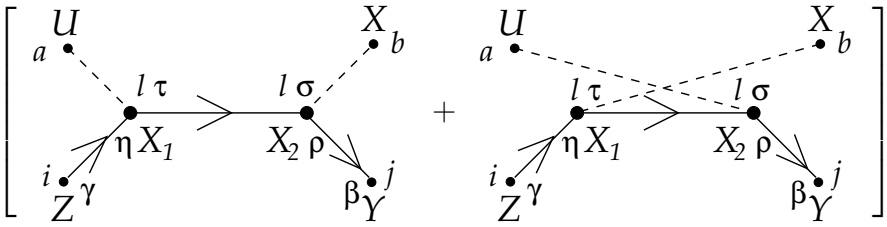
$$
\begin{aligned}
&= i^2 \int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2 \int \mathrm{d}^4Y_4\, iJ_c(Y_4)\, i\Delta_F(Y_4-X_2) \int \mathrm{d}^4Y_3\, i\bar{\eta}^k_\alpha(Y_3)\, iS_{F,\alpha\rho}(Y_3-X_2) \\
&\qquad \times ig\,\gamma_{5,\rho\sigma}\,\tau_c^{k\ell}\, iS_{F,\sigma\tau}(X_2-X_1)\, ig\,\gamma_{5,\tau\eta}\,\tau_d^{\ell m} \qquad (6.166)\\
&\qquad \times \int \mathrm{d}^4Y_1\, iS_{F,\eta\delta}(X_1-Y_1)\, i\eta^m_\delta(Y_1) \int \mathrm{d}^4Y_2\, i\Delta_F(X_1-Y_2)\, iJ_d(Y_2)\,.
\end{aligned}
$$

Hier haben wir im Vergleich zum entsprechenden Term in Gl. (6.136) die Vertizes in $X \to X_1$, $Y \to X_2$ und die äußeren Punkte in $W \to Y_1$, $U \to Y_2$, $R \to Y_3$ und $V \to Y_4$ umbenannt. Außerdem haben wir die Dirac–Indizes umbenannt und die Isospin-Summen unter Verwendung von $\Delta_{F,ab}(X-Y) \equiv \delta_{ab}\,\Delta_F(X-Y)$, $S_F^{ij}(X-Y) \equiv \delta^{ij} S_F(X-Y)$ vereinfacht. Nun berechnen wir gemäß Gl. (6.165) die vierte Funktionalableitung dieses Ausdrucks,

$$
\left.\frac{\delta^4 Z^{(e)}[\vec{J},\bar{\eta},\eta]}{\delta J_b(X)\delta\bar{\eta}^j_\beta(Y)\delta\eta^i_\gamma(Z)\delta J_a(U)}\right|_0 = i^4 \frac{\delta^4}{i\delta J_b(X)\, i\delta\bar{\eta}^j_\beta(Y)\, i\delta\eta^i_\gamma(Z)\, i\delta J_a(U)}
$$



$$
\begin{aligned}
&= -i^6 \int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2\, iS_{F,\beta\rho}(Y-X_2)\, ig\,\gamma_{5,\rho\sigma}\,\tau_c^{j\ell}\, iS_{F,\sigma\tau}(X_2-X_1)\, ig\,\gamma_{5,\tau\eta}\,\tau_d^{\ell i}\, iS_{F,\eta\gamma}(X_1-Z) \\
&\qquad \times \left[\delta_{bc}\,\delta_{ad}\, i\Delta_F(X-X_2)\, i\Delta_F(X_1-U) + \delta_{bd}\,\delta_{ac}\, i\Delta_F(U-X_2)\, i\Delta_F(X_1-X)\right]\,. \\
&= -i^6 \int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2 \Big[i\Delta_F(X-X_2)\, iS_{F,\beta\rho}(Y-X_2)\, ig\,\gamma_{5,\rho\sigma}\,\tau_b^{j\ell}\, iS_{F,\sigma\tau}(X_2-X_1) \\
&\qquad \times ig\,\gamma_{5,\tau\eta}\,\tau_a^{\ell i}\, iS_{F,\eta\gamma}(X_1-Z)\, i\Delta_F(X_1-U) \\
&\qquad + i\Delta_F(U-X_2)\, iS_{F,\beta\rho}(Y-X_2)\, ig\,\gamma_{5,\rho\sigma}\,\tau_a^{j\ell}\, iS_{F,\sigma\tau}(X_2-X_1) \\
&\qquad \times ig\,\gamma_{5,\tau\eta}\,\tau_b^{\ell i}\, iS_{F,\eta\gamma}(X_1-Z)\, i\Delta_F(X_1-X)\Big]
\end{aligned}
$$

$= -$ 

$\Big]\,.$ (6.167)

Bemerkungen:

(i) Das Vorzeichen folgt daraus, dass wir die Funktionalableitung nach der Graßmann–wertigen Variablen $\eta^i_\gamma(Z)$ zunächst mit der Graßmann–wertigen Variablen $\bar{\eta}^k_\alpha(Y_3)$ vertauschen müssen, bevor wir sie auf $\eta^m_\delta(Y_1)$ wirken lassen können.

(ii) Es treten zwei Terme auf, da wir die Funktionalableitungen nach $J_b(X)$ und $J_a(U)$ jeweils sowohl auf $J_c(Y_4)$ als auch auf $J_d(Y_2)$ anwenden können. Die diagrammatische Darstellung liefert Klarheit über die Bedeutung dieser beiden Terme: beim ersten Term wird das einlaufende Pion vom Nukleon bei X_1 absorbiert und das auslaufende Pion bei X_2 emittiert, während beim zweiten Term das auslaufende Pion vom Nukleon bei X_1 emittiert und das einlaufende Pion bei X_2 absorbiert wird.

(iii) Da die Positionen der Vertizes in der diagrammatischen Darstellung beliebig verschoben werden können, kann man das zweite Diagramm auch folgendermaßen darstellen:

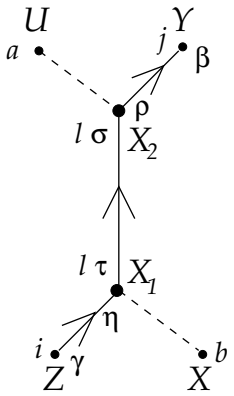


Abbildung 6.7: Alternative Darstellung des zweiten Diagramms aus Gl. (6.167).

Wir setzen nun den Ausdruck (6.167) in Gl. (6.165) ein und nutzen die folgenden Identitäten, die aus der Tatsache folgen, dass die Propagatoren bis auf Faktoren identisch mit den jeweiligen Green–Funktionen sind, vgl. Glgen. (5.141) und (5.144),

$$\begin{aligned}
i(\Box_x + m^2)\, i\Delta_F(X - X_i) &= \delta^{(4)}(X - X_i)\,, \\
i\Delta_F(X_i - U)\, i(\overleftarrow{\Box}_u + m^2) &= \delta^{(4)}(X_i - U)\,, \\
i(i\partial\!\!\!/_y - M)_{\alpha\beta}\, iS_{F,\beta\rho}(Y - X_2) &= -\delta_{\alpha\rho}\,\delta^{(4)}(Y - X_2)\,, \\
iS_{F,\eta\gamma}(X_1 - Z)\, i(-i\,\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_z - M)_{\gamma\delta} &= -\delta_{\eta\delta}\,\delta^{(4)}(X_1 - Z)\,. \qquad (6.168)
\end{aligned}$$

Das Streumatrix-Element S_{fi} besteht aus einer Reihe von Termen, die **keinem** echten Pion-Nukleon-Streuprozess entsprechen. Diese fassen wir in der Notation "1" zusammen. Der einzige Term, der einer **echten** Streuung von Pion und Nukleon entspricht, d.h. bei

dem sich auch die Impulse der beteiligten Teilchen **ändern** können, ist der Term von Gl. (6.165). Wir erhalten daher

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \text{“1”} + i^2 \int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2 \\
&\times \Big[e^{i(K'+P')\cdot X_2}\,\bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,',s')\,ig\,\gamma_{5,\alpha\sigma}\,\tau^{j\ell}_b\,iS_{F,\sigma\tau}(X_2-X_1)\,ig\,\gamma_{5,\tau\delta}\,\tau^{\ell i}_a\,u^i_\delta(\vec{p},s)\,e^{-i(K+P)\cdot X_1} \\
&\quad + e^{i(K'-P)\cdot X_1}\,\bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,',s')\,ig\,\gamma_{5,\alpha\sigma}\,\tau^{j\ell}_a\,iS_{F,\sigma\tau}(X_2-X_1)\,ig\,\gamma_{5,\tau\delta}\,\tau^{\ell i}_b\,u^i_\delta(\vec{p},s)\,e^{-i(K-P')\cdot X_2} \Big] \,.
\end{aligned}
\tag{6.169}
$$

Gegenüber Gl. (6.167) sind die Propagatoren, die die äußeren Punkte mit den Vertizes verbinden, nun durch Ebene-Wellenfaktoren (mit wohldefiniertem Impuls) und Dirac–Spinoren ersetzt worden,

$$
\begin{aligned}
i\Delta_F(X-X_2) &\longrightarrow e^{iK'\cdot X_2}\,, \\
i\Delta_F(X_1-U) &\longrightarrow e^{-iK\cdot X_1}\,, \\
i\Delta_F(X_1-X) &\longrightarrow e^{iK'\cdot X_1}\,, \\
i\Delta_F(U-X_2) &\longrightarrow e^{-iK\cdot X_2}\,, \\
iS_F(Y-X_2) &\longrightarrow \bar{u}(\vec{p}\,',s')\,e^{iP'\cdot X_2}\,, \\
iS_F(X_1-Z) &\longrightarrow u(\vec{p},s)\,e^{-iP\cdot X_1}\,,
\end{aligned}
\tag{6.170}
$$

Ein am Vertex bei X_i einlaufendes Pion mit Impuls K entspricht also einem Faktor $e^{-iK\cdot X_i}$, und ein auslaufendes mit Impuls K' trägt einen Faktor $e^{iK'\cdot X_i}$ bei. Bei Nukleonen haben wir zusätzlich zu den Ebene-Wellenfaktoren bei einem einlaufenden Nukleon mit Impuls P und Spin s noch einen Dirac–Spinor $u(\vec{p},s)$, und bei einem auslaufenden mit Impuls $\vec{p}\,'$ und Spin s' einen Dirac–adjungierten Spinor $\bar{u}(\vec{p}\,',s')$. Gleichung (6.169) läßt sich weiter auswerten, indem wir die Fourier–Darstellung (5.151) des Dirac–Propagators einsetzen und die Raum-Zeit-Integrale ausführen. Mit

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2\,e^{i(K'+P')\cdot X_2} \int \frac{\mathrm{d}^4Q}{(2\pi)^4}\,e^{-iQ\cdot(X_2-X_1)}\,i\,\frac{\not{Q}_{\sigma\tau}+M\,\delta_{\sigma\tau}}{Q^2-M^2+i\eta}\,e^{-i(K+P)\cdot X_1} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4Q}{(2\pi)^4}\,i\tilde{S}_{F,\sigma\tau}(Q)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(K'+P'-Q)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(Q-K-P) \\
&= i\tilde{S}_{F,\sigma\tau}(K+P)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(K'+P'-K-P)\,,
\end{aligned}
\tag{6.171}
$$

wobei

$$
\tilde{S}_{F,\sigma\tau}(Q) \equiv \frac{\not{Q}_{\sigma\tau}+M\,\delta_{\sigma\tau}}{Q^2-M^2+i\eta}\,,
\tag{6.172}
$$

sowie

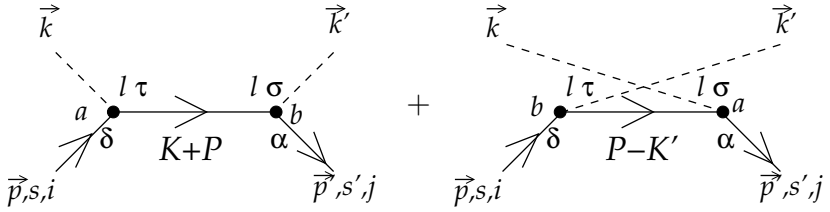
$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4X_1\,\mathrm{d}^4X_2\,e^{i(K'-P)\cdot X_1} \int \frac{\mathrm{d}^4Q}{(2\pi)^4}\,e^{-iQ\cdot(X_2-X_1)}\,i\,\frac{\not{Q}_{\sigma\tau}+M\,\delta_{\sigma\tau}}{Q^2-M^2+i\eta}\,e^{-i(K-P')\cdot X_2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4Q}{(2\pi)^4}\,i\tilde{S}_{F,\sigma\tau}(Q)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(K'-P+Q)\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(P'-K-Q) \\
&= i\tilde{S}_{F,\sigma\tau}(P-K')\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(K'+P'-K-P)\,,
\end{aligned}
\tag{6.173}
$$

erhalten wir letztendlich

$$S_{fi} = \text{“1”} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K' + P' - K - P)\, i\,\mathcal{M}_{fi}\ , \tag{6.174}$$

mit der **Streuamplitude**

$$i\,\mathcal{M}_{fi} = (-g)^2 \bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,', s')\, \gamma_{5,\alpha\sigma} \left[\tau^{j\ell}_b\, i\tilde{S}_{F,\sigma\tau}(K+P)\, \tau^{\ell i}_a + \tau^{j\ell}_a\, i\tilde{S}_{F,\sigma\tau}(P-K')\, \tau^{\ell i}_b \right] \gamma_{5,\tau\delta}\, u^i_\delta(\vec{p}, s)$$

$=$ 

$+$. (6.175)

Mit diesem Ergebnis haben wir den Streuprozess komplett im Energie-Impuls-Raum formuliert. Die δ–Funktion in Gl. (6.174) drückt die Energie-Impuls-Erhaltung im Streuprozess aus: die Summe der einlaufenden 4–Impulse ist gleich der Summe der auslaufenden. Das erste Diagramm in Gl. (6.175) ist der sog. ***s*–Kanal**, wobei

$$s = (K+P)^2 = (K'+P')^2 \tag{6.176}$$

die **erste Mandelstam–Variable** ist. Das zweite Diagramm in Gl. (6.175) ist der sog. ***u*–Kanal**, mit der **dritten Mandelstam–Variablen**

$$u = (P-K')^2 = (P'-K)^2\ . \tag{6.177}$$

Die **zweite Mandelstam–Variable** ist

$$t = (P-P')^2 = (K-K')^2\ . \tag{6.178}$$

Anhand der Diagramme in Gl. (6.175) können wir die **Feynman–Regeln** für die S–Matrix im Impulsraum ablesen. Wir geben diese hier zu Referenzzwecken in größerer Allgemeinheit an:

(i) In n–ter Ordnung in Störungstheorie zeichne man alle **topologisch inäquivalente, verbundene** Diagramme mit n Vertizes. Die **Amplitude** eines vorgegebenen Streuprozesses, also für vorgegebenen Anfangs- und Endzustand, ist dann identisch mit der Summe aller Diagramme, bei denen die einlaufenden Teilchen dem vorgegebenen Anfangszustand und die auslaufenden Teilchen dem vorgegebenem Endzustand entsprechen.

(ii) Für externe Linien gilt folgendes:

  (a) **Skalare** und **pseudoskalare** Teilchen beliebigen Impulses tragen einen Faktor 1 bei.

  (b) **Einlaufende Fermionen** mit 3–Impuls $\vec{p}$, Spin s und Isospin i werden durch den Dirac–Spinor $u^i(\vec{p}, s)$ repräsentiert.

  (c) **Einlaufende Anti-Fermionen** mit 3–Impuls $\vec{p}$, Spin s und Isospin i werden durch den Dirac–Spinor $v^i(\vec{p}, s)$ repräsentiert.

(d) **Auslaufende Fermionen** mit 3–Impuls $\vec{p}'$, Spin s' und Isospin j werden durch den Dirac–Spinor $\bar{u}^j(\vec{p}', s')$ repräsentiert.

(e) **Auslaufende Anti-Fermionen** mit 3–Impuls $\vec{p}'$, Spin s' und Isospin j werden durch den Dirac–Spinor $\bar{v}^j(\vec{p}', s')$ repräsentiert.

(f) **Spin–1–Bosonen** mit 3–Impuls $\vec{k}$, Polarisationsrichtung λ und Isospin a tragen einen Polarisationsvektor $\epsilon^{(\lambda)}_{a,\mu}(\vec{k})$ bei.

(iii) Für Vertizes, die die Wechselwirkung von Bosonen und Fermionen beschreiben, gilt folgendes:

(a) Skalar-isoskalar: ig.

(b) Skalar-isovektor: $ig\tau_a$.

(c) Pseudoskalar-isoskalar: $-g\gamma_5$.

(d) Pseudoskalar-isovektor: $-g\gamma_5\tau_a$.

(e) Vektor-isoskalar: $-ig\gamma^\mu$.

(f) Vektor-isovektor: $-ig\gamma^\mu\tau_a$.

(g) Axialvektor-isoskalar: $-ig\gamma^\mu\gamma_5$.

(h) Axialvektor-isovektor: $-ig\gamma^\mu\gamma_5\tau_a$.

Fall (d) ist derjenige, der in der Pion-Nukleon-Streuung auftritt. Der Faktor $-g = i^2 g$ erklärt sich aus einem Faktor ig aus der Lagrange–Dichte und einem weiteren Faktor i, der von den Feynman–Regeln für Vertizes im erzeugenden Funktional stammt. Für die anderen Wechselwirkungen gilt entsprechendes.

Jedem Vertex wird eine vierdimensionale δ–Funktion zugeordnet, die die Energie-Impuls-Erhaltung am Vertex garantiert,

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\ , \tag{6.179}$$

wobei $P_{i,f}$ die Summe der in den Vertex ein- bzw. auslaufenden Impulse darstellt.

(iv) Jede **interne Linie** entspricht einem Faktor i multipliziert mit dem entsprechenden Fourier–transformierten Propagator. Das Argument des Propagators ist der 4–Impuls Q, der über die Linie transportiert wird.

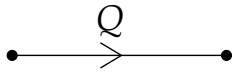
(a) Skalare und pseudoskalare Propagatoren:

$$i\tilde{\Delta}_F(Q) = \frac{i}{Q^2 - m^2 + i\eta} = \bullet\!\overset{Q}{\text{- - - - - - - - - - - -}}\!\bullet\ . \tag{6.180}$$

Falls weitere Quantenzahlen (wie z.B. Isospin in der adjungierten Darstellung) über den Propagator transportiert werden, ist dieser noch mit Kronecker–Deltas in diesen Quantenzahlen (z.B. für Isospin δ_{ab}, $a, b = 1, 2, 3$) zu multiplizieren.

(b) Propagatoren für Spin–1/2–Fermionen:

$$i\tilde{S}_F(Q) = \frac{i(\not{Q} + M)}{Q^2 - M^2 + i\eta} =$$

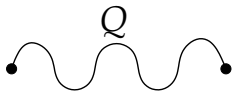


. (6.181)

Falls weitere Quantenzahlen (wie z.B. Isospin oder Farbe in der fundamentalen Darstellung) über den Propagator transportiert werden, ist dieser noch mit Kronecker–Deltas in diesen Quantenzahlen (z.B. für Isospin δ_{ij}, $i, j = 1, 2$ und für Farbe $\delta_{ij} = 1, \ldots, N_c$) zu multiplizieren.

(c) Propagatoren für masselose Spin–1–Bosonen (Eichbosonen) in kovarianter Eichung:

$$i\tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(\lambda)}(Q) = -\frac{i}{Q^2 + i\eta}\left[g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2 + i\eta}\right] =$$



. (6.182)

Falls weitere Quantenzahlen (wie z.B. Farbe in der adjungierten Darstellung) über den Propagator transportiert werden, ist dieser noch mit Kronecker–Deltas in diesen Quantenzahlen (z.B. für Farbe δ_{ab}, $a, b = 1, \ldots, N_c^2 - 1$) zu multiplizieren.

(d) Propagatoren für massive Spin–1–Bosonen in Stückelberg–Eichung (d.h. mit einer Lagrange–Dichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\,A\cdot A - \frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$):

$$i\tilde{\Delta}^{\mu\nu}_{F(\lambda)}(Q) = -i\,\frac{g^{\mu\nu} - Q^\mu Q^\nu/m^2}{Q^2 - m^2 + i\eta} - i\,\frac{Q^\mu Q^\nu/m^2}{Q^2 - m^2/\lambda + i\eta}\,. \tag{6.183}$$

Falls weitere Quantenzahlen (wie z.B. Isospin in der adjungierten Darstellung) über den Propagator transportiert werden, ist dieser noch mit Kronecker–Deltas in diesen Quantenzahlen (z.B. für Isospin δ_{ab}, $a, b = 1, 2, 3$) zu multiplizieren.

(v) Über alle **internen** 4–Impulse, d.h. also über die Impulse, die von Propagatoren transportiert werden, ist mit dem Maß $\int \mathrm{d}^4Q/(2\pi)^4$ zu integrieren.

19.5.2021

Die Streuamplitude (6.175) läßt sich noch weiter vereinfachen, indem wir die (Anti-) Vertauschungsrelationen für die Pauli-Matrizen,

$$\frac{1}{2}[\tau_a, \tau_b] = i\,\epsilon_{abc}\,\tau_c\,, \quad \frac{1}{2}\{\tau_a, \tau_b\} = \delta_{ab}\,, \tag{6.184}$$

also

$$\tau_a\tau_b = \delta_{ab} + i\,\epsilon_{abc}\tau_c\,, \quad \tau_b\tau_a = \delta_{ab} - i\,\epsilon_{abc}\tau_c\,, \tag{6.185}$$

und die Relation

$$\gamma_5\,\tilde{S}_F(Q)\,\gamma_5 = \gamma_5\,\frac{\not{Q} + M}{Q^2 - M^2 + i\eta}\,\gamma_5 = \gamma_5^2\,\frac{-\not{Q} + M}{Q^2 - M^2 + i\eta} = \tilde{S}_F(-Q) \tag{6.186}$$

benutzen, wobei wir bei der letzteren $\gamma^\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma^\mu$ und $\gamma_5^2 = 1$ benutzt haben. Dann lautet Gl. (6.175)

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= g^2 \bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,', s') \Big[(\delta_{ab}\,\delta^{ji} - i\,\epsilon_{abc}\tau_c^{ji})\,\tilde{S}_{F,\alpha\delta}(-K-P) \\
&\qquad + (\delta_{ab}\,\delta^{ji} + i\,\epsilon_{abc}\tau_c^{ji})\,\tilde{S}_{F,\alpha\delta}(K'-P) \Big]\, u^i_\delta(\vec{p}, s) \\
&= g^2 \bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,', s') \left\{ \delta_{ab}\delta^{ji} \left[\frac{-\not{K} - \not{P} + M}{(K+P)^2 - M^2 + i\eta} + \frac{\not{K}' - \not{P} + M}{(K'-P)^2 - M^2 + i\eta} \right]_{\alpha\delta} \right. \\
&\qquad \left. - i\,\epsilon_{abc}\tau_c^{ji} \left[\frac{-\not{K} - \not{P} + M}{(K+P)^2 - M^2 + i\eta} - \frac{\not{K}' - \not{P} + M}{(K'-P)^2 - M^2 + i\eta} \right]_{\alpha\delta} \right\} u^i_\delta(\vec{p}, s)\ .
\end{aligned} \tag{6.187}$$

Mit der 4–Impulserhaltung gilt

$$\bar{u}(\vec{p}\,', s')\,\not{K}'\,u(\vec{p}, s) = \bar{u}(\vec{p}\,', s')\,(\not{K} + \not{P} - \not{P}')\,u(\vec{p}, s) = \bar{u}(\vec{p}\,', s')\,\not{K}\,u(\vec{p}, s)\ , \tag{6.188}$$

wobei wir Gl. (3.108) und ihre Dirac–adjungierte Version, $\bar{u}(\vec{p}\,', s')\not{P}' = \bar{u}(\vec{p}\,', s')M$, benutzt haben. Mit den Mandelstam–Variablen (6.176) und (6.177) gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= g^2 \left[\delta_{ab}\delta^{ji} \left(-\frac{1}{s - M^2 + i\eta} + \frac{1}{u - M^2 + i\eta} \right) \right. \\
&\qquad \left. + i\,\epsilon_{abc}\tau_c^{ji} \left(\frac{1}{s - M^2 + i\eta} + \frac{1}{u - M^2 + i\eta} \right) \right] \bar{u}^j_\alpha(\vec{p}\,', s')\,\not{K}_{\alpha\delta}\,u^i_\delta(\vec{p}, s)\ .
\end{aligned} \tag{6.189}$$

Im ersten Term der Streuamplitude wird der **Isospin** der beteiligten Teilchen im Streuprozess **erhalten** (ausgedrückt durch das Produkt der δ–Funktionen), während er sich im zweiten Term **ändert**.

Im folgenden werden wir uns auf den Streuprozess $p\pi^+ \to p\pi^+$ konzentrieren. In diesem Fall trägt der s-Kanal nicht bei, da das Nukleon im Zwischenzustand die Ladung $+2|e|$ tragen würde, was unmöglich ist. Also trägt nur der u-Kanal bei, wo das Nukleon im Zwischenzustand die Ladung 0 trägt, also ein Neutron ist. Der Endzustand besteht dann wieder aus $p\pi^+$, d.h. die Isospin-Quantenzahlen sind identisch mit denen im Ausgangszustand. Also trägt lediglich der isospinerhaltende Anteil der Streuamplitude in Gl. (6.189) bei. Der $p\pi^+$–Vertex ist allerdings $\sim \sqrt{2}g$, nicht nur $\sim g$, vgl. Gl. (6.126). Also erhalten wir für die uns interessierende Streuamplitude mit $i = j = 1/2$ (dem Proton entsprechend) einfach

$$\mathcal{M}_{fi} = 2g^2\,\frac{1}{u - M^2 + i\eta}\,\bar{u}^{(1/2)}_\alpha(\vec{p}\,', s')\,\not{K}_{\alpha\delta}\,u^{(1/2)}_\delta(\vec{p}, s)\ . \tag{6.190}$$

Nun müssen wir die Streuamplitude mit einer **experimentellen Observablen** in Verbindung bringen. Diese Observable ist in der Regel der **Wirkungsquerschnitt** für den betrachteten Streuprozess. Zunächst definieren wir den **Übergangsoperator** $\hat{T}$ durch die Relation

$$\hat{S} = \mathbb{1} + i\,\hat{T}\ . \tag{6.191}$$

Dann kann das Streumatrix-Element S_{fi} folgendermaßen geschrieben werden,

$$S_{fi} = {}_{\text{out}}\langle f|i\rangle_{\text{in}} = {}_{\text{in}}\langle f|\hat{S}|i\rangle_{\text{in}} = {}_{\text{in}}\langle f|\mathbb{1} + i\hat{T}|i\rangle_{\text{in}} = {}_{\text{in}}\langle f|i\rangle_{\text{in}} + i\,{}_{\text{in}}\langle f|\hat{T}|i\rangle_{\text{in}} = \delta_{fi} + i\,T_{fi}\ , \tag{6.192}$$

wobei die **Übergangsamplitude**

$$T_{fi} \equiv {}_{\text{in}}\langle f|\hat{T}|i\rangle_{\text{in}} \tag{6.193}$$

alle **nicht-trivialen** Streuprozesse enthält, während δ_{fi} alle Prozesse beinhaltet, bei dem die beteiligten Teilchen **nicht** aneinander streuen. Die Übergangsamplitde ist mit der Streuamplitude durch die Relation

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f P_f'^{\mu} - \sum_i P_i^{\mu} \right) \mathcal{M}_{fi} \tag{6.194}$$

verknüpft, vgl. Gl. (6.174), wobei $P_f'^{\mu}$ der 4–Impuls des f–ten Teilchens im Endzustand und P_i^{μ} der 4–Impuls des i–ten Teilchens im Anfangszustand ist. "Nicht-triviale Streuung" bedeutet, dass lediglich **verbundene** Diagramme zu T_{fi} bzw. $\mathcal{M}_{fi}$ beitragen.

Man könnte nun denken, dass in einem Streuexperiment der Anfangsimpuls der beteiligten Teilchen recht genau durch die Beschleunigungsenergie (z.B. des Teilchenbeschleunigers) bestimmt ist, also der Anfangszustand aus Impuls-Eigenzuständen der beteiligten Teilchen besteht. Dies ist aber nicht so: in einem Beschleuniger werden **Projektil-Teilchen** in **lokalisierten Bündeln** beschleunigt. Die **Target-Teilchen** befinden sich entweder in Ruhe (engl. *fixed-target experiment*) in einem ebenfalls lokalisierten Target (weshalb sie auch nicht in einem Impuls-Eigenzustand sein können), oder in einem relativ zum Projektilstrahl gegenläufigen Strahl (engl. *collider experiment*), der aus lokalisierten Bündeln besteht. Impuls-Eigenzustände (also ebene Wellen) sind aber gerade **nicht** lokalisiert. Der Anfangszustand besteht also i.a. aus **Wellenpaketen**, die miteinander streuen. Daher gilt

$$|i\rangle_{\text{in}} = \prod_i \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}} \, \tilde{\phi}_i(\vec{q}_i) \, |\vec{q}_i\rangle_{\text{in}} \ , \tag{6.195}$$

wobei $\tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)$ die Fourier–Transformierte der Wellenfunktion des i–ten einlaufenden Teilchens ist,

$$\phi_i(X) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{q_i}}} \, e^{-iQ_i\cdot X} \, \tilde{\phi}_i(\vec{q}_i) \ , \quad Q_i^{\mu} = (E_{q_i}, \vec{q}_i)^T \ . \tag{6.196}$$

Die Wellenfunktion ist auf Eins normiert, d.h.

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathrm{d}^3\vec{x} \, |\phi_i(X)|^2 = \int \mathrm{d}^3\vec{x} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{q_i}}} \, e^{iQ_i\cdot X} \, \tilde{\phi}_i^*(\vec{q}_i) \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_i}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{k_i}}} \, e^{-iK_i\cdot X} \, \tilde{\phi}_i(\vec{k}_i) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i \, \mathrm{d}^3\vec{k}_i}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{q_i}E_{k_i}}} \, \tilde{\phi}_i^*(\vec{q}_i) \, \tilde{\phi}_i(\vec{k}_i) \, (2\pi)^3 \, \delta^{(3)}(\vec{q}_i - \vec{k}_i) \, e^{i(E_{q_i} - E_{k_i})t} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}} \, |\tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)|^2 \ . \end{aligned} \tag{6.197}$$

Obwohl sich die miteinander streuenden Teilchen in lokalisierten Bündeln (oder einem lokalisierten Target) befinden, ist in der Regel die Fourier–Transformierte $\tilde{\phi}(\vec{q}_i)$ dennoch eine Funktion, die ein **relativ scharfes** Maximum beim **mittleren** Impuls $\vec{p}_i \equiv \langle \vec{q}_i \rangle$ des i–ten

Teilchens hat. Dagegen ist der Endzustand im Prinzip ein **Impuls-Eigenzustand**, wenn man einen Teilchendetektor mit **unendlich guter Impuls-Auflösung** bauen könnte,

$$|f\rangle_{\text{in}} = \prod_f |\vec{p}'_f\rangle_{\text{in}} \,. \tag{6.198}$$

Ein *fixed-target* Streuprozess läßt sich nun wie in Abb. 6.8 gezeigt veranschaulichen.

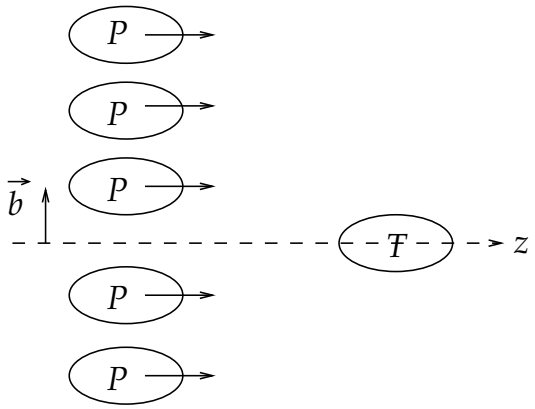


Abbildung 6.8: Schematische Darstellung eines *fixed-target* Streuprozesses.

Ein Bündel von Projektil-Teilchen "P" bewegt sich in Strahlrichtung (z–Richtung) auf ein Target-Teilchen "T", das im Labor ruht, zu. Es findet eine Kollision zwischen Target-Teilchen und einem der Projektil-Teilchen bei einem gewissen **Stoßparameter** $\vec{b}$ statt. Der Stoßparameter ist ein **zweidimensionaler** Vektor, der in der Ebene transversal zur Strahlrichtung liegt, $\vec{b} \cdot \vec{e}_z = 0$. Die Fourier–transformierte Wellenfunktion des Target-Teilchens sei $\tilde{\phi}_T(\vec{q}_T)$, die des Projektil-Teilchens $\tilde{\phi}_P(\vec{q}_P)\, e^{-i\vec{b}\cdot\vec{q}_P}$, wobei der Exponentialfaktor der räumlichen Verschiebung dieses Teilchens um den Stoßparameter $\vec{b}$ Rechnung trägt. Die **Amplitude** für den Streuprozess zwischen Projektil- und Target-Teilchen ist dann

$$\prod_{i=P,T} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}}\, \tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)\, e^{-i\vec{b}\cdot\vec{q}_P}\, T_{fi} \quad = \tag{6.199}$$

$$\prod_{i=P,T} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}}\, \tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)\, e^{-i\vec{b}\cdot\vec{q}_P}\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_f P_f'^{\,\mu} - Q_P^\mu - Q_T^\mu\right) \mathcal{M}_{fi}(P_1', P_2', \ldots; Q_P, Q_T) \,.$$

Hier ist die Definition der Amplituden T_{fi} und $\mathcal{M}_{fi}$ so modifiziert worden, dass der Anfangszustand aus einem Produkt von Impuls-Eigenzuständen besteht,

$$|i\rangle_{\text{in}} \longrightarrow \prod_{i=P,T} |\vec{q}_i\rangle_{\text{in}} \,, \tag{6.200}$$

so dass die Wellenfunktionen aus der Definition von $|i\rangle_{\text{in}}$ herausgezogen werden konnten. Der Endzustand ist nach Gl. (6.198) bereits ein Produkt aus Impuls-Eigenzuständen und muss daher nicht modifiziert werden.

Die **Wahrscheinlichkeit** für einen Streuprozess ist das Betragsquadrat der entsprechenden Amplitude, also

$$\prod_{i,j=P,T} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_{k_j}} \tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)\, \tilde{\phi}_j^*(\vec{k}_j)\, e^{i\vec{b}\cdot(\vec{k}_P-\vec{q}_P)}\, (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left(\sum_f P_f'^{\,\mu} - Q_P^\mu - Q_T^\mu \right)$$
$$\times \quad \delta^{(4)} \left(\sum_f P_f'^{\,\mu} - K_P^\mu - K_T^\mu \right) \mathcal{M}_{fi}(P_1', P_2', \ldots; Q_P, Q_T)\, \mathcal{M}_{jf}^*(P_1', P_2', \ldots; K_P, K_T)\,. \tag{6.201}$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit für einen Streuprozess bei **festem** Stoßparameter und **festen** 4–Impulsen $P_1'^{\,\mu}, P_2'^{\,\mu}, \ldots$ für die auslaufenden Teilchen. Wenn wir **beliebige** Stoßparameter und 4–Impulse der auslaufenden Teilchen zulassen wollen, müssen wir über $\vec{b}$ und den (Lorentz–invarianten) Phasenraum der auslaufenden Teilchen integrieren. Dies bildet dann die Definition des **totalen Wirkungsquerschnittes** für die Reaktion $P + T \to 1' + 2' + \ldots$,

$$\sigma(P + T \to 1' + 2' + \ldots) = \int \mathrm{d}^2\vec{b} \prod_f \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f'}{(2\pi)^3 2E_{p_f'}} \prod_{i,j=P,T} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_j}{(2\pi)^3 2E_{k_j}}$$
$$\times \quad \tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)\, \tilde{\phi}_j^*(\vec{k}_j)\, e^{i\vec{b}\cdot(\vec{k}_P-\vec{q}_P)}\, (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left(\sum_f P_f'^{\,\mu} - Q_P^\mu - Q_T^\mu \right) \delta^{(4)} \left(K_P^\mu + K_T^\mu - Q_P^\mu - Q_T^\mu \right)$$
$$\times \quad \mathcal{M}_{fi}(P_1', P_2', \ldots; Q_P, Q_T)\, \mathcal{M}_{jf}^*(P_1', P_2', \ldots; K_P, K_T)\,. \tag{6.202}$$

Die $\vec{k}_j$–Integrale können mit Hilfe der zweiten vierdimensionalen δ–Funktion und der Relation

$$\int \mathrm{d}^2\vec{b}\, e^{i\vec{b}\cdot(\vec{k}_P-\vec{q}_P)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{k}_{P,\perp} - \vec{q}_{P,\perp}) \tag{6.203}$$

eliminiert werden:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_P\, \mathrm{d}^3\vec{k}_T}{(2\pi)^6 4E_{k_P} E_{k_T}} (2\pi)^6 \delta^{(2)}(\vec{k}_{P,\perp} - \vec{q}_{P,\perp})\, \delta^{(2)}(\vec{k}_{P,\perp} + \vec{k}_{T,\perp} - \vec{q}_{P,\perp} - \vec{q}_{T,\perp}) \\
&\qquad\qquad \times \ \delta(k_P^z + k_T^z - q_P^z - q_T^z)\, \delta(E_{k_P} + E_{k_T} - E_{q_P} - E_{q_T}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}_P\, \mathrm{d}^3\vec{k}_T}{4E_{k_P} E_{k_T}} \delta^{(2)}(\vec{k}_{P,\perp} - \vec{q}_{P,\perp}) \delta^{(2)}(\vec{k}_{T,\perp} - \vec{q}_{T,\perp})\, \delta(k_P^z + k_T^z - q_P^z - q_T^z) \\
&\qquad\qquad \times \ \delta(E_{k_P} + E_{k_T} - E_{q_P} - E_{q_T}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}k_P^z\, \mathrm{d}k_T^z}{4E_{k_P} E_{k_T}} \delta(k_P^z + k_T^z - q_P^z - q_T^z)\, \delta(E_{k_P} + E_{k_T} - E_{q_P} - E_{q_T}) \Big|_{\vec{k}_{j,\perp} = \vec{q}_{j,\perp}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}k_T^z}{4E_{k_P} E_{k_T}} \delta(E_{k_P} + E_{k_T} - E_{q_P} - E_{q_T}) \Big|_{\substack{\vec{k}_{j,\perp} = \vec{q}_{j,\perp} \\ k_P^z = q_P^z + q_T^z - k_T^z}} \,.
\end{aligned} \tag{6.204}$$

Die verbleibende δ–Funktion kann benutzt werden, um das k_T^z–Integral zu eliminieren. Das Argument der δ–Funktion ist (unter Benutzung der Randbedingungen)

$$g(k_T^z) = \sqrt{(q_P^z + q_T^z - k_T^z)^2 + \vec{q}_{P,\perp}^2 + m_P^2} + \sqrt{(k_T^z)^2 + \vec{q}_{T,\perp}^2 + m_T^2} - \sqrt{\vec{q}_P^2 + m_P^2} - \sqrt{\vec{q}_T^2 + m_T^2}\,, \tag{6.205}$$

d.h.

$$g'(k_T^z) = -\frac{q_P^z + q_T^z - k_T^z}{E_{k_P}} + \frac{k_T^z}{E_{k_T}} \equiv v_T^z - v_P^z \,, \tag{6.206}$$

also die **Relativgeschwindigkeit** zwischen Target und Projektil. Also wird Gl. (6.204) zu

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}k_T^z}{4E_{k_P}E_{k_T}}\, \delta(E_{k_P} + E_{k_T} - E_{q_P} - E_{q_T}) \Big|_{\substack{\vec{k}_{j,\perp} = \vec{q}_{j,\perp} \\ k_P^z = q_P^z + q_T^z - k_T^z}} \\ &= \frac{1}{4E_{k_P}E_{k_T}} \frac{1}{|v_P^z - v_T^z|}\Bigg|_{\substack{\vec{k}_{j,\perp} = \vec{q}_{j,\perp} \\ k_P^z = q_P^z + q_T^z - k_T^z \\ k_T^z \text{ Lösung von } E_{k_P} + E_{k_T} = E_{q_P} + E_{q_T}}} \end{aligned} \tag{6.207}$$

Dies ist nun in Gl. (6.202) einzusetzen. Um den entstehenden Ausdruck zu vereinfachen, benutzen wir die Tatsache, dass die Fourier–transformierten Wellenfunktionen $\tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)$, $\tilde{\phi}_j^*(\vec{k}_j)$ ein scharfes Maximum um den mittleren Impuls $\vec{p}_i = \langle \vec{q}_i \rangle = \langle \vec{k}_j \rangle$ haben. Dann können wir in allen anderen Faktoren in guter Näherung $K_j^\mu = Q_i^\mu = P_i^\mu$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \sigma(P + T \to 1' + 2' + \ldots) &\simeq \prod_f \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f'}{(2\pi)^3 2E_{p_f'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f P_f'^{\,\mu} - P_P^\mu - P_T^\mu \right) \\ &\quad \times \frac{1}{4E_{p_P}E_{p_T}} \frac{1}{|v_P^z - v_T^z|} |\mathcal{M}_{fi}(P_1', P_2', \ldots; P_P, P_T)|^2 \prod_{i=P,T} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{q_i}} |\tilde{\phi}_i(\vec{q}_i)|^2 \\ &= \prod_f \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f'}{(2\pi)^3 2E_{p_f'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f P_f'^{\,\mu} - P_P^\mu - P_T^\mu \right) \frac{|\mathcal{M}_{fi}(P_1', P_2', \ldots; P_P, P_T)|^2}{4E_{p_P}E_{p_T}|v_P^z - v_T^z|} \,, \end{aligned} \tag{6.208}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (6.197) benutzt haben. Dies ist der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Spin-Null-Teilchen an Spin-Null-Teilchen.

21.5.2021

Für Spin-1/2-Teilchen muss man noch über die **Spins im Endzustand summieren** und über die **Spins im Eingangszustand mitteln**. Für den Pion-Nukleon-Streuprozess ergibt sich damit der totale Wirkungsquerschnitt als

$$\begin{aligned} &\sigma\left(\pi(\vec{k}) + N(\vec{p}) \to \pi(\vec{k}\,') + N(\vec{p}\,')\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}\,'\, \mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^6 4E_{p'}E_{k'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P' + K' - P - K) \frac{1}{4E_pE_k\, v_{\mathrm{rel}}} \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{fi}(P', K'; P, K)|^2 \,, \end{aligned} \tag{6.209}$$

mit der **Relativgeschwindigkeit** der aneinander streuenden Teilchen

$$v_{\mathrm{rel}} \equiv |\vec{v}_p - \vec{v}_k| = \left| \frac{\vec{p}}{E_p} - \frac{\vec{k}}{E_k} \right| = \left| \frac{\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^{\,2} + M^2}} - \frac{\vec{k}}{\sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}} \right| \,. \tag{6.210}$$

Die weiteren Berechnungen führen wir im **Schwerpunktsystem der Impulse der einlaufenden Teilchen** (engl. *center-of-momentum frame* oder kurz *CM frame*) durch, d.h. in dem System, in dem

$$\vec{k} = -\vec{p} \,. \tag{6.211}$$

Die Mandelstam-Variable (6.176) berechnet man in diesem System gemäß

$$s = (P+K)^2 = (E_p + E_k)^2 - (\vec{p}+\vec{k})^2 \equiv (E_p + E_k)^2 = \left(\sqrt{\vec{k}^{\,2} + M^2} + \sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}\right)^2 , \tag{6.212}$$

aber da s Lorentz–invariant ist, ist dies der Wert von s in **allen** Bezugssystemen (wobei aber in dieser Gleichung die Werte von E_p und E_k im CM-System einzusetzen sind). Die Relativgeschwindigkeit (6.210) im CM-System kann man auch durch s ausdrücken,

$$v_{\text{rel}} = \left| -\frac{\vec{k}}{E_p} - \frac{\vec{k}}{E_k} \right| = k\,\frac{E_k + E_p}{E_p E_k} \equiv \frac{k\sqrt{s}}{E_p E_k} , \tag{6.213}$$

so dass wir für den totalen Wirkungsquerschnitt (6.209) erhalten

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(\pi(\vec{k}) + N(\vec{p}) \to \pi(\vec{k}\,') + N(\vec{p}\,')\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}\,'\,\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^6 4E_{p'}E_{k'}}\,(2\pi)^4\delta(E_{p'} + E_{k'} - \sqrt{s})\,\delta^{(3)}(\vec{p}\,' + \vec{k}\,')\,\frac{1}{4k\sqrt{s}}\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}_{fi}|^2 , \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{(2\pi)^2 4E_{p'}E_{k'}}\,\delta(E_{p'} + E_{k'} - \sqrt{s})\,\frac{1}{4k\sqrt{s}}\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\Omega_{k'}}{4\pi^2}\,\frac{k'}{4E_{p'}}\,\frac{1}{4k\sqrt{s}}\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}_{fi}|^2 .
\end{aligned} \tag{6.214}$$

Hier haben wir im letzten Schritt Kugelkoordinaten für die $\vec{k}\,'$–Integration benutzt,

$$\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}\,'}{E_{k'}} = \frac{\mathrm{d}k'\,k'^{\,2}\,\mathrm{d}\Omega_{k'}}{E_{k'}} \equiv \mathrm{d}E_{k'}\,k'\,\mathrm{d}\Omega_{k'} ,$$

und die $E_{k'}$–Integration mit Hilfe der δ–Funktion eliminiert. Desweiteren ist

$$E_{p'} = \sqrt{\vec{p}\,'^{\,2} + M^2} \equiv \sqrt{\vec{k}\,'^{\,2} + M^2}$$

und k' ist die Lösung der Gleichung

$$\sqrt{s} = E_{p'} + E_{k'} = \sqrt{\vec{k}\,'^{\,2} + M^2} + \sqrt{\vec{k}\,'^{\,2} + m^2} .$$

Weil aber auch

$$\sqrt{s} = E_p + E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} ,$$

folgern wir sofort, dass $k' = k$ ist. Eine kleinere Rechnung, die wir als Übungsaufgabe überlassen, liefert das Resultat

$$k' = k = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{[s - (M+m)^2]\,[s - (M-m)^2]} . \tag{6.215}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} E_{p'} &= \sqrt{\vec{k}'^2 + M^2} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{[s-(M+m)^2]\,[s-(M-m)^2] + 4sM^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2s(M^2+m^2) + (M^2-m^2)^2 + 4sM^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{s^2 + 2s(M^2-m^2) + (M^2-m^2)^2} = \frac{s+M^2-m^2}{2\sqrt{s}} \,. \end{aligned} \tag{6.216}$$

Mit den Glgen. (6.215) und (6.216) erhalten wir dann den **differentiellen Wirkungsquerschnitt**

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k'}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s+M^2-m^2} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \,. \tag{6.217}$$

Der letzte Schritt besteht in der Berechnung der Spin-Summen. Mit der Streuamplitude (6.190) ergibt sich dafür

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{4g^4}{(u-M^2)^2+\eta^2} \sum_{s,s'} \bar{u}_\alpha(\vec{p}\,',s')\, \not{K}_{\alpha\delta}\, u_\delta(\vec{p},s)\, u^\dagger_\beta(\vec{p},s)\, \not{K}^\dagger_{\beta\gamma}\, \bar{u}^\dagger_\gamma(\vec{p}\,',s') \\ &= \frac{4g^4}{(u-M^2)^2} \sum_{s,s'} \bar{u}_\alpha(\vec{p}\,',s')\, \not{K}_{\alpha\delta}\, u_\delta(\vec{p},s)\, \bar{u}_\beta(\vec{p},s)\, \not{K}_{\beta\gamma}\, u_\gamma(\vec{p}\,',s') \,, \end{aligned} \tag{6.218}$$

wobei wir den Isospin-Index (1/2) der Übersicht halber unterdrückt und im zweiten Schritt die Relation $\gamma_0\gamma^\dagger_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu$ benutzt haben. Desweiteren haben wir angenommen, dass die Kinematik der Reaktion stets dafür sorgt, dass die Pole bei $u = M^2 \mp i\eta$ vermieden werden. Die Spin-Summen werden nun mit Hilfe der folgenden Identitäten berechnet,

$$\begin{aligned} \sum_s u_\delta(\vec{p},s)\, \bar{u}_\beta(\vec{p},s) &= (\not{P}+M)_{\delta\beta} \,, \\ \sum_{s'} u_\gamma(\vec{p}\,',s')\, \bar{u}_\alpha(\vec{p}\,',s') &= (\not{P}'+M)_{\gamma\alpha} \,, \end{aligned} \tag{6.219}$$

so dass

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{4g^4}{(u-M^2)^2}\, \not{K}_{\alpha\delta}\, (\not{P}+M)_{\delta\beta}\, \not{K}_{\beta\gamma}\, (\not{P}'+M)_{\gamma\alpha} \\ &\equiv \frac{4g^4}{(u-M^2)^2}\, \mathrm{Tr}\left[\not{K}\, (\not{P}+M)\, \not{K}\, (\not{P}'+M)\right] \,. \end{aligned} \tag{6.220}$$

Für die Berechnung von Spuren von γ–Matrizen gelten folgende Regeln (vgl. Übungsaufgabe H5.1):

(i) Die Spur über eine **ungerade** Anzahl von γ–Matrizen verschwindet.

(ii) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$.

(iii) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})$, usw.

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[\not{K}\,(\not{P}+M)\,\not{K}\,(\not{P}'+M)] &= \mathrm{Tr}\,[\not{K}\,\not{P}\,\not{K}\,\not{P}'] + M^2\mathrm{Tr}\,\not{K}^2 \\
&= 4\left(K\cdot P\,K\cdot P' - K^2\,P\cdot P' + K\cdot P' P\cdot K + M^2K^2\right) \\
&= 8K\cdot P\,K\cdot P' - 4m^2(P\cdot P' - M^2)\,, \qquad (6.221)
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass alle Impulse auf der Massenschale liegen, also für das Pion $K^2 = K'^2 = m^2$ und für das Nukleon $P^2 = P'^2 = M^2$. Gleichung (6.221) läßt sich durch die Mandelstam–Variablen ausdrücken,

$$\begin{aligned}
u &= (P-K')^2 = (P'-K)^2 = P'^2 + K^2 - 2P'\cdot K = M^2 + m^2 - 2P'\cdot K \\
\Longrightarrow\quad P'\cdot K &= \frac{1}{2}(M^2+m^2-u)\,, \\
s &= (P+K)^2 = P^2 + K^2 + 2P\cdot K = M^2 + m^2 + 2P\cdot K \\
\Longrightarrow\quad P\cdot K &= \frac{1}{2}(s-M^2-m^2)\,, \\
t &= (P-P')^2 = P^2 + P'^2 - 2P\cdot P' = 2M^2 - 2P\cdot P' \\
\Longrightarrow\quad P\cdot P' &= M^2 - \frac{t}{2}\,, \qquad (6.222)
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,[\not{K}\,(\not{P}+M)\,\not{K}\,(\not{P}'+M)] &= 2\,(s-M^2-m^2)(M^2+m^2-u) + 2m^2t \\
&= 2(s-M^2)(M^2-u) + 2m^2(s+u+t-2M^2) - 2m^4 \\
&= 2\left[(s-M^2)(M^2-u) + m^4\right]\,, \qquad (6.223)
\end{aligned}$$

wobei wir die in Übungsaufgabe P16.1 bewiesene Relation

$$s + u + t = 2M^2 + 2m^2 \qquad (6.224)$$

benutzt haben. Setzen wir Gl. (6.223) in die Spin-Summe (6.220) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{4g^4}{(u-M^2)^2}\,2\left[(s-M^2)(M^2-u) + m^4\right] \\
&= 8g^4\left[\frac{s-M^2}{M^2-u} + \frac{m^4}{(M^2-u)^2}\right]\,, \qquad (6.225)
\end{aligned}$$

und damit für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (6.217)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k'}} = \frac{g^4}{8\pi^2}\,\frac{1}{s+M^2-m^2}\left[\frac{s-M^2}{M^2-u} + \frac{m^4}{(M^2-u)^2}\right]\,. \qquad (6.226)$$

Im Niederenergielimes, $\vec{k}, \vec{p} \to 0$, $E_k \to m$, $E_p \to M$ gilt

$$\begin{aligned}
s &= M^2 + m^2 + 2P\cdot K \quad\longrightarrow\quad M^2 + m^2 + 2Mm = (M+m)^2\,, \\
u &= M^2 + m^2 - 2P'\cdot K \quad\longrightarrow\quad M^2 + m^2 - 2Mm = (M-m)^2\,, \qquad (6.227)
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{k'}} &= \frac{g^4}{8\pi^2}\frac{1}{2M(M+m)}\left[\frac{m(2M+m)}{m(2M-m)}+\frac{m^2}{(2M-m)^2}\right]\\ &= \frac{g^4}{8\pi^2}\frac{1}{2M(M+m)}\frac{4M^2}{(2M-m)^2}\\ &= \frac{g^4}{16\pi^2M^2}\frac{1}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(1-\frac{m}{2M}\right)^2}\,. \end{aligned} \tag{6.228}$$

6.5 Das erzeugende Funktional für Vertex–Funktionen

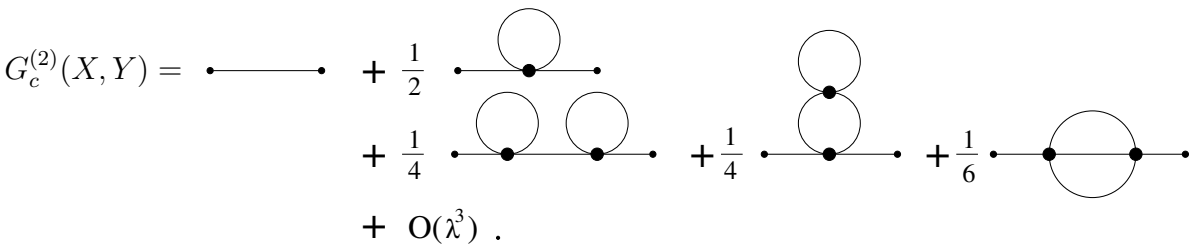
Wir betrachten nun wieder die ϕ^4–Theorie. Im allgemeinen definieren wir die **verbundene n-Punkt-Funktion** dieser Theorie als

$$G_c^{(n)}(X_1,\dots X_n) \equiv \frac{1}{i^{n-1}}\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(X_1)\cdots\delta J(X_n)}\right|_{J=0}\,. \tag{6.229}$$

Die verbundene Zwei-Punkt-Funktion, die gemäß Gl. (6.47) identisch mit der gewöhnlichen Zwei-Punkt-Funktion ist, lautet,

$$G_c^{(2)}(X,Y) = \frac{1}{i}\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0} = \frac{1}{i^2}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(X)\,\delta J(Y)}\right|_{J=0} = \langle 0|\hat{T}\left[\hat{\phi}(X)\hat{\phi}(Y)\right]|0\rangle\,. \tag{6.230}$$

Die störungstheoretische Entwicklung dieser Funktion bis zur Ordnung $O(\lambda^2)$ läßt sich diagrammatisch wie folgt darstellen (s. Übungsaufgaben H14 und P14):



(6.231)

Die kombinatorischen Faktoren der Diagramme der Ordnung $O(\lambda^2)$ (zweite Zeile dieser Gleichung) erklären sich wie folgt:

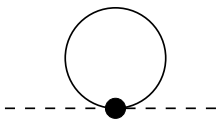
(i) Beim ersten Diagramm haben wir zwei Vertizes, die untereinander auf $4\cdot 4 = 16$ verschiedene Weisen verbunden werden können. Die drei verbleibenden Beine des ersten Vertex können auf 3 verschiedene Weisen entweder mit X oder mit Y verbunden werden, was $3\cdot 2 = 6$ Möglichkeiten entspricht. Die drei verbleibenden Beine des zweiten Vertex können dann auf 3 verschiedene Weisen mit dem verbleibenden Punkt (X oder Y) verbunden werden. Für die dann jeweils verbleibenden zwei Beine der Vertizes gibt es keine Möglichkeiten mehr, sie müssen jeweils miteinander zu einer Schleife geschlossen werden. Insgesamt ergibt dies also $16\cdot 6\cdot 3 = (4!)^2/2$ Möglichkeiten. Beide Faktoren 4! werden durch die Faktoren 1/4! an den beiden Vertizes gekürzt. Es gibt aber einen weiteren Faktor $1/n!$ beim Term $\sim \lambda^n$ in der

Taylor-Reihenentwicklung von $Z[J]$ nach Potenzen von λ, hier also $1/2! = 1/2$. Dies erklärt den Faktor $1/4$.

(ii) Beim zweiten Diagramm werden zunächst zwei der vier Beine eines der beiden Vertizes mit den Punkten X und Y verbunden. Dafür gibt es $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten, multipliziert mit 2, da wir diese Operation sowohl bei einem als auch beim anderen Vertex durchführen können. Sodann werden die verbleibenden zwei Beine mit jeweils zwei der vier Beine des anderen Vertex verbunden. Dafür gibt es ebenfalls $4 \cdot 3$ Möglichkeiten. Die verbleibenden zwei Beine werden zu einer Schleife geschlossen (1 Möglichkeit). Insgesamt ergibt dies wie beim ersten Diagramm $12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = (4!)^2/2$ Möglichkeiten. Mit denselben Argumenten wie oben resultiert daraus dann der Faktor $1/4$.

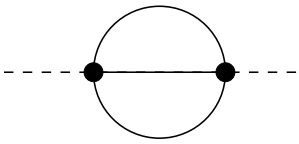
(iii) Beim dritten Diagramm (dem sog. "Sonnenuntergangs"- bzw. "Sunset"-Diagramm) verbinden wir zunächst eines der vier Beine eines Vertex mit X, wofür es 4 Möglichkeiten gibt, oder Y, wofür es ebenfalls 4 Möglichkeiten gibt, also insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Dann verbinden wir eines der vier Beine des anderen Vertex mit dem verbleibenden Punkt (X oder Y), wofür es nun lediglich nur noch 4 Möglichkeiten gibt. Die verbleibenden drei Beine eines Vertex müssen jetzt jeweils mit einem Bein des jeweils anderen Vertex verbunden werden. Für das erste Bein gibt es 3, für das zweite 2 und für das letzte nur noch eine Möglichkeit, dies zu tun. Insgesamt ergibt sich also ein Faktor $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = (4!)^2/3$. Mit denselben Argumenten wie oben resultiert daraus der Faktor $1/6$.

Ein sog. **trunkiertes Diagramm** ist ein Diagramm ohne externe Beine, z.B.



(6.232)

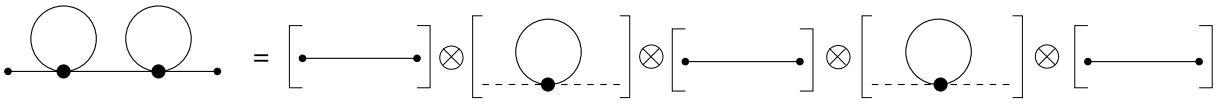
das Kaulquappendiagramm, das in Ordnung $O(\lambda)$ zu $G_c^{(2)}$ beiträgt, oder



(6.233)

das "Sonnenuntergangsdiagramm", das in Ordnung $O(\lambda^2)$ zu $G_c^{(2)}$ beiträgt. Man erhält diese trunkierten Diagramme, indem man die entsprechenden Diagramme von $G_c^{(2)}$ von links und rechts mit dem inversen Propagator Δ_F^{-1} multipliziert, da diese Operation gerade die äußeren Beine, die ja ebenfalls Propagatoren Δ_F sind, "amputiert".

Betrachten wir nun Gl. (6.231), so erkennen wir, dass abgesehen von den beiden äußeren Beinen das erste Diagramm der Ordnung $O(\lambda^2)$ einfach aus zwei Kaulquappendiagrammen der Ordnung $O(\lambda)$ besteht, die mit einem Propagator miteinander verbunden sind,



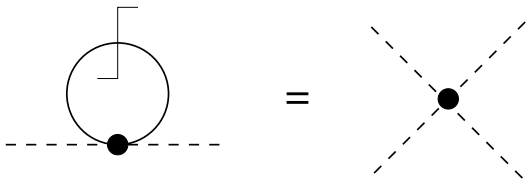
Auch in höheren Ordnungen von λ werden wir immer wieder Diagramme finden, die aus mehreren trunkierten Diagrammen niedrigerer Ordnung von λ bestehen, die mittels Propagatoren miteinander verbunden sind. Andererseits ist das Sonnenuntergangsdiagramm (6.233) ein genuin neues Diagramm der Ordnung $O(\lambda^2)$ und kein Produkt von trunkierten Diagrammen niedrigerer Ordnung mit Propagatoren.

Um zu gegebener Ordnung in λ zwischen genuin neuen Diagrammen und Diagrammen, die lediglich aus mehreren trunkierten Diagrammen niedrigerer Ordnung bestehen, die mittels Propagatoren miteinander verbunden sind, zu unterscheiden, führen wir den Begriff der **Irreduzibilität** ein:

Definition: Ein verbundenes Diagramm heißt ***n*-Teilchen irreduzibel** (engl. *n-particle irreducible*, nPI), wenn es durch Zerschneiden von n beliebigen **internen Linien nicht** in zwei unverbundene Stücke zerfällt. Falls doch, so nennt man es ***n*-Teilchen reduzibel** (engl. *n-particle reducible*, nPR).

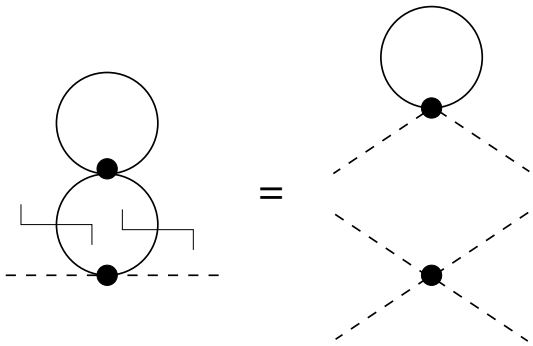
Beispiele:

(i) Das Kaulquappendiagramm (6.232) ist 1PI:

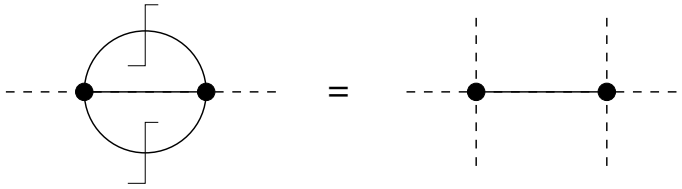


(ii) Das zweite Diagramm von der Ordnung $O(\lambda^2)$ in Gl. (6.231) ist 1PI:

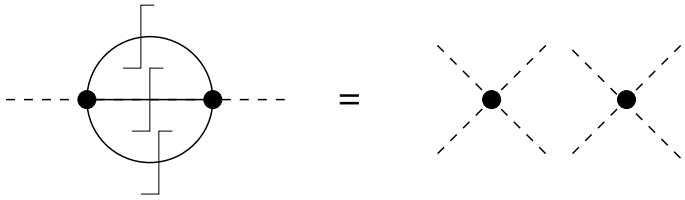
und 2PR:



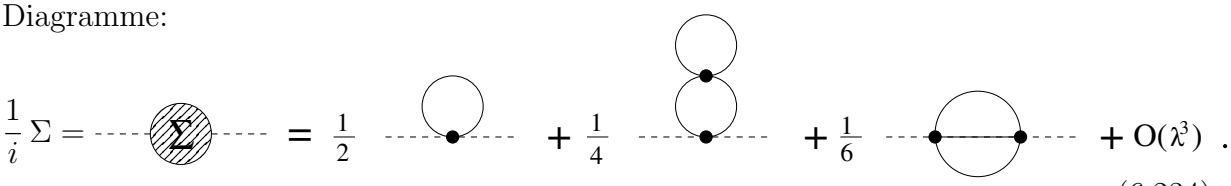
(iii) Das Sonnenuntergangsdiagramm (6.233) ist 2PI:



und 3PR:



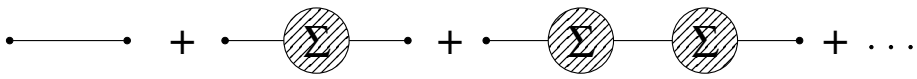
Wir definieren nun die **eigentliche Selbstenergie** als Summe aller trunkierten 1PI-Diagramme:



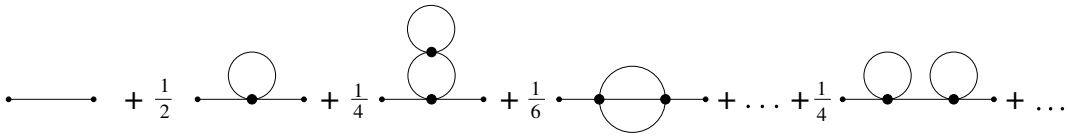
(6.234)

Nun schreiben wir die verbundene Zwei-Punkt-Funktion mit der Abkürzung $G_0 \equiv i\Delta_F$ als

$$G_c^{(2)} = G_0 + G_0 \frac{1}{i} \Sigma G_0 + G_0 \frac{1}{i} \Sigma G_0 \frac{1}{i} \Sigma G_0 + \dots$$



(6.235)



Ganz offensichtlich handelt es sich hierbei nur um eine Reorganisation der ursprünglichen Störungsreihe (6.231).

Wir erkennen nun, dass es sich bei Gl. (6.235) um eine **geometrische Reihe** handelt,

$$\begin{aligned} G_c^{(2)} &= G_0 \left(1 + \frac{1}{i} \Sigma G_0 + \frac{1}{i} \Sigma G_0 \frac{1}{i} \Sigma G_0 + \dots \right) \\ &= G_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \Sigma G_0 \right)^n = G_0 \left(1 - \frac{1}{i} \Sigma G_0 \right)^{-1} = \left(G_0^{-1} - \frac{1}{i} \Sigma G_0 G_0^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(G_0^{-1} - \frac{1}{i} \Sigma \right)^{-1} . \end{aligned} \tag{6.236}$$

Dies ist eine wichtige Gleichung. Ihr Inverses lautet

$$\left[G_c^{(2)} \right]^{-1} = G_0^{-1} - \frac{1}{i} \Sigma , \tag{6.237}$$

die sog. **Dyson-Schwinger-Gleichung** für die verbundene Zwei-Punkt-Funktion. Ihre formale Lösung lautet

$$G_c^{(2)} = G_0 + G_0 \frac{1}{i} \Sigma G_c^{(2)} \ , \tag{6.238}$$

oder diagrammatisch

(6.239)

Man bezeichnet $G_c^{(2)}$ auch als den **vollen** oder **"angezogenen"** (engl. *"dressed"*) Propagator.

26.5.2021

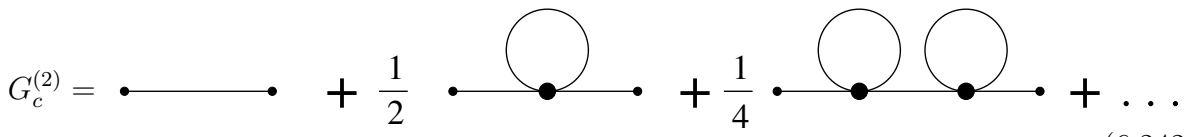
Betrachten wir nun den vollen Propagator unter Einbeziehung der eigentlichen Selbstenergie bis zur Ordnung $O(\lambda)$, d.h. wir berücksichtigen lediglich das erste Diagramm auf der rechten Seite von Gl. (6.234), also das Kaulquappendiagramm. Die Feynman-Regeln im Impulsraum (s. Abschnitt 6.4) liefern

$$\frac{1}{i} \Sigma = -\frac{i\lambda}{2} i\Delta_F(0) \ , \tag{6.240}$$

d.h. dieser Beitrag zur eigentlichen Selbstenergie ist unabhängig vom Impuls. Im Impulsraum gilt ferner $G_0^{-1}(P) = -i\Delta_F^{-1}(P) = -i(P^2 - m^2)$, so dass

$$\left[G_c^{(2)}(P)\right]^{-1} = G_0^{-1}(P) - \frac{1}{i}\Sigma = -i\left[P^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2} i\Delta_F(0)\right] \equiv -i(P^2 - m_r^2) \ , \tag{6.241}$$

mit der renormierten Masse $m_r^2 \equiv m^2 + \frac{\lambda}{2} i\Delta_F(0)$. Dies ist konsistent mit Gl. (6.32). Das Inverse von Gl. (6.241) hat die Reihendarstellung



(6.242)

Obwohl die eigentliche Selbstenergie mit dem Kaulquappendiagramm lediglich den Beitrag erster Ordnung in λ enthält, trägt dieses Diagramm im vollen Propagator in **unendlicher** Ordnung in λ bei. Für eine gegebene Approximation der eigentlichen Selbstenergie **resummiert** die Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichung (6.241) also bestimmte **Klassen von Diagrammen**, in unserem Fall das Kaulquappendiagramm (6.232). Selbstverständlich ist dies nicht die komplette Lösung für den vollen Propagator. Dazu müsste man die eigentliche Selbstenergie vollständig in jeder Ordnung in λ berechnen. Es handelt sich aber dennoch um eine **Approximation** für den vollen Propagator, die **unendlich viele** Ordnungen von λ enthält. Die Lösung der Dyson-Schwinger-Gleichung geht also weit über jede störungstheoretische Berechnung von $G_c^{(2)}$ hinaus.

Abgesehen vom inversen freien Propagator $-i\,\Delta_F^{-1}$ enthält der inverse volle Propagator $[G_c^2]^{-1}$, Gl. (6.237), ausschließlich die trunkierten 1PI-Diagramme der eigentlichen Selbstenergie. Der inverse volle Propagator ist das einfachste Beispiel für eine sog. **1PI-Vertexfunktion**, in diesem Fall die **Zwei-Punkt-1PI-Vertexfunktion**,

$$\Gamma^{(2)}(X,Y) \equiv i\left[G_c^{(2)}\right]^{-1}(X,Y) = iG_0^{-1}(X,Y) - \Sigma(X,Y) \ , \tag{6.243}$$

bzw. im Impulsraum

$$\Gamma^{(2)}(P) = iG_0^{-1}(P) - \Sigma(P) = P^2 - m^2 - \Sigma(P) \; . \tag{6.244}$$

Sie erfüllt offensichtlich die Gleichung

$$\int \mathrm{d}^4 Z \, G_c^{(2)}(X,Z) \, \Gamma^{(2)}(Z,Y) = i \, \delta^{(4)}(X-Y) \; , \tag{6.245}$$

Wie für die verbundenen n-Punkt-Funktionen $G_c^{(n)}$, Gl. (6.229), gibt es auch für die ***n*-Punkt-1PI-Vertexfunktionen** $\Gamma^{(n)}$ ein **erzeugendes Funktional**, $\Gamma[\varphi]$. Es ist definiert als **funktionale Legendre-Transformierte** von $W[J]$, dem erzeugenden Funktional der verbundenen n-Punkt-Funktionen,

$$\Gamma[\varphi] \equiv W[J] - \int \mathrm{d}^4 X \, J(X) \varphi(X) \; , \tag{6.246}$$

wobei

$$\varphi(X) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J(X)} \; . \tag{6.247}$$

Für verschwindende Quellen $J(X)$,

$$\phi(X) \equiv \lim_{J \to 0} \varphi(X) = \left. \frac{\delta W[J]}{\delta J(X)} \right|_{J=0} \equiv \langle 0 | \hat{\phi}(X) | 0 \rangle \; , \tag{6.248}$$

erhält man den **Vakuumerwartungswert** (engl. *vacuum expectation value, v.e.v*) des Feldes, also die Ein-Punkt-Funktion.

Offensichtlich gilt aufgrund der Ketten- und Produktregel und mit Gl. (6.247)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(X)} &= \int \mathrm{d}^4 Y \left[\frac{\delta W[J]}{\delta J(Y)} \frac{\delta J(Y)}{\delta \varphi(X)} - \frac{\delta J(Y)}{\delta \varphi(X)} \varphi(Y) - J(Y) \, \delta^{(4)}(X-Y) \right] \\ &= -J(X) \; . \end{aligned} \tag{6.249}$$

In Abwesenheit von Quellen J gilt dann mit Gl. (6.248)

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(X)} \right|_{\varphi = \phi} = 0 \; , \tag{6.250}$$

d.h. der Vakuumerwartungswert $\phi(X)$ ist ein Extremum des Funktionals $\Gamma[\varphi]$.

Wir müssen nun zeigen, dass die Funktionalableitungen von $\Gamma[\varphi]$, genommen am Extremum $\varphi = \phi$, genau den 1PI-Vertexfunktionen entsprechen, also

$$\Gamma^{(n)}(X_1, \ldots, X_n) \equiv \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(X_1) \cdots \delta \varphi(X_n)} \right|_{\varphi = \phi} \; . \tag{6.251}$$

Bei diesem Beweis beschränken wir uns auf die Fälle $n = 2, 3$, man kann dies aber auch für beliebiges n zeigen.

Wir zeigen zunächst, dass $\delta^2\Gamma[\varphi]/\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)|_{\varphi=\phi} = \Gamma^{(2)}(X,Y)$, mit der in Gl. (6.245) definierten Zwei-Punkt-1PI-Vertexfunktion. Dazu betrachten wir die Funktion

$$G(X,Y) \equiv \frac{1}{i}\,\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)} = \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta J(X)}\,\frac{\delta W[J]}{\delta J(Y)} = \frac{1}{i}\,\frac{\delta\varphi(Y)}{\delta J(X)}\,, \tag{6.252}$$

wobei wir Gl. (6.247) benutzt haben. In Abwesenheit von Quellen gilt mit Gl. (6.230)

$$\lim_{J\to 0} G(X,Y) = G_c^{(2)}(X,Y)\,, \tag{6.253}$$

d.h. die Funktion $G(X,Y)$ wird zur verbundenen Zwei-Punkt-Funktion, bzw. zum vollen Propagator. Andererseits gilt mit Gl. (6.249)

$$\Gamma(X,Y) \equiv \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(X)}\,\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(Y)} = -\frac{\delta J(Y)}{\delta\varphi(X)}\,. \tag{6.254}$$

Also gilt mit den Glgen. (6.252), (6.254), sowie nach Rückgängigmachen der Kettenregel

$$\int \mathrm{d}^4Z\, G(X,Z)\,\Gamma(Z,Y) = \int \mathrm{d}^4Z\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta\varphi(Z)}{\delta J(X)}\left(-\frac{\delta J(Y)}{\delta\varphi(Z)}\right) = i\frac{\delta J(Y)}{\delta J(X)} \equiv i\,\delta^{(4)}(X-Y)\,, \tag{6.255}$$

d.h. bis auf einen Faktor i sind $G(X,Z)$ und $\Gamma(Z,Y)$ Inverse voneinander. In Abwesenheit von Quellen gilt aufgrund der Glgen. (6.250) und (6.253)

$$\lim_{J\to 0}\int \mathrm{d}^4Z\, G(X,Z)\,\Gamma(Z,Y) \equiv \int \mathrm{d}^4Z\, G_c^{(2)}(X,Z)\,\lim_{\varphi\to\phi}\Gamma(Z,Y) = i\,\delta^{(4)}(X-Y)\,. \tag{6.256}$$

Der Vergleich mit Gl. (6.245) liefert

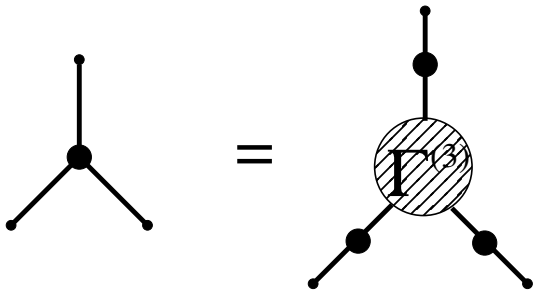
$$\Gamma^{(2)}(X,Y) = \lim_{\varphi\to\phi}\Gamma(X,Y) \equiv \left.\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(X)\delta\varphi(Y)}\right|_{\varphi=\phi}\,. \tag{6.257}$$

Dies beweist, dass die zweite Funktionalableitung von $\Gamma[\varphi]$ nach den Feldern $\varphi(X)$ und $\varphi(Y)$ am Extremum $\varphi(X) = \phi(X)$ von $\Gamma[\varphi]$ gerade die Zwei-Punkt-1PI-Vertexfunktion ergibt.

Für den Fall $n = 3$ betrachten wir zunächst die verbundene Drei-Punkt-Funktion

$$G_c^{(3)}(X,Y,Z) = \frac{1}{i^2}\,\left.\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(Z)}\right|_{J=0}\,, \tag{6.258}$$

vgl. Gl. (6.229). Wir erwarten, dass diese Funktion diagrammatisch eine analoge Darstellung hat wie Gl. (6.239) für die verbundene Zwei-Punkt-Funktion, also



(6.259)

Hierbei sind die drei Punkte (X, Y und Z) über volle Propagatoren $G_c^{(2)}$ (fette Linien mit schwarzem Punkt) mit der Drei-Punkt-1PI-Vertexfunktion $\Gamma^{(3)}$ (schraffierter Kreis) verknüpft. Wir zeigen nun, dass dies in der Tat der Fall ist. Dazu differenzieren wir Gl. (6.255) (nach Umbenennen der Variablen $X \to Y$, $Z \to V$, $Y \to W$) funktional nach $J(X)$,

$$\int \mathrm{d}^4V \left[\frac{\delta G(Y,V)}{\delta J(X)} \Gamma(V,W) + G(Y,V) \frac{\delta \Gamma(V,W)}{\delta J(X)} \right] = 0 \,. \tag{6.260}$$

Gemäß Gl. (6.254) hängt $\Gamma(V,W)$ nur implizit von $J(X)$ ab, also müssen wir für den letzten Term die Kettenregel in der Form

$$\frac{\delta}{\delta J(X)} = \int \mathrm{d}^4U \, \frac{\delta \varphi(U)}{\delta J(X)} \frac{\delta}{\delta \varphi(U)} = \int \mathrm{d}^4U \, iG(X,U) \frac{\delta}{\delta \varphi(U)}$$

anwenden, wobei wir Gl. (6.252) benutzt haben. Mit den Glgen. (6.252) und (6.254) wird Gl. (6.260) dann zu

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^4V \, \frac{1}{i} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(V)} \Gamma(V,W) \\ &\qquad = \; - \int \mathrm{d}^4U \, \mathrm{d}^4V \, G(Y,V) \, iG(X,U) \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(U)\delta \varphi(V)\delta \varphi(W)} \,. \end{aligned} \tag{6.261}$$

Wir definieren die Funktion

$$\Gamma(U,V,W) \equiv \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(U)\delta \varphi(V)\delta \varphi(W)} \,, \tag{6.262}$$

multiplizieren beide Seiten von Gl. (6.261) mit $G(W,Z)$, integrieren über W und benutzen Gl. (6.255),

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^4V \, \frac{1}{i} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(V)} \int \mathrm{d}^4W \, \Gamma(V,W) \, G(W,Z) \\ &\quad = \int \mathrm{d}^4V \, \frac{1}{i} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(V)} \, i\delta^{(4)}(V-Z) = \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(Z)} \\ &\quad = \; -i \int \mathrm{d}^4U \, \mathrm{d}^4V \, \mathrm{d}^4W \, G(X,U) \, G(Y,V) \, \Gamma(U,V,W) \, G(W,Z) \,. \end{aligned} \tag{6.263}$$

Nach Division durch i^2 erhalten wir im Limes $J \to 0$, bzw. $\varphi \to \phi$ mit Hilfe der Glgen. (6.229) und (6.251)

$$G_c^{(3)}(X,Y,Z) = i \int \mathrm{d}^4U \, \mathrm{d}^4V \, \mathrm{d}^4W \, G_c^{(2)}(X,U) \, G_c^{(2)}(Y,V) \, \Gamma^{(3)}(U,V,W) \, G_c^{(2)}(W,Z) \,. \tag{6.264}$$

Dies entspricht (bis auf einen Faktor i) genau Gl. (6.259). Damit ist Gl. (6.251) auch für den Fall $n = 3$ bewiesen.

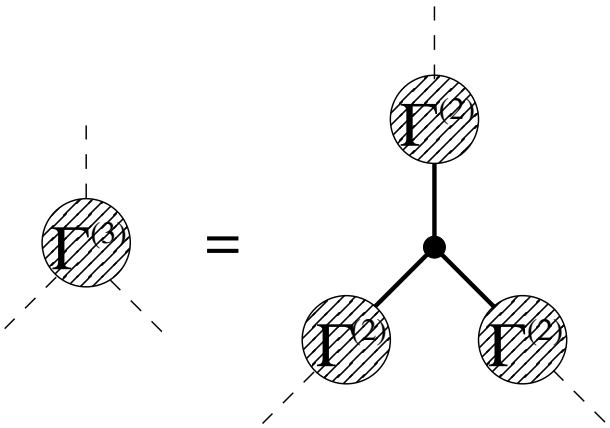
Gleichung (6.263) lässt sich durch Multiplikation mit $\Gamma(R,X)\,\Gamma(S,Y)\,\Gamma(Z,T)$, Integration über $\mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, \mathrm{d}^4Z$ und Benutzung von Gl. (6.255) formal nach $\Gamma(R,S,T)$ auflösen,

$$\Gamma(R,S,T) = \int \mathrm{d}^4X \, \mathrm{d}^4Y \, \mathrm{d}^4Z \, \Gamma(R,X) \, \Gamma(S,Y) \, \Gamma(Z,T) \, \frac{1}{i^2} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(X)\delta J(Y)\delta J(Z)} \,. \tag{6.265}$$

Im Limes $J \to 0$, bzw. $\varphi \to \phi$ wird dies zu

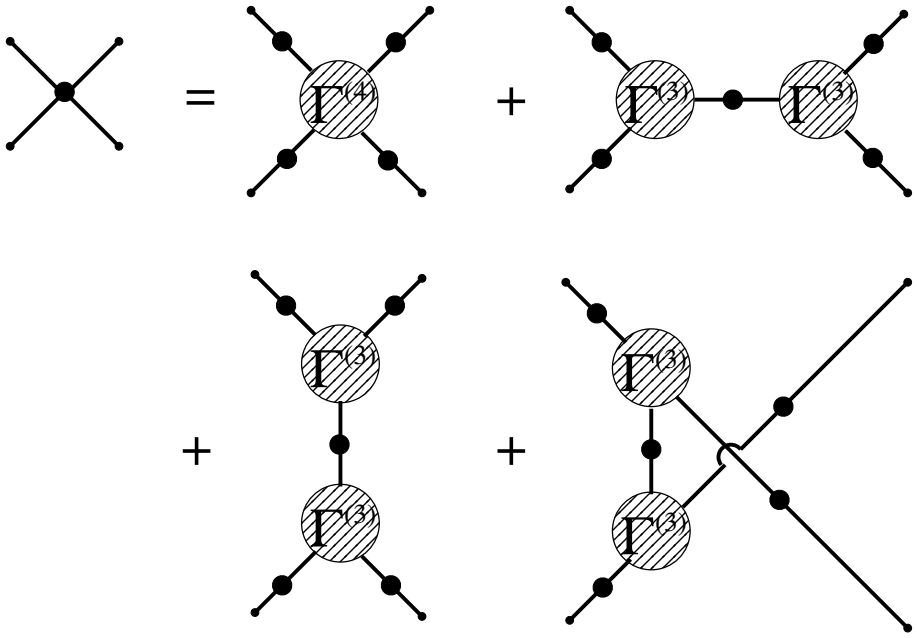
$$\Gamma^{(3)}(R,S,T) = \int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,\Gamma^{(2)}(R,X)\,\Gamma^{(2)}(S,Y)\,\Gamma^{(2)}(Z,T)\,G_c^{(3)}(X,Y,Z)\;, \tag{6.266}$$

oder diagrammatisch



(6.267)

Durch erneutes funktionales Ableiten von Gl. (6.263) nach der Quelle J lassen sich nun auch Gleichungen für die verbundenen n-Punkt-Funktionen für $n \geq 4$ herleiten, z.B. für die verbundene Vier-Punkt-Funktion,



(6.268)

wobei wir Gl. (6.259) benutzt haben. Diese Gleichungen kann man dann unter zu Hilfenahme von Gl. (6.255) wieder nach den n-Punkt-1PI-Vertexfunktionen auflösen. Dies soll hier aber nicht weiter ausgeführt werden.

6.6 QED: Ward–Takahashi–Identitäten

28.5.2021

Wir betrachten das erzeugende Funktional für n-Punkt-Funktionen in der QED. In kovarianter Eichung gilt (vgl. Glgen. (5.132), (5.260))

$$\begin{aligned} Z[J,\bar{\eta},\eta] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{i\int \mathrm{d}^4X\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{\lambda}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.+\,\bar{\psi}\left(i\not{D}-m\right)\psi+J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]\right\}\,. \end{aligned} \tag{6.269}$$

Da die Fadeev-Popov-Determinante in der QED von den anderen Felder entkoppelt, haben wir sie bereits in der Normierungskonstanten $\mathcal{N}$ absorbiert.

Ganz offensichtlich hängt die detaillierte Form des erzeugenden Funktionals (6.269) von der Wahl der Eichung ab. Physikalische Observable dürfen jedoch nicht von der Eichung abhängen. Im Prinzip können physikalische Observable durch die n-Punkt-Funktionen der Theorie ausgedrückt werden (s. z.B. der in Abschnitt 6.4 berechnete Wirkungsquerschnitt für die Pion-Nukleon-Streuung), und daher dürfen die n-Punkt-Funktionen nicht von der Wahl der Eichung abhängen. Dann muss aber auch das erzeugende Funktional für die n-Punkt-Funktionen eichunabhängig sein. Aus dieser Forderung werden wir nun eine funktionale Differentialgleichung für $Z[J,\bar{\eta},\eta]$ ableiten.

Unter einer infinitesimalen Eichtransformation $U(e\Lambda)\equiv e^{-ie\Lambda}=1-ie\Lambda+O(\Lambda^2)$, $|\Lambda|\ll 1$ transformieren sich das Eichfeld und die Materiefelder wie folgt,

$$A^\mu\to A^\mu+\partial^\mu\Lambda\,,\quad \psi\to\psi-ie\Lambda\psi\,,\quad \bar{\psi}\to\bar{\psi}+ie\Lambda\bar{\psi}\,. \tag{6.270}$$

Man beachte, dass wir hier, entgegen der bisherigen Diskussion von Eichtransformationen, den Parameter Λ der Eichtransformation mit einem zusätzlichen Faktor e (der Elementarladung) definiert haben.

Nun wenden wir diese Eichtransformation auf das erzeugende Funktional (6.269) an. Das Integrationsmaß bleibt invariant, weil die Eichtransformation des Eichfelds lediglich einer Verschiebung der Integrationsvariablen A^μ um einen (konstanten) Term $\partial^\mu\Lambda$ entspricht, während sich die Eichtransformationen von $\mathcal{D}\bar{\psi}$ und $\mathcal{D}\psi$ gerade gegeneinander wegheben. Im Exponenten bleibt der Eichfeld-Term und der Dirac-Term unter einer Eichtransformation (6.270) invariant. Der eichfixierende Term und die Quellterme sind aber nicht eichinvariant. Also führt die Eichtransformation (6.270) zu einem zusätzlichen Faktor

$$\begin{aligned} &\exp\left\{i\int \mathrm{d}^4X\left[-\lambda\,\partial_\mu A^\mu\,\Box\Lambda-\frac{\lambda}{2}(\Box\Lambda)^2+J^\mu\partial_\mu\Lambda-ie\Lambda\left(\bar{\eta}\psi-\bar{\psi}\eta\right)\right]\right\} \\ &\simeq\; 1+i\int \mathrm{d}^4X\left[-\lambda\,\partial_\mu A^\mu\,\Box\Lambda+J^\mu\partial_\mu\Lambda-ie\Lambda\left(\bar{\eta}\psi-\bar{\psi}\eta\right)\right] \\ &=\; 1+i\int \mathrm{d}^4X\left[-\lambda\,\Box\,\partial_\mu A^\mu-\partial_\mu J^\mu-ie\left(\bar{\eta}\psi-\bar{\psi}\eta\right)\right]\Lambda \end{aligned} \tag{6.271}$$

im Funktionalintegral, wobei wir im ersten Schritt die Exponentialfunktion bis zur linearen Ordnung im kleinen Parameter Λ entwickelt haben und im zweiten Schritt mehrfach partiell integriert haben (die Oberflächenterme verschwinden im Unendlichen).

Die Bedingung, dass das erzeugende Funktional eichunabhängig ist, lautet nun

$$\begin{aligned} Z[J,\bar\eta,\eta] &\equiv Z_\Lambda[J,\bar\eta,\eta] \\ &\simeq Z[J,\bar\eta,\eta] \\ &+ \mathcal{N}\int \mathcal{D}A^\mu\,\mathcal{D}\bar\psi\,\mathcal{D}\psi\; i\int \mathrm{d}^4X\,\left[-\lambda\,\Box\,\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu J^\mu - ie\left(\bar\eta\psi - \bar\psi\eta\right)\right]\Lambda \\ &\quad\times\exp\left\{i\int \mathrm{d}^4Y\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \bar\psi\left(i\not{D} - m\right)\psi\right.\right. \\ &\qquad\qquad\left.\left. + J_\mu A^\mu + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta\right]\right\}\,. \end{aligned} \tag{6.272}$$

Die linke Seite hebt sich gegen den ersten Term auf der rechten Seite weg. Der Vorfaktor vor der Exponentialfunktion läßt sich aus dem Funktionalintegral herausziehen, wenn wir die Felder durch Funktionalableitungen nach den Quellen ersetzen. Dies führt dann auf die Bedingung

$$0 = \int \mathrm{d}^4X\,\Lambda\left[-\lambda\,\Box\,\partial_\mu\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu} - \partial_\mu J^\mu - ie\left(\bar\eta\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta} - \frac{1}{-i}\frac{\delta}{\delta\eta}\,\eta\right)\right]Z[J,\bar\eta,\eta]\,, \tag{6.273}$$

bzw., weil die Funktion $\Lambda(X)$ beliebig ist,

$$0 = i\lambda\,\Box\,\partial_\mu\frac{\delta Z}{\delta J_\mu} - Z\,\partial_\mu J^\mu - e\left(\bar\eta\,\frac{\delta Z}{\delta\bar\eta} + \frac{\delta Z}{\delta\eta}\,\eta\right)\,. \tag{6.274}$$

Dies ist die gesuchte funktionale Differentialgleichung für $Z[J,\bar\eta,\eta]$. Mit $Z = e^{iW}$ erhalten wir eine äquivalente Differentialgleichung für das erzeugende Funktional $W[J,\bar\eta,\eta]$ der verbundenen n-Punkt-Funktionen,

$$0 = -\lambda\,\Box\,\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta J_\mu} - \partial_\mu J^\mu - ie\left(\bar\eta\,\frac{\delta W}{\delta\bar\eta} + \frac{\delta W}{\delta\eta}\,\eta\right)\,. \tag{6.275}$$

Nun führen wir das erzeugende Funktional für n-Punkt-1PI-Vertexfunktionen als funktionale Legendre-Transformierte von $W[J,\bar\eta,\eta]$ ein,

$$\Gamma[\mathcal{A},\Psi,\bar\Psi] \equiv W[J,\bar\eta,\eta] - \int \mathrm{d}^4X\,\left(J_\mu\mathcal{A}^\mu + \bar\Psi\eta + \bar\eta\Psi\right)\,, \tag{6.276}$$

wobei

$$\mathcal{A}_\mu \equiv \frac{\delta W}{\delta J^\mu}\,,\quad \bar\Psi \equiv -\frac{\delta W}{\delta\eta}\,,\quad \Psi \equiv \frac{\delta W}{\delta\bar\eta}\,. \tag{6.277}$$

Mit einer Rechnung analog der in Gl. (6.249) zeigt man

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu} = -J^\mu\,,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\Psi} = -\eta\,,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\Psi} = \bar\eta\,. \tag{6.278}$$

Unter Benutzung der Glgen. (6.277), (6.278) wird Gl. (6.275) zu

$$0 = -\lambda\,\Box_x\,\partial^x_\mu\mathcal{A}^\mu(X) + \partial^x_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta\mathcal{A}_\mu(X)} - ie\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\Psi(X)}\,\Psi(X) + \bar\Psi(X)\,\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\Psi(X)}\right)\,. \tag{6.279}$$

Nun differenzieren wir funktional bezüglich $\bar{\Psi}(Y)$ und $\Psi(Z)$. Der erste Term auf der rechten Seite hängt nicht von diesen Feldern ab und verschwindet. Bringen wir die Klammer auf die linke Seite, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^x \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\mathcal{A}_\mu(X)} &= ie\frac{\delta}{\delta\Psi(Z)}\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\Psi(X)}\Psi(X) + \delta^{(4)}(X-Y)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\Psi}(X)}\right. \\
&\qquad \left. - \bar{\Psi}(X)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\bar{\Psi}(X)}\right] \\
&= ie\left[\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\Psi(X)}\Psi(X) + \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\Psi(X)}\delta^{(4)}(X-Z)\right. \\
&\qquad \left. + \delta^{(4)}(X-Y)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(X)} + \bar{\Psi}(X)\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\bar{\Psi}(X)}\right] .
\end{aligned} \tag{6.280}$$

Nun werten wir diese Gleichung am Extremum $\mathcal{A} = A$, $\Psi = \psi$, $\bar{\Psi} = \psi$ von $\Gamma[\mathcal{A}, \Psi, \bar{\Psi}]$ aus. Zumindest in Störungstheorie liegt dieses bei $A = \psi = \bar{\psi} = 0$ und wir werden dies im Folgenden benutzen, um die Notation zu vereinfachen. Desweiteren können wir ausnutzen, dass dieselbe Zahl von Fermionen in einen Vertex hinein- wie hinauslaufen müssen, d.h. alle dritten Funktionalableitungen von Γ, die nicht dieselbe Zahl von Ableitungen nach Ψ und nach $\bar{\Psi}$ haben, verschwinden. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^x \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\mathcal{A}_\mu(X)}\bigg|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0} &= ie\left[\delta^{(4)}(X-Y)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)}\bigg|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0}\right. \\
&\qquad \left. - \delta^{(4)}(X-Z)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)}\bigg|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0}\right] ,
\end{aligned} \tag{6.281}$$

wobei wir die Argumente der Funktionalableitungen mit Hilfe der δ-Funktion umbenannt haben, sowie $\delta^2\Gamma/\delta\bar{\Psi}\delta\Psi = -\delta^2\Gamma/\delta\Psi\delta\bar{\Psi}$ benutzt haben. Gleichung (6.281) ist die sog. **Ward-Takahashi-Identität** (in Raum-Zeit-Koordinaten). Sie verknüpft die 4-Divergenz des **Elektron-Photon-Vertex** mit der Differenz von zwei **Zwei-Punkt-1PI-Vertexfunktionen für Elektronen**. Letztere sind, wie aufgrund der Diskussion aus Abschnitt 6.5 zu erwarten ist, (bis auf Faktoren i) identisch mit **inversen vollen Elektron-Propagatoren**. Um dies zu sehen, bemerken wir zunächst, dass aufgrund von Gl. (6.277)

$$\mathcal{G}(X,Y) \equiv i\,\frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(X)\delta\eta(Y)} = -i\frac{\delta\bar{\Psi}(Y)}{\delta\bar{\eta}(X)} . \tag{6.282}$$

Für verschwindende Quellen und unter Benutzung von $W = -i\ln Z$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(X,Y)|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} &= i\,\frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(X)\delta\eta(Y)}\bigg|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} \equiv \frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(X)\delta\eta(Y)}\bigg|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} \\
&= \langle 0|\hat{T}\left[\hat{\psi}(X)\hat{\bar{\psi}}(Y)\right]|0\rangle \equiv \mathcal{G}_c^{(2)}(X,Y)
\end{aligned} \tag{6.283}$$

gerade die **volle verbundene fermionische Zwei-Punkt-Funktion** (also bis auf einen Faktor i der volle Propagator, vgl. Gl. (5.155)) ist.

Ferner ist aufgrund von Gl. (6.278)

$$\Gamma(X,Y) \equiv \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(Y)\delta\bar{\Psi}(X)} = -\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\Psi}(X)\delta\Psi(Y)} = -\frac{\delta\bar{\eta}(Y)}{\delta\bar{\Psi}(X)} \,. \tag{6.284}$$

Somit ist

$$\Gamma(X,Y)|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0} = \left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(Y)\delta\bar{\Psi}(X)}\right|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0} \equiv \Gamma^{(2)}(X,Y) \tag{6.285}$$

die **fermionische Zwei-Punkt-1PI-Vertexfunktion**. Die in den Glgen. (6.282) bzw. (6.284) definierten Funktionen $\mathcal{G}(X,Z)$ und $\Gamma(Z,Y)$ sind (bis auf einen Faktor i) zueinander invers,

$$\int \mathrm{d}^4Z\, \mathcal{G}(X,Z)\Gamma(Z,Y) = \int \mathrm{d}^4Z \left(-i\,\frac{\delta\bar{\Psi}(Z)}{\delta\bar{\eta}(X)}\right)\left(-\frac{\delta\bar{\eta}(Y)}{\delta\bar{\Psi}(Z)}\right) = i\,\frac{\delta\bar{\eta}(Y)}{\delta\bar{\eta}(X)} = i\,\delta^{(4)}(X-Y)\,, \tag{6.286}$$

wobei wir die Kettenregel angewendet haben. Also ist

$$\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi(Y)\delta\bar{\Psi}(X)}\right|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0} \equiv \Gamma^{(2)}(X,Y) = i\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(X,Y)\,. \tag{6.287}$$

Weil der volle Fermion-Propagator identisch mit $-i\mathcal{G}_c^{(2)}$ ist (vgl. Gl. (5.155) für den nicht-wechselwirkenden Fall), ist $i[\mathcal{G}_c^{(2)}]^{-1}$ identisch mit dem inversen vollen Fermion-Propagator. Dies beweist die Behauptung, dass die Zwei-Punkt-1PI-Vertexfunktion identisch mit dem inversen vollen Propagator ist.

Wir transformieren die Ward-Takahashi-Identität (6.281) nun in den Impulsraum. Für die linke Seite benutzen wir

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\, e^{i(P'\cdot Y - P\cdot Z - Q\cdot X)} & \left.\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\mathcal{A}_\mu(X)}\right|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0} \\ \equiv\ & -e(2\pi)^4\delta^{(4)}(P'-P-Q)\,\Gamma^\mu(P',P,Q)\,,\end{aligned} \tag{6.288}$$

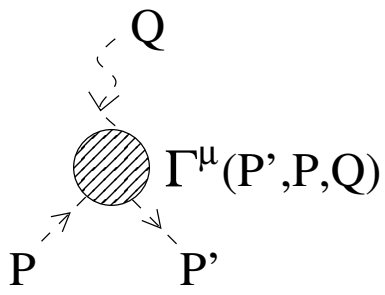
wobei dies als Definition für den **vollen Elektron-Photon-Vertex** $\Gamma^\mu(P',P,Q)$ im Impulsraum anzusehen ist, vgl. Abb. 6.9 für eine graphische Darstellung. Die vierdimensionale δ-Funktion stellt hierbei die Energie-Impuls-Erhaltung am Vertex sicher, während der Faktor $-e$ reine Konvention ist.

In niedrigster Ordnung in Störungstheorie erwarten wir, dass $\Gamma^\mu(P',P,Q) \equiv \gamma^\mu$. Dies kann man mit einem einfachen heuristischen Argument begründen. Dazu bemerkt man zunächst, dass das erzeugende Funktional $\Gamma[\mathcal{A},\Psi,\bar{\Psi}]$ mathematisch einer **Wirkung** entspricht. Man bezeichnet Γ deshalb auch als **effektive Wirkung**. Wenn wir Quantenfluktuationen vernachlässigen, also die Funktionalintegrale über die Felder der Theorie ignorieren, wird das erzeugende Funktional

$$W_{\text{klass}}[J,\bar{\eta},\eta] = -i\ln Z_{\text{klass}}[J,\bar{\eta},\eta] \equiv \int \mathrm{d}^4X\left[\mathcal{L}(\mathcal{A},\Psi,\bar{\Psi}) + J^\mu\mathcal{A}_\mu + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi\right]\,,$$

wobei wir die Quantenfelder A_μ, ψ, $\bar{\psi}$ durch ihre Erwartungswerte $\mathcal{A}_\mu$, Ψ, $\bar{\Psi}$ (in Anwesenheit von Quellen J^μ, $\bar{\eta}$, η) ersetzt haben, vgl. Gl. (6.277). Eingesetzt in die Definition

Abbildung 6.9: Der volle Elektron-Photon-Vertex im Impulsraum.



von $\Gamma[\mathcal{A}, \Psi, \bar{\Psi}]$, Gl. (6.276), ergibt sich sofort

$$\Gamma_{\text{klass}}[\mathcal{A}, \Psi, \bar{\Psi}] = \int \mathrm{d}^4 X \mathcal{L}(\mathcal{A}, \Psi, \bar{\Psi}) \equiv S[\mathcal{A}, \Psi, \bar{\Psi}] \ ,$$

also gerade die **klassische Wirkung** der Theorie. Daraus folgt wiederum

$$\left. \frac{\delta^3 \Gamma_{\text{klass}}}{\delta\Psi(Z)\delta\bar{\Psi}(Y)\delta\mathcal{A}_\mu(X)} \right|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar{\Psi}=0} = -e\gamma^\mu \delta^{(4)}(X-Y)\delta^{(4)}(X-Z) \ .$$

Eingesetzt in Gl. (6.288) ergibt sich für die linke Seite

$$-e \int \mathrm{d}^4 X \, e^{i(P'-P-Q)\cdot X} \gamma^\mu = -e(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P'-P-Q)\gamma^\mu,$$

also wie erwartet $\Gamma^\mu_{\text{klass}}(P', P, Q) = \gamma^\mu$.

Um die rechte Seite der Ward-Takahashi-Identität (6.281) in den Impulsraum zu transformieren, benutzen wir

$$\int \mathrm{d}^4 Y \, \mathrm{d}^4 Z \, e^{i(P'\cdot Y - P\cdot Z)} \left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1} (Y, Z) \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P'-P) \left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1} (P) \ , \tag{6.289}$$

wobei dies als Definition der inversen vollen verbundenen Zwei-Punkt-Funktion $[\mathcal{G}_c^{(2)}]^{-1}(P)$ im Impulsraum anzusehen ist.

Mit den Glgen. (6.288), (6.289) erhalten wir die in den Impulsraum transformierte

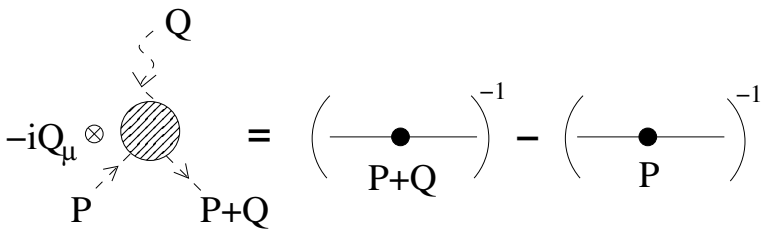
Ward-Takahashi-Identität (6.281):

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,e^{i(P'\cdot Y-P\cdot Z-Q\cdot X)}\,\partial^x_\mu\,\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar\Psi(Y)\delta\mathcal{A}_\mu(X)}\bigg|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar\Psi=0}\\
&= -\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,(-iQ_\mu)e^{i(P'\cdot Y-P\cdot Z-Q\cdot X)}\,\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\Psi(Z)\delta\bar\Psi(Y)\delta\mathcal{A}_\mu(X)}\bigg|_{\mathcal{A}=\Psi=\bar\Psi=0}\\
&= iQ_\mu(-e)(2\pi)^4\delta^{(4)}(P'-P-Q)\,\Gamma^\mu(P',P,Q)\\
&= \int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,e^{i(P'\cdot Y-P\cdot Z-Q\cdot X)}\,ie\Big\{\delta^{(4)}(X-Y)\,i\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(Y,Z)\\
&\qquad\qquad - \delta^{(4)}(X-Z)\,i\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(Y,Z)\Big\}\\
&= -e\int \mathrm{d}^4Y\,\mathrm{d}^4Z\,\left\{e^{i[(P'-Q)\cdot Y-P\cdot Z]}-e^{i[P'\cdot Y-(P+Q)\cdot Z]}\right\}\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(Y,Z)\\
&= -e(2\pi)^4\delta^{(4)}(P'-P-Q)\left\{\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(P)-\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(P+Q)\right\}\,,
\end{aligned}
\tag{6.290}
$$

wobei wir zur zweiten Zeile partiell integriert und zur vierten Zeile Gl. (6.287) benutzt haben. Kombinieren wir die dritte mit der letzten Zeile, erhalten wir die **Ward-Takahashi-Identität im Impulsraum**,

$$
-iQ_\mu\Gamma^\mu(P+Q,P,Q)=\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(P+Q)-\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(P)\,. \tag{6.291}
$$

Graphisch läßt sich dies wie folgt darstellen:



Im Limes $Q_\mu\to 0$ erhalten wir aus Gl. (6.290) die sog. **Ward-Identität**

$$
-i\Gamma^\mu(P,P,0)=\frac{\partial}{\partial P_\mu}\left[\mathcal{G}_c^{(2)}\right]^{-1}(P)\,. \tag{6.292}
$$

In niedrigster Ordnung Störungstheorie ist der volle Propagator gerade gleich dem freien, also $\mathcal{G}_c^{(2)}(P)=iS_F(P)$, $[\mathcal{G}_c^{(2)}]^{-1}(P)=-iS_F^{-1}(P)=-i(\not P-M)$, und der volle Elektron-Photon-Vertex gerade gleich dem der klassischen Wirkung, $\Gamma^\mu(P,P,0)=\gamma^\mu$. Dann ist die Ward-Identität automatisch erfüllt,

$$
\frac{\partial}{\partial P_\mu}(-i)(\not P-M)=-i\gamma^\mu\,.
$$

2.6.2021

6.7 QCD: Becchi–Rouet–Stora–Tyutin–Transformation und Slavnov–Taylor–Identitäten

Wir betrachten die **reine Yang–Mills–Theorie**, d.h. ausschließlich nicht-Abelsche Eichfelder mit $SU(N)$–Eichsymmetrie **ohne Fermionen**. In einer gegebenen Eichung lautet

die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{\text{FPG}} \ , \tag{6.293}$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ die Yang–Mills–Lagrange-Dichte (2.222) ist. In kovarianter Eichung lautet der eichfixierende Anteil, vgl. Gl. (3.179),

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{\lambda}{2} \left(\partial \cdot A_a\right)^2 \tag{6.294}$$

und der Anteil der Faddeev-Popov-Geistfelder, vgl. Glgen. (5.302) und (5.303),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{FPG}} &= \bar{\eta}_a \left\{-\delta_{ab} \Box + g\, f_{abc} \left[(\partial_\mu A_c^\mu) + A_c^\mu \partial_\mu\right]\right\} \eta_b \\
&= -\bar{\eta}_a \Box \eta_a + g\, f_{abc} \bar{\eta}_a \partial_\mu \left(A_c^\mu \eta_b\right) \\
&= \left(\partial_\mu \bar{\eta}_a\right) \partial^\mu \eta_a - g\, f_{abc} \left(\partial_\mu \bar{\eta}_a\right) A_c^\mu \eta_b \\
&= \left(\partial_\mu \bar{\eta}_a\right) \left(\partial^\mu \eta_a + g\, f_{abc} A_b^\mu \eta_c\right) \\
&= \left(\partial_\mu \bar{\eta}_a\right) D_{ac}^\mu \eta_c \\
&= -\bar{\eta}_a\, \partial \cdot D_{ac} \eta_c \ ,
\end{aligned} \tag{6.295}$$

mit der **kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung**

$$D_{ac}^\mu \equiv \partial^\mu \delta_{ac} + g\, f_{abc} A_b^\mu \ . \tag{6.296}$$

In Gl. (6.295) haben wir von der zweiten zur dritten Zeile beide Terme partiell integriert und von der dritten zur vierten Zeile die Farbindizes im zweiten Term vertauscht ($b \leftrightarrow c$) sowie die Antisymmetrie der Strukturkonstanten ausgenutzt. Von der fünften zur sechsten Zeile haben wir ein weiteres Mal partiell integriert.

Zur Form der kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung bemerken wir noch, dass die kovariante Ableitung allgemein wie in Gl. (2.205) definiert ist, also

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\, \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu - ig\, T_b A_\mu^b \ , \tag{6.297}$$

dass wir aber nun die Generatoren in der adjungierten Darstellung benötigen, vgl. Gl. (6.109) für die Gruppe $SU(2)$, also allgemein für die Gruppe $SU(N)$

$$(T_b)_{ac} \equiv -i\, f_{bac} = i f_{abc} \ . \tag{6.298}$$

Damit nimmt die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung (in Komponenten) genau die in Gl. (6.296) angegebene Form an. Man beachte, dass im Gegensatz zur kovarianten Ableitung in der fundamentalen Darstellung, Gl. (2.203), nun adjungierte (a, b, c) anstelle der fundamentalen Farbindizes (i, k) auftreten.

Eine $SU(N)$–Eichtransformation des Eichfeldes lautet wie in Gl. (5.294) angegeben, also

$$\mathcal{A}_\mu \longrightarrow \mathcal{A}'_\mu = U \mathcal{A}_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} \left(\partial_\mu U\right) U^\dagger \ , \tag{6.299}$$

mit $U = e^{i\omega_a T_a}$, vgl. Gl. (5.295). Wir bemerken nun, dass das Produkt von zwei Graßmann–wertigen Variablen sich wie eine gewöhnliche klassische Zahl (eine sog. c-Zahl) verhält. Dies gilt auch für die (raum-zeit-abhängigen) Parameter $\omega^a(X)$ der Eichgruppe $SU(N)$.

Da die Eichparameter beliebig gewählt werden können, können wir auch folgende spezielle Wahl treffen, die aus dem Produkt von zwei Graßmann–Variablen besteht,

$$\omega^a(X) \equiv -\eta^a(X)\zeta \ , \tag{6.300}$$

wobei $\eta^a(X)$ gerade das Graßmann-wertige Geistfeld ist, was sowohl den Farbindex a als auch die Raum-Zeit-Abhängigkeit des Eichparameters $\omega^a(X)$ übernimmt, während ζ eine raum-zeit-unabhängige, also konstante Graßmann–Variable ist. Das Minus-Zeichen in Gl. (6.300) ist reine Konvention. Für das Element U der Eichgruppe erhalten wir in diesem speziellen Fall

$$U = e^{i\omega_a(X)T_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[-T_a\, \eta_a(X)\, \zeta\right]^n = 1 - i\, T_a\, \eta_a(X)\, \zeta \ , \tag{6.301}$$

weil in allen Termen $n > 1$ die Graßmann–Zahl ζ mehr als einmal vorkommt und (nach entsprechendem Antivertauschen mit $\eta_a(X)$) Potenzen $n \geq 2$ von ζ auftreten, für die $\zeta^n = 0$ gilt. Unter Benutzung der Tatsache, dass $\zeta^n = 0 \ \forall\, n \geq 2$, berechnen wir die Eichtransformation (6.299) zu

$$\begin{aligned}
A^a_\mu T_a \longrightarrow A'^a_\mu T_a &= (1 - i\, T_b\, \eta_b\, \zeta)\, A^a_\mu T_a\, (1 + i\, T_c\, \eta_c\, \zeta) - \frac{1}{g}\, (\partial_\mu \eta_a)\, \zeta\, T_a\, (1 + i\, T_b\, \eta_b\, \zeta) \\
&= A^a_\mu T_a - i[T_b, T_a]\, A^a_\mu\, \eta_b\, \zeta - \frac{1}{g}\, (\partial_\mu \eta_a)\, \zeta\, T_a \\
&= T_a \left[A^a_\mu + f_{cba}\, A^b_\mu\, \eta_c\, \zeta - \frac{1}{g}\, (\partial_\mu \eta_a)\, \zeta \right] \\
&= T_a \left[A^a_\mu - f_{abc}\, A^b_\mu\, \eta_c\, \zeta - \frac{1}{g}\, (\partial_\mu \eta_a)\, \zeta \right] \\
&= T_a \left(A^a_\mu + \delta A^a_\mu \right) \ ,
\end{aligned} \tag{6.302}$$

mit

$$\delta A^a_\mu \equiv -\frac{1}{g} \left(D^{ac}_\mu \eta^c \right) \zeta \ , \tag{6.303}$$

vgl. Gl. (6.296). Wir fordern nun, dass sich die Geistfelder η^a und $\bar{\eta}^a$ in folgender Weise transformieren:

$$\eta^a \longrightarrow \eta'^{\,a} = \eta^a + \delta\eta^a \ , \quad \bar{\eta}^a \longrightarrow \bar{\eta}'^{\,a} = \bar{\eta}^a + \delta\bar{\eta}^a \ , \tag{6.304}$$

mit

$$\delta\eta^a \equiv -\frac{1}{2}\, f^{abc} \eta^b \eta^c \zeta \ , \tag{6.305}$$

$$\delta\bar{\eta}^a \equiv -\frac{\lambda}{g}\, (\partial \cdot A^a)\, \zeta \ . \tag{6.306}$$

Die Gleichungen (6.303), (6.305) und (6.306) bezeichnet man als **Becchi–Rouet–Stora–Tyutin–Transformation**, oder kurz BRST–Transformation. Man beachte, dass η^a und $\bar{\eta}^a$ voneinander völlig unabhängige Graßmann–Variablen sind, daher sich auch in unterschiedlicher Weise transformieren dürfen.

Wir zeigen nun, dass die Lagrange-Dichte (6.293) **invariant** unter dieser Transformation ist, die Lagrange-Dichte also eine sog. **BRST–Symmetrie** besitzt.

(i) Zunächst ist klar, dass der Eichfeldanteil $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ BRST–invariant ist: hier wird lediglich das Eichfeld A_μ^a um den Beitrag (6.303) korrigiert, was einer üblichen Eichtransformation des Eichfeldes entspricht. Wir wissen aber bereits, dass $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ eichinvariant ist.

(ii) Wegen $\zeta^2 = 0$ brauchen wir lediglich Terme in linearer Ordnung in δA_μ^a betrachten. Dann lautet die Änderung des eichfixierenden Anteils (6.294) unter der Transformation (6.303)

$$\delta\mathcal{L}_{gf} = -\lambda\,(\partial\cdot A_a)\,(\partial\cdot\delta A_a) = \frac{\lambda}{g}\,(\partial\cdot A_a)\,(\partial\cdot D_{ac}\eta_c)\,\zeta\ . \tag{6.307}$$

(iii) In linearer Ordnung in $\delta\bar\eta_a$, $\delta\eta_c$ und δA_μ^b lautet die Änderung des Faddeev–Popov-Anteils (6.295)

$$\delta\mathcal{L}_{\mathrm{FPG}} = -\delta\bar\eta_a\,\partial\cdot D_{ac}\eta_c - \bar\eta_a\,\partial_\mu\delta\left(D_{ac}^\mu\eta_c\right)\ . \tag{6.308}$$

Der erste Term lautet mit Gl. (6.306)

$$-\,\delta\bar\eta_a\,\partial\cdot D_{ac}\eta_c = \frac{\lambda}{g}\,(\partial\cdot A_a)\,\zeta\,\partial\cdot D_{ac}\eta_c = -\frac{\lambda}{g}\,(\partial\cdot A_a)\,(\partial\cdot D_{ac}\eta_c)\,\zeta\ , \tag{6.309}$$

wobei das Minus-Zeichen im letzten Schritt durch (Anti-)Vertauschung der beiden Graßmann–Variablen ζ und η_c zustande kommt. Wir sehen, dass dieser Term sich exakt mit $\delta\mathcal{L}_{gf}$, Gl. (6.307), weghebt.

Für die gesamte Änderung der Lagrange-Dichte (6.293) unter einer BRST–Transformation verbleibt also lediglich der zweite Term aus Gl. (6.308),

$$\delta\mathcal{L} = -\bar\eta_a\,\partial_\mu\delta\left(D_{ac}^\mu\eta_c\right)\ .$$

Wir zeigen nun, dass dies verschwindet. In linearer Ordnung in $\delta\eta_c$ und δA_μ^b haben wir

$$\begin{aligned}
\delta\left(D_{ac}^\mu\eta_c\right) &= \delta\left[\left(\delta_{ac}\,\partial^\mu + g\,f_{abc}A_b^\mu\right)\eta_c\right] \\
&= \partial^\mu\delta\eta_a + g\,f_{abc}\left(\delta A_b^\mu\eta_c + A_b^\mu\delta\eta_c\right) \\
&= -\frac{1}{2}\,f_{abc}\,\partial^\mu\left(\eta_b\eta_c\right)\zeta - f_{abc}\left(D_{bd}^\mu\,\eta_d\right)\zeta\eta_c - \frac{g}{2}\,f_{abc}\,A_b^\mu\,f_{cde}\,\eta_d\eta_e\,\zeta\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (6.303) und (6.305) benutzt haben. Wir berechnen dies nun weiter, indem wir im ersten Term die Produktregel, im zweiten Term die Definition (6.296) und die Antivertauschungseigenschaften von Graßmann–Variablen ausnutzen,

$$\begin{aligned}
\delta\left(D_{ac}^\mu\eta_c\right) &= \Big\{-\frac{1}{2}\,f_{abc}\left[\left(\partial^\mu\eta_b\right)\eta_c - \left(\partial^\mu\eta_c\right)\eta_b\right] + f_{abc}\left(\partial^\mu\eta_b + g\,f_{bed}A_e^\mu\eta_d\right)\eta_c \\
&\qquad\qquad - \frac{g}{2}\,f_{abc}f_{cde}A_b^\mu\eta_d\eta_e\Big\}\,\zeta \\
&= \left[-f_{abc}\left(\partial^\mu\eta_b\right)\eta_c + f_{abc}\left(\partial^\mu\eta_b + g\,f_{bed}A_e^\mu\eta_d\right)\eta_c - \frac{g}{2}\,f_{abc}f_{cde}A_b^\mu\eta_d\eta_e\right]\zeta \\
&= \frac{g}{2}\left(2f_{ace}f_{cbd} - f_{abc}f_{cde}\right)A_b^\mu\eta_d\eta_e\zeta\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir von der vorletzten zur letzten Zeile im ersten Term lediglich Indizes umbenannt haben ($b \to c$, $c \to e$, $e \to b$). Mit der Jacobi-Identität für die Strukturkonstanten der $SU(N)$ (vgl. Vorlesung "Quantenmechanik II", Gl. (2.62))

$$0 = f_{abc} f_{cde} + f_{adc} f_{ceb} + f_{aec} f_{cbd} \tag{6.310}$$

berechnen wir weiter:

$$\begin{aligned}
\delta\left(D^\mu_{ac}\eta_c\right) &= \frac{g}{2}\left(-2 f_{aec} f_{cbd} - f_{abc} f_{cde}\right) A^\mu_b \eta_d \eta_e \zeta \\
&= \frac{g}{2}\left(-f_{aec} f_{cbd} - f_{aec} f_{cbd} - f_{abc} f_{cde}\right) A^\mu_b \eta_d \eta_e \zeta \\
&= \frac{g}{2}\left(-f_{aec} f_{cbd} + f_{adc} f_{ceb}\right) A^\mu_b \eta_d \eta_e \zeta \\
&= \frac{g}{2}\left(f_{adc} f_{cbe} + f_{adc} f_{ceb}\right) A^\mu_b \eta_d \eta_e \zeta \equiv 0 \,,
\end{aligned} \tag{6.311}$$

wobei wir zur letzten Zeile im ersten Term die Summationsindizes $d \leftrightarrow e$ vertauscht haben, aber wegen $\eta_e \eta_d = -\eta_d \eta_e$ ein weiteres Minuszeichen erhalten. Der gesamte Ausdruck verschwindet aufgrund der Antisymmetrie der Strukturkonstanten. Insgesamt haben wir damit die BRST–Invarianz der Lagrange–Dichte (6.293) gezeigt.

Wir werden nun aus der Forderung, dass das erzeugende Funktional für die Yang–Mills–Theorie BRST–invariant ist, die sog. **Slavnov–Taylor–Identitäten** herleiten, das Analogon zu den Ward-Takahashi–Identitäten der QED. Es ist zweckmäßig, nicht nur für das Eichfeld A^a_μ und die Geistfelder $\bar\eta^a$ und η^a Quellen einzuführen, sondern auch für die Terme $\frac{1}{g} D^\mu_{ac}\eta_c$ und $-\frac{1}{2} f^{abc}\eta^b\eta^c$:

$$\begin{aligned}
Z[s,x,y;u,v] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar\eta^a \mathcal{D}\eta^a \, \exp\Bigg\{ i \int \mathrm{d}^4X \Big[\mathcal{L} + s^a_\mu A^\mu_a + x^a \eta^a + y^a \bar\eta^a \\
&\qquad + u^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac}\eta_c + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc}\eta^b\eta^c\right)\Big]\Bigg\} \,.
\end{aligned} \tag{6.312}$$

Man beachte, dass x^a, y^a und u^a_μ Graßmann–wertig sind, v^a dagegen eine gewöhnliche c-Zahl.

Nun führen wir eine BRST–Transformation von $Z[s,x,y;u,v]$ durch. Im Exponenten ist $\mathcal{L}$ BRST–invariant, wie wir gerade gezeigt haben. Ferner ist der Koeffizient von u^a_μ, $D^\mu_{ac}\eta_c$, BRST–invariant, s. Gl. (6.311). Desweiteren ist auch der Koeffizient von v^a BRST–invariant, denn mit Gl. (6.305) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\delta\left(f^{abc}\eta^b\eta^c\right) &= f^{abc}\left[\left(\delta\eta^b\right)\eta^c + \eta^b\delta\eta^c\right] \\
&= -\frac{1}{2} f^{abc}\left(f^{bde}\eta^d\eta^e\zeta\eta^c + f^{cde}\eta^b\eta^d\eta^e\zeta\right) \\
&= \frac{1}{2} f^{abc}\left(f^{bde}\eta^d\eta^e\eta^c - f^{cde}\eta^b\eta^d\eta^e\right)\zeta \\
&= \frac{1}{2} f^{abc}\left(f^{bde}\eta^c\eta^d\eta^e - f^{cde}\eta^b\eta^d\eta^e\right)\zeta \\
&= -\frac{1}{2} f^{abc}\left(f^{cde}\eta^b\eta^d\eta^e + f^{cde}\eta^b\eta^d\eta^e\right)\zeta \\
&= -f^{abc} f^{cde}\eta^b\eta^d\eta^e\zeta \,,
\end{aligned}$$

wobei wir zur vorletzten Zeile die Indizes $b \leftrightarrow c$ im ersten Term umbenannt haben und die Antisymmetrie der Strukturkonstanten, $f^{acb} = -f^{abc}$, ausgenutzt haben. Nutzen wir die Antivertauschungsregeln für Graßmann–Variablen, können wir das Ergebnis in der folgenden Form schreiben,

$$\begin{aligned}\delta\left(f^{abc}\eta^b\eta^c\right) &= -\frac{1}{3}\,f^{abc}f^{cde}\left(\eta^b\eta^d\eta^e+\eta^d\eta^e\eta^b+\eta^e\eta^b\eta^d\right)\zeta \\ &= -\frac{1}{3}\left(f^{abc}f^{cde}+f^{aec}f^{cbd}+f^{adc}f^{ceb}\right)\eta^b\eta^d\eta^e\zeta \equiv 0\,,\end{aligned}$$

wobei wir zur letzten Zeile die Indizes im zweiten und dritten Term der ersten Zeile geeignet umbenannt haben. Die rechte Seite verschwindet aufgrund der Jacobi-Identität (6.310).

Wir zeigen nun, dass auch das Integrationsmaß in Gl. (6.312) BRST–invariant ist. Dazu müssen wir folgende Jacobi-Determinante berechnen:

$$\mathcal{J} \equiv \det\left(\frac{\delta[A^a_\mu(X)+\delta A^a_\mu(X),\bar\eta^a(X)+\delta\bar\eta^a(X),\eta^a(X)+\delta\eta^a(X)]}{\delta[A^b_\nu(Y),\bar\eta^b(Y),\eta^b(Y)]}\right) \tag{6.313}$$

$$= \det\left(\mathbb{1}+\frac{\delta[\delta A^a_\mu(X),\delta\bar\eta^a(X),\delta\eta^a(X)]}{\delta[A^b_\nu(Y),\bar\eta^b(Y),\eta^b(Y)]}\right) \equiv \det\left(\mathbb{1}+\delta A\right)\ . \tag{6.314}$$

Nun ist

$$\ln\mathcal{J} = \ln\det\left(\mathbb{1}+\delta A\right) = \mathrm{Tr}\ln\left(\mathbb{1}+\delta A\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{Tr}\left(\delta A\right)^n\ .$$

Da $\delta A \sim \zeta$ (s.u., Gl. (6.319)), bricht die Summe (wegen $\zeta^2 = 0$) nach dem ersten Term ab und wir erhalten

$$\ln\mathcal{J} = \mathrm{Tr}\,\delta A = \mathrm{Tr}\left(\frac{\delta[\delta A^a_\mu(X),\delta\bar\eta^a(X),\delta\eta^a(X)]}{\delta[A^b_\nu(Y),\bar\eta^b(Y),\eta^b(Y)]}\right)\ .$$

Mit den Glgen. (6.303), (6.305) und (6.306) berechnen wir die nichtverschwindenden Elemente von δA,

$$\frac{\delta(\delta A^a_\mu(X))}{\delta A^b_\nu(Y)} = -f^{abc}\eta^c(X)\,g_\mu{}^\nu\,\delta^{(4)}(X-Y)\,\zeta\,, \tag{6.315}$$

$$\frac{\delta(\delta A^a_\mu(X))}{\delta\eta^b(Y)} = -\frac{1}{g}D^{ab}_\mu(X)\delta^{(4)}(X-Y)\,\zeta\,, \tag{6.316}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta(\delta\eta^a(X))}{\delta\eta^b(Y)} &= -\frac{1}{2}f^{acd}\left[\delta^{bc}\eta^d(X)-\eta^c(X)\delta^{bd}\right]\delta^{(4)}(X-Y)\,\zeta \\ &= -f^{abc}\eta^c(X)\,\delta^{(4)}(X-Y)\,\zeta\,,\end{aligned} \tag{6.317}$$

$$\frac{\delta(\delta\bar\eta^a(X))}{\delta A^b_\nu(Y)} = -\frac{\lambda}{g}\,\partial^\nu_x\delta^{ab}\delta^{(4)}(X-Y)\,\zeta\,. \tag{6.318}$$

Schematisch nimmt das (X,Y)–Element der Matrix δA daher folgende Form an:

$$\delta A(X,Y) = \begin{pmatrix} -f^{abc}\eta^c(X)\,g_\mu{}^\nu & 0 & -\frac{1}{g}D^{ab}_\mu(X) \\ -\frac{\lambda}{g}\,\partial^\nu_x\delta_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{abc}\eta^c(X)\end{pmatrix}\delta^{(4)}(X-Y)\,\zeta\,. \tag{6.319}$$

Man beachte, dass das $(1,1)$–Element auch noch eine Matrix im Raum der adjungierten Farben (Indizes a, b) und eine Lorentz–Matrix (Indizes μ und ν) ist, während das $(1,3)$–Element ebenfalls eine Farbmatrix und einen Lorentz–Vektor darstellt. Das $(2,1)$–Element ist lediglich ein Lorentz–Vektor und das $(3,3)$–Element lediglich eine Farbmatrix. Die Spur von δA verschwindet nun, da die f^{abc} antisymmetrisch sind, also keine nichtverschwindenden Haupt-Diagonalelemente (Terme $\sim \delta^{ab}$) existieren. Daher gilt

$$\ln \mathcal{J} = \operatorname{Tr} \delta A = 0 \ , \quad \mathcal{J} = 1 \ . \tag{6.320}$$

Die Bedingung, dass $Z[s,x,y;u,v]$, Gl. (6.312), BRST–invariant ist, lautet nun 4.6.2021

$$\begin{aligned}
Z[s,x,y;u,v] &\equiv Z_{BRST}[s,x,y;u,v] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{\eta}^a \mathcal{D}\eta^a \, \exp\Big\{ i \int \mathrm{d}^4X \, \big[\mathcal{L} + s^a_\mu \left(A^\mu_a + \delta A^a_\mu \right) \\
&\qquad + x^a \left(\eta^a + \delta\eta^a \right) + y^a \left(\bar{\eta}^a + \delta\bar{\eta}^a \right) + u^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac} \eta_c + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \right) \big] \Big\} \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{\eta}^a \mathcal{D}\eta^a \left[1 + i \int \mathrm{d}^4X \left(s^a_\mu \delta A^\mu_a + x^a \delta\eta^a + y^a \delta\bar{\eta}^a \right) \right] \\
&\quad \times \exp\Big\{ i \int \mathrm{d}^4Y \left[\mathcal{L} + s^a_\mu A^\mu_a + x^a \eta^a + y^a \bar{\eta}^a + u^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac} \eta_c + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \right) \right] \Big\} \ .
\end{aligned} \tag{6.321}$$

Hier haben wir von der zweiten zur dritten Zeile alle Terme im Exponenten, die δA^a_μ, $\delta\eta^a$ und $\delta\bar{\eta}^a$ enthalten, in Form einer Exponentialfunktion faktorisiert und diese dann nach Taylor entwickelt. Da aber δA^a_μ, $\delta\eta^a$ und $\delta\bar{\eta}^a$ proportional zu ζ sind, bricht diese Taylorreihe nach dem linearen Term in ζ ab. Nun benutzen wir die Glgen. (6.303), (6.305) und (6.306) und erhalten

$$\begin{aligned}
Z[s,x,y;u,v] &\equiv Z_{BRST}[s,x,y;u,v] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{\eta}^a \mathcal{D}\eta^a \left[1 + i\zeta \int \mathrm{d}^4X \left(s^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac} \eta_c + x^a \frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c + y^a \frac{\lambda}{g} \partial_\mu A^\mu_a \right) \right] \\
&\quad \times \exp\Big\{ i \int \mathrm{d}^4Y \left[\mathcal{L} + s^a_\mu A^\mu_a + x^a \eta^a + y^a \bar{\eta}^a + u^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac} \eta_c + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \right) \right] \Big\} \\
&= \left[1 + i\zeta \int \mathrm{d}^4X \left(s^a_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u^a_\mu} - x^a \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta v^a} + y^a \frac{\lambda}{g} \partial_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta s^a_\mu} \right) \right] Z[s,x,y;u,v] \ ,
\end{aligned} \tag{6.322}$$

wobei wir den Vorfaktor der Exponentialfunktion wieder aus dem Funktionalintegral unter Ersetzung von Feldern durch entsprechende Funktionalableitungen nach Quellen herausgezogen haben. Die Bedingung, dass $Z[s,x,y;u,v]$ BRST–invariant ist, lautet nun

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathrm{d}^4X \left(s^a_\mu \frac{\delta Z}{\delta u^a_\mu} - x^a \frac{\delta Z}{\delta v^a} + y^a \frac{\lambda}{g} \partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta s^a_\mu} \right) \\
\Longleftrightarrow \quad 0 &= \int \mathrm{d}^4X \left(s^a_\mu \frac{\delta W}{\delta u^a_\mu} - x^a \frac{\delta W}{\delta v^a} + y^a \frac{\lambda}{g} \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta s^a_\mu} \right) \ ,
\end{aligned} \tag{6.323}$$

wobei wir $Z = e^{iW}$ benutzt haben.

Wir führen nun die Legendre–Transformierte von W ein,

$$\Gamma[A,\eta,\bar{\eta};u,v] \equiv W[s,x,y;u,v] - \int \mathrm{d}^4X \left(s^a_\mu A^\mu_a + x^a\eta^a + y^a\bar{\eta}^a\right) \ , \tag{6.324}$$

wobei

$$\frac{\delta W}{\delta s^a_\mu} = A^\mu_a \ , \quad \frac{\delta W}{\delta x^a} = \eta^a \ , \quad \frac{\delta W}{\delta y^a} = \bar{\eta}^a \ . \tag{6.325}$$

Damit zeigt man, dass

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^a_\mu} = -s^\mu_a \ , \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} = x^a \ , \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\eta}^a} = y^a \ . \tag{6.326}$$

Desweiteren gilt

$$\frac{\delta W}{\delta u^a_\mu} = \frac{\delta \Gamma}{\delta u^a_\mu} \ , \quad \frac{\delta W}{\delta v^a} = \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} \ , \tag{6.327}$$

da die Abhängigkeit von W von den Feldern u^a_μ und v^a nicht Legendre-transformiert wird. Mit den Glgen. (6.325) – (6.327) wird Gl. (6.323) zu

$$0 = \int \mathrm{d}^4X \left(-\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu_a}\frac{\delta \Gamma}{\delta u^a_\mu} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a}\frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\eta}^a}\frac{\lambda}{g}\partial_\mu A^\mu_a \right) \ . \tag{6.328}$$

Diese Gleichung läßt sich noch etwas vereinfachen, indem man ausnutzt, dass Differentiation nach und Integration über Graßmann–Variablen im Prinzip dasselbe sind, d.h.

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}^a(X)\, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a(X)}\, f(\bar{\eta}^a(X)) \equiv \int \mathrm{d}\bar{\eta}^a(X)\, \mathrm{d}\bar{\eta}^a(X)\, f(\bar{\eta}^a(X)) \equiv 0 \ .$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
0 \ &= \ \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{\eta}^a \mathcal{D}\eta^a \, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a(X)} \, \exp\Bigg\{ i \int \mathrm{d}^4Y \, \Big[\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} + \mathcal{L}_{gf} - \bar{\eta}^a \partial^\mu D^{ac}_\mu \eta^c \\
&\qquad\qquad + \ s^a_\mu A^\mu_a + x^a\eta^a + y^a\bar{\eta}^a + u^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac}\eta_c + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc}\eta^b\eta^c \right) \Big] \Bigg\} \\
&= \ \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{\eta}^a \mathcal{D}\eta^a \, i \left[-\partial^\mu D^{ac}_\mu(X)\eta^c(X) - y^a(X) \right] \exp\Bigg\{ i \int \mathrm{d}^4Y \, \Big[\mathcal{L} + s^a_\mu A^\mu_a \\
&\qquad\qquad + \ x^a\eta^a + y^a\bar{\eta}^a + u^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac}\eta_c + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc}\eta^b\eta^c \right) \Big] \Bigg\} \\
&= \ \mathcal{N} \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\bar{\eta}^a \mathcal{D}\eta^a \, i \left[-\partial_\mu \frac{g}{i} \frac{\delta}{\delta u^a_\mu(X)} - y^a(X) \right] \exp\Bigg\{ i \int \mathrm{d}^4Y \, \Big[\mathcal{L} + s^a_\mu A^\mu_a \\
&\qquad\qquad + \ x^a\eta^a + y^a\bar{\eta}^a + u^a_\mu \frac{1}{g} D^\mu_{ac}\eta_c + v^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc}\eta^b\eta^c \right) \Big] \Bigg\} \\
&= \ i \left[-\partial_\mu \frac{g}{i} \frac{\delta}{\delta u^a_\mu(X)} - y^a(X) \right] Z[s,x,y;u,v] \ .
\end{aligned} \tag{6.329}$$

Ersetzen wir Z durch $W = -i \ln Z$ und benutzen die Glgen. (6.326) und (6.327), so erhalten wir

$$- g\, \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta u^a_\mu} = y^a = \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\eta}^a} \ . \tag{6.330}$$

Damit wird Gl. (6.328) zu

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathrm{d}^4 X \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu_a} \frac{\delta \Gamma}{\delta u^a_\mu} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} + g \left(\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta u^a_\mu} \right) \frac{\lambda}{g}\, \partial_\nu A^\nu_a \right] \\ &= \int \mathrm{d}^4 X \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta u^a_\mu} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu_a} - \lambda\, \partial_\mu \partial_\nu A^\nu_a \right) + \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} \right] \ , \end{aligned} \tag{6.331}$$

wobei wir im letzten Schritt partiell integriert haben. Wir definieren nun noch das Funktional

$$\Gamma' \equiv \Gamma + \frac{\lambda}{2} \int \mathrm{d}^4 X\, (\partial \cdot A_a)^2 \ . \tag{6.332}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma'}{\delta A^\mu_a(X)} &= \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu_a(X)} + \lambda \int \mathrm{d}^4 Y\, \left[\partial^y_\nu A^\nu_a(Y) \right] \partial^y_\mu \delta^{(4)}(X - Y) \\ &= \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu_a(X)} - \lambda \int \mathrm{d}^4 Y\, \partial^y_\mu \left[\partial^y_\nu A^\nu_a(Y) \right] \delta^{(4)}(X - Y) \\ &= \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu_a(X)} - \lambda\, \partial_\mu \partial_\nu A^\nu_a(X) \ , \end{aligned} \tag{6.333}$$

während alle anderen funktionalen Ableitungen unverändert bleiben,

$$\frac{\delta \Gamma'}{\delta u^a_\mu} = \frac{\delta \Gamma}{\delta u^a_\mu} \ , \quad \frac{\delta \Gamma'}{\delta \eta^a} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} \ , \quad \frac{\delta \Gamma'}{\delta v^a} = \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} \ . \tag{6.334}$$

Mit den Glgen. (6.333), (6.334) wird Gl. (6.331) zu

$$0 = \int \mathrm{d}^4 X \left[\frac{\delta \Gamma'}{\delta u^a_\mu} \frac{\delta \Gamma'}{\delta A^\mu_a} + \frac{\delta \Gamma'}{\delta \eta^a} \frac{\delta \Gamma'}{\delta v^a} \right] \ . \tag{6.335}$$

Dies ist die Gleichung, die die Basis für die **Slavnov–Taylor–Identitäten** bildet.

7 Spontane Symmetriebrechung

7.1 Das Vakuum und spontane Symmetriebrechung

Das **Vakuum** ist per Definition der Zustand **niedrigster Energie**, d.h. der **Grundzustand**. In der klassischen Physik entspricht dieser dem **Minimum** der **potentiellen Energie**.

Dies gilt auch in der Quantenfeldtheorie. Betrachten wir z.B. die ϕ^4–Theorie mit der Lagrange–Dichte (6.1), die wir in der Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi) \tag{7.1}$$

schreiben können, mit der **potentiellen Energiedichte**, oder kurz (aber nicht ganz korrekt) dem **Potential**

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\,\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4\ . \tag{7.2}$$

Solange $m^2 > 0$ und $\lambda > 0$, besitzt $V(\phi)$ ein Minimum bei $\phi = \phi_0 = 0$, s. Abb. 7.1.

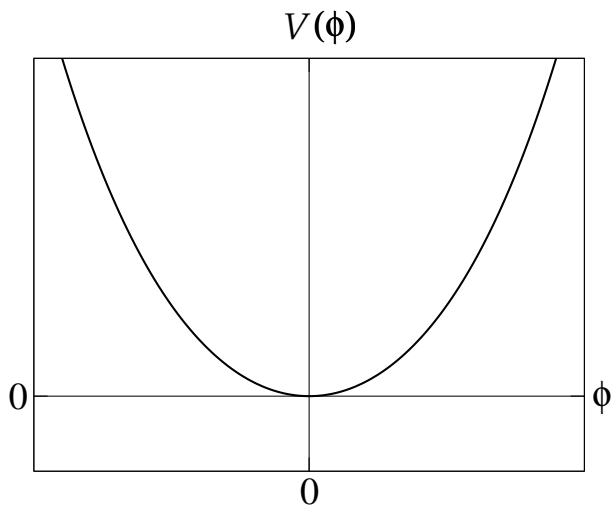


Abbildung 7.1: Die potentielle Energiedichte der ϕ^4–Theorie für $m^2 > 0$, $\lambda > 0$.

Das Vakuum oder der Grundzustand liegt also bei $\phi_0 = 0$. Die Krümmung des Potentials am Minimum ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 V(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0=0} = m^2 > 0\ . \tag{7.3}$$

Bislang haben wir m^2 als die (quadrierte) Masse der Anregungen des neutralen skalaren Feldes ϕ interpretiert. Aber das Feld ϕ muss nicht notwendigerweise Teilchen mit der Masse m beschreiben. In der **Theorie der kritischen Phänomene** beispielsweise kann ϕ der **Ordnungsparameter** für einen Phasenübergang sein.

Das Potential $V(\phi)$ ist auch nicht notwendigerweise auf quadratische und quartische Terme beschränkt. Allgemeiner kann es z.B. ein Polynom in ϕ sein,

$$\bar{V}(\phi) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} \phi^n \ . \tag{7.4}$$

Die einzige physikalisch begründbare Forderung, die man an das Potential $\bar{V}(\phi)$ stellt ist, dass es **nach unten beschränkt** sein muss. Dies bedeutet, dass $\alpha_N > 0$ und N eine gerade Zahl sein muss (ansonsten geht $\bar{V}(\phi) \to -\infty$ für $\alpha_N > 0$ und $\phi \to -\infty$ oder für $\alpha_N < 0$ und $\phi \to +\infty$). Eine zusätzliche Forderung im Rahmen der Quantenfeldtheorie ist, dass $\bar{V}(\phi)$ **renormierbar** ist (s. Kap. 8). Diese Forderung wird dann eine obere Schranke für N setzen (die i.a. von der Zahl der Raum-Zeit-Dimensionen abhängt).

Wir machen nun einen Gedankensprung, der aus der Tatsache resultiert, dass die Theorie (7.1) allgemeiner gültig ist als die bislang studierte Anwendung als wechselwirkende Quantenfeldtheorie neutraler skalarer Teilchen. Wir fragen uns deshalb, warum man m^2 auf positive Werte beschränken muss. Wenn wir auch Werte $m^2 < 0$ zulassen, dann hat das Potential (für $\lambda > 0$, was aufgrund der Beschränktheit nach unten gefordert werden muss) die in Abb. 7.2 gezeigte Form.

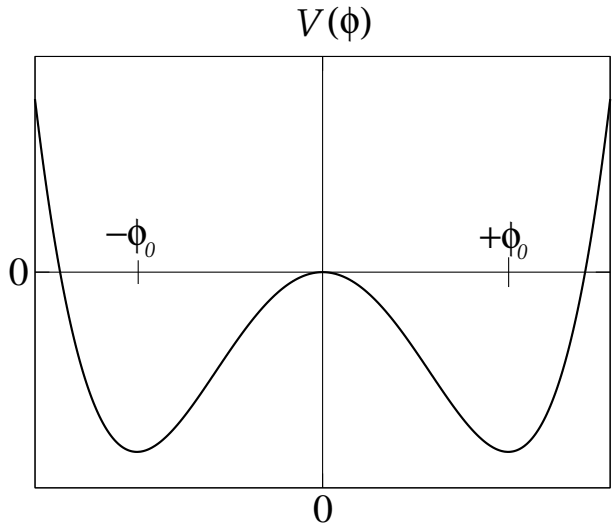


Abbildung 7.2: Die potentielle Energiedichte der ϕ^4–Theorie für $m^2 < 0, \lambda > 0$.

Wie man sieht, liegt der Grundzustand nun nicht länger bei $\phi = 0$. Dieser Punkt entspricht jetzt einem **lokalen Maximum** des Potentials. Die beiden **energetisch entarteten Minima** bestimmt man als nicht-triviale Lösungen der Gleichung

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}V(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi=\pm\phi_0} = \pm\phi_0 \left(m^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi_0^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \pm\phi_0 = \pm\sqrt{-\frac{6m^2}{\lambda}} \ . \tag{7.5}$$

Das System wählt eines der beiden (aber nicht beide gleichzeitig) als Grundzustand aus. Die Krümmung des Potentials am lokalen Maximum bei $\phi = 0$ ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 V(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}\right|_{\phi=0} = m^2 < 0 \ , \tag{7.6}$$

aber in den beiden Minima

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 V(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}\right|_{\phi=\pm\phi_0} = m^2 + \frac{\lambda}{2}\,\phi_0^2 = m^2 - \frac{\lambda}{2}\,\frac{6m^2}{\lambda} = -2m^2 > 0 \ . \tag{7.7}$$

Der Fall $m^2 < 0$ ist ein klassisches Beispiel für die **spontane Symmetriebrechung**. Spontane Symmetriebrechung liegt dann vor, wenn eine Theorie (genauer gesagt, die Lagrange–Dichte der Theorie) eine Symmetrie besitzt, aber das Vakuum bzw. der Grundzustand diese Symmetrie nicht erfüllt. Im hier diskutierten Beispiel besitzt die **Lagrange–Dichte** (7.1) eine sog. Z_2–Symmetrie, d.h. sie ist **invariant** unter der Z_2–Transformation

$$\phi \longrightarrow -\phi \ . \tag{7.8}$$

Der Grundzustand besitzt diese Symmetrie jedoch nicht, denn wenn wir annehmen, dass das System bei $+\phi_0$ $(-\phi_0)$ im Grundzustand ist, so geht dieser unter der Z_2–Transformation (7.8) in $-\phi_0$ $(+\phi_0)$ über, oder anders ausgedrückt, das System geht vom rechten (linken) Minimum in Abb. 7.2 in das linke (rechte) über.

Physikalische Anregungen, sprich **Teilchen**, entsprechen **Fluktuationen** um den Grundzustand. Wir zerlegen das Feld gemäß

$$\phi = \phi_0 + \phi' \ , \tag{7.9}$$

wobei ϕ' die Fluktuation des Feldes um den Grundzustand ϕ_0 darstellt. Setzen wir dies in die Lagrange–Dichte (7.1) ein, so erhalten wir (unter der Annahme $\phi_0 = const.$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - \frac{m^2}{2}\left(\phi_0^2 + 2\phi_0\phi' + \phi'^{\,2}\right) - \frac{\lambda}{4!}\left(\phi_0^4 + 4\phi_0^3\phi' + 6\phi_0^2\phi'^{\,2} + 4\phi_0\phi'^{\,3} + \phi'^{\,4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2\right)\phi'^{\,2} - \frac{\lambda}{3!}\,\phi_0\phi'^{\,3} - \frac{\lambda}{4!}\,\phi'^{\,4} - V(\phi_0) - \left(m^2 + \frac{\lambda}{3!}\,\phi_0^2\right)\phi_0\phi' \\
&= \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - \frac{1}{2}\left(-2m^2\right)\phi'^{\,2} - \frac{\lambda}{3!}\,\phi_0\phi'^{\,3} - \frac{\lambda}{4!}\,\phi'^{\,4} + const. \ .
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Hier haben wir im letzten Schritt die Bedingung (7.5) für das Minimum ϕ_0 des Potentials benutzt, woraufhin der letzte Term in der vorletzten Zeile verschwindet. Das Potential $V(\phi_0)$ am Minimum stellt eine (irrelevante) Konstante dar,

$$V(\phi_0) = \left(\frac{m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!}\,\phi_0^2\right)\phi_0^2 = -\left(\frac{m^2}{2} - \frac{\lambda}{4!}\,\frac{6m^2}{\lambda}\right)\frac{6m^2}{\lambda} = -\frac{m^2}{4}\,\frac{6m^2}{\lambda} = -\frac{3m^4}{2\lambda} = const. \ , \tag{7.11}$$

die lediglich den Nullpunkt der Energieskala verschiebt, und daher im folgenden weggelassen werden kann.

Gleichung (7.10) stellt die Lagrange–Dichte einer Theorie für das Fluktuationsfeld ϕ' dar. Die Fluktuationen (Teilchen) tragen die (quadrierte) Masse $\mu^2 \equiv -2m^2 > 0$. Gemäß Gl. (7.7) ist die Masse identisch mit der Krümmung des Potentials am Minimum. Spontane Symmetriebrechung erzeugt auch eine neue Wechselwirkung; zur ursprünglichen quartischen (4–Punkt–)Wechselwirkung $(\lambda/4!)\phi'^4$ kommt nun eine **kubische** (3–Punkt–) Wechselwirkung $(\lambda/3!)\phi_0\phi'^3$ hinzu. Diese ist proportional zum Wert des (ursprünglichen) Feldes ϕ im Grundzustand, ϕ_0, d.h. seinem **Vakuumerwartungswert**. Man beachte jedoch, dass die Lagrange–Dichte trotz dieser kubischen Wechselwirkung **immer noch** die ursprüngliche Z_2–Symmetrie aufweist. Die entsprechende Transformation lautet nämlich aufgrund der Verschiebung (7.9) nicht einfach $\phi' \to -\phi'$ (hier würde der kubische Term die Z_2–Symmetrie in der Tat brechen), sondern $\phi'+\phi_0 \to -(\phi'+\phi_0)$. Ferner sollte erwähnt werden, dass der Vakuumerwartungswert ϕ_0 des Feldes nicht unbedingt physikalisch observabel sein muss.

9.6.2021

Das obige Beispiel ist in vielerlei Hinsicht das einfachste denkbare. Weil Z_2 eine **diskrete** Symmetriegruppe ist, passiert auch nicht allzu viel Aufregendes. Viel interessanter ist der Fall, bei dem eine **kontinuierliche** Symmetrie spontan gebrochen wird. Um dies näher zu beleuchten, betrachten wir die einfachste uns bekannte kontinuierliche Symmetriegruppe, nämlich $U(1)$, in Verbindung mit der einfachsten uns bekannten Feldtheorie, dem geladenen skalaren Feld,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(\Phi, \Phi^*) \ , \\ V(\Phi, \Phi^*) &= m^2 \Phi^* \Phi + \lambda (\Phi^* \Phi)^2 \ . \end{aligned} \tag{7.12}$$

Diese Theorie besitzt eine **globale** $U(1)$–**Symmetrie**, d.h. die Lagrange–Dichte ist invariant unter der $U(1)$–Transformation

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi \ , \quad \Phi^* \longrightarrow \Phi'^* = e^{i\Lambda}\Phi^* \ , \quad \Lambda = const. \ . \tag{7.13}$$

Für $m^2 > 0$ ist der Grundzustand wiederum bei $\Phi = \Phi^* = 0$. Für $m^2 < 0$ ist er jedoch die nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$0 = \left.\frac{\partial V(\Phi, \Phi^*)}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=\Phi_0} = m^2 \Phi_0^* + 2\lambda(\Phi_0^* \Phi_0)\Phi_0^* = (m^2 + 2\lambda|\Phi_0|^2)\Phi_0^* \quad \Longleftrightarrow \quad |\Phi_0|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} \ . \tag{7.14}$$

In der komplexen Φ–Ebene hat das Potential die Gestalt eines "Mexikanerhutes" oder die des Bodens einer Weinflasche, s. Abb. 7.3.

Es gibt unendlich viele Minima des Potentials $V(\Phi, \Phi^*)$; sie liegen auf einem Kreis mit Radius $|\Phi_0| = \sqrt{-m^2/2\lambda}$ in der komplexen Φ–Ebene. Das System wählt einen dieser Zustände als Grundzustand aus, z.B. den für verschwindenden Imaginärteil und positiven Realteil, $\Phi_0 \equiv |\Phi_0|$. Dieses "Auswählen" ist synonym mit der spontanen Brechung der Symmetrie (in diesem Fall $U(1)$).

Wir bestimmen nun die Lagrange–Dichte für die physikalischen Anregungen (Teilchen) im Fall der spontan gebrochenen $U(1)$–Symmetrie. Dazu müssen wir die Felder Φ, Φ^* wieder in Grundzustand und Fluktuationen um denselben zerlegen. Der Einfachheit halber

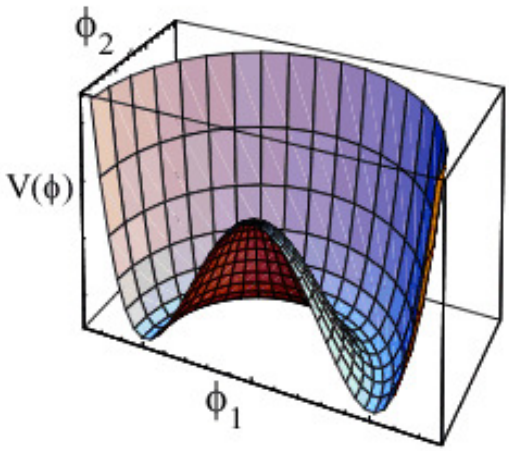


Abbildung 7.3: Die potentielle Energiedichte (7.12) für $m^2 < 0, \lambda > 0$. [21]

nehmen wir für den Grundzustand

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_{0,1} + i\phi_{0,2}\right) = |\Phi_0| \ , \quad \phi_{0,1} = \sqrt{2}\,|\Phi_0| = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \ , \quad \phi_{0,2} = 0 \ . \tag{7.15}$$

Die gesuchte Zerlegung lautet nun

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi' = |\Phi_0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1' + i\phi_2'\right) \ , \quad \Phi^* = |\Phi_0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1' - i\phi_2'\right) \ . \tag{7.16}$$

Setzen wir dies in die Lagrange–Dichte (7.12) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu(\phi_1' - i\phi_2')\partial^\mu(\phi_1' + i\phi_2') - m^2\left(|\Phi_0| + \frac{\phi_1' - i\phi_2'}{\sqrt{2}}\right)\left(|\Phi_0| + \frac{\phi_1' + i\phi_2'}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad -\lambda\left[\left(|\Phi_0| + \frac{\phi_1' - i\phi_2'}{\sqrt{2}}\right)\left(|\Phi_0| + \frac{\phi_1' + i\phi_2'}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1' + \partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'\right) - m^2|\Phi_0|^2 - \sqrt{2}\,m^2|\Phi_0|\phi_1' - \frac{m^2}{2}\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right) \\
&\quad -\lambda\left[|\Phi_0|^4 + 2|\Phi_0|^2\phi_1'^2 + \frac{1}{4}\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right)^2 + 2\sqrt{2}\,|\Phi_0|^3\phi_1' + |\Phi_0|^2\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right)\right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{2}|\Phi_0|\phi_1'\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1' + \partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'\right) - \frac{1}{2}\left(m^2 + 6\lambda|\Phi_0|^2\right)\phi_1'^2 - \frac{1}{2}\left(m^2 + 2\lambda|\Phi_0|^2\right)\phi_2'^2 \\
&\quad -\sqrt{2}\,\lambda|\Phi_0|\phi_1'\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right)^2 - \sqrt{2}\,\phi_1'(m^2 + 2\lambda|\Phi_0|^2)|\Phi_0| \\
&\quad -V(|\Phi_0|, |\Phi_0|) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1'\partial^\mu\phi_1' + \partial_\mu\phi_2'\partial^\mu\phi_2'\right) - \frac{1}{2}\left(m^2 + 6\lambda|\Phi_0|^2\right)\phi_1'^2 - \frac{1}{2}\left(m^2 + 2\lambda|\Phi_0|^2\right)\phi_2'^2 \\
&\quad -\sqrt{2}\,\lambda|\Phi_0|\phi_1'\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2\right)^2 + const. \ ,
\end{aligned} \tag{7.17}$$

wobei zum vorletzten Schritt die Definition (7.12) des Potentials benutzt wurde und zum letzten Schritt der vorletzte Term aufgrund von Gl. (7.14) verschwindet und das Potential $V(|\Phi_0|, |\Phi_0|)$ nur eine irrelevante Konstante darstellt, die im folgenden weggelassen wird. Die Lagrange–Dichte (7.17) repräsentiert eine Theorie mit zwei neutralen skalaren Feldern, die mittels kubischen und quartischen Termen miteinander wechselwirken. Die Quanten des Feldes ϕ_1' sind Teilchen mit (quadratischer) Masse

$$m_1^2 = m^2 + 6\lambda|\Phi_0|^2 = m^2 - 6\lambda\,\frac{m^2}{2\lambda} = -2m^2 = 4\lambda|\Phi_0|^2\ , \tag{7.18}$$

während die Quanten des Feldes ϕ_2' Teilchen mit der (quadratischen) Masse

$$m_2^2 = m^2 + 2\lambda|\Phi_0|^2 = m^2 - 2\lambda\,\frac{m^2}{2\lambda} \equiv 0 \tag{7.19}$$

sind. Die Existenz eines masselosen Feldes, eines sog. **Goldstone–Bosons**, ist eine Konsequenz der spontanen Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie. Dies folgt aus dem sog. **Goldstone–Theorem**, welches wir im nächsten Abschnitt besprechen.

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch ein physikalisch anschauliches Argument geben, warum das Feld ϕ_1' massiv, das Feld ϕ_2' jedoch masselos ist. Dazu betrachten wir wieder Abb. 7.3. Der Grundzustand $|\Phi_0|$ ist hier gerade das rechte Minimum des Potentials auf der ϕ_1–Achse. Um von diesem Punkt aus in ϕ_1–Richtung (die identisch mit der ϕ_1'–Richtung ist) fluktuieren zu können, muss man gegen die positive Krümmung des Potentials anlaufen. Diese Krümmung entspricht aber gerade der Masse des Feldes ϕ_1',

$$\left.\frac{\partial^2 V(\phi_1', \phi_2')}{\partial \phi_1'^2}\right|_{\phi_1'=\phi_2'=0} = m^2 + 6\lambda|\Phi_0|^2 = m_1^2\ . \tag{7.20}$$

Dagegen kosten Fluktuationen in ϕ_2–Richtung (die identisch mit der ϕ_2'–Richtung ist) vom Grundzustand aus keine Energie, denn man läuft entlang des Kreises mit Radius $|\Phi_0|$. Das Potential hat in dieser Richtung keine Krümmung und die Masse des Feldes ϕ_2' verschwindet,

$$\left.\frac{\partial^2 V(\phi_1', \phi_2')}{\partial \phi_2'^2}\right|_{\phi_1'=\phi_2'=0} = m^2 + 2\lambda|\Phi_0|^2 = m_2^2 = 0\ . \tag{7.21}$$

7.2 Das $O(N)$–Modell und das Goldstone–Theorem

Wir betrachten die folgende Lagrange–Dichte,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} - \frac{m^2}{2}\,\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} - \frac{\lambda}{N}(\vec{\phi}\cdot\vec{\phi})^2\ , \tag{7.22}$$

wobei

$$\vec{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_N)^T\ , \tag{7.23}$$

ein N–komponentiges, reelles skalares Feld ist. Offensichtlich ist die Lagrange–Dichte (7.22) **invariant** unter $O(N)$–Transformationen des Feldes $\vec{\phi}$,

$$\vec{\phi} \longrightarrow \vec{\phi}\,' = \hat{O}(g)\,\vec{\phi}\ . \tag{7.24}$$

Hier ist $\hat{O}(g)$ die **Darstellung** eines **Elementes** $g \in G$, wobei $G = O(N)$ die Gruppe der orthogonalen Transformationen in N Dimensionen ist. Da $\vec{\phi}$ ein N–komponentiger Vektor ist, muss $\hat{O}(g)$ eine orthogonale $(N \times N)$–Matrix sein. Da $O(N)$ aber auch eine (nicht-Abelsche) Lie–Gruppe ist, wissen wir, dass $\hat{O}(g)$ die folgende Form haben muss,

$$\hat{O}(g) = e^{-i\alpha_k T_k} \ , \tag{7.25}$$

mit den **Parametern** α_k und den **Generatoren** T_k der Gruppe $O(N)$. Eine Summe über k von 1 bis $N(N-1)/2$ (die Zahl der Generatoren der $O(N)$) ist impliziert.

Beispiel: $N = 2$. $O(2)$ ist die Gruppe der orthogonalen Transformationen in zwei Dimensionen, also mit anderen Worten die Gruppe der Drehungen in einer Ebene. Die Zahl der Generatoren ist $N(N-1)/2 = 1$; der einzige Generator $T_1 \equiv \tau_2$ ist identisch mit der zweiten Pauli–Matrix. Der einzige Parameter $\alpha_1 \equiv \Lambda$ ist der Drehwinkel in der Ebene. Die (2×2)–Matrix-Darstellung von Elementen der $O(2)$ lautet

$$\begin{aligned}
\hat{O}(g) &= e^{-i\Lambda\tau_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \Lambda^n \tau_2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2n}}{(2n)!} \Lambda^{2n} \tau_2^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \Lambda^{2n+1} \tau_2^{2n+1} \\
&= \mathbb{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \Lambda^{2n} - i\tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Lambda^{2n+1} = \mathbb{1} \cos\Lambda - i\tau_2 \sin\Lambda \\
&= \begin{pmatrix} \cos\Lambda & -\sin\Lambda \\ \sin\Lambda & \cos\Lambda \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned} \tag{7.26}$$

wobei wir $\tau_2^2 = \mathbb{1}_{2\times 2} \equiv \mathbb{1}$ benutzt haben. Dies ist in der Tat eine Drehmatrix für eine Drehung in zwei Dimensionen, d.h. in einer Ebene, um den Winkel Λ.

Wie gehabt suchen wir das Minimum des Potentials

$$V(\vec{\phi}) = \frac{m^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + \frac{\lambda}{N} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 \ . \tag{7.27}$$

Für $m^2 > 0$ ist das Minimum offensichtlich bei $\vec{\phi} = 0$, aber für $m^2 < 0$ befindet es sich bei

$$0 = \left. \frac{\partial V(\vec{\phi})}{\partial \phi_i} \right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_0} = \phi_{0,i} \left(m^2 + \frac{4\lambda}{N} |\vec{\phi}_0|^2 \right) \quad \Longleftrightarrow \quad |\vec{\phi}_0| \equiv \phi_0 = \sqrt{-\frac{Nm^2}{4\lambda}} \ . \tag{7.28}$$

Dies entspricht wieder einem Kontinuum von Punkten im N–dimensionalen Raum, nämlich die gesamte **Oberfläche** der N–dimensionalen Kugel mit Radius $\phi_0 = \sqrt{-Nm^2/(4\lambda)}$. Das System wird als Grundzustand einen Punkt auf der Oberfläche auswählen (was der spontanen Symmetriebrechung entspricht). O.B.d.A. können wir annehmen, dass er auf einer der kartesischen Achsen liegt, z.B. der ϕ_1–Achse,

$$\vec{\phi}_0 = (\phi_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1})^T \tag{7.29}$$

Obwohl $V(\vec{\phi})$ invariant unter $O(N)$–Transformationen ist,

$$V(\vec{\phi}\,') = V(\hat{O}(g)\vec{\phi}) \equiv V(\vec{\phi}) \tag{7.30}$$

(da $V(\vec{\phi})$ nur vom Skalarprodukt $\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} = |\vec{\phi}|^2$ abhängt, welches invariant unter Drehungen ist), ist es der Grundzustand i.a. nicht mehr,

$$\vec{\phi}_0' = \hat{O}(g)\vec{\phi}_0 \neq \vec{\phi}_0 \ . \tag{7.31}$$

Die Wahl eines bestimmten Grundzustands, z.B. (7.29), bricht die $O(N)$–Symmetrie spontan. Dennoch verbleibt eine **residuale** $O(N-1)$–Symmetrie, die Drehungen um die ϕ_1–Achse entspricht,

$$\hat{O}(h) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \hat{O}_{(N-1)\times(N-1)} \end{pmatrix} \ . \tag{7.32}$$

Hier ist h ein Element der Untergruppe $H = O(N-1)$ der ursprünglichen Symmetriegruppe $G = O(N)$, d.h. $\hat{O}_{(N-1)\times(N-1)}$ ist eine orthogonale $(N-1)\times(N-1)$–Matrix. Diese Transformationen lassen das Vakuum (7.29) offensichtlich invariant,

$$\vec{\phi}_0' = \hat{O}(h)\vec{\phi}_0 \equiv \vec{\phi}_0 \ . \tag{7.33}$$

Beispiel: $N = 3$. Die Gruppe $O(3)$ hat drei Generatoren, z.B.

$$T_3 \equiv \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ T_2 \equiv \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ T_1 \equiv \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{7.34}$$

Diese erzeugen Drehungen um die z–, die y– und die x–Achse. Wenn das Vakuum in Richtung der x–Achse zeigt, $\vec{\phi}_0 = (\phi_0, 0, 0)^T$, dann lassen Drehungen um diese Achse, also in der zweidimensionalen (y, z)–Ebene, das Vakuum invariant. Die $O(3)$–Symmetrie ist zu $O(2)$ gebrochen und

$$\begin{aligned} \hat{O}(h) &= e^{-i\alpha_1 T_1} \equiv e^{-i\Lambda\lambda_7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \Lambda^n \lambda_7^n \\ &= 1\!\!1 + \lambda_7^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \Lambda^{2n} - i\lambda_7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Lambda^{2n+1} \\ &= 1\!\!1 + \lambda_7^2(\cos\Lambda - 1) - i\lambda_7 \sin\Lambda \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Lambda & -\sin\Lambda \\ 0 & \sin\Lambda & \cos\Lambda \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{7.35}$$

Hier haben wir

$$\lambda_7^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \lambda_7^{2n} \tag{7.36}$$

benutzt.

Die Frage, die sich nun stellt, ist, wie viele **Goldstone–Bosonen**, also masselose Anregungen, es gibt. Hierzu machen wir wieder die Zerlegung

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_0 + \vec{\phi}' \tag{7.37}$$

und setzen diese in die Lagrange–Dichte (7.22) ein. Dabei benutzen wir Gl. (7.29), so dass

$$\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} = \vec{\phi}_0^{\,2} + 2\vec{\phi}_0\cdot\vec{\phi}\,' + \vec{\phi}\,'^{\,2} = \phi_0^2 + 2\phi_0\phi_1' + \vec{\phi}\,'^{\,2}\ . \tag{7.38}$$

Bezeichnen wir noch

$$\phi_1' \equiv \sigma\ ,\quad \vec{\pi} \equiv (0,\phi_2',\ldots,\phi_N')^T \quad\Longrightarrow\quad \vec{\phi}\,'^{\,2} = \sigma^2 + \vec{\pi}^{\,2}\ , \tag{7.39}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\,\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\,\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{m^2}{2}\left(\phi_0^2 + 2\phi_0\sigma + \sigma^2 + \vec{\pi}^{\,2}\right)\\
&\quad -\frac{\lambda}{N}\left[\phi_0^4 + 4\phi_0^2\sigma^2 + (\sigma^2+\vec{\pi}^{\,2})^2 + 2\phi_0^2(\sigma^2+\vec{\pi}^{\,2}) + 4\phi_0^3\sigma + 4\phi_0\sigma(\sigma^2+\vec{\pi}^{\,2})\right]\\
&= \frac{1}{2}\,\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{12\lambda}{N}\phi_0^2\right)\sigma^2 + \frac{1}{2}\,\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{4\lambda}{N}\phi_0^2\right)\vec{\pi}^{\,2}\\
&\quad -\frac{4\lambda}{N}\phi_0\,\sigma(\sigma^2+\vec{\pi}^{\,2}) - \frac{\lambda}{N}(\sigma^2+\vec{\pi}^{\,2})^2 - \phi_0\left(m^2 + \frac{4\lambda}{N}\phi_0^2\right)\sigma - V(\phi_0)\ .
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Der vorletzte Term verschwindet wieder aufgrund von Gl. (7.28). Der letzte Term stellt eine irrelevante Konstante dar und kann weggelassen werden. Insgesamt stellt die Lagrange–Dichte (7.40) eine Theorie mit einer **massiven** Anregung, dem Feld σ, mit einer (quadrierten) Masse

$$m_\sigma^2 = m^2 + \frac{12\lambda}{N}\phi_0^2 = m^2 - 3m^2 = -2m^2 = \frac{8\lambda}{N}\phi_0^2\ , \tag{7.41}$$

und $N-1$ **masselosen** Anregungen, den Komponenten des Feldes $\vec{\pi}$, mit Masse

$$m_\pi^2 = m^2 + \frac{4\lambda}{N}\phi_0^2 = 0\ , \tag{7.42}$$

dar. Die letztgenannten Freiheitsgrade sind die **Goldstone–Bosonen**, die aufgrund der spontanen Brechung der $O(N)$–Symmetrie zu $O(N-1)$ auftreten.

11.6.2021

Gibt es ein allgemeines Kriterium, anhand dessen man die Zahl der Goldstone–Bosonen bestimmen kann? Dazu betrachten wir die Taylor–Entwicklung des Potentials $V(\vec{\phi})$ um seinen Grundzustand $\vec{\phi}_0$,

$$V(\vec{\phi}) = V(\vec{\phi}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left.\frac{\partial^2 V(\vec{\phi})}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_0}(\phi_i-\phi_{0,i})(\phi_j-\phi_{0,j}) + O\left((\phi_i-\phi_{0,i})^3\right)\ . \tag{7.43}$$

Hier haben wir bereits ausgenutzt, dass aufgrund der Definition von $\vec{\phi}_0$ (als Minimum des Potentials)

$$\left.\frac{\partial V(\vec{\phi})}{\partial\phi_i}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_0} = 0\ ,\quad i = 1,\ldots,N\ . \tag{7.44}$$

Damit $\vec{\phi}_0$ ein Minimum des Potentials darstellt, muss für die **Massenmatrix** gelten

$$M_{ij}^2 \equiv \left.\frac{\partial^2 V(\vec{\phi})}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_0} \geq 0 \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,N\ . \tag{7.45}$$

Die Frage ist nun, für welche Felder $M_{ij}^2 > 0$ und für welche $M_{ij}^2 = 0$ ist. Die letztgenannten sind natürlich die Goldstone–Bosonen. Eine andere Formulierung der Tatsache, dass es sich um masselose Teilchen handelt, ist zu sagen, dass das Potential in Richtung der Goldstone–Freiheitsgrade **flach** ist bzw. **keine Krümmung** aufweist. Um zu klären, welche Felder die Goldstone–Bosonen sind, betrachten wir eine Symmetrie–Transformation (7.31) des Potentials $V(\vec{\phi}_0)$ am Minimum und benutzen Gl. (7.43),

$$V(\vec{\phi}_0') = V(\hat{O}(g)\vec{\phi}_0) = V(\vec{\phi}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 V(\vec{\phi})}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_0} \delta\phi_{0,i}\delta\phi_{0,j} + O\left(\delta\phi_{0,i}^3\right)\ , \tag{7.46}$$

wobei $\delta\phi_{0,i} \equiv \phi_{0,i}' - \phi_{0,i}$ die **Änderung** der i–ten Komponente von $\vec{\phi}_0$ unter der Symmetrie–Transformation $\hat{O}(g)$ ist. Da das Potential **invariant** unter dieser Transformation ist, muss $V(\vec{\phi}_0') \equiv V(\vec{\phi}_0)$ sein und daher (bis zur quadratischen Ordnung in $\delta\phi_{0,i}$)

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 V(\vec{\phi})}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\vec{\phi}=\vec{\phi}_0} \delta\phi_{0,i}\delta\phi_{0,j} = \sum_{i,j=1}^{N} M_{ij}^2\, \delta\phi_{0,i}\delta\phi_{0,j} \equiv 0\ . \tag{7.47}$$

Nehmen wir an, dass $g \in H$. Dann ist $\vec{\phi}_0' = \vec{\phi}_0$ und $\delta\phi_{0,i} = 0\ \forall\, i = 1,\ldots,N$. In diesem Fall folgt aus Gl. (7.47), dass die Massenmatrix M_{ij}^2 **beliebige** Werte annehmen kann. Für $i = 2,\ldots,N$ ist $\delta\phi_{0,i}$ jedoch trivialerweise gleich null, weil $\hat{O}(g)$ für $g \in H$ lediglich Nullen in Nullen transformiert. Wir schließen daraus, dass wir für $i,j = 2,\ldots,N$ keine Aussage über die Werte M_{ij}^2 der Massenmatrix treffen können. Für $i = j = 1$ können wir $M_{11}^2 > 0$ haben (obwohl auch zufällig $M_{11}^2 = 0$ sein könnte). Dies ist die **massive** Mode.

Nun nehmen wir an, dass $g \notin H$. Dann ist $\vec{\phi}_0' \neq \vec{\phi}_0$ und $\delta\phi_{0,i} \neq 0$ für einige (oder zumindest ein gewisses) i. In diesem Fall ist $g \in G/H$ (sprich "G modulo H"), d.h. die Menge der **(Links-)Nebenklassen** (engl. *(left-)coset*) von H in G. Dies sind alle Transformationen $g \in G$, die bis auf eine Transformation $h \in H$ identisch sind. Die Menge der Nebenklassen bildet i.a. **keine** Gruppe (sie ist eine Gruppe, falls H eine normale Untergruppe bildet).

Die **Dimension** von G/H ist

$$\dim G/H = \dim G - \dim H\ . \tag{7.48}$$

In unserem Fall gilt daher

$$\dim\,[O(N)/O(N-1)] = \dim O(N) - \dim O(N-1)\ . \tag{7.49}$$

Die **Dimension** einer Lie–Gruppe ist die Zahl ihrer Generatoren, also $N(N-1)/2$ für $O(N)$. Also haben wir

$$\dim\,[O(N)/O(N-1)] = \frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} = \frac{N-1}{2}(N-N+2) = N-1\ . \tag{7.50}$$

Die Dimension von G/H ist die Zahl der Generatoren, die Transformationen $g \in G/H$ erzeugen. In unserem Fall sind es $N-1$ der ursprünglichen $N(N-1)/2$ Generatoren der $O(N)$, die diese Transformationen erzeugen. Im obigen Beispiel für $N=3$ sind zwei Generatoren in G/H, nämlich T_3 und T_2, da der verbleibende Generator $T_1 \in H$ $O(2)$–Transformationen um die x–Achse erzeugt.

Wir können nun danach fragen, wie viele **linear unabhängige** Transformationen $g \in G/H$ existieren. Dies sind offensichtlich genau $N-1$, nämlich eine für jeden Generator in G/H. Für diese $N-1$ Transformationen $\hat{O}(g_j)$, $g_j \in G/H$, $j = 2, \ldots, N$, kann man annehmen, dass $\delta\phi_{0,j} \neq 0$ ist, aber (bis zur Ordnung $O(\alpha_j)$ im infinitesimalen Parameter α_j der Transformation) $\delta\phi_{0,i} = 0$ für $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, N$. In unserem Beispiel für $N=3$ wären dies die Transformation $\hat{O}(g_2)$, entsprechend einer Drehung um die z(!)–Achse, mit $\delta\phi_{0,2} \neq 0$ und $\delta\phi_{0,1} = \delta\phi_{0,3} = 0$, und die Transformation $\hat{O}(g_3)$, entsprechend einer Drehung um die y(!)–Achse, mit $\delta\phi_{0,1} = \delta\phi_{0,2} = 0$ und $\delta\phi_{0,3} \neq 0$.

Für diese $N-1$ Transformationen reduziert sich Gl. (7.47) jeweils auf

$$M_{jj}^2 = 0 \ , \quad j = 2, \ldots, N \ . \tag{7.51}$$

Daraus folgt, dass die **Zahl der Goldstone–Bosonen identisch ist mit der Zahl der Generatoren in** G/H. Dies ist eine allgemeine Schlussfolgerung und hängt nicht von der speziellen Gruppe ab, die man betrachtet. Für das **Symmetriebrechungsschema**

$$O(N) \ \longrightarrow \ O(N-1) \tag{7.52}$$

haben wir aufgrund von Gl. (7.50) folglich $O(N-1)$ Goldstone–Bosonen (2 im Fall $N=3$, die Anregungen in y– und z–Richtung entsprechen). Das **Goldstone–Theorem** fasst diese Beobachtungen formal zusammen:

Falls ein Feldoperator $\hat{\phi}(X)$ existiert, der einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert hat,

$$\langle 0|\hat{\phi}(X)|0\rangle \neq 0 \ , \tag{7.53}$$

und falls $\hat{\phi}(X)$ nicht wie ein Singulett unter einer Symmetriegruppe der Lagrange–Dichte transformiert, so existieren masselose Anregungen.

Beweis: Falls die Lagrange–Dichte $\mathcal{L}$ invariant unter Transformationen einer Gruppe G ist (d.h. wenn G eine Symmetriegruppe von $\mathcal{L}$ ist), dann existieren aufgrund des Noether–Theorems erhaltene Ströme. Für die Änderung des Feldoperators unter der Symmetrietransformation gilt

$$\Delta\hat{\phi}(X) = \hat{\Omega}_a(X)\,\delta\omega_a \ , \tag{7.54}$$

vgl. Gl. (2.43), und die Noether–Stromdichte ist, falls wir uns auf **interne** Symmetrien beschränken,

$$\hat{\mathcal{J}}_a^\mu(X) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}(X))}\,\hat{\Omega}_a(X) \ , \tag{7.55}$$

vgl. Gl. (2.59). Diese Stromdichte ist erhalten,

$$\partial_\mu\hat{\mathcal{J}}_a^\mu(X) = 0 \ , \tag{7.56}$$

mit den zugehörigen Noether–Ladungen

$$\hat{Q}_a = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \hat{\mathcal{J}}_a^0(X) = const.\,,\ \text{d.h.}\ \frac{\mathrm{d}\hat{Q}_a}{\mathrm{d}t} = 0\ . \tag{7.57}$$

Die Ladungen tragen die Quantenzahlen der **adjungierten Darstellung** der Symmetriegruppe. Sie genügen daher den **Vertauschungsrelationen**

$$\left[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b\right] = C_{abc}\, \hat{Q}_c\ , \tag{7.58}$$

wobei C_{abc} die **Strukturkonstanten** der Gruppe G darstellen. Aus diesem Grund stellen die Noether–Ladungen einen **alternativen Satz** von **Generatoren** der Gruppe G dar (weil letztere dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen). Für Lie–Gruppen ist eine Darstellung eines Elementes $g \in G$ folglich

$$\hat{U}(g) = e^{-i\omega_a \hat{Q}_a}\ . \tag{7.59}$$

Falls das Vakuum **invariant** unter Transformationen $g \in G$ ist, so gilt

$$\hat{U}(g)\,|0\rangle = |0\rangle\ . \tag{7.60}$$

Für infinitesimale Transformationen lautet diese Gleichung

$$\left[\mathbb{1} - i\omega_a \hat{Q}_a + O(\omega_a^2)\right]|0\rangle = |0\rangle\ , \tag{7.61}$$

d.h. die Noether–Ladungen $\hat{Q}_a$ müssen das Vakuum **vernichten**,

$$\hat{Q}_a\,|0\rangle = 0\ . \tag{7.62}$$

Falls das Vakuum **nicht** invariant ist,

$$\hat{U}(g)\,|0\rangle = |0\rangle' \neq |0\rangle\ , \tag{7.63}$$

so gibt es verschiedene **energetisch entartete** Vakua und

$$\hat{Q}_a\,|0\rangle \neq 0\ . \tag{7.64}$$

Dies ist der Fall der spontanen Symmetriebrechung. Da $\hat{\phi}(X)$ sich nicht wie ein Singulett under G transformiert (also unter Transformationen aus G nicht invariant bleibt), existiert ein $\hat{\phi}'(X) \neq \hat{\phi}(X)$, so dass

$$\hat{\phi}(X) = \hat{U}(g)\,\hat{\phi}'(X)\,\hat{U}^\dagger(g) = \hat{\phi}'(X) - i\omega_a\left[\hat{Q}_a, \hat{\phi}'(X)\right] + O(\omega_a^2) \neq \hat{\phi}'(X)\ . \tag{7.65}$$

Hier haben wir wieder infinitesimale Transformationen betrachtet und die Taylor–Entwicklung von $\hat{U}(g)$ und $\hat{U}^\dagger(g)$ benutzt (sowie die Tatsache, dass die Ladungen $\hat{Q}_a$ hermitesch und die Parameter ω_a reell sind). Die letzte Ungleichheit impliziert (da die Parameter ω_a i.a. nicht verschwinden)

$$\left[\hat{Q}_a, \hat{\phi}'(X)\right] \neq 0\ . \tag{7.66}$$

Der Vakuumerwartungswert dieser Ungleichung lautet mit der Definition (7.57) der Noether–Ladungen

$$\begin{aligned} 0 &\neq \langle 0| \left[\hat{Q}_a, \hat{\phi}'(X)\right] |0\rangle = \langle 0| \hat{Q}_a \hat{\phi}'(X) - \hat{\phi}'(X)\hat{Q}_a |0\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^3\vec{y}\, \langle 0| \hat{\mathcal{J}}_a^0(Y)\hat{\phi}'(X) - \hat{\phi}'(X)\hat{\mathcal{J}}_a^0(Y) |0\rangle \\ &= \sum_n \int \mathrm{d}^3\vec{y} \left[\langle 0| \hat{\mathcal{J}}_a^0(Y) |n\rangle\langle n| \hat{\phi}'(X) |0\rangle - \langle 0| \hat{\phi}'(X) |n\rangle\langle n| \hat{\mathcal{J}}_a^0(Y) |0\rangle\right] . \end{aligned} \tag{7.67}$$

Eine Raum-Zeit-Translation des Ladungsdichteoperators,

$$\hat{\mathcal{J}}_a^0(Y) = e^{-iY\cdot\hat{P}} \hat{\mathcal{J}}_a^0(0) e^{iY\cdot\hat{P}} , \tag{7.68}$$

liefert mit $e^{\pm iY\cdot\hat{P}}|0\rangle \equiv |0\rangle$ (das Vakuum ist translationsinvariant)

$$\begin{aligned} 0 &\neq \sum_n \int \mathrm{d}^3\vec{y} \left[\langle 0|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|n\rangle\, e^{iY\cdot P_n}\, \langle n|\hat{\phi}'(X)|0\rangle - \langle 0|\hat{\phi}'(X)|n\rangle\, e^{-iY\cdot P_n}\, \langle n|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|0\rangle\right] \\ &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_n) \left[\langle 0|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|n\rangle\langle n|\hat{\phi}'(X)|0\rangle e^{iy_0 E_n} - \langle 0|\hat{\phi}'(X)|n\rangle\langle n|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|0\rangle e^{-iy_0 E_n}\right] \\ &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_n) \left[\langle 0|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|n\rangle\langle n|\hat{\phi}'(X)|0\rangle e^{iy_0 M_n} - \langle 0|\hat{\phi}'(X)|n\rangle\langle n|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|0\rangle e^{-iy_0 M_n}\right] , \end{aligned} \tag{7.69}$$

wobei wir im letzten Schritt $E_n(\vec{p}_n = 0) \equiv M_n$ benutzt haben, mit der "Masse" M_n des Zustands $|n\rangle$. Man beachte nun, dass der Term $n = 0$, d.h. das Vakuum $|0\rangle$, in der Summe über n keinen Beitrag liefert (da $M_0 = 0$). Dies gilt auch für Zustände $|n\rangle$, die keine Teilchen enthalten, die von $\hat{\phi}'(X)$ vernichtet bzw. erzeugt werden, also für die $\langle 0|\hat{\phi}'(X)|n\rangle = 0$ gilt. Wir bezeichnen die Summe über die verbleibenden Zustände (die einen nicht-trivialen Beitrag zur Summe über n liefern) mit $\sum'_{n\neq 0}$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\neq \langle 0| \left[\hat{Q}_a, \hat{\phi}'(X)\right] |0\rangle \\ &= {\sum_{n\neq 0}}' (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_n) \left[\langle 0|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|n\rangle\langle n|\hat{\phi}'(X)|0\rangle e^{iy_0 M_n} - \langle 0|\hat{\phi}'(X)|n\rangle\langle n|\hat{\mathcal{J}}_a^0(0)|0\rangle e^{-iy_0 M_n}\right] \\ &\equiv f(y_0) . \end{aligned} \tag{7.70}$$

Die linke Seite war ursprünglich aber unabhängig von y_0, d.h. $f(y_0) = const.$. Dies kann man unter Zuhilfenahme der Stromerhaltung (7.56) auch formal beweisen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_0}\langle 0| \left[\hat{Q}_a, \hat{\phi}'(X)\right] |0\rangle &= \int \mathrm{d}^3\vec{y}\, \langle 0| \left[\frac{\partial}{\partial y_0}\hat{\mathcal{J}}_a^0(Y), \hat{\phi}'(X)\right] |0\rangle \\ &= -\int \mathrm{d}^3\vec{y}\, \langle 0| \left[\vec{\nabla}_y \cdot \hat{\vec{\mathcal{J}}}_a(Y), \hat{\phi}'(X)\right] |0\rangle \\ &= -\oint \mathrm{d}\vec{S} \cdot \langle 0| \left[\hat{\vec{\mathcal{J}}}_a(Y), \hat{\phi}'(X)\right] |0\rangle \equiv 0 , \end{aligned} \tag{7.71}$$

weil $\hat{\vec{\mathcal{J}}}_a(Y)$ im Unendlichen verschwindet. Wenn also die in Gl. (7.70) definierte Funktion $f(y_0) = const.$, muss die y_0–Abhängigkeit in der Summe verschwinden. Dies geht i.a. nur, wenn die Masse M_n der in der Summe verbleibenden Zustände $|n\rangle$ verschwindet, $M_n = 0$. Die Summe kann auch nicht leer sein, d.h. es muss **wenigstens einen** solchen Zustand geben, dessen Masse verschwindet, sonst wäre $f(y_0) = 0$, was der linken Seite der Ungleichung widerspräche. Damit ist das Goldstone–Theorem bewiesen, q.e.d.

16.6.2021

7.3 Spontane Symmetriebrechung in Eichtheorien

Wir betrachten nun ein geladenes skalares Feld, welches mit sich selbst mittels einer 4–Punkt-Wechselwirkung **und zusätzlich** mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirkt,

$$\mathcal{L} = (D_\mu\Phi)^* D^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi - \lambda(\Phi^*\Phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ , \tag{7.72}$$

mit der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Dies ist die **geeichte** Version der in Abschnitt 7.1 betrachteten Feldtheorie. Der Unterschied ist, dass die ursprüngliche Version lediglich eine **globale** $U(1)$–Symmetrie besaß, während Gl. (7.72) symmetrisch unter **lokalen** $U(1)$–**Transformationen**

$$\begin{aligned} \Phi(X) \quad &\longrightarrow \quad \Phi'(X) = e^{-i\Lambda(X)}\,\Phi(X) \ , \\ A_\mu(X) \quad &\longrightarrow \quad A'_\mu(X) = A_\mu(X) + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\Lambda(X) \ , \end{aligned} \tag{7.73}$$

also symmetrisch unter $U(1)$–**Eichtransformationen**, bzw. $U(1)$–**eichinvariant** ist. Wir nehmen nun an, dass $m^2 < 0$, so dass das Vakuum bei $\Phi_0 = \sqrt{-m^2/(2\lambda)}$ liegt. Mit der Zerlegung (7.16) (der Übersicht halber lassen wir die Striche an den Feldern ϕ'_1, ϕ'_2 weg) lautet der kinetische Term der Lagrange–Dichte (7.72)

$$\begin{aligned}
&(D_\mu\Phi)^* D^\mu\Phi \\
&= \left[\partial_\mu \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} - ieA_\mu\left(\Phi_0 + \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}\right)\right]\left[\partial^\mu \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} + ieA^\mu\left(\Phi_0 + \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2\right) + e^2 A_\mu A^\mu\left(\Phi_0^2 + \sqrt{2}\Phi_0\phi_1 + \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2}\right) \\
&\quad + ieA^\mu\left[\left(\Phi_0 + \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}\right)\partial_\mu\frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} - \left(\Phi_0 + \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}\right)\partial_\mu\frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2\right) + e^2 A_\mu A^\mu\left(\Phi_0^2 + \sqrt{2}\Phi_0\phi_1 + \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2}\right) \\
&\quad + ieA^\mu\left(-i\sqrt{2}\Phi_0\partial_\mu\phi_2 + i\phi_2\partial_\mu\phi_1 - i\phi_1\partial_\mu\phi_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2\right) + e^2\Phi_0^2 A_\mu A^\mu + \sqrt{2}e\Phi_0\, A^\mu\partial_\mu\phi_2 \\
&\quad + \sqrt{2}e^2\Phi_0 A_\mu A^\mu\phi_1 + eA^\mu(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) + \frac{e^2}{2}\,A_\mu A^\mu(\phi_1^2 + \phi_2^2) \ .
\end{aligned} \tag{7.74}$$

Kombinieren wir dies mit der Berechnung der potentiellen Energiedichte für die Zerlegung (7.16), die wir schon vorher durchgeführt hatten, so erhalten wir für die Lagrange–Dichte (7.72)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}(-2m^2)\phi_1^2 + \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2\Phi_0^2 A_\mu A^\mu + \sqrt{2}e\Phi_0\,A^\mu\partial_\mu\phi_2 \\ & -\sqrt{2}\lambda\Phi_0\,\phi_1(\phi_1^2+\phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 + \sqrt{2}e^2\Phi_0\,A_\mu A^\mu\phi_1 + eA^\mu(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) \\ & +\frac{e^2}{2}\,A_\mu A^\mu(\phi_1^2+\phi_2^2)\;. \end{aligned} \tag{7.75}$$

Wieder gibt es ein massives (ϕ_1) und ein masseloses skalares Feld (ϕ_2). Darüberhinaus sind aber folgende Fakten bemerkenswert:

(i) Das Photon-Feld hat einen **Massenterm** bekommen,

$$\frac{M^2}{2}\,A_\mu A^\mu\;,\quad M \equiv \sqrt{2}\,e\Phi_0\;, \tag{7.76}$$

die Photonmasse ist also proportional zum Vakuumerwartungswert Φ_0 des skalaren Feldes.

(ii) Es gibt einen **bilinearen Mischterm** zwischen A^μ und $\partial_\mu\phi_2$. Solch ein Term ist im Prinzip unerwünscht, da die Lagrange–Dichte in quadratischer Ordnung **diagonal** in den Feldern sein sollte. Partielle Integration dieses Terms (welche immer möglich ist, da nur die Wirkung $S = \int \mathrm{d}^4X\,\mathcal{L}$ eine Rolle spielt) führt zur Schlussfolgerung, dass ϕ_2 mit $\partial\cdot A$ mischt, also mit der unphysikalischen, 4–longitudinalen Komponente des Eichfeldes. Diese Mischung zwischen dem masselosen Boson ϕ_2 (dem Goldstone–Boson im Fall der spontanen Brechung der globalen $U(1)$–Symmetrie) und dem Eichfeld A^μ ist eine **generische** Eigenschaft bei der spontanen Brechung von Eichsymmetrien.

Der Mischterm zwischen ϕ_2 und A^μ kann durch geschickte Wahl einer Eichung eliminiert werden. In der sog. **'t Hooft–Eichung** addiert man den eichfixierenden Term

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2\xi}\,(\partial\cdot A - \xi M\phi_2)^2 = -\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 + M\phi_2\,\partial\cdot A - \xi\,\frac{M^2}{2}\,\phi_2^2\;, \tag{7.77}$$

zur Lagrange–Dichte (7.75). Die 't Hooft–Eichung ist nützlich, um die Renormierbarkeit von Theorien mit spontan gebrochener Eichsymmetrie zu beweisen. Der Mischterm in Gl. (7.77) kann durch partielle Integration genau auf die Form des Mischterms in der Lagrange–Dichte (7.75) gebracht werden, nur hat er dann das umgekehrte Vorzeichen, so dass sich die beiden Terme gegeneinander wegheben. Der letzte Term in Gl. (7.77) impliziert aber, dass das skalare Feld ϕ_2 eine Masse bekommt,

$$m_2^2 \equiv \xi M^2\;. \tag{7.78}$$

Wir haben jedoch noch die Freiheit, den **Eichparameter** ξ nach Belieben wählen zu können. In der **Landau–Eichung** $\xi = 0$ ist das skalare Feld ϕ_2 dann wieder **masselos**.

In der **Feynman–Eichung** $\xi = 1$ dagegen ist das Feld ϕ_2 **genauso schwer wie das Photon**.

Schließlich kann man noch die Eichung $\xi \to \infty$ betrachten. In diesem Grenzfall wird das Feld ϕ_2 **unendlich schwer** und damit aus dem Spektrum der physikalischen Anregungen der Theorie entfernt. Der ϕ_2–Freiheitsgrad ist damit effektiv "eingefroren". Diese Eichung bezeichnet man üblicherweise als **unitäre Eichung**.

Wie sieht der Photon-Propagator in diesen Fällen aus? Wir betrachten zunächst den **inversen** Photon-Propagator, inklusive des eichfixierenden Terms (so dass die Invertierung überhaupt möglich wird),

$$\Delta_{(\xi)}^{-1\,\mu\nu}(X-Y) = \left[-(\Box_x + M^2)g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_x^\mu \partial_x^\nu\right]\delta^{(4)}(X-Y)\,, \tag{7.79}$$

bzw. im Impuls-Raum

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{(\xi)}^{-1\,\mu\nu}(K) &= (K^2 - M^2)g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)K^\mu K^\nu \\
&= (K^2 - M^2)(P^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}) - K^2\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)E^{\mu\nu} \\
&= (K^2 - M^2)P^{\mu\nu} + \left(\frac{K^2}{\xi} - M^2\right)E^{\mu\nu}\,,
\end{aligned} \tag{7.80}$$

wobei wir die Projektoren (5.167) und (5.169) benutzt haben. Daraus folgt (man beachte das zusätzliche Minus-Zeichen beim Invertieren im Minkowski-Raum)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{(\xi)}^{\mu\nu}(K) &= -\frac{1}{K^2 - M^2}P^{\mu\nu} - \frac{\xi}{K^2 - \xi M^2}E^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{K^2 - M^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{K^\mu K^\nu}{K^2}\right) - \frac{\xi}{K^2 - \xi M^2}\frac{K^\mu K^\nu}{K^2} \\
&= -\frac{1}{K^2 - M^2}g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{K^2 - M^2} - \frac{\xi}{K^2 - \xi M^2}\right)\frac{K^\mu K^\nu}{K^2} \\
&= -\frac{1}{K^2 - M^2}g^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{K^2}{(K^2 - M^2)(K^2 - \xi M^2)}\frac{K^\mu K^\nu}{K^2} \\
&= -\frac{1}{K^2 - M^2}\left[g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{K^\mu K^\nu}{K^2 - \xi M^2}\right]\,.
\end{aligned} \tag{7.81}$$

In **Landau–Eichung**, $\xi = 0$,

$$\tilde{\Delta}_{(0)}^{\mu\nu}(K) = -\frac{1}{K^2 - M^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{K^\mu K^\nu}{K^2}\right) \equiv -\frac{P^{\mu\nu}}{K^2 - M^2}\,. \tag{7.82}$$

In **Feynman–Eichung**, $\xi = 1$,

$$\tilde{\Delta}_{(1)}^{\mu\nu}(K) = -\frac{g^{\mu\nu}}{K^2 - M^2}\,. \tag{7.83}$$

In **unitärer Eichung**, $\xi \to \infty$,

$$\tilde{\Delta}_{(\infty)}^{\mu\nu}(K) = -\frac{1}{K^2 - M^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{K^\mu K^\nu}{M^2}\right)\,. \tag{7.84}$$

Der Unterschied ist, dass in den ersten beiden Fällen das Feld ϕ_2 immer noch präsent ist und die unphysikalischen Beiträge des Photon-Feldes aufhebt, während im letzten Fall ϕ_2 aus dem Spektrum der physikalischen Anregungen entfernt ist.

Den Mechanismus, aufgrund dessen das Photon eine Masse bekommt, also die spontane Brechung einer Eichsymmetrie, nennt man **Anderson–Higgs–Mechanismus**. Anstelle eines masselosen Goldstone–Bosons, wie bei der spontanen Brechung einer **globalen** Symmetrie, wird das Eichfeld **massiv**. Massive Vektorfelder haben **drei** Freiheitsgrade (drei Spin-Polarisationen), anstelle der zwei Freiheitsgrade (zwei Spin-Polarisationen) bei Eichfeldern. Die Zahl der Freiheitsgrade bleibt also konstant. Man spricht (etwas bildlich) davon, dass das Eichfeld das Goldstone–Boson "gegessen" hat. Streng genommen gilt dies aber nur in unitärer Eichung.

7.4 Das Weinberg–Salam–Modell der elektroschwachen Wechselwirkung

Die dem Weinberg–Salam–Modell, dem sog. **Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung**, zugrundeliegende Idee ist, dass die schwache Wechselwirkung, wie schon die elektromagnetische Wechselwirkung, durch Eichbosonen vermittelt wird. Wie das Photon sind sie zunächst masselos. Sodann führt man ein skalares Feld, das sog. **Higgs–Feld**, ein. Spontane Symmetriebrechung mittels des Anderson–Higgs–Mechanismus gibt diesen Eichbosonen dann eine Masse. Das Weinberg–Salam–Modell inkorporiert auch die elektromagnetische Wechselwirkung, ist also insofern eine echte **vereinheitlichte** Feldtheorie. Allerdings läßt der Anderson–Higgs–Mechanismus im Weinberg–Salam–Modell das Photon unberührt, dieses bleibt also masselos.

Die schwache Wechselwirkung ist für den β–Zerfall von Atomkernen verantwortlich. Sie muss demnach wie die starke Wechselwirkung auf Hadronen, bzw. auf fundamentalem Niveau auf Quarks wirken. Eine weitere Teilchensorte, die bei der schwachen Wechselwirkung eine Rolle spielt, sind die **Neutrinos**. Diese gehören, wie auch das Elektron, das Myon und das Tauon, zur Gruppe der **Leptonen**, vgl. Kap. 1.

Der Anderson–Higgs–Mechanismus gibt nicht nur den schwachen Eichbosonen eine Masse, sondern auch den Materiefeldern, also Elektronen, Myonen, Tauonen, sowie den verschiedenen Quark-Flavors. Lediglich die Neutrinos bleiben im Weinberg–Salam–Modell **masselos**. Heutzutage wissen wir, dass dies nicht der Fall ist: sog. **Neutrino-Oszillationen**, d.h. der Prozess der Umwandlung verschiedener Neutrino-Flavors ineinander, der experimentell bereits beobachtet wurde, deutet daraufhin, dass die Neutrinos eine (sehr kleine, aber nichtverschwindende) Masse besitzen. Dies wird in diesem Kapitel aber nicht weiter ausgeführt.

Wir beginnen unsere Überlegungen zum Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung mit dem Elektron-Neutrino-Sektor. Später fügen wir die anderen Eichbosonen und das Higgs–Feld hinzu, und zum Schluss betrachten wir auch noch die anderen Leptonen (Myonen, Tauonen und die dazugehörigen Neutrinos) und die Quarks. Zunächst müssen wir den Begriff der **Chiralität** einführen. Dazu definieren wir **rechts-**

und **linkshändige** Dirac–Felder mittels

$$\psi_{R,L} = \mathcal{P}_{R,L}\,\psi \ , \tag{7.85}$$

wobei

$$\mathcal{P}_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{7.86}$$

die **Projektionsoperatoren** auf Zustände mit rechts- bzw. linkshändiger **Chiralität** sind. Diese Chiralitätsprojektoren sind **orthogonal**

$$\mathcal{P}_{R,L}\mathcal{P}_{L,R} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\frac{1 \mp \gamma_5}{2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \gamma_5 \mp \gamma_5 - \gamma_5^2\right) = 0 \ , \tag{7.87}$$

idempotent,

$$\mathcal{P}_{R,L}^2 = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm 2\gamma_5 + \gamma_5^2\right) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) = \mathcal{P}_{R,L} \ , \tag{7.88}$$

und **vollständig**,

$$\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = 1 \ . \tag{7.89}$$

(Wir unterdrücken gewöhnlich die (4×4)–Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{4\times 4}$ und schreiben vereinfacht 1 auf der rechten Seite.) Die Dirac–Lagrange–Dichte für masselose Fermionen lautet

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}\, i\partial\!\!\!/\, \psi \ . \tag{7.90}$$

Wir zerlegen nun ψ und $\bar{\psi}$ in rechts- und linkshändige Anteile,

$$\begin{aligned} \psi &= (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L)\psi = \mathcal{P}_R\psi + \mathcal{P}_L\psi = \psi_R + \psi_L \ , \qquad (7.91)\\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger\gamma_0(\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) = \psi^\dagger(\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_R)\gamma_0 = \left[(\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_R)\psi\right]^\dagger\gamma_0 = (\psi_L^\dagger + \psi_R^\dagger)\gamma_0 = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R \ , \end{aligned}$$

wobei wir

$$\gamma_\mu\mathcal{P}_{R,L} = \gamma_\mu\frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\gamma_\mu = \mathcal{P}_{L,R}\gamma_\mu \tag{7.92}$$

und $\mathcal{P}_{R,L}^\dagger = \mathcal{P}_{R,L}$ benutzt haben. Man beachte, dass die erste Relation (7.91) zusammen mit der Idempotenz (7.88) impliziert, dass

$$\psi_{R,L} = \mathcal{P}_{R,L}\psi = \mathcal{P}_{R,L}\psi_{R,L} \ , \tag{7.93}$$

während die zweite Relation (7.91) zusammen mit der Idempotenz (7.88) impliziert, dass

$$\bar{\psi}_{L,R} = \bar{\psi}\mathcal{P}_{R,L} \equiv \bar{\psi}_{L,R}\mathcal{P}_{R,L} \ . \tag{7.94}$$

Die Dirac–Lagrange–Dichte (7.90) lautet mit Gl. (7.93)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\, i\partial\!\!\!/\,(\psi_R + \psi_L) = \bar{\psi}_L\, i\partial\!\!\!/\,\psi_R + \bar{\psi}_L\, i\partial\!\!\!/\,\psi_L + \bar{\psi}_R\, i\partial\!\!\!/\,\psi_R + \bar{\psi}_R\, i\partial\!\!\!/\,\psi_L\\ &= \bar{\psi}_L\mathcal{P}_R\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_R\psi_R + \bar{\psi}_L\mathcal{P}_R\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_L\psi_L + \bar{\psi}_R\mathcal{P}_L\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_R\psi_R + \bar{\psi}_R\mathcal{P}_L\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_L\psi_L\\ &= \bar{\psi}_L\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_L\mathcal{P}_R\psi_R + \bar{\psi}_L\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_L\mathcal{P}_L\psi_L + \bar{\psi}_R\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_R\mathcal{P}_R\psi_R + \bar{\psi}_R\, i\partial\!\!\!/\,\mathcal{P}_R\mathcal{P}_L\psi_L\\ &= \bar{\psi}_L\, i\partial\!\!\!/\,\psi_L + \bar{\psi}_R\, i\partial\!\!\!/\,\psi_R \ . \qquad (7.95) \end{aligned}$$

Hier haben wir zur zweiten Zeile die Glgen. (7.93) und (7.94), zur dritten Zeile Gl. (7.92) und im letzten Schritt die Orthogonalität (7.87) und Idempotenz (7.88) der Chiralitätsprojektoren sowie wieder Gl. (7.93) ausgenutzt.

Man sieht anhand von Gl. (7.95), dass die Dirac–Lagrange–Dichte für **masselose** Teilchen in **zwei** Lagrange–Dichten für rechts- und linkshändige Teilchen **separiert**. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer sog. **chiralen Symmetrie**. Falls die Dirac–Teilchen Quarks mit N_f masselosen Flavors sind, dann wäre die Symmetrie von Gl. (7.95) eine $U(N_f)_R \times U(N_f)_L$–Symmetrie, da wir rechts- und linkshändige Quark-Flavors unabhängig voneinander unitären Transformationen unterwerfen können.

18.6.2021

Der elektronische Teil der Lagrange–Dichte des Weinberg–Salam–Modells enthält rechts- und linkshändige Elektronen, aber **nur linkshändige Neutrinos**,

$$\mathcal{L}_e = \bar{e}_L \, i\partial\!\!\!/ \, e_L + \bar{e}_R \, i\partial\!\!\!/ \, e_R + \bar{\nu}_e \, i\partial\!\!\!/ \, \nu_e \ , \tag{7.96}$$

wobei

$$\mathcal{P}_L \nu_e = \nu_e \ , \quad \mathcal{P}_R \nu_e = 0 \ . \tag{7.97}$$

(Die Existenz von Neutrino-Oszillationen, die eine nichtverschwindende Masse von Neutrinos impliziert, widerlegt die Annahme, dass es nur linkshändige Neutrinos gibt; es muss auch rechtshändige Neutrinos geben. Eine der gegenwärtigen Herausforderungen ist, das Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung so zu erweitern, dass dies berücksichtigt wird, ohne die großen Erfolge dieses Modells bei der Beschreibung experimentell beobachtbarer Fakten zu beeinträchtigen.)

Wir schreiben linkshändige Elektronen und Neutrinos als Komponenten eines sog. **linkshändigen Dubletts**,

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \ . \tag{7.98}$$

Dieses Dublett wird als **fundamentale Darstellung** einer Symmetriegruppe, der sog. **schwachen Isospin-Gruppe** $SU(2)_L$, betrachtet. Das Neutrino hat die $SU(2)_L$–Quantenzahlen $I_W = \frac{1}{2}$, $I_W^3 = \frac{1}{2}$, während für das Elektron $I_W = \frac{1}{2}$, $I_W^3 = -\frac{1}{2}$ gilt. Rechtshändige Elektronen transformieren als **Singulett** unter $SU(2)_L$,

$$R = e_R \tag{7.99}$$

mit $I_W = I_W^3 = 0$. Dann können wir die Lagrange–Dichte (7.96) kompakt schreiben als

$$\mathcal{L}_e = \bar{L} \, i\partial\!\!\!/ \, L + \bar{R} \, i\partial\!\!\!/ \, R \ . \tag{7.100}$$

Das linkshändige Dublett L transformiert unter $SU(2)_L$ wie

$$L \ \longrightarrow \ L' = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2} \, L \ , \tag{7.101}$$

während das rechtshändige Singulett R invariant bleibt,

$$R \ \longrightarrow \ R' = R \ . \tag{7.102}$$

Die elektrische Ladung der Teilchen hängt folgendermaßen mit ihrer schwachen Isospin-Quantenzahl zusammen. Für das linkshändige Dublett gilt

$$Q_L = I_W^3 - \frac{1}{2} \,, \tag{7.103}$$

was Neutrinos elektrisch neutral macht und linkshändigen Elektronen die Ladung -1 (in Einheiten der Elementarladung $e = |e| > 0$) gibt. Für das rechtshändige Singulett dagegen gilt

$$Q_R = I_W^3 - 1 \,, \tag{7.104}$$

da rechtshändige Elektronen ebenfalls die Ladung -1 tragen. Die Relationen (7.103) und (7.104) erscheinen unnatürlich, denn warum sollte sich die Ladungsformel ändern, wenn man links- oder rechtshändige Teilchen betrachtet? Man kann die Ladungsformel vereinheitlichen, wenn man die Existenz einer **zusätzlichen** $U(1)$–Symmetrie annimmt, die sog. **schwache Hyperladungsgruppe** $U(1)_Y$. Die schwache Hyperladung der linkshändigen Teilchen ist $Y_{W,L} = -1$, die der rechtshändigen Teilchen $Y_{W,R} = -2$. Die Ladungsformeln (7.103) und (7.104) kann man dann zu

$$Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2} \tag{7.105}$$

verallgemeinern und vereinheitlichen. Gleichung (7.105) erinnert an die Gell-Mann–Nishijima–Formel für Hadronen (vgl. Gl. (2.204) der Vorlesung "Quantenmechanik II"). Schwache Hyperladungstransformationen für das linkshändige Dublett lauten

$$L \longrightarrow L' = e^{-i\beta Y_W/2}\, L \equiv e^{i\beta/2}\, L \,, \tag{7.106}$$

während für das rechtshändige Dublett

$$R \longrightarrow R' = e^{-i\beta Y_W/2}\, R \equiv e^{i\beta}\, R \tag{7.107}$$

gilt. Die Lagrange–Dichte (7.100) ist offensichtlich invariant unter **globalen** $SU(2)_L \times U(1)_Y$–Transformationen, $\mathcal{L}_e \to \mathcal{L}_e' \equiv \mathcal{L}_e$. Wir machen diese globale Symmetrie nun **lokal**, d.h. wir **eichen** das Modell. Dazu führen wir die kovariante Ableitung bezüglich der $SU(2)_L$–Symmetrie ein, wie sie auf linkshändige Fermionen wirkt,

$$D_{L,\mu} \equiv \partial_\mu - ig\,\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \,, \tag{7.108}$$

mit den Generatoren der $SU(2)_L$–Gruppe, den halben Pauli–Matrizen $\tau_i/2$, sowie drei Eichfeldern $W_{i,\mu}$, $i = 1, 2, 3$. Die $SU(2)_L$–Kopplungskonstante bezeichnen wir mit g. Desweiteren brauchen wir eine kovariante Ableitung bezüglich der $U(1)_Y$–Symmetrie,

$$D_{Y,\mu} = \partial_\mu - ig'\,\frac{Y_W}{2}\, B_\mu \,, \tag{7.109}$$

mit der Hyperladungsquantenzahl Y_W, dem Eichfeld B_μ und der $U(1)_Y$–Kopplungskonstanten g'. Die kovariante Ableitung bezüglich der $SU(2)_L \times U(1)_Y$–Symmetrie, wirkend auf **linkshändige** Fermionen, lautet dann

$$D_\mu L = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\,\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + i\frac{g'}{2}\, B_\mu\right) L \,, \tag{7.110}$$

wobei wir die Hyperladungsquantenzahl $Y_W = -1$ des linkshändigen Dubletts L benutzt haben. Die kovariante Ableitung bezüglich der $SU(2)_L \times U(1)_Y$–Symmetrie, wirkend auf **rechtshändige** Fermionen, lautet

$$D_\mu R = (\partial_\mu + ig' B_\mu) R \,, \tag{7.111}$$

wobei wir die Hyperladungsquantenzahl $Y_W = -2$ des rechtshändigen Singuletts R benutzt haben. Die $SU(2)_L$–Eichfelder $W_{i,\mu}$ tauchen in der kovarianten Ableitung des rechtshändigen Singuletts nicht auf, da sie nicht an letzteres koppeln.

Die lokal $SU(2)_L \times U(1)_Y$–invariante Lagrange–Dichte (7.100) lautet nun

$$\mathcal{L}_e = \bar{L}\, i \not{D}\, L + \bar{R}\, i \not{D}\, R \equiv \bar{L} \left(i\not{\partial} + \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \not{\vec{W}} - \frac{g'}{2} \not{B} \right) L + \bar{R} \left(i\not{\partial} - g' \not{B} \right) R \,. \tag{7.112}$$

Um eine dynamische Theorie der Wechselwirkung von Elektronen, Neutrinos und Eichfeldern zu bekommen, ist hierzu noch die Lagrange–Dichte der Eichfelder hinzu zu addieren,

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \,, \tag{7.113}$$

mit dem Feldstärketensor des **Abelschen** $U(1)_Y$–Eichfeldes

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \,, \tag{7.114}$$

und dem Feldstärktetensor der **nicht–Abelschen** $SU(2)_L$–Eichfelder

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g\, \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \,. \tag{7.115}$$

Der nächste Schritt besteht in der Einführung eines **geladenen, skalaren, isovektoriellen** Feldes, dem sog. **Higgs–Feld**,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \,. \tag{7.116}$$

Dieses transformiert sich wie ein $SU(2)_L$–Dublett,

$$\Phi \;\longrightarrow\; \Phi' = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}/2}\, \Phi \,. \tag{7.117}$$

Unter $U(1)_Y$ transformiert es sich wie

$$\Phi \;\longrightarrow\; \Phi' = e^{-i\beta/2}\, \Phi \,, \tag{7.118}$$

d.h. es trägt die schwachen Isospin- und Hyperladungsquantenzahlen $I_W = \frac{1}{2}$, $Y_W = 1$. Aus der Ladungsformel (7.105) folgt dann, dass die obere Komponente des Isodubletts (7.116), mit $I_W^3 = +\frac{1}{2}$, einfach positiv geladen ist, während die untere Komponente, mit $I_W^3 = -\frac{1}{2}$, neutral ist. Dies haben wir in Gl. (7.116) schon durch die Indizes an den Komponenten kenntlich gemacht. Sowohl Φ^+ als auch Φ^0 sind **komplexwertige** Felder, d.h.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix} \,, \quad \phi_i \in \mathbb{R} \,, \quad i = 1, \ldots, 4 \,. \tag{7.119}$$

Die kovariante Ableitung des Higgs–Feldes lautet

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\,\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu - i\frac{g'}{2}\,B_\mu \right)\Phi \,. \tag{7.120}$$

Die Lagrange–Dichte des Higgs–Feldes ist

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \,. \tag{7.121}$$

Bei spontaner Symmetriebrechung, $\mu^2 < 0$, nimmt das Higgs–Feld den folgenden nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert an,

$$|\Phi_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\phi_{0,1}^2 + \phi_{0,2}^2 + \phi_{0,3}^2 + \phi_{0,4}^2} \equiv \phi_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} \,, \tag{7.122}$$

vgl. Gl. (7.14). Wir können die Orientierung von Φ_0 so wählen, dass $\phi_{0,1} = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, $\phi_{0,2} = \phi_{0,3} = \phi_{0,4} = 0$, d.h.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \\ \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\phi_2) \end{pmatrix} \,, \tag{7.123}$$

wobei wir die Fluktuation von ϕ_1 um das Minimum ϕ_0 mit σ bezeichnet haben. Wählen wir eine **unitäre Eichung**, so werden nach dem im letzten Abschnitt 7.3 Diskutierten die Fluktuationen ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 unendlich schwer, und wir können sie im folgenden gleich null setzen. Das Higgs–Feld (7.123) vereinfacht sich dann zu

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \,. \tag{7.124}$$

In dieser Eichung lautet die kovariante Ableitung (7.120) des Higgs–Feldes

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\sigma \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\left[g \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + g' B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i\frac{g}{\sqrt{2}}\,W_\mu^+ \left(\phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\sigma + \frac{i}{2}(gW_\mu^3 - g'B_\mu)\left(\phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} \,, \end{aligned} \tag{7.125}$$

wobei wir $\sqrt{2}W_\mu^\pm = W_\mu^1 \mp iW_\mu^2$ benutzt haben. Ganz analog

$$(D_\mu\Phi)^\dagger = \left(i\frac{g}{\sqrt{2}}\,W_\mu^- \left(\phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \,,\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\sigma - \frac{i}{2}(gW_\mu^3 - g'B_\mu)\left(\phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right) \,, \tag{7.126}$$

und

$$(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \left[\frac{g^2}{2}\,W_\mu^- W^{+\,\mu} + \frac{1}{4}\left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right)^2 \right] \left(\phi_0^2 + \sqrt{2}\phi_0\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) \,. \tag{7.127}$$

Man erkennt in diesem Ausdruck einen **Massenterm** für die geladenen Eichfelder W_μ^+ und $W_\mu^- \equiv (W_\mu^+)^*$,

$$\frac{g^2}{2}\,\phi_0^2\,W_\mu^- W^{+\,\mu} \equiv M_W^2\,W_\mu^- W^{+\,\mu}\;, \quad M_W^2 \equiv \frac{g^2}{2}\,\phi_0^2\;, \tag{7.128}$$

und auf den ersten Blick auch Massenterme für W_μ^3 und B_μ. Es gibt aber auch einen gemischten Term $\sim \frac{gg'}{2}\,\phi_0^2\,W_\mu^3 B^\mu$. Dies bedeutet, dass die Massenmatrix im Raum der Felder W_μ^3 und B_μ **nicht diagonal** ist, d.h. wir müssen sie erst diagonalisieren, um die **Masseneigenwerte** zu bestimmen. Die **Masseneigenzustände** sind dann **Linearkombinationen** der Felder W_μ^3 und B_μ. Wir definieren

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} = \cos\Theta_W\,W_\mu^3 - \sin\Theta_W\,B_\mu\;, \\ A_\mu &= \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} = \sin\Theta_W\,W_\mu^3 + \cos\Theta_W\,B_\mu\;, \end{aligned} \tag{7.129}$$

führen also eine **Drehung** der Felder W_μ^3 und B_μ durch, mit

$$\cos\Theta_W \equiv \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}\;, \quad \sin\Theta_W \equiv \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\;, \tag{7.130}$$

wobei der Drehwinkel Θ_W als **Weinberg–Winkel** bezeichnet wird. Inspektion von Gl. (7.127) ergibt, dass Z_μ eine Masse trägt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\,\phi_0^2\left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right)^2 &= \frac{g^2+g'^2}{4}\,\phi_0^2\,Z_\mu Z^\mu \equiv \frac{M_Z^2}{2}\,Z_\mu Z^\mu\;, \\ \Longrightarrow\quad M_Z^2 &= \frac{g^2+g'^2}{2}\,\phi_0^2 = \frac{g^2}{2}(1+\tan^2\Theta_W)\phi_0^2 = \frac{g^2}{2\cos^2\Theta_W}\,\phi_0^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2\Theta_W}\;. \end{aligned} \tag{7.131}$$

Die Masse des Feldes Z_μ ist also um einen Faktor $1/\cos^2\Theta_W$ größer als die der Felder $W_\mu^\pm$. Die Quanten der Felder $W_\mu^\pm$ sind die sog. $W^\pm$–**Bosonen**, mit einer Masse

$$M_W = (80.379 \pm 0.012)\ \text{GeV}\;. \tag{7.132}$$

Die Quanten des Feldes Z_μ sind die Z^0–**Bosonen**, mit einer Masse

$$M_Z = (91.1876 \pm 0.0021)\ \text{GeV}\;. \tag{7.133}$$

Daraus berechnet man den Weinberg–Winkel zu

$$\Theta_W = \arccos\frac{M_W}{M_Z} = 28.1780^o\;. \tag{7.134}$$

Das A_μ–Feld, als zu Z_μ orthogonale Linearkombination der ursprünglichen Felder W_μ^3 und B_μ, bleibt gemäß Gl. (7.127) **masselos**, also ist nach wie vor ein **Eichboson**. Dies ist das **elektromagnetische Feld**, mit **Photonen** als Quanten. Die residuale Eichsymmetrie ist also die $U(1)_{\text{em}}$–Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung. Das Schema der

spontanen Symmetriebrechung im Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung ist demzufolge

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{em}} \; . \tag{7.135}$$

Wir betrachten nun die elektronische Lagrange–Dichte (7.112) und schreiben die dort auftretenden Felder W^i_μ und B_μ unter Benutzung von $W^\pm_\mu \equiv (W^1_\mu \mp iW^2_\mu)/\sqrt{2}$ und der Umkehrung von Gl. (7.129),

$$\begin{aligned} B_\mu &= \cos\Theta_W \, A_\mu - \sin\Theta_W \, Z_\mu \; , \\ W^3_\mu &= \sin\Theta_W \, A_\mu + \cos\Theta_W \, Z_\mu \; , \end{aligned} \tag{7.136}$$

in die physikalischen Felder $W^\pm_\mu$, Z_μ und A_μ um. Dazu benötigen wir

$$gW^3_\mu - g'B_\mu = \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu = \frac{g}{\cos\Theta_W} \, Z_\mu \; , \tag{7.137}$$

$$\begin{aligned} gW^3_\mu + g'B_\mu &= g\,(\sin\Theta_W \, A_\mu + \cos\Theta_W \, Z_\mu) + g'\,(\cos\Theta_W \, A_\mu - \sin\Theta_W \, Z_\mu) \\ &= (g\sin\Theta_W + g'\cos\Theta_W)\, A_\mu + (g\cos\Theta_W - g'\sin\Theta_W)\; Z_\mu \\ &= 2g\sin\Theta_W \, A_\mu + g(\cos\Theta_W - \tan\Theta_W \sin\Theta_W) Z_\mu \\ &= g\left[2\,\sin\Theta_W \, A_\mu + \frac{\cos(2\Theta_W)}{\cos\Theta_W} \, Z_\mu\right] \; , \end{aligned} \tag{7.138}$$

und

$$g'B_\mu = g\tan\Theta_W\,(\cos\Theta_W \, A_\mu - \sin\Theta_W \, Z_\mu) = g\sin\Theta_W\,(A_\mu - \tan\Theta_W \, Z_\mu) \; . \tag{7.139}$$

Gleichung (7.112) lautet dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \bar{L}\left[i\partial\!\!\!/ + \frac{g}{2}\left(\tau^1 W\!\!\!/^1 + \tau^2 W\!\!\!/^2\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} gW\!\!\!/^3 - g'B\!\!\!/ & 0 \\ 0 & -gW\!\!\!/^3 - g'B\!\!\!/ \end{pmatrix}\right] L \\ &\quad + \bar{R}\,(i\partial\!\!\!/ - g'B\!\!\!/)\; R \\ &= \bar{L}\left[i\partial\!\!\!/ + \frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W\!\!\!/^+ \\ W\!\!\!/^- & 0 \end{pmatrix} + \frac{g}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\Theta_W} Z\!\!\!/ & 0 \\ 0 & -2\,\sin\Theta_W A\!\!\!/ - \frac{\cos(2\Theta_W)}{\cos\Theta_W} Z\!\!\!/ \end{pmatrix}\right] L \\ &\quad + \bar{R}\,[i\partial\!\!\!/ - g\sin\Theta_W\,(A\!\!\!/ - \tan\Theta_W Z\!\!\!/)]\; R \\ &= \bar{\nu}_e \, i\partial\!\!\!/ \, \nu_e + \bar{e}_L \, i\partial\!\!\!/ \, e_L + \bar{e}_R \, i\partial\!\!\!/ \, e_R + \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\bar{\nu}_e W\!\!\!/^+ e_L + \bar{e}_L W\!\!\!/^- \nu_e\right) + \frac{g}{2\cos\Theta_W} \, \bar{\nu}_e Z\!\!\!/ \nu_e \\ &- g\sin\Theta_W \bar{e}_L A\!\!\!/ e_L - g\,\frac{\cos(2\Theta_W)}{2\cos\Theta_W} \, \bar{e}_L Z\!\!\!/ e_L - g\sin\Theta_W \bar{e}_R A\!\!\!/ e_R + g\sin\Theta_W \tan\Theta_W \bar{e}_R Z\!\!\!/ e_R \\ &\equiv \bar{\nu}_e \, i\partial\!\!\!/ \, \nu_e + \bar{\psi}_e \, i\partial\!\!\!/ \, \psi_e - e\,\bar{\psi}_e A\!\!\!/ \psi_e + \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\bar{\nu}_e W\!\!\!/^+ e_L + \bar{e}_L W\!\!\!/^- \nu_e\right) + \frac{g}{2\cos\Theta_W} \, \bar{\nu}_e Z\!\!\!/ \nu_e \\ &+ \frac{g}{2\cos\Theta_W}\left(2\sin^2\Theta_W \, \bar{e}_R \gamma_\mu e_R - \cos(2\Theta_W)\, \bar{e}_L \gamma_\mu e_L\right) Z^\mu \; . \end{aligned} \tag{7.140}$$

Hier haben wir die **Elektronenladung**

$$e \equiv g\,\sin\Theta_W \tag{7.141}$$

eingeführt und die Relation

$$\bar{e}_L \gamma_\mu e_L + \bar{e}_R \gamma_\mu e_R \equiv \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e \tag{7.142}$$

benutzt.

Wir können nun den Vakuumerwartungswert ϕ_0 berechnen. Es gilt gemäß Gl. (7.128)

$$\phi_0 = \frac{\sqrt{2}}{g} M_W = \frac{\sqrt{2}}{e} M_W \sin\Theta_W = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} M_W \sin\Theta_W \simeq 177.270\,\text{GeV} \,. \tag{7.143}$$

Die Masse des Higgs–Teilchens ist mittlerweile recht gut experimentell bestimmt, $M_H \simeq (125.25 \pm 0.17)$ GeV, was einem erlaubt, die Konstanten μ^2 und λ in der Lagrange–Dichte (7.121) festzulegen,

$$M_H^2 \equiv -2\mu^2 = 4\lambda\phi_0^2 \quad \Longrightarrow \quad -\mu^2 \simeq (88.565\,\text{GeV})^2 \,, \quad \lambda = \left(\frac{M_H}{2\phi_0}\right)^2 \simeq 0.12480 \,. \tag{7.144}$$

25.6.2021

Zum Schluss bemerken wir, dass der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung auch dazu dient, dem Elektron eine Masse zu geben. Dazu addieren wir zur Lagrange–Dichte (7.140) eine **Yukawa–Wechselwirkung**,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -G_e \left(\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L\right) \,. \tag{7.145}$$

Man beachte, dass dieser Term ebenfalls **invariant** unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$–Transformationen ist: die $SU(2)_L$–Matrizen heben sich zwischen $\bar{L}\Phi$ und $\Phi^\dagger L$ weg, und die $U(1)_Y$–Phasen aller Felder ergeben einen Faktor 1, weil sich die Hyperladungen Y_W aller Felder zu null addieren. Mit Gl. (7.124) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} &= -G_e \left[(\bar{\nu}, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (0, \phi_0) \begin{pmatrix} \nu \\ e_L \end{pmatrix} \right] + O(\bar{L}\sigma R, \bar{R}\sigma L) \\
&= -G_e \phi_0 (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) + O(\bar{L}\sigma R, \bar{R}\sigma L) \\
&\equiv -G_e \phi_0\, \bar{\psi}_e \psi_e + O(\bar{L}\sigma R, \bar{R}\sigma L) \,,
\end{aligned} \tag{7.146}$$

wobei wir

$$\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L = \bar{\psi}_e \mathcal{P}_R \psi_R + \bar{\psi}_e \mathcal{P}_L \psi_e = \bar{\psi}_e (\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L) \psi_e = \bar{\psi}_e \psi_e \tag{7.147}$$

benutzt haben. Die **Elektronenmasse** identifizieren wir als

$$m_e \equiv G_e \phi_0 \simeq 0.511\ \text{MeV} \quad \Longrightarrow \quad G_e = \frac{m_e}{\phi_0} \simeq 2.8826 \cdot 10^{-6} \,. \tag{7.148}$$

Die **Kondensation** des Higgs–Feldes in einen Vakuumzustand mit nichtverschwindendem Erwartungswert $\phi_0 \neq 0$ sorgt also für die **Erzeugung** der Masse des ursprünglich masselosen Elektrons.

Nun können wir die Lagrange–Dichte des Weinberg–Salam–Modells auch auf die anderen Leptonen-Familien sowie Quarks verallgemeinern. Es gibt **drei** leptonische und **drei** Quark-Familien, sowie das Higgs–Feld Φ und das dazu **adjungierte** Feld $\tilde{\Phi} \equiv (\Phi^{0*}, -\Phi^-)^T$, $\Phi^- = (\Phi^+)^\dagger$, s. Tab. 7.1.

α	1	2	3	I_W	I_W^3	Y_W	$Q = I_W^3 + Y_W/2$
ℓ^α	$L^1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}$	$L^2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$L^3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	-1 -1	0 -1
	$R^1 = e_R$	$R^2 = \mu_R$	$R^3 = \tau_R$	0	0	-2	-1
q^α	$q_L^1 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$q_L^2 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$q_L^3 = \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$
	$\tilde{q}_R^1 = \tilde{u}_R$ $q_R^1 = d_R$	$\tilde{q}_R^2 = \tilde{c}_R$ $q_R^2 = s_R$	$\tilde{q}_R^3 = \tilde{t}_R$ $q_R^3 = b_R$	0 0	0 0	$\frac{4}{3}$ $-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$
Φ	$\begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}$			$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	1 1	1 0
$\tilde{\Phi}$	$\begin{pmatrix} \Phi^{0*} \\ -\Phi^- \end{pmatrix}$			$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	-1 -1	0 -1

Tabelle 7.1: Die drei leptonischen Familien, die drei Quark-Familien, und das Higgs–Feld, mit ihren elektroschwachen Quantenzahlen. Welche Bedeutung die Tilde über den Quarkfeldern mit Ladung $Q = 2/3$ hat, wird im Text erläutert.

Die Lagrange–Dichte des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung lautet

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\ell + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{\text{int}} \ , \tag{7.149}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\ell &= \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{\ell}^\alpha \, i \not{D} \, \ell^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \left[\bar{L}^\alpha \left(i\not{\partial} + \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\not{W}} - \frac{g'}{2} \not{B} \right) L^\alpha + \bar{R}^\alpha (i\not{\partial} - g' \not{B}) R^\alpha \right] \ , \\
\mathcal{L}_q &= \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{q}^\alpha \, i \not{D} \, q^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \left[\bar{q}_L^\alpha \left(i\not{\partial} + \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\not{W}} + \frac{g'}{6} \not{B} \right) q_L^\alpha \right. \\
&\qquad \left. + \bar{\tilde{q}}_R^\alpha \left(i\not{\partial} + \frac{2g'}{3} \not{B} \right) \tilde{q}_R^\alpha + \bar{q}_R^\alpha \left(i\not{\partial} - \frac{g'}{3} \not{B} \right) q_R^\alpha \right] \ , \\
\mathcal{L}_g &= -\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \ , \\
\mathcal{L}_H &= (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \ , \\
\mathcal{L}_{\text{int}} &= \mathcal{L}_{\text{int},\ell} + \mathcal{L}_{\text{int},q} \ .
\end{aligned} \tag{7.150}$$

Die Wechselwirkungs–Lagrange–Dichte enthält die Yukawa–Wechselwirkungen des Higgs–Feldes mit den Fermionen, die letzteren bei Kondensation des ersteren eine Masse geben. Für den leptonischen Anteil gilt

$$\mathcal{L}_{\text{int},\ell} = -\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\bar{L}^\alpha \frac{\Phi}{\phi_0} m_\alpha R^\alpha + \bar{R}^\alpha \frac{\Phi^\dagger}{\phi_0} m_\alpha L^\alpha \right) \ . \tag{7.151}$$

Hierbei ist m_α die Masse der Leptonenfamilie α. In **unitärer Eichung**, $\Phi = \left(0, \phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^T$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int},\ell} &= -\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}\phi_0}\right)\left[(\bar{e}_L, \bar{\mu}_L, \bar{\tau}_L)\begin{pmatrix} m_e & & \\ & m_\mu & \\ & & m_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}\right. \\
&\qquad \left. +(\bar{e}_R, \bar{\mu}_R, \bar{\tau}_R)\begin{pmatrix} m_e & & \\ & m_\mu & \\ & & m_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}\right] \\
&\equiv -\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}\phi_0}\right)(\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau})\begin{pmatrix} m_e & & \\ & m_\mu & \\ & & m_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} , \qquad (7.152)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder von der Relation (7.147), jetzt aber nicht nur für das Elektron, sondern auch für Myon und Tauon, Gebrauch gemacht haben.

Der Quark-Anteil der Wechselwirkungs–Lagrange–Dichte in Gl. (7.150) ist komplizierter als der leptonische, weil die **Quark-Eigenzustände zu schwachem Isospin** nicht identisch mit den **Massen-Eigenzuständen** sind,

$$\mathcal{L}_{\text{int},q} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\bar{q}_L^\alpha \frac{\Phi}{\phi_0} M_{\alpha\beta}\, q_R^\beta + \bar{q}_L^\alpha \frac{\tilde{\Phi}}{\phi_0} \tilde{M}_{\alpha\beta}\, \tilde{q}_R^\beta + \bar{q}_R^\alpha \frac{\Phi^\dagger}{\phi_0} M_{\alpha\beta}^\dagger\, q_L^\beta + \bar{\tilde{q}}_R^\alpha \frac{\tilde{\Phi}^\dagger}{\phi_0} \tilde{M}_{\alpha\beta}^\dagger\, q_L^\beta\right) . \tag{7.153}$$

Die **Quark-Massenmatrizen** $M, \tilde{M}$ sind i.a. nicht-diagonale, komplexwertige Matrizen (in der Basis der schwachen Isospin-Zustände). In unitärer Eichung, $\Phi = \left(0, \phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^T$ und $\tilde{\Phi} = \left(\phi_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int},q} &= -\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2}\phi_0}\right)\left[(\bar{d}_L, \bar{s}_L, \bar{b}_L)M\begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} + (\bar{\tilde{u}}_L, \bar{\tilde{c}}_L, \bar{\tilde{t}}_L)\tilde{M}\begin{pmatrix} \tilde{u}_R \\ \tilde{c}_R \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix}\right. \qquad (7.154) \\
&\qquad \left. + (\bar{d}_R, \bar{s}_R, \bar{b}_R)M^\dagger\begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} + (\bar{\tilde{u}}_R, \bar{\tilde{c}}_R, \bar{\tilde{t}}_R)\tilde{M}^\dagger\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{c}_L \\ \tilde{t}_L \end{pmatrix}\right] .
\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass man für die Familienmitglieder mit Isospinkomponente $I_W^3 = -\frac{1}{2}$ die Matrix M als reell und diagonal annehmen kann, so dass deren Massenterm zu

$$-(\bar{d}, \bar{s}, \bar{b})\begin{pmatrix} m_d & & \\ & m_s & \\ & & m_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{7.155}$$

wird. Für die Familienmitglieder mit $I_W^3 = \frac{1}{2}$ dagegen muss $\tilde{M}$ zunächst mit Hilfe einer **unitären** Matrix C, $C^{-1} = C^\dagger$, der sog. **Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM)–Matrix**, diagonalisiert werden,

$$C\tilde{M}C^\dagger = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_c & \\ & & m_t \end{pmatrix} \equiv C\tilde{M}^\dagger C^\dagger . \tag{7.156}$$

Die **Massen-Eigenzustände** der Quarks sind dann mit den Flavor-Eigenzuständen auf folgende Weise verknüpft,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{R,L} \\ \tilde{c}_{R,L} \\ \tilde{t}_{R,L} \end{pmatrix} = C^\dagger \begin{pmatrix} u_{R,L} \\ c_{R,L} \\ t_{R,L} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} u_{R,L} \\ c_{R,L} \\ t_{R,L} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{u}_{R,L} \\ \tilde{c}_{R,L} \\ \tilde{t}_{R,L} \end{pmatrix} . \tag{7.157}$$

Damit erhalten wir für den Massenterm der betreffenden Quarks

$$-(\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_c & \\ & & m_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} , \tag{7.158}$$

wie erwartet. Die CKM–Matrix beeinflusst **nicht** den elektromagnetischen oder den neutralen elektroschwachen Sektor der Lagrange–Dichte (7.150), weil bei den oberen Diagonalelementen der $SU(2)_L$–Matrizen die dort paarweise auftretenden Faktoren $C^\dagger_{\alpha\beta}$ und $C_{\beta\gamma}$ einfach $\delta_{\alpha\gamma}$ ergeben. Anders ist die Situation dagegen bei den sog. **geladenen linkshändigen elektroschwachen Strömen**, die mit dem Austausch von W^+– oder W^-–Bosonen einhergehen. Hier bleibt stets ein Element der CKM–Matrix übrig. Der entsprechende Anteil der Lagrange–Dichte (7.150) lautet

$$\begin{aligned} & \frac{g}{2} \left[(\bar{d}_L, \bar{s}_L, \bar{b}_L) \not{W}^- \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{c}_L \\ \tilde{t}_L \end{pmatrix} + (\bar{\tilde{u}}_L, \bar{\tilde{c}}_L, \bar{\tilde{t}}_L) \not{W}^+ \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \right] \\ = \; & \frac{g}{2} \left[(\bar{d}_L, \bar{s}_L, \bar{b}_L) \not{W}^- C^\dagger \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} + (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) \not{W}^+ C \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \right] . \end{aligned} \tag{7.159}$$

Die CKM–Matrix mischt also Quarks unterschiedlichen Flavors **über die Mischung** $d \leftrightarrow u$, $s \leftrightarrow c$, und $b \leftrightarrow t$ **hinaus**. Dies ist aufgrund von **experimentellen Befunden** notwendig, weil ohne diese Mischung die $K^0\bar{K}^0$–Mischung und der Zerfall $K^0 \to \mu^+\mu^-$ zu große Werte annehmen würden. Die Quark-Massen m_f, wie auch die Elemente der CKM–Matrix, sind **Parameter** des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung.

Wie viele freie Parameter sind in der CKM–Matrix enthalten? Im allgemeinen hat eine komplexe (3×3)–Matrix $2 \cdot 3^2 = 18$ freie Parameter. Die Unitaritätsbedingung, $C_{\alpha\beta}C^\dagger_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$, reduziert diese Zahl um $3^2 = 9$ auf 9 freie Parameter. Die CKM–Matrix spielt, wie wir gesehen haben, lediglich bei den geladenen elektroschwachen Strömen eine Rolle, wo sie zwischen $(\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L)$ und $(d_L, s_L, b_L)^T$ vermittelt. Wir können nun in fünf dieser sechs Quarkfelder einen (relativen) Phasenfaktor absorbieren (eine globale Phase bleibt unbeobachtet), so dass die CKM–Matrix **vier** freie Parameter enthält. In der Regel schreibt man diese in der Form von drei Mischungswinkeln Θ_i, $i = 1, 2, 3$, zwischen den Quark-Flavors und einer (weiteren) komplexen Phase δ, z.B. [9]

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3 + s_2c_3e^{i\delta} \\ s_1s_2 & -c_1s_2c_3 - c_2s_3e^{i\delta} & -c_1s_2s_3 + c_2c_3e^{i\delta} \end{pmatrix} , \tag{7.160}$$

wobei $c_i \equiv \cos\Theta_i$, $s_i \equiv \sin\Theta_i$. Den Winkel $\Theta_1 \equiv \Theta_C$ bezeichnet man als **Cabibbo–Winkel**.

Zum Schluss dieses Abschnitts betrachten wir als Anwendung des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung den β–**Zerfall** des Neutrons,

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \; . \tag{7.161}$$

Da der Quarkinhalt des Neutron ddu und der des Protons uud ist, ist der β–Zerfall auf Quark-Ebene der Prozess

$$d \longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \; . \tag{7.162}$$

Das Feynman–Diagramm für diesen Prozess ist in Abb. 7.4 gezeigt. Man beachte, dass ein in einen Vertex einlaufendes W^+–Boson einem aus diesem Vertex herauslaufenden W^-–Boson entspricht.

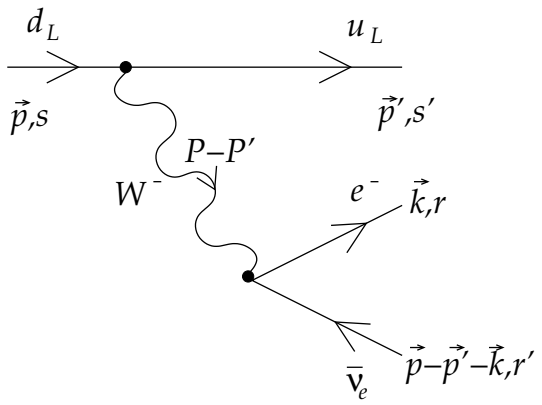


Abbildung 7.4: Das Feynman–Diagramm für den β–Zerfall eines d–Quarks in ein u–Quark, ein Elektron und ein Anti-Elektron-Neutrino.

Gemäß den Feynman–Regeln ist die Amplitude für diesen Zerfall

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \cos\Theta_C\, \bar{u}_u(\vec{p}\,', s')\gamma^\mu \mathcal{P}_L u_d(\vec{p}, s)\, \frac{ig}{\sqrt{2}}\, \frac{1}{(P-P')^2 - M_W^2} \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(P-P')_\mu (P-P')_\nu}{M_W^2} \right] \\ &\quad \times \frac{ig}{\sqrt{2}}\, \bar{u}_e(\vec{k}, r)\gamma^\nu \mathcal{P}_L v_{\bar{\nu}_e}(\vec{p} - \vec{p}\,' - \vec{k}, r') \; .\end{aligned} \tag{7.163}$$

Hier haben wir u– und v–Spinoren den jeweiligen Teilchen entsprechend mit Indizes versehen.

Wenn Energie und Impuls, die über das W^-–Boson an das Elektron- und Elektron-Antineutrino-Paar weitergegeben werden, viel kleiner sind als die Masse M_W,

$$(P - P')^2 \ll M_W^2 \; , \tag{7.164}$$

so kann man den W^-–Boson-Propagator durch

$$\frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \tag{7.165}$$

approximieren. Ein konstanter Propagator bedeutet aber, dass der W^-–Boson-Austausch **instantan**, d.h. am selben Raum-Zeit-Punkt stattfindet. Dies sieht man, wenn man eine Fourier–Transformation in den Ortsraum durchführt, wo der Propagator dann $\sim \delta^{(4)}(X-Y)$ wird. Dies bedeutet aber für das Feynman–Diagramm in Abb. 7.4, dass die W^-–Boson-Linie auf einen Punkt zusammenschrumpft. Dies führt dann effektiv zu einer **Vier-Punkt-Wechselwirkung** der Fermionenfelder (in unserem Fall d–Quark, u–Quark, Elektron und Anti-Elektron-Neutrino). Eine solche effektive Theorie der schwachen Wechselwirkung wurde von E. Fermi entwickelt und ist historisch betrachtet der Vorläufer des Weinberg–Salam–Modells. Sie wird als **Fermi–Theorie der schwachen Wechselwirkung** bezeichnet.

In der Fermi–Theorie der schwachen Wechselwirkung vereinfacht sich das Diagramm aus Abb. 7.4 so wie in Abb. 7.5 gezeigt.

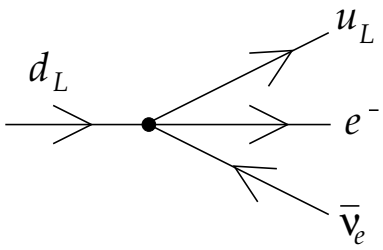


Abbildung 7.5: Das Feynman–Diagramm für den β–Zerfall im Rahmen der Fermi–Theorie der schwachen Wechselwirkung.

Dann wird das Matrixelement (7.163)

$$\mathcal{M} \simeq -2\sqrt{2}\, G_F \, \cos\Theta_C \, Q^\mu(\vec{p},\vec{p}\,',s,s')\, L_\mu(\vec{k},\vec{p}-\vec{p}\,'-\vec{k},r,r') \;, \tag{7.166}$$

mit dem **Quark-Strom**

$$Q^\mu(\vec{p},\vec{p}\,',s,s') \equiv \bar{u}_u(\vec{p}\,',s')\gamma^\mu\, \mathcal{P}_L u_d(\vec{p},s) \;, \tag{7.167}$$

dem **Leptonen-Strom**

$$L^\mu(\vec{k},\vec{p}-\vec{p}\,'-\vec{k},r,r') \equiv \bar{u}_e(\vec{k},r)\gamma^\mu \mathcal{P}_L v_{\bar{\nu}_e}(\vec{p}-\vec{p}\,'-\vec{k},r') \;, \tag{7.168}$$

und der sog. **Fermi–Konstante**

$$G_F \equiv \frac{g^2}{4\sqrt{2}\, M_W^2} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}\, M_W^2\, \sin^2\Theta_W} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\, \frac{\alpha}{M_W^2\, \sin^2\Theta_W} \simeq 1.1252\cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \;. \tag{7.169}$$

Dass G_F so klein ist, liegt natürlich an der großen Masse des W–Bosons. Historisch hat dies zur Bezeichnung “schwache” Wechselwirkung geführt.

8 Renormierung

30.6.2021

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den **Divergenzen**, die uns schon an verschiedenen Stellen in der Quantenfeldtheorie begegnet sind. Wir werden sehen, dass es ein wohldefiniertes Verfahren gibt, diese Divergenzen mathematisch zu behandeln, die sog. **Regularisierung**. Dabei wird ein neuer Parameter mit der Dimension Energie auftreten. Da dieser Parameter zunächst willkürlich eingeführt wird, physikalische Observable aber nicht von solchen Größen abhängen können, muss ein weiteres Verfahren, die sog. **Renormierung**, angewendet werden, um diese spuriose Abhängigkeit zu beseitigen. Wie wir sehen werden, hat dies weitreichende Konsequenzen für die uns bekannten Feldtheorien. Insbesondere werden wir damit auf die **asymptotische Freiheit** der QCD geführt, d.h. die Tatsache, dass die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen bei hohen Energien immer schwächer wird.

8.1 Divergenzen in der ϕ^4–Theorie

Wir erinnern uns an den Ein-Schleifen-Beitrag δm^2 aus Gl. (6.32) zur Masse des skalaren Bosons,

$$\delta m^2 = \frac{\lambda}{2}\, i\Delta_F(0) = \frac{i\lambda}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4 Q}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{Q^2 - m^2 + i\eta}\,, \tag{8.1}$$

wobei wir Gl. (6.33) benutzt haben. Wir hatten schon damals gesehen, dass dieses Integral **quadratisch UV-divergent** ist. Wir wollen diese Divergenz im folgenden genauer untersuchen. Nach analytischer Fortsetzung zu imaginären Energien, s. Gl. (5.36), gilt in vierdimensionalen Kugelkoordinaten

$$i \int \frac{\mathrm{d}^4 Q}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{Q^2 - m^2 + i\eta} \longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}^4 \bar{Q}}{(2\pi)^4}\, \frac{1}{\bar{Q}^2 + m^2} = \int \mathrm{d}\Omega_{\bar{Q}} \int_0^\infty \mathrm{d}\bar{Q}\, \bar{Q}^3\, \frac{1}{\bar{Q}^2 + m^2}\,. \tag{8.2}$$

Um das $\mathrm{d}\bar{Q}$–Integral zu berechnen, führen wir nun einen **Ultraviolett (UV)–Abschneideparameter** (engl.: *cut-off*) Λ ein, den wir am Schluß der Rechnung gegen unendlich schicken werden,

$$\int_0^\Lambda \mathrm{d}\bar{Q}\, \bar{Q}^3\, \frac{1}{\bar{Q}^2 + m^2} = \int_0^\mu \mathrm{d}\bar{Q}\, \bar{Q}^3\, \frac{1}{\bar{Q}^2 + m^2} + \int_\mu^\Lambda \mathrm{d}\bar{Q}\, \bar{Q}^3\, \frac{1}{\bar{Q}^2 + m^2}\,. \tag{8.3}$$

Hier sei μ eine intermediäre Impulsskala mit $m \ll \mu \ll \Lambda$. Wegen $\mu \gg m$ können wir im zweiten Integral die Masse im Nenner vernachlässigen und erhalten die Abschätzung

$$\int_\mu^\Lambda \mathrm{d}\bar{Q}\, \bar{Q}^3\, \frac{1}{\bar{Q}^2 + m^2} \leq \int_\mu^\Lambda \mathrm{d}\bar{Q}\, \bar{Q}^3\, \frac{1}{\bar{Q}^2} = \int_\mu^\Lambda \mathrm{d}\bar{Q}\, \bar{Q} = \frac{1}{2}(\Lambda^2 - \mu^2)\,. \tag{8.4}$$

Dieser Ausdruck divergiert quadratisch für $\Lambda \to \infty$.

Ein weiteres Diagramm mit einer UV–Divergenz ist die in Abb. 8.1 gezeigte 4–Punkt-Funktion, die einen Ein-Schleifen-Beitrag zur Streuamplitude von zwei skalaren Bosonen bildet.

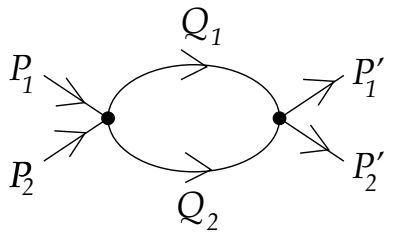


Abbildung 8.1: Ein-Schleifen-Beitrag zur 4–Punkt-Funktion in der ϕ^4–Theorie.

Der Beitrag zur Streuamplitude ist gemäß den Feynman–Regeln

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1 &= 4\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2\left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4Q_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4Q_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_1+P_2-Q_1-Q_2) \\ &\qquad \times \frac{i}{Q_1^2-m^2+i\eta}\,\frac{i}{Q_2^2-m^2+i\eta} \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4Q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{Q^2-m^2+i\eta}\,\frac{1}{(P_1+P_2-Q)^2-m^2+i\eta} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Der kombinatorische Faktor ergibt sich wie folgt: Für den einlaufenden Impuls P_1 gibt es vier Möglichkeiten, am ersten Vertex "anzudocken". Dann verbleiben dort noch drei Möglichkeiten für den zweiten Impuls P_2. Entsprechend gibt es vier Möglichkeiten, den auslaufenden Impuls P_1' mit Beinen des zweiten Vertex zu verbinden, und drei Möglichkeiten für den verbleibenden Impuls P_2'. Die dann jeweils verbleibenden zwei Beine an den beiden Vertizes können auf zwei verschiedene Weisen miteinander verbunden werden.

Desweiteren haben wir die Energie-Impuls-erhaltende δ–Funktion am zweiten Vertex, $\delta^{(4)}(Q_1+Q_2-P_1'-P_2')$, bereits aus $i\mathcal{M}_1$ herausfaktorisiert, da sie zusammen mit der ersten δ–Funktion auch als $\delta^{(4)}(P_1+P_2-P_1'-P_2')$ geschrieben werden kann, also für die Energie-Impuls-Erhaltung des gesamten Streuprozesses sorgt, vgl. Gl. (6.174).

Nun schreiben wir das Impulsintegral nach analytischer Fortsetzung wieder in vierdimensionalen Kugelkoordinaten, führen einen UV–cut-off Λ und eine intermediäre Impulsskala μ ein, mit $m, |\bar{P}_1+\bar{P}_2| \ll \mu \ll \Lambda$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1 &= i\frac{\lambda^2}{2}\int \mathrm{d}\Omega_{\bar{Q}}\int_0^{\mu}\mathrm{d}\bar{Q}\,\bar{Q}^3\,\frac{1}{\bar{Q}^2+m^2}\,\frac{1}{(\bar{P}_1+\bar{P}_2-\bar{Q})^2+m^2} \\ &+ i\frac{\lambda^2}{2}\int \mathrm{d}\Omega_{\bar{Q}}\int_{\mu}^{\Lambda}\mathrm{d}\bar{Q}\,\bar{Q}^3\,\frac{1}{\bar{Q}^2+m^2}\,\frac{1}{(\bar{Q}-\bar{P}_1-\bar{P}_2)^2+m^2}\,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Das zweite Integral können wir wieder nach oben abschätzen,

$$\int_{\mu}^{\Lambda}\mathrm{d}\bar{Q}\,\bar{Q}^3\,\frac{1}{\bar{Q}^2+m^2}\,\frac{1}{(\bar{Q}-\bar{P}_1-\bar{P}_2)^2+m^2} \le \int_{\mu}^{\Lambda}\mathrm{d}\bar{Q}\,\frac{\bar{Q}^3}{(\bar{Q}^2)^2} = \int_{\mu}^{\Lambda}\frac{\mathrm{d}\bar{Q}}{\bar{Q}} = \ln\frac{\Lambda}{\mu}\,. \tag{8.7}$$

Es handelt sich also (im Limes $\Lambda \to \infty$) um eine **logarithmische UV–Divergenz**.

Wie kann man den Grad der Divergenz eines bestimmten Feynman–Diagramms ablesen? Hierzu gibt es eine Methode, das sog. **Potenz-Zählen** (engl. *power counting*). Betrachten wir z.B. eine Theorie mit einem skalaren Boson, mit einer r–Punkt-Wechselwirkung $\sim \phi^r$, in d Raum-Zeit-Dimensionen. Es gilt

(i) Jede interne Linie (jeder Propagator) des skalaren Bosons verhält sich für große Impulse wie $\sim Q^{-2}$, wobei Q^μ der d-Impuls ist, der vom Propagator übertragen wird. (Anmerkung: für Fermionen gilt entsprechendes, aber hier verhält sich der Propagator aufgrund des zusätzlichen Faktors $\not{Q}$ im Zähler wie $\sim Q^{-1}$).

(ii) Für jede interne Linie gibt es eine d–dimensionale Integration $\sim \int \mathrm{d}^d Q \sim Q^d$.

(iii) Jeder Vertex wird von einer d–Impuls erhaltenden δ–Funktion $\sim Q^{-d}$ begleitet, die eines der d–dimensionalen Q–Integrale eliminiert.

(iv) Es gibt eine δ–Funktion, die die gesamte d–Impuls-Erhaltung garantiert und nicht benutzt werden kann, um ein d–dimensionales Q–Integral zu eliminieren.

Nun betrachten wir ein Diagramm mit n **Vertizes**, I **internen Linien** (Propagatoren) und E **externen Linien**. Die erste Frage, die sich stellt, ist, wieviele **Schleifen** L dieses Diagramm hat. Die Behauptung ist, dass

$$L = I - n + 1 \; . \tag{8.8}$$

Dies macht man sich folgendermaßen klar. Wenn wir eine interne Linie aus dem Diagramm entfernen (z.B. durch Durchschneiden eines Propagators, was aus der internen Linie zwei externe macht), dann haben wir gleichzeitig eine Schleife geöffnet und damit beseitigt. Die Relation (8.8) lautet dann

$$L - 1 = (I - 1) - n + 1 \; .$$

Wenn man diese Prozedur wiederholt, bis alle Schleifen entfernt wurden, bleibt ein sog. **Baum-Graph**, auch **Baum-Diagramm** (engl. *tree diagram*) genannt, übrig. Per Definition ist dies ein Diagramm **ohne** Schleifen. Es besitzt noch $J < I$ innere Linien (weil durch das Durchschneiden von internen Linien externe Linien geschaffen werden). Die Relation (8.8) für den Baum-Graphen lautet

$$0 = J - n + 1 \; . \tag{8.9}$$

Nun entfernen wir einen Vertex von (irgend-)einem Ende des Baum-Graphen. Dies verringert n um eins und macht eine der verbleibenden J internen Linien zu einer externen Linie, verringert also auch J um eins:

$$0 = J - 1 - (n - 1) + 1 \; .$$

Nun wiederhole man diese Prozedur, bis man den einfachsten Baum-Graphen erzeugt hat, nämlich den mit **einer** internen Linie und **zwei** Vertizes, vgl. Abb. 8.2. Für diesen lautet

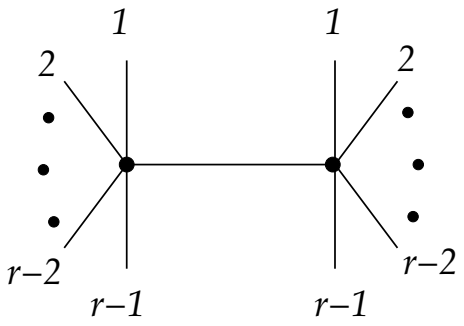


Abbildung 8.2: Der einfachste Baum-Graph in der ϕ^r–Theorie.

die Relation (8.8)

$$0 = 1 - 2 + 1 \ ,$$

was offenbar richtig ist. Die ursprüngliche Relation (8.8) muss also korrekt gewesen sein. (Bemerkung: dieser "Beweis" hält mathematischen Ansprüchen natürlich nicht stand, sollte aber für den Physiker hinreichend einleuchtend sein.)

Die Relation (8.8) bedeutet auch, dass die **Zahl der Schleifen** identisch ist mit der **Zahl der unabhängigen** d**–Impuls-Integrale**, $L = I - (n-1)$, denn man integriert über jede interne Linie, aber es gibt $n-1$ δ–Funktionen, mit denen man solche Impuls-Integrale eliminieren kann (eine steht aufgrund der gesamten Energie-Impuls-Erhaltung nicht zur Verfügung). Diese Tatsache kann man auch in der Aussage zusammenfassen, dass man **über alle Impulse integriert, die durch eine Schleife fließen**.

Nun sind wir in der Lage, den Grad der Divergenz eines gegebenen Diagramms zu bestimmen. Der sog. **oberflächliche Grad** (engl. *superficial degree*) der Divergenz, D, ist einfach die Zahl der unabhängigen d–Impuls-Integrale (die, wie wir gerade gesehen haben, identisch mit der Zahl der Schleifen ist, multipliziert mit d), minus der Anzahl der Potenzen der Impulse, die von internen Linien stammen also (für skalare Bosonen)

$$D = d\,L - 2I \ . \tag{8.10}$$

Mit Gl. (8.8) gilt dann auch

$$D = d(I - n + 1) - 2I = (d-2)I - nd + d \ . \tag{8.11}$$

Für die Ein-Schleifen-Korrektur (8.1) zur Masse haben wir $d = 4$, $I = n = 1$, was $D = 2$ ergibt, also in der Tat eine **quadratische** UV–Divergenz. Für den Ein-Schleifen-Beitrag (8.5) zur 4–Punkt-Funktion ist $d = 4$, $I = n = 2$, also $D = 0$, was gleichbedeutend mit einer **logarithmischen** UV–Divergenz ist.

In ϕ^r–Theorie hat jeder Vertex r Beine und jede interne Linie ist mit zwei Vertizes verbunden. Dies bedeutet, dass in jedem Diagramm die Relation

$$r\,n = E + 2I \tag{8.12}$$

erfüllt sein muss. Nach I aufgelöst haben wir also

$$I = \frac{r\,n - E}{2} \ , \tag{8.13}$$

und eingesetzt in Gl. (8.11) ergibt sich

$$D = (d-2)\frac{r\,n - E}{2} - nd + d = \left[\left(\frac{d}{2} - 1\right) r - d\right] n - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + d \equiv -\delta\, n - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + d\,, \tag{8.14}$$

mit

$$\delta \equiv d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) r\,. \tag{8.15}$$

Die Zahl d der Raum-Zeit-Dimensionen ist durch das gegebene Problem festgelegt (bei Quantenfeldtheorien in der Minkowski–Raum-Zeit ist gewöhnlich $d = 4$). Die Zahl E der externen Linien ist für einen gegebenen Streuprozess fixiert. Daher hängt D eigentlich nur vom Typ der Wechselwirkung ab, d.h. von der Zahl r der Felder, die an einem Raum-Zeit-Punkt wechselwirken, und der Anzahl n solcher Vertizes in einem gegebenen Diagramm. Wir machen folgende Fallunterscheidung:

(i) $\delta < 0$: Der oberflächliche Grad der Divergenz D **wächst** proportional zu n **an**. Dies bedeutet, dass die Divergenzen in jeder nächsthöheren Ordnung in Störungstheorie (die identisch mit der Zahl n der Vertizes ist) schwerwiegender sind als in der vorangegangenen. Solche Theorien bezeichnet man als **störungstheoretisch nicht renormierbar**.

(ii) $\delta = 0$: Der oberflächliche Grad der Divergenz D ist unabhängig von der Anzahl der Vertizes und hängt lediglich von der Anzahl der Raum-Zeit-Dimensionen und der Zahl der externen Linien ab. Da beide Größen, wie oben erläutert, vorgegeben sind, divergiert kein Diagramm höherer Ordnung in Störungstheorie (d.h. mit einer größeren Anzahl Vertizes) schwerwiegender als die in niedrigerer Ordnung. Solche Theorien bezeichnet man als **störungstheoretisch renormierbar**.

(iii) $\delta > 0$: Der oberflächliche Grad der Divergenz D **nimmt** mit n **ab**. Dies bedeutet, dass ab einer bestimmten Ordnung in Störungstheorie **keine** UV–Divergenzen mehr auftreten. Solche Theorien bezeichnet man als **störungstheoretisch super-renormierbar**.

Beispiele:

(a) $r = 4$: In diesem Fall ist

$$\delta = -4\left(\frac{d}{2} - 1\right) + d = -2d + d + 4 = 4 - d\,. \tag{8.16}$$

Die ϕ^4–Theorie ist also nicht renormierbar in $d > 4$ Raum-Zeit-Dimensionen, renormierbar in $d = 4$ Dimensionen und super-renormierbar in $d < 4$ Dimensionen.

(b) $r = 6$: In diesem Fall ist

$$\delta = -6\left(\frac{d}{2} - 1\right) + d = -3d + d + 6 = 2(3 - d)\,. \tag{8.17}$$

Die ϕ^6–Theorie ist also nicht renormierbar in $d > 3$ Raum-Zeit-Dimensionen, renormierbar in $d = 3$ Dimensionen und super-renormierbar in $d < 3$ Dimensionen.

(c) $d = 2$: In diesem Fall ist $\delta \equiv 2$, unabhängig vom Wert von r. **Alle** ϕ^r–Theorien sind in $d = 2$ Raum-Zeit-Dimensionen super-renormierbar! Der oberflächliche Grad der Divergenz ist

$$D = 2(1 - n) \ , \tag{8.18}$$

d.h. **kein** Diagramm mit $n > 1$ Vertizes divergiert!

Der **oberflächliche** Grad der Divergenz ist nicht der **tatsächliche** Grad der Divergenz. **Beispiel:** Wir betrachten $d = 4$, $r = 4$, woraus $\delta = 0$ und $D = 4 - E$ folgt. Dies bedeutet, dass **alle** Diagramme mit $E > 4$ externen Beinen konvergent sein sollten. Nun betrachten wir einen Streuprozess, bei dem drei Teilchen miteinander streuen, d.h. $E = 6$ (drei einlaufende und drei auslaufende Beine). Alle drei Diagramme in Abb. 8.3 haben demzufolge den oberflächlichen Grad der Divergenz $D = -2$. (Man kann dies auch "von Hand" bestätigen, indem man die Zahl der internen Linien, der Impuls-Integrale und der unabhängigen δ–Funktionen bestimmt.) Dennoch wissen wir, dass der (eingerahmte) Ein-Schleifen-Beitrag in Abb. 8.3 (b) quadratisch und die beiden (eingerahmten) Ein-Schleifen-Beiträge in Abb. 8.3 (c) logarithmisch divergieren! Also ist der tatsächliche Grad der Divergenz in der Tat nicht identisch mit dem oberflächlichen. Man muss nach **Subdivergenzen** Ausschau halten, d.h. **divergente Unterdiagramme** eines gegebenen Diagramms.

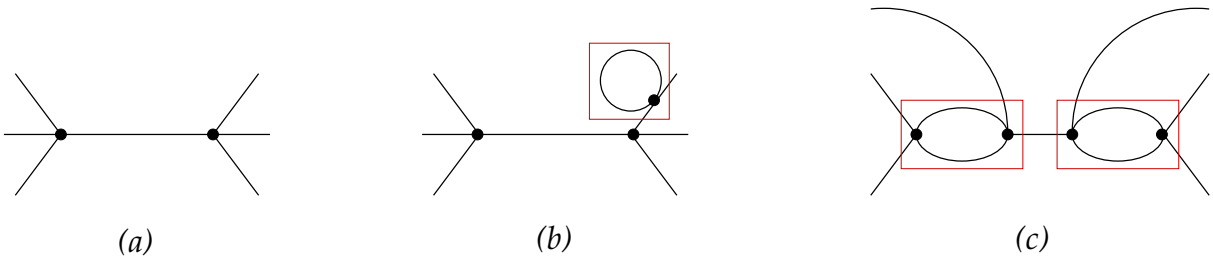


Abbildung 8.3: Drei Diagramme mit $D = -2$, aber unterschiedlichen Subdivergenzen.

Ohne Beweis geben wir das sog. **Weinberg–Theorem** an:
Ein Feynman–Diagramm ist konvergent, wenn der oberflächliche Grad der Divergenz **aller** seiner **Unterdiagramme** negativ ist.

Der oberflächliche Grad der Divergenz in der ϕ^4–Theorie in $d = 4$ Raum-Zeit-Dimensionen ist nach obigem Beispiel **unabhängig** von der Ordnung n eines bestimmten Diagramms. Daher erwarten wir, dass die Zahl der divergenten Diagramme **endlich** ist. Diese divergenten Diagramme nennt man **primitive Divergenzen**. In der ϕ^4–Theorie gibt es in der Tat nur zwei primitive Divergenzen, den Ein-Schleifen-Beitrag (8.1) zur Masse mit $D = 2$ (quadratische UV–Divergenz) und den Ein-Schleifen-Beitrag (8.5) zur 4–Punkt-Funktion mit $D = 0$ (logarithmische UV–Divergenz).

Wir zeigen nun, dass die in Gl. (8.15) definierte Größe δ identisch mit der **Dimension der Kopplungskonstanten** in der ϕ^r–Theorie ist. Dies ergibt dann ein einfaches Kriterium für die Renormierbarkeit einer gegebenen Theorie. Als erstes bemerken wir, dass die **Wirkung** S einer beliebigen Theorie für jede Zahl d von Raum-Zeit-Dimension (in

natürlichen Einheiten, wo $\hbar = 1$ ist) **dimensionslos** sein muss,

$$S = \int \mathrm{d}^d X \, \mathcal{L} \, , \quad [S] = 1 \, . \tag{8.19}$$

Dies muss so sein, da S z.B. im Exponenten des Integranden von Funktionalintegralen auftritt.

Daraus folgt sofort, dass die Dimension der Lagrange–Dichte identisch mit der d–ten Potenz der inversen Länge oder (in natürlichen Einheiten, wo $\hbar c = 1$ ist) des Impulses bzw. der Energie sein muss,

$$[\mathcal{L}] = L^{-d} = \Lambda^d \, , \tag{8.20}$$

wobei L eine Längenskala und Λ eine Impuls- bzw. Energieskala ist.

Sodann bemerken wir, dass der kinetische Term in der Lagrange–Dichte stets **quadratisch** in Gradienten des Feldes ist, $\sim \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$. Da

$$[\partial_\mu] = \frac{1}{L} = \Lambda \, , \tag{8.21}$$

folgt

$$\Lambda^d = [\mathcal{L}] = [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] = \Lambda^2 [\phi^2] \, , \tag{8.22}$$

und daher

$$[\phi] = \Lambda^{d/2-1} \, . \tag{8.23}$$

Dies ist die **kanonische Dimension** des Feldes.

Nun ist der Wechselwirkungsterm in der Lagrange–Dichte $\sim \lambda \phi^r$. Daher gilt

$$\Lambda^d = [\mathcal{L}] = [\lambda \phi^r] = [\lambda][\phi]^r = [\lambda] \Lambda^{r(d/2-1)} \, , \tag{8.24}$$

also

$$[\lambda] = \Lambda^{d-r(d/2-1)} \equiv \Lambda^\delta \, , \quad \text{q.e.d.} \tag{8.25}$$

Aus Punkt (ii) der obigen Fallunterscheidung folgt dann, dass Theorien mit **dimensionsloser Kopplungskonstante**, $\delta = 0$, **renormierbar** sind.

2.7.2021

8.2 Dimensionale Regularisierung der ϕ^4–Theorie

Gleichung (8.14) läßt sich auch folgendermaßen schreiben,

$$D = \left[\left(\frac{r}{2} - 1 \right) n - \frac{E}{2} + 1 \right] d - r\, n + E \, , \tag{8.26}$$

Wir betrachten nun Diagramme mit einer festen Zahl n von Vertizes. Von allen diesen Diagrammen haben die Baum-Graphen darunter offensichtlich die größte Zahl von externen Linien E, weil man aus einem Diagramm mit Schleifen durch Aufschneiden aller interner Linien einen Baum-Graphen erzeugen kann. Jede durchgeschnittene interne Linie erzeugt dabei zwei externe Linien. In einem Baum-Graphen mit n Vertizes gibt es $I = n - 1$ interne Linien, die die n Vertizes miteinander verbinden. Nach Gl. (8.12) ist dann die

Zahl der externen Linien $E = rn - 2I = rn - 2(n-1) = (r-2)n + 2$. Da für Diagramme mit Schleifen die Zahl der externen Linien stets kleiner ist als die für Baum-Graphen, gilt also für alle Diagramme

$$E \leq (r-2)n + 2 \; . \tag{8.27}$$

Dies bedeutet, dass der Koeffizient von d in Gl. (8.26) positiv semi-definit ist, dass also der oberflächliche Grad der Divergenz mit der Zahl der Raum-Zeit-Dimensionen anwächst.

Die Idee, die der **dimensionalen Regulierung** zugrundeliegt, ist daher, Diagramme, die in $d = 4$ Dimensionen divergent sind, in $d < 4$ Dimensionen zu berechnen, wo sie noch konvergent sind, und dann am Schluss der Rechnung den Limes $d \to 4$ durchzuführen. Der erste Schritt besteht also darin, die Lagrange–Dichte der Theorie von 4 auf d Raum-Zeit-Dimensionen zu verallgemeinern. Für die ϕ^4–Theorie lautet die Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4 \; . \tag{8.28}$$

Dies ist formal identisch mit Gl. (6.1), allerdings ist die Dimension der Kopplungskonstanten nun gemäß den Glgen. (8.16) und (8.25)

$$[\lambda] = \Lambda^\delta = \Lambda^{4-d} \; , \tag{8.29}$$

d.h. in $d \neq 4$ Raum-Zeit-Dimensionen ist die Kopplungskonstante nicht mehr dimensionslos. Wir können sie aber weiterhin dimensionslos halten, wenn wir sie mit einem Faktor multiplizieren, der die richtige Dimension hat, also die Ersetzung

$$\lambda \quad \longrightarrow \quad \lambda\,\mu^{4-d} \tag{8.30}$$

in der Lagrange–Dichte (8.28) vornehmen, wobei μ ein beliebiger Parameter mit der Dimension Energie (bzw. Impuls oder Masse) ist. Die Lagrange–Dichte lautet nun

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\mu^{4-d}\,\phi^4 \; . \tag{8.31}$$

Der Ein-Schleifen-Beitrag (8.1) zur Masse des Bosons lautet nun

$$\delta m^2 = \frac{i\lambda}{2}\,\mu^{4-d} \int \frac{\mathrm{d}^dQ}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{Q^2 - m^2 + i\eta} \; , \tag{8.32}$$

und der Ein-Schleifen-Beitrag (8.5) zur 4–Punkt-Funktion

$$i\mathcal{M}_1 = \frac{\lambda^2}{2}\,\mu^{2(4-d)} \int \frac{\mathrm{d}^dQ}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{Q^2 - m^2 + i\eta}\,\frac{1}{(P_1 + P_2 - Q)^2 - m^2 + i\eta} \; . \tag{8.33}$$

Das Integral läßt sich mit Hilfe der sog. **Feynman–Formel** (die eigentlich nichts anderes ist als ein elementares Integral) umschreiben,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{[az + b(1-z)]^2} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{[(a-b)z + b]^2} = -\frac{1}{a-b}\,\frac{1}{(a-b)z + b}\bigg|_0^1 \\ &= -\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = -\frac{1}{a-b}\,\frac{b-a}{ab} = \frac{1}{ab} \; . \end{aligned} \tag{8.34}$$

Wir identifizieren $a \equiv Q^2 - m^2 + i\eta$ und $b \equiv (Q - P_1 - P_2)^2 - m^2 + i\eta$ und berechnen

$$\begin{aligned}
&(Q^2 - m^2 + i\eta)z + \left[(Q - P_1 - P_2)^2 - m^2 + i\eta)\right](1-z) \\
&= (Q^2 - m^2)z + \left[Q^2 - 2Q\cdot(P_1+P_2) + (P_1+P_2)^2 - m^2\right](1-z) + i\eta \\
&= Q^2 - m^2 - 2Q\cdot(P_1+P_2)(1-z) + (P_1+P_2)^2(1-z) + i\eta\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten dann für Gl. (8.33)

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_1 &= \frac{\lambda^2}{2}\,\mu^{2(4-d)}\int_0^1 \mathrm{d}z \\
&\times \int \frac{\mathrm{d}^dQ}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{\left[Q^2 - m^2 - 2Q\cdot(P_1+P_2)(1-z) + (P_1+P_2)^2(1-z) + i\eta\right]^2}\,.
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Zunächst würde man denken, dass man mit der Feynman–Formel (8.34) nichts gewonnen hat, im Gegenteil hat man ja nun ein zusätzliches Integral (das über z) zu lösen. Bei genauem Hinsehen sieht man, dass aber nun das Integral in Gl. (8.32) und in Gl. (8.35) vom selben Typ sind. Wir können nämlich beide (nach analytischer Fortsetzung) auf das Integral

$$I_{d,\alpha}(\bar{P}, M^2) \equiv \int \mathrm{d}^d\bar{Q}\,\frac{1}{(\bar{Q}^2 + 2\bar{P}\cdot\bar{Q} + M^2)^\alpha} \tag{8.36}$$

zurückführen, das in Gl. (8.32) für $\bar{P}^\mu = 0$, $M^2 = m^2$ und $\alpha = 1$ und das in Gl. (8.35) für $\bar{P}^\mu = -(1-z)(\bar{P}_1^\mu + \bar{P}_2^\mu)$, $M^2 = m^2 + (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2(1-z)$ und $\alpha = 2$.

Wir berechnen nun $I_{d,\alpha}(\bar{P}, M^2)$. Wir schreiben $\bar{Q}^2 + 2\bar{P}\cdot\bar{Q} = (\bar{Q} + \bar{P})^2 - \bar{P}^2$ und substituieren die Integrationsvariable $\bar{Q}^\mu \to \bar{Q}'^\mu \equiv \bar{Q}^\mu + \bar{P}^\mu$. In d–dimensionalen Kugelkoordinaten führt dies (nach Umbenennung $\bar{Q}' \to \bar{Q}$) zu

$$I_{d,\alpha}(\bar{P}, M^2) = \int \mathrm{d}\Omega_{\bar{Q}} \int_0^\infty \mathrm{d}\bar{Q}\,\frac{\bar{Q}^{d-1}}{(\bar{Q}^2 + M^2 - \bar{P}^2)^\alpha}\,. \tag{8.37}$$

Das d–dimensionale Raumwinkelintegral kann direkt ausgeführt werden,

$$\int \mathrm{d}\Omega_{\bar{Q}} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\,, \tag{8.38}$$

was identisch mit der **Oberfläche** der d–**dimensionalen Einheitskugel** ist. Damit ergibt sich

$$I_{d,\alpha}(\bar{P}, M^2) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty \mathrm{d}\bar{Q}\,\frac{\bar{Q}^{d-1}}{(\bar{Q}^2 + M^2 - \bar{P}^2)^\alpha}\,. \tag{8.39}$$

Nun erinnern wir uns an die **Eulersche Beta-Funktion**,

$$B(x,y) \equiv \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}}\,. \tag{8.40}$$

Mit den Substitutionen $s = N\,t$, $\beta = 2x - 1$ (also $x = (1+\beta)/2$), $\alpha = x + y$ (also $y = \alpha - x = \alpha - (1+\beta)/2$) können wir damit das folgende Integral berechnen,

$$\int_0^\infty \mathrm{d}s\,\frac{s^\beta}{(s^2 + N^2)^\alpha} = N^{1+\beta-2\alpha}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}} = \frac{1}{2(N^2)^{\alpha-(1+\beta)/2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\,\Gamma\left(\alpha - \frac{1+\beta}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\,. \tag{8.41}$$

Mit der Identifizierung $N^2 \equiv M^2 - \bar{P}^2$, $\beta = d-1$ wird dann Gl. (8.39) zu

$$I_{d,\alpha}(\bar{P}, M^2) = \pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2 - \bar{P}^2)^{\alpha - d/2}} \,. \tag{8.42}$$

Dieses Resultat wenden wir nun zur Berechnung der Integrale in den Glgen. (8.32) und (8.35) an. Mit $i\mathrm{d}^dQ \to -\mathrm{d}^d\bar{Q}$, $\bar{P}^\mu = 0$, $M^2 = m^2$ und $\alpha = 1$ erhalten wir für Gl. (8.32)

$$\begin{aligned} \delta m^2 &= \frac{\lambda}{2} \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} I_{d,1}(0, m^2) = \frac{\lambda}{2} \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1)} \frac{1}{(m^2)^{1-d/2}} \\ &= \frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} m^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{2-d/2} \,. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Mit $\mathrm{d}^dQ \to i\mathrm{d}^d\bar{Q}$, $\bar{P}^\mu = -(1-z)(\bar{P}_1^\mu + \bar{P}_2^\mu)$, $M^2 = m^2 + (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2(1-z)$ und $\alpha = 2$ erhalten für Gl. (8.35)

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1 &= i\frac{\lambda^2}{2} \frac{\mu^{2(4-d)}}{(2\pi)^d} \int_0^1 \mathrm{d}z\, I_{d,2}\left(-(1-z)(\bar{P}_1 + \bar{P}_2), m^2 + (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2(1-z)\right) \\ &= i\,\frac{\lambda^2}{2} \frac{\mu^{2(4-d)}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2)} \int_0^1 \mathrm{d}z \frac{1}{\left[m^2 + (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2(1-z) - (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2(1-z)^2\right]^{2-d/2}} \\ &= i\,\frac{\lambda^2}{2} \mu^{2(2-d/2)} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \mathrm{d}z \frac{\mu^{2(2-d/2)}}{\left[m^2 + z(1-z)(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2\right]^{2-d/2}} \\ &= i\,\frac{\lambda^2}{2} \mu^{2(2-d/2)} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \mathrm{d}z \left[\frac{m^2 - z(1-z)(P_1 + P_2)^2}{\mu^2}\right]^{d/2-2} \,, \end{aligned} \tag{8.44}$$

wobei wir im letzten Schritt die analytische Fortsetzung $P_i^\mu \to \bar{P}_i^\mu$ rückgängig gemacht haben, d.h. $(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2 \to -(P_1 + P_2)^2$.

Wir beweisen nun die Relation

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + O(\epsilon)\right] \,, \tag{8.45}$$

wobei $\epsilon \ll 1$ und

$$\psi(z) \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z} = \Gamma'(z)/\Gamma(z) \tag{8.46}$$

die **Eulersche ψ–Funktion** ist. Es gilt [22]

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \,, \quad \psi(1) = -\gamma \,, \tag{8.47}$$

mit der **Euler–Mascheroni–Konstante**

$$\gamma \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln n\right) \simeq 0.5772157 \,. \tag{8.48}$$

Zum Beweis von Gl. (8.45) benutzen wir zunächst die Relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ rekursiv,

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \Gamma(\epsilon)\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{-r+\epsilon} = \frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(\epsilon)\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{1-\epsilon/r}\,. \tag{8.49}$$

Wir berechnen nun $\Gamma(\epsilon)$ und den letzten Term separat. Eine Taylor–Entwicklung ergibt

$$\Gamma(1+\epsilon) = \Gamma(1) + \epsilon\,\Gamma'(1) + O(\epsilon^2) = 1 + \epsilon\,\Gamma(1)\psi(1) + O(\epsilon^2) = 1 - \epsilon\,\gamma + O(\epsilon^2)\,, \tag{8.50}$$

wobei wir die Glgen. (8.46) und (8.47) benutzt haben. Also ist

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\,\Gamma(1+\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)\,. \tag{8.51}$$

Aufgrund des Terms $\sim 1/\epsilon$ müssen wir das Produkt in Gl. (8.49) bis zur Ordnung $O(\epsilon)$ in eine Taylor–Reihe entwickeln, um alle im Limes $\epsilon \to 0$ endlichen Terme in Gl. (8.49) zu berücksichtigen. Mit der Definition der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{1-\epsilon/r} = \prod_{r=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\epsilon}{r}\right)^m = \prod_{r=1}^{n}\left(1+\frac{\epsilon}{r}\right) + O(\epsilon^2) = 1 + \epsilon\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} + O(\epsilon^2) \tag{8.52}$$

Setzen wir dieses Resultat sowie Gl. (8.51) in Gl. (8.49) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma(-n+\epsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)\right)\left(1 + \epsilon\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} + O(\epsilon^2)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} + O(\epsilon)\right)\,.\end{aligned} \tag{8.53}$$

Mit Gl. (8.47) ergibt dies Gl. (8.45), q.e.d.

Setzen wir

$$\epsilon \equiv 4 - d \quad\Longrightarrow\quad d = 4 - \epsilon\,,\quad \frac{d}{2} = 2 - \frac{\epsilon}{2}\,,\quad 2 - \frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2}\,, \tag{8.54}$$

so folgt

$$\begin{aligned}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) &= \Gamma\left(-1+\frac{\epsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\epsilon} + \gamma - 1 + O(\epsilon)\,,\\ \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)\,.\end{aligned} \tag{8.55}$$

Damit haben wir für Gl. (8.43)

$$\delta m^2 = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2}\left[-\frac{2}{\epsilon} + \gamma - 1 + O(\epsilon)\right] m^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\epsilon/2}\,. \tag{8.56}$$

Mit

$$x^\epsilon = e^{\epsilon\ln x} = 1 + \epsilon\,\ln x + O(\epsilon^2) \tag{8.57}$$

wird dies zu

$$
\begin{aligned}
\delta m^2 &= \frac{\lambda\, m^2}{32\pi^2}\left[-\frac{2}{\epsilon}+\gamma-1+O(\epsilon)\right]\left[1+\frac{\epsilon}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+O(\epsilon^2)\right] \\
&= \frac{\lambda\, m^2}{32\pi^2}\left[-\frac{2}{\epsilon}-\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}+\gamma-1+O(\epsilon)\right] \\
&= -\frac{\lambda\, m^2}{16\pi^2\,\epsilon}-\frac{\lambda\, m^2}{32\pi^2}\,\ln\frac{4\pi\mu^2\, e}{m^2\, e^{\gamma}}+O(\epsilon)\ . \qquad (8.58)
\end{aligned}
$$

Der erste Term wird im Limes $\epsilon \to 0$ (also $d \to 4$) unendlich, während der zweite Term eine endliche Korrektur zu m^2 darstellt.

Ganz ähnlich berechnen wir Gl. (8.44),

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}_1 &= i\,\frac{\lambda^2}{2}\,\mu^{\epsilon}\,\frac{\frac{2}{\epsilon}-\gamma+O(\epsilon)}{(4\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{d}z\,\left[\frac{m^2-z(1-z)(P_1+P_2)^2}{4\pi\mu^2}\right]^{-\epsilon/2} \\
&= i\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\,\mu^{\epsilon}\left[\frac{2}{\epsilon}-\gamma+O(\epsilon)\right]\int_0^1 \mathrm{d}z\,\left[1-\frac{\epsilon}{2}\,\ln\frac{m^2-z(1-z)(P_1+P_2)^2}{4\pi\mu^2}+O(\epsilon^2)\right] \\
&= i\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\,\mu^{\epsilon}\left[\frac{2}{\epsilon}-\gamma-\int_0^1 \mathrm{d}z\,\ln\frac{m^2-z(1-z)(P_1+P_2)^2}{4\pi\mu^2}+O(\epsilon)\right] \\
&\equiv i\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\,\mu^{\epsilon}\left[\frac{2}{\epsilon}-\gamma-F(s,m,\mu)+O(\epsilon)\right] \\
&= i\frac{\lambda^2}{16\pi^2\,\epsilon}\,\mu^{\epsilon}-i\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\,\mu^{\epsilon}\,[\gamma+F(s,m,\mu)]+O(\epsilon)\ , \qquad (8.59)
\end{aligned}
$$

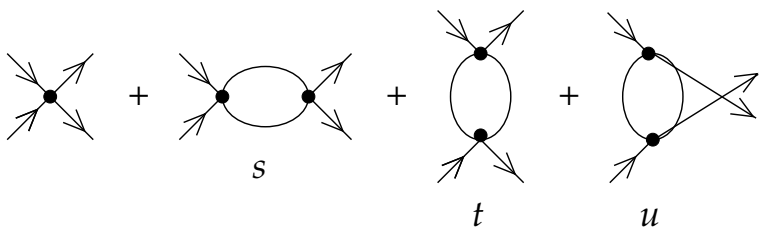
wobei wir die (endliche) Funktion

$$
F(s,m,\mu)\equiv\int_0^1 \mathrm{d}z\,\ln\frac{m^2-z(1-z)s}{4\pi\mu^2}\ ,\quad s\equiv(P_1+P_2)^2\ , \qquad (8.60)
$$

definiert haben. Die (quadratische) **renormierte Masse** ist bis zur Ein-Schleifen-Ordnung

$$
m_r^2 = m^2+\delta m^2 = m^2\left(1-\frac{\lambda}{16\pi^2\,\epsilon}-\frac{\lambda}{32\pi^2}\,\ln\frac{4\pi\mu^2\, e}{m^2\, e^{\gamma}}\right)\ , \qquad (8.61)
$$

und die **volle** Streuamplitude bis zur Ein-Schleifen-Ordnung ist

$\mathcal{M} =$ 

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda\,\mu^{\epsilon}+\mathcal{M}_1(s)+\mathcal{M}_1(t)+\mathcal{M}_1(u) \qquad (8.62) \\
&= -\lambda\,\mu^{\epsilon}+\frac{3\lambda^2\,\mu^{\epsilon}}{16\pi^2\,\epsilon}-\frac{\lambda^2\,\mu^{\epsilon}}{32\pi^2}\,[3\gamma+F(s,m,\mu)+F(t,m,\mu)+F(u,m,\mu)] \\
&= -\lambda\,\mu^{\epsilon}\left\{1-\frac{3\lambda}{16\pi^2\,\epsilon}+\frac{\lambda}{32\pi^2}\,[3\gamma+F(s,m,\mu)+F(t,m,\mu)+F(u,m,\mu)]\right\}\ .
\end{aligned}
$$

Sowohl m_r^2 als auch $\mathcal{M}$ divergieren wie $1/\epsilon$ im Limes $\epsilon \to 0$. Beide Größen sollten jedoch endlich sein, um physikalisch sinnvolle Resultate zu liefern. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, wie man dies erreichen kann.

7.7.2021

8.3 Renormierung der ϕ^4–Theorie

In Gl. (8.61) haben wir die **renormierte** Masse (bis zur Ein-Schleifen-Ordnung) definiert. Diese scheint $\sim 1/\epsilon$ für $\epsilon \to 0$, bzw. für $d \to 4$, zu divergieren und kann daher eigentlich nicht der physikalischen Masse der skalaren Teilchen entsprechen. Es gibt jedoch einen Ausweg aus diesem Dilemma, nämlich indem wir annehmen, dass die **nackte** Masse m^2 ebenfalls divergiert und zwar in der Weise, dass sich die Divergenz in m^2 mit der $\sim 1/\epsilon$ **exakt aufhebt**. In diesem Fall ist die renormierte Masse m_r^2 **identisch** mit der **physikalischen Masse** der Teilchen.

Um diese Idee zu formalisieren, lösen wir Gl. (8.61) nach m^2 auf,

$$\begin{aligned} m^2 &= m_r^2 + \frac{\lambda\, m^2}{16\pi^2\,\epsilon} + \frac{\lambda\, m^2}{32\pi^2}\,\ln\frac{4\pi\mu^2\, e}{m^2\, e^\gamma} \\ &= m_r^2 + \frac{\lambda\, m_r^2}{16\pi^2\,\epsilon} + \frac{\lambda\, m_r^2}{32\pi^2}\,\ln\frac{4\pi\mu^2\, e}{m_r^2\, e^\gamma} + O(\lambda^2)\,. \end{aligned} \tag{8.63}$$

Hier haben wir im zweiten Schritt iterativ auf der rechten Seite m^2 durch m_r^2 ersetzt. Die Korrekturen sind dabei von der Ordnung $O(\lambda^2)$ (auch im Term mit dem Logarithmus, da $\lambda \ln(1+\lambda) \simeq \lambda^2 + O(\lambda^3)$), die wir aber hier bis zur Ein-Schleifen-Ordnung generell nicht betrachten.

Die weiteren Betrachtungen vereinfachen sich, wenn wir den bis jetzt beliebigen Parameter μ^2 so wählen, dass der Logarithmus verschwindet,

$$\mu^2 = \frac{m_r^2\, e^\gamma}{4\pi\, e}\,. \tag{8.64}$$

Diese Wahl nennt man das **minimale Subtraktionsschema (MS-Schema)**. Für das folgende ist dies aber unerheblich, wir hätten auch eine andere Wahl treffen können. Im MS-Schema lautet Gl. (8.63)

$$m^2 = m_r^2\left(1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\,\epsilon}\right) + O(\lambda^2)\,. \tag{8.65}$$

Die Divergenz $\sim 1/\epsilon$ auf der rechten Seite entspricht, zumindest bis zur Ordnung $O(\lambda^2)$, bis zu der wir diese Betrachtung machen, der Divergenz der nackten Masse. Oder mit anderen Worten, wenn wir Gl. (8.65) nach m_r^2 auflösen, heben sich diese Divergenzen bis zur Ordnung $O(\lambda^2)$ exakt gegeneinander auf,

$$\begin{aligned} m_r^2 &= \frac{m^2}{1+\frac{\lambda}{16\pi^2\,\epsilon}} + O(\lambda^2) = m^2\left(1 - \frac{\lambda}{16\pi^2\,\epsilon}\right) + O(\lambda^2) \\ &= m_r^2\left(1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\,\epsilon}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{16\pi^2\,\epsilon}\right) + O(\lambda^2) \\ &= m_r^2 + O(\lambda^2)\,. \end{aligned} \tag{8.66}$$

Man beachte, dass der Term $\sim (\lambda/\epsilon)^2$ von der Ordnung $O(\lambda^2)$ ist, also zu den in dieser Rechnung (die bis zur Ordnung $O(\lambda)$ durchgeführt wurde) nicht betrachteten Termen gehört. Er muss sich natürlich bei der Definition der renormierten Masse in nächsthöherer Ordnung wegheben, so dass die **renormierte, physikalische Masse** m_r^2 stets **endlich** bleibt.

Dieselbe Prozedur kann man auch auf die Streuamplitude (8.62) anwenden. Wir definieren die **renormierte Kopplungskonstante**

$$\lambda_r = \lambda \left\{ 1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2\,\epsilon} + \frac{3\lambda}{32\pi^2}\left[\gamma + F(0,m,\mu)\right] \right\} . \tag{8.67}$$

Hier haben wir als **Renormierungspunkt** $s = t = u = 0$ gewählt. Dies ist aber lediglich eine Möglichkeit, man kann auch eine andere Wahl treffen. Wir lösen diese Gleichung nach λ auf und setzen den entsprechenden Ausdruck im Sinne einer iterativen Lösung wieder auf der rechten Seite ein,

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_r + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2\,\epsilon} - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\left[\gamma + F(0,m,\mu)\right] \\ &= \lambda_r + \frac{3\lambda_r^2}{16\pi^2\,\epsilon} - \frac{3\lambda_r^2}{32\pi^2}\left[\gamma + F(0,m,\mu)\right] + O(\lambda_r^3) . \end{aligned} \tag{8.68}$$

Die **nackte Kopplungskonstante** λ **divergiert**, und zwar in einer solchen Weise, dass die Divergenz diejenige auf der rechten Seite in Gl. (8.67) exakt aufhebt, so dass die **renormierte Kopplungskonstante endlich** bleibt, zumindest bis zur betrachteten störungstheoretischen Ordnung. Wir überprüfen dies, indem wir Gl. (8.68) in Gl. (8.67) einsetzen,

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \lambda_r \left\{ 1 + \frac{3\lambda_r}{16\pi^2\,\epsilon} - \frac{3\lambda_r}{32\pi^2}\left[\gamma + F(0,m,\mu)\right] + O(\lambda_r^2) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2\,\epsilon} + \frac{3\lambda}{32\pi^2}\left[\gamma + F(0,m,\mu)\right] \right\} \\ &= \lambda_r \left\{ 1 + \frac{3\lambda_r}{16\pi^2\,\epsilon} - \frac{3\lambda_r}{32\pi^2}\left[\gamma + F(0,m,\mu)\right] + O(\lambda_r^2) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{3\lambda_r}{16\pi^2\,\epsilon} + \frac{3\lambda_r}{32\pi^2}\left[\gamma + F(0,m,\mu)\right] + O(\lambda_r^2) \right\} \\ &= \lambda_r[1 + O(\lambda_r^2)] . \end{aligned} \tag{8.69}$$

Hier haben wir im zweiten Schritt in der zweiten geschweiften Klammer Gl. (8.68) eingesetzt. Terme $\sim \lambda_r^2/\epsilon^2$ und $\sim \lambda_r^2/\epsilon$ sind formal von der Ordnung $O(\lambda_r^2)$ und werden hier nicht weiter betrachtet. Sie müssen sich dann in der nächsthöheren Ordnung in Störungstheorie gegen entsprechende Terme wegheben. Gleichung (8.69) ist das gewünschte, aber auch erwartete Ergebnis: bis zur Ordnung $O(\lambda_r^3)$ heben sich alle Divergenzen weg und die renormierte Kopplungskonstante ist endlich.

Fassen wir das bisher Gesagte kurz zusammen: wir haben gesehen, dass Schleifen-Diagramme UV–Divergenzen besitzen, die man dadurch entfernen kann, dass man annimmt, dass die **nackte** Masse m^2 und die **nackte** Kopplungskonstante λ in der Weise

divergieren, dass sie die o.g. UV–Divergenzen wegheben. Dies bedeutet aber im Gegenzug, dass die Lagrange–Dichte der Theorie **nicht mehr wohldefiniert** ist, da sie unendlich große Parameter enthält.

Dieses Problem läßt sich nun folgendermaßen beheben. Wir beginnen mit der Definition einer **wohldefinierten** Lagrange–Dichte $\mathcal{L}_r$ für das **renormierte, physikalische** Feld ϕ_r, in der lediglich **renormierte, physikalische** Parameter m_r^2, λ_r auftreten, z.B.

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{m_r^2}{2}\,\phi_r^2 - \frac{\lambda_r\mu^\epsilon}{4!}\,\phi_r^4\,. \tag{8.70}$$

Im nächsten Schritt addieren wir sog. **Gegen-Terme** (engl. *counter terms*), die die Divergenzen der nackten Parameter enthalten. Diese Gegen-Terme werden als **neue Wechselwirkungsterme** interpretiert. So addieren wir für die Divergenz der nackten Masse den Term

$$\delta\mathcal{L}_1 = \frac{\delta m^2}{2}\,\phi_r^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\,\epsilon}\,\phi_r^2\,, \tag{8.71}$$

wobei wir im zweiten Schritt angenommen haben, im MS–Schema zu renormieren, und gegenüber Gl. (8.65) die nackte Kopplungskonstante λ durch die renormierte Kopplung λ_r ersetzt haben, was bis zur Ordnung $O(\lambda_r)$ gestattet ist, vgl. Gl. (8.68) . Ganz analog berücksichtigen wir die Divergenz der nackten Kopplungskonstanten, indem wir folgenden Term zur Lagrange–Dichte (8.70) addieren,

$$\delta\mathcal{L}_2 = -\frac{\lambda_r\,\mu^\epsilon}{4!}\,\frac{3\lambda_r}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - F(0,m,\mu)\right]\,\phi_r^4 \equiv -\frac{B\lambda_r\mu^\epsilon}{4!}\,\phi_r^4\,. \tag{8.72}$$

Im allgemeinen braucht man noch einen weiteren Gegen-Term, der die Form des kinetischen Terms in der Lagrange–Dichte (8.70) hat,

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{A}{2}\,\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r\,. \tag{8.73}$$

Bis zur Ordnung $O(\lambda_r)$ ist $A \equiv 0$, weshalb wir von der Existenz dieses Terms bislang nichts ahnen konnten. In der Ordnung $O(\lambda_r^2)$ tritt allerdings ein nichtverschwindender Beitrag auf, der von dem in Abb. 8.4 dargestellten Zwei-Schleifen-Diagramm herrührt, das in der Zwei-Punkt-Funktion der Theorie vorkommt.

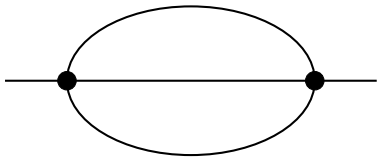


Abbildung 8.4: Zwei-Schleifen-Diagramm, das zur Konstanten A beiträgt.

Die Lagrange–Dichte (8.70) plus die drei Gegen-Terme (8.71), (8.72) und (8.73) lauten

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_r + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 + \delta\mathcal{L}_3 \\ &= \frac{1}{2}\,(1+A)\,\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{m_r^2 - \delta m^2}{2}\,\phi_r^2 - \frac{\lambda_r\,\mu^\epsilon}{4!}\,(1+B)\,\phi_r^4\,.\end{aligned} \tag{8.74}$$

Nun definieren wir die **Wellenfunktions-Renormierungskonstante**

$$Z_\phi \equiv 1 + A \ , \tag{8.75}$$

die **Massen-Renormierungskonstante**

$$Z_m^2 \equiv \frac{m_r^2 - \delta m^2}{m_r^2(1+A)} = \left(1 - \frac{\delta m^2}{m_r^2}\right) \frac{1}{Z_\phi} \ , \tag{8.76}$$

und die **Kopplungskonstanten-Renormierungskonstante**

$$Z_\lambda = \frac{1+B}{(1+A)^2} = \frac{1+B}{Z_\phi^2} \ . \tag{8.77}$$

Die Beziehung zwischen **nacktem** Feld ϕ und **renormiertem** Feld ϕ_r lautet

$$\phi = \sqrt{Z_\phi}\, \phi_r \ , \tag{8.78}$$

die zwischen **nackter** und **renormierter Masse**

$$m = Z_m\, m_r \ , \tag{8.79}$$

und die zwischen **nackter** und **renormierter Kopplungskonstante**

$$\lambda = Z_\lambda\, \lambda_r\, \mu^\epsilon \ . \tag{8.80}$$

Man beachte, dass die Divergenzen der Theorie in den Renormierungskonstanten Z_ϕ, Z_m und Z_λ auftreten. Die Lagrange–Dichte (8.74) lautet nun

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{Z_\phi}{2}\, \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r - \frac{m_r^2}{2} Z_m^2 Z_\phi\, \phi_r^2 - \frac{\lambda_r\, \mu^\epsilon}{4!}\, Z_\lambda Z_\phi^2\, \phi_r^4 \\ &= \frac{1}{2}\, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\, \phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\, \phi^4 \ , \end{aligned} \tag{8.81}$$

wobei wir die Glgen. (8.78), (8.79) und (8.80) benutzt haben. Dies ist in der Tat unsere ursprüngliche Lagrange–Dichte mit nackten Parametern und Feldern. Man beachte, dass unsere Definition (8.80) der nackten Kopplungskonstanten dimensionsbehaftet ist, d.h. sie enthält den Faktor μ^ϵ.

In einer störungstheoretischen Rechnung berechnet man alle Diagramme bis zu einer gegebenen Ordnung in λ_r. Dabei betrachtet man die Gegen-Terme (8.71), (8.72) und (8.73) ebenfalls als Wechselwirkungsterme, wobei die Gegen-Terme (8.71) und (8.72) von der Ordnung $O(\lambda_r)$ sind und der Gegen-Term (8.73) von der Ordnung $O(\lambda_r^2)$ ist. Diese Gegen-Terme heben nun systematisch alle Divergenzen von Schleifen-Diagrammen in derselben Ordnung von λ_r auf, sofern man letztere mit den endlichen, renormierten Parametern m_r, λ_r der Lagrange–Dichte berechnet.

8.4 Die Renormierungsgruppe

Berechnen wir physikalische Größen in der **renormierten** Theorie, so hängen diese von der **Renormierungsskala** μ ab, die wir willkürlich im Zuge der (dimensionalen) Regularisierung eingeführt hatten. Dagegen hängen **unrenormierte** Größen **nicht** von μ ab.

Betrachten wir konkret die renormierte und die unrenormierte n–**Punkt-Vertex-Funktion** $\Gamma_r^{(n)}$ bzw. $\Gamma^{(n)}$. Da die unrenormierte Vertex-Funktion nicht von der Renormierungsskala μ abhängt, ist sie **invariant** unter einer sog. **Skalentransformation**

$$\mu \longrightarrow e^s \mu \quad \Leftrightarrow \quad \ln \mu \longrightarrow \ln \mu + s \; . \tag{8.82}$$

Solche Skalentransformationen bilden eine Gruppe, die sog. **Renormierungsgruppe**.

Invarianz einer physikalischen Größe unter Skalentransformationen bedeutet im allgemeinen, dass sie nicht vom Parameter μ abhängen darf, oder mit anderen Worten, dass ihre (logarithmische) Ableitung bzgl. μ verschwinden muss. Für die unrenormierte n–Punkt-Vertex-Funktion lautet diese Bedingung dann

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma^{(n)} = \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial \ln \mu} \; . \tag{8.83}$$

Wie lautet nun der Zusammenhang zwischen der unrenormierten Vertex-Funktion $\Gamma^{(n)}$ und der renormierten Vertex-Funktion $\Gamma_r^{(n)}$? Eine n–Punkt-Vertex-Funktion hängt von den Impulsen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ab, die in den Vertex hinein- bzw. hinauslaufen, s. Abb. 8.5. Dies gilt sowohl für $\Gamma^{(n)}$ als auch für $\Gamma_r(n)$.

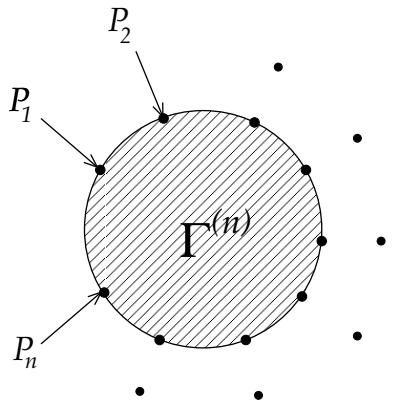


Abbildung 8.5: Die n–Punkt-Vertex-Funktion $\Gamma^{(n)}$ mit den in sie hineinlaufenden Impulsen $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Desweiteren hängt sie von den Parametern der Theorie ab, also den Massen und Kopplungskonstanten. Dabei hängt $\Gamma^{(n)}$ von den **unrenormierten, nackten** Parametern m, λ und $\Gamma_r^{(n)}$ von den **renormierten, physikalischen** Parametern m_r, λ_r ab. Außerdem hängt $\Gamma_r^{(n)}$ auch noch von der Renormierungsskala μ ab,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)} &= \Gamma^{(n)}\left(\{P_i\}, \lambda, m\right) \; , \\ \Gamma_r^{(n)} &= \Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\}, \lambda_r, m_r, \mu\right) \; . \end{aligned} \tag{8.84}$$

Wir hatten im letzten Abschnitt gesehen, dass die **renormierte Lagrange–Dichte $\mathcal{L}_r$, plus Gegen-Terme**, identisch mit der **unrenormierten Lagrange–Dichte $\mathcal{L}$** ist. Dies bedeutet, dass die **erzeugenden Funktionale für Vertex-Funktionen** in beiden Theorien identisch sein müssen,

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int \mathrm{d}^4X\, J(X)\phi(X) \;\equiv\; \Gamma_r[\phi_r] = W_r[J] - \int \mathrm{d}^4X\, J(X)\phi_r(X)\;, \tag{8.85}$$

wobei

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(X)} = \phi(X)\;, \quad \frac{\delta W_r[J]}{\delta J(X)} = \phi_r(X)\;. \tag{8.86}$$

Für die renormierte n–Punkt-Vertex-Funktion gilt dann mit den Glgen. (8.78) und (8.85)

$$\begin{aligned} \Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\}, \lambda_r, m_r, \mu\right) &\equiv \frac{\delta^n \Gamma_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(P_1)\cdots\delta\phi_r(P_n)} = \frac{\delta^n\Gamma[\phi]}{\delta\phi(P_1)\cdots\delta\phi(P_n)}\, Z_\phi^{n/2} \\ &\equiv Z_\phi^{n/2}\,\Gamma^{(n)}\left(\{P_i\}, \lambda, m\right)\;, \end{aligned} \tag{8.87}$$

bzw.

$$\Gamma^{(n)}\left(\{P_i\}, \lambda, m\right) = Z_\phi^{-n/2}\,\Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\}, \lambda_r, m_r, \mu\right)\;. \tag{8.88}$$

Leiten wir diese Gleichung auf beiden Seiten nach μ ab und multiplizieren mit $Z_\phi^{n/2}\mu$, so folgt mit Gl. (8.83)

$$\left[-\frac{n}{2}\,\mu\,\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial\mu} + \mu\,\frac{\partial\lambda_r}{\partial\mu}\,\frac{\partial}{\partial\lambda_r} + \mu\,\frac{\partial m_r}{\partial\mu}\,\frac{\partial}{\partial m_r} + \mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\Gamma_r^{(n)} = Z_\phi^{n/2}\,\mu\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\mu} \equiv 0\;. \tag{8.89}$$

Hierbei haben wir die Kettenregel angewendet, unter Beachtung der Tatsache, dass die Wellenfunktions-Renormierungskonstante Z_ϕ, sowie die renormierten Parameter λ_r und m_r von der Renormierungsskala μ abhängen,

$$Z_\phi = Z_\phi(\mu)\;, \quad \lambda_r = \lambda_r(\mu)\;, \quad m_r = m_r(\mu)\;. \tag{8.90}$$

Nun definieren wir die sog. **$\boldsymbol{\beta}$–Funktion**

$$\beta(\lambda_r) \equiv \mu\,\frac{\partial\lambda_r}{\partial\mu}\;, \tag{8.91}$$

welche eine Aussage darüber trifft, wie sich die renormierte Kopplungskonstante λ_r mit der Renormierungsskala μ ändert, sowie die Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda_r) &= \frac{\mu}{2}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\,\ln Z_\phi = \mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\,\ln\sqrt{Z_\phi}\;, \\ m_r\,\gamma_m(\lambda_r) &= \mu\,\frac{\partial m_r}{\partial\mu}\;. \end{aligned} \tag{8.92}$$

Setzen wir die Glgen. (8.91) und (8.92) in Gl. (8.89) ein, so erhalten wir die sog. **Renormierungsgruppengleichung**

$$0 = \left[\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda_r)\,\frac{\partial}{\partial\lambda_r} - n\,\gamma(\lambda_r) + m_r\,\gamma_m(\lambda_r)\,\frac{\partial}{\partial m_r}\right]\Gamma_r^{(n)}\;. \tag{8.93}$$

Sei nun D die kanonische Dimension von $\Gamma_r^{(n)}$,

$$\left[\Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right)\right] = \Lambda^D \ . \tag{8.94}$$

Wir betrachten die **Skalentransformation**

$$P_i \longrightarrow t\,P_i \ , \quad m_r \longrightarrow t\,m_r \ , \quad \mu \longrightarrow t\,\mu \ , \tag{8.95}$$

d.h. **alle** Größen mit der Dimension Λ werden mit einem Faktor t multipliziert. Aufgrund von Gl. (8.94) gilt

$$\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right) = t^D\,\Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\},\lambda_r,\frac{m_r}{t},\frac{\mu}{t}\right) \ , \tag{8.96}$$

oder (logarithmisch) nach t abgeleitet,

$$\begin{aligned}
&t\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right)\\
&= \left[D + t\,\frac{\partial(m_r/t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial(m_r/t)} + t\,\frac{\partial(\mu/t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial(\mu/t)}\right] t^D\Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\},\lambda_r,\frac{m_r}{t},\frac{\mu}{t}\right)\\
&= \left[D + t\left(-\frac{m_r}{t^2}\right)\,t\,\frac{\partial}{\partial m_r} + t\left(-\frac{\mu}{t^2}\right)\,t\,\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\Gamma_r^{(n)}\left(\{tP_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right)\\
&= \left(D - m_r\,\frac{\partial}{\partial m_r} - \mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right) \ ,
\end{aligned} \tag{8.97}$$

wobei wir zum vorletzten Schritt wieder Gl. (8.96) benutzt haben, was uns erlaubt, bei der Differentiation nach m_r/t und μ/t den Skalenfaktor t konstant zu halten. Umgestellt lautet Gl. (8.97)

$$\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right) = \left(-t\,\frac{\partial}{\partial t} - m_r\,\frac{\partial}{\partial m_r} + D\right)\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right) \ . \tag{8.98}$$

Kombinieren wir dieses Resultat mit der Renormierungsgruppengleichung (8.93), so erhalten wir

$$0 = \left\{-t\,\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda_r)\,\frac{\partial}{\partial\lambda_r} - n\,\gamma(\lambda_r) + m_r\left[\gamma_m(\lambda_r) - 1\right]\,\frac{\partial}{\partial m_r} + D\right\}\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right) \ . \tag{8.99}$$

Falls die Funktionen $\beta(\lambda_r) = \gamma(\lambda_r) = 0$, $\gamma_m(\lambda_r) = 1$ (was $\partial m_r/\partial\mu = m_r/\mu$ oder $m_r \sim \mu$ bedeutet), so ist die Skalenänderung von $\Gamma_r^{(n)}$ durch die kanonische Dimension D gegeben,

$$t\,\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_r^{(n)} = D\,\Gamma_r^{(n)} \ . \tag{8.100}$$

Nicht-triviale Funktionen $\beta(\lambda_r) \neq 0$, $\gamma(\lambda_r) \neq 0$, $\gamma_m(\lambda_r) \neq 1$ führen zu einem anderen Skalenverhalten, zu sog. **anomalen Dimensionen**. 9.7.2021

Wir lösen jetzt Gl. (8.99). Diese Gleichung bedeutet, dass eine **Skalenänderung** um einen Faktor t durch entsprechende Änderungen von λ_r, m_r, sowie einen multiplikativen Faktor **kompensiert wird**. Also muss es Funktionen $\lambda_r(t)$, $m_r(t)$ und $f(t)$ geben, so dass

$$\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right) = f(t)\,\Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\},\lambda_r(t),m_r(t),\mu\right) \ , \tag{8.101}$$

was differenziert nach t auf folgende Bedingung führt,

$$\begin{aligned}
&t\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right)\\
&=\left\{t\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+tf(t)\left[\frac{\partial\lambda_r(t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\lambda_r(t)}+\frac{\partial m_r(t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial m_r(t)}\right]\right\}\Gamma_r^{(n)}\left(\{P_i\},\lambda_r(t),m_r(t),\mu\right)\\
&=\left\{t\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+tf(t)\left[\frac{\partial\lambda_r(t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\lambda_r(t)}+\frac{\partial m_r(t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial m_r(t)}\right]\right\}\frac{\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right)}{f(t)}\,,
\end{aligned}\tag{8.102}$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (8.101) benutzt haben. Umgestellt lautet diese Gleichung

$$\left[-t\,\frac{\partial}{\partial t}+\frac{t}{f(t)}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+t\,\frac{\partial\lambda_r(t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\lambda_r(t)}+t\,\frac{\partial m_r(t)}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial m_r(t)}\right]\Gamma_r^{(n)}\left(\{t\,P_i\},\lambda_r,m_r,\mu\right)=0\,.\tag{8.103}$$

Vergleichen wir dies mit Gl. (8.99), so erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$t\,\frac{\partial\lambda_r(t)}{\partial t}=\beta(\lambda_r)\,,\tag{8.104}$$

$$t\,\frac{\partial m_r(t)}{\partial t}=m_r\left[\gamma_m(\lambda_r)-1\right]\,,\tag{8.105}$$

$$\frac{t}{f(t)}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=D-n\,\gamma(\lambda_r)\,.\tag{8.106}$$

Diee Lösung der Gl. (8.104) bestimmt die sog. **laufende Kopplungskonstante** (engl. *running coupling constant*) $\lambda_r(t)$ der Theorie. Die Lösung von Gl. (8.105) bestimmt die **laufende Masse** $m_r(t)$. Die Lösung von Gl. (8.106) ist

$$f(t)=t^D\,\exp\left[-\int_1^t\mathrm{d}t'\,\frac{n\,\gamma(\lambda_r(t'))}{t'}\right]\,,\tag{8.107}$$

denn

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}&=\left[Dt^{D-1}-t^D\,\frac{n\,\gamma(\lambda_r(t))}{t}\right]\frac{f(t)}{t^D}=\left[D-n\,\gamma(\lambda_r(t))\right]\frac{f(t)}{t}\\
\Longleftrightarrow\quad\frac{t}{f(t)}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}&=D-n\,\gamma(\lambda_r(t))\,,\quad\text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Der Exponent in Gl. (8.107) stellt eine der oben schon erwähnten **anomalen Dimensionen** dar.

Wie sieht die β–Funktion aus? Es ist klar, dass sie für verschwindende Kopplungskonstante λ_r ebenfalls verschwindet, denn wenn die Kopplung gegen null geht, dann geht auch ihre Änderung gegen null,

$$\lim_{\lambda_r\to 0}\beta(\lambda_r)=0\,.\tag{8.108}$$

Die Werte für die Kopplungskonstante, bei denen die β–Funktion verschwindet, nennt man **Fixpunkte**, denn offenbar ändert sich hier die Kopplung nicht mehr, wenn sich die Skala t ändert, vgl. Gl. (8.104). In Störungstheorie erwarten wir, dass die β–Funktion

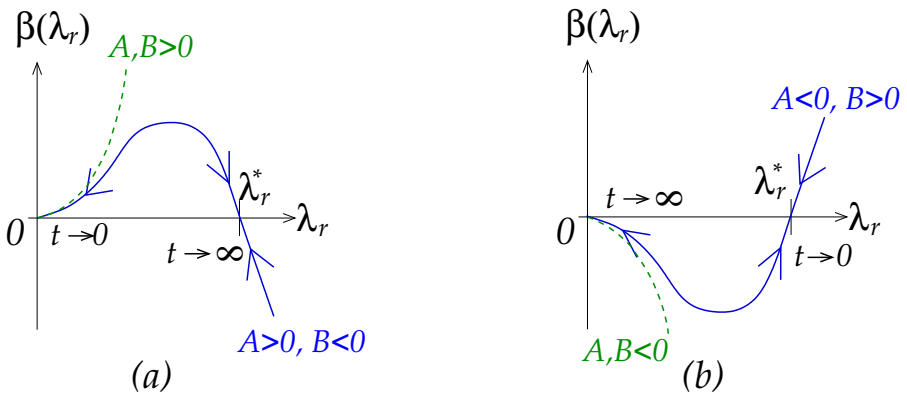


Abbildung 8.6: Szenarien für den Verlauf der β–Funktion.

als Polynom in der Kopplung λ_r darstellbar ist. Wir beschränken uns im folgenden auf die beiden niedrigsten nicht-trivialen Potenzen von λ_r. Ein möglicher konstanter Term kann aufgrund von Gl. (8.108) nicht existieren und, wie wir weiter unten (in Gl. (8.114)) zumindest für die ϕ^4–Theorie sehen werden, ist der erste nicht-triviale Term von der Ordnung $O(\lambda_r^2)$. Also lautet der Ansatz für die β–Funktion

$$\beta(\lambda_r) = A\lambda_r^2 + B\lambda_r^3 + O(\lambda_r^4) \; . \tag{8.109}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

(a) A, $B > 0$: Die β–Funktion ist stets positiv, $\beta(\lambda_r) > 0$, s. die grün-gestrichelte Linie in Abb. 8.6 (a). Die Kopplung λ_r nimmt also mit wachsender Skala, $t \to \infty$, zu oder mit fallender Skala, $t \to 0$, ab. Während die Kopplung für wachsende Skala dann gegen unendlich strebt, handelt es sich beim Ursprung $\lambda_r = 0$, also der einzigen Nullstelle der β–Funktion, um einen **IR–stabilen Fixpunkt**, d.h. die Kopplung ändert sich nicht mehr, wenn die Skala $t \to 0$ geht. Der Wert der Kopplung am IR–stabilen Fixpunkt ist $\lambda_r = 0$, die Theorie wird also im IR zu einer **nichtwechselwirkenden, freien** Theorie.

(b) $A > 0$, $B < 0$: Die β–Funktion verhält sich wie die blaue Linie in Abb. 8.6 (a). Wie beim vorangegangenen Fall gibt es den IR–stabilen Fixpunkt $\lambda_r = 0$. Zusätzlich gibt es jedoch einen weiteren Fixpunkt bei einer endlichen, nichtverschwindenden Kopplung λ_r^*. Nehmen wir an, dass wir uns in der Nähe dieses Fixpunktes befinden. Wir lassen nun die Skala $t \to \infty$ gehen.

1. Für $\lambda_r < \lambda_r^*$ ist $\beta(\lambda_r) > 0$. Dies bedeutet nach Gl. (8.104), dass die Kopplung λ_r bei wachsender Skala anwächst und von unten gegen λ_r^* strebt.

2. Für $\lambda_r > \lambda_r^*$ ist $\beta(\lambda_r) < 0$. Dies bedeutet nach Gl. (8.104), dass die Kopplung λ_r bei wachsender Skala abfällt und von oben gegen λ_r^* strebt.

In beiden Fällen strebt die Kopplung für $t \to \infty$ gegen λ_r^*. Es handelt sich bei λ_r^* um einen sog. **UV–stabilen Fixpunkt**.

(c) $A, B < 0$: Die β–Funktion ist stets negativ, $\beta(\lambda_r) < 0$, s. die grün-gestrichelte Linie in Abb. 8.6 (b). Die Kopplung λ_r nimmt also mit wachsender Skala, $t \to \infty$, ab oder mit fallender Skala, $t \to 0$, zu. Während die Kopplung für fallende Skala dann gegen unendlich strebt, handelt es sich beim Ursprung $\lambda_r = 0$ um einen **UV–stabilen Fixpunkt**, d.h. die Kopplung ändert sich nicht mehr, wenn die Skala $t \to \infty$ geht. Der Wert der Kopplung am UV–stabilen Fixpunkt ist $\lambda_r = 0$, die Theorie wird also im UV zu einer **nichtwechselwirkenden, freien** Theorie. Theorien, deren Kopplung im UV verschwinden, nennt man **asymptotisch frei**. Wie wir sehen werden, gehört die QCD in die Klasse solcher Theorien.

(d) $A < 0$, $B > 0$: Die β–Funktion verhält sich wie die blaue Linie in Abb. 8.6 (b). Wie beim vorangegangenen Fall gibt es den UV–stabilen Fixpunkt $\lambda_r = 0$. Zusätzlich gibt es jedoch einen weiteren Fixpunkt bei einer endlichen, nichtverschwindenden Kopplung λ_r^*. Nehmen wir an, dass wir uns in der Nähe dieses Fixpunktes befinden. Wir lassen nun die Skala $t \to 0$ gehen.

1. Für $\lambda_r < \lambda_r^*$ ist $\beta(\lambda_r) < 0$. Dies bedeutet nach Gl. (8.104), dass die Kopplung λ_r bei fallender Skala anwächst und von unten gegen λ_r^* strebt.

2. Für $\lambda_r > \lambda_r^*$ ist $\beta(\lambda_r) < 0$. Dies bedeutet nach Gl. (8.104), dass die Kopplung λ_r bei fallender Skala abfällt und von oben gegen λ_r^* strebt.

In beiden Fällen strebt die Kopplung für $t \to 0$ gegen λ_r^*. Es handelt sich bei λ_r^* um einen sog. **IR–stabilen Fixpunkt**.

Es ist klar, dass ein UV–stabiler Fixpunkt gleichzeitig IR–instabil und ein IR–stabiler Fixpunkt gleichzeitig UV–instabil ist.

Es stellt sich nun die Frage, zu welchem Typ die ϕ^4–Theorie gehört. Dazu berechnen wir die β–Funktion bis zur Ein-Schleifen-Ordnung. Wir betrachten zunächst die Relation (8.80) zwischen nackter und renormierter Kopplungskonstante. Nach μ abgeleitet lautet diese (die nackte Kopplungskonstante hängt natürlich nicht von μ ab)

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \epsilon \mu^{\epsilon-1} Z_\lambda \lambda_r + \mu^\epsilon \frac{\partial (Z_\lambda \lambda_r)}{\partial \mu} = \mu^{\epsilon-1} \left[\epsilon Z_\lambda \lambda_r + \mu \frac{\partial \lambda_r}{\partial \mu} \frac{\partial (Z_\lambda \lambda_r)}{\partial \lambda_r} \right] , \tag{8.110}$$

bzw.

$$\beta(\lambda_r) \equiv \mu \frac{\partial \lambda_r}{\partial \mu} = -\epsilon \frac{Z_\lambda \lambda_r}{\frac{\partial (Z_\lambda \lambda_r)}{\partial \lambda_r}} . \tag{8.111}$$

Bis zur Ein-Schleifen-Ordnung war $Z_\phi = 1$ und daher (vgl. Glgen. (8.72) und (8.77))

$$Z_\lambda \lambda_r = (1 + B)\lambda_r = \lambda_r + \frac{3\lambda_r^2}{16\pi^2 \epsilon} - \frac{3\lambda_r^2}{32\pi^2} [\gamma + F(0, m, \mu)] , \tag{8.112}$$

also

$$\frac{\partial (Z_\lambda \lambda_r)}{\partial \lambda_r} = 1 + \frac{3\lambda_r}{8\pi^2 \epsilon} - \frac{3\lambda_r}{16\pi^2} [\gamma + F(0, m, \mu)] . \tag{8.113}$$

Eingesetzt in Gl. (8.111) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\beta(\lambda_r) &= -\epsilon\,\lambda_r \frac{1+\frac{3\lambda_r}{16\pi^2\,\epsilon}-\frac{3\lambda_r}{32\pi^2}\left[\gamma+F(0,m,\mu)\right]}{1+\frac{3\lambda_r}{8\pi^2\,\epsilon}-\frac{3\lambda_r}{16\pi^2}\left[\gamma+F(0,m,\mu)\right]} \\
&= -\epsilon\,\lambda_r\left\{1-\frac{3\lambda_r}{16\pi^2\epsilon}+\frac{3\lambda_r}{32\pi^2}\left[\gamma+F(0,m,\mu)\right]\right\}+O(\lambda_r^3) \\
&\longrightarrow \frac{3\lambda_r^2}{16\pi^2}+O(\lambda_r^3) \quad (\epsilon\longrightarrow 0)\,. \qquad (8.114)
\end{aligned}$$

Die β–Funktion ist also positiv definit, zumindest störungstheoretisch, also in der Nähe von $\lambda_r = 0$. Daher gehört die ϕ^4–Theorie zum in Abb. 8.6 (a) abgebildeten Typ von Theorien, sie ist also nicht asymptotisch frei, wie z.B. die QCD. Man beachte, dass die β–Funktion, zumindest in erster Ordnung in Störungstheorie, durch den **Koeffizienten** von $1/\epsilon$ in der **primitiven Divergenz** (hier der in der Streuamplitude) bestimmt wird. Ob die ϕ^4–Theorie einen weiteren, UV–stabilen Fixpunkt λ_r^* besitzt, können wir erst entscheiden, wenn wir die höheren Korrekturen in λ_r der β–Funktion berechnet haben. Dies soll hier aber nicht weiter vertieft werden.

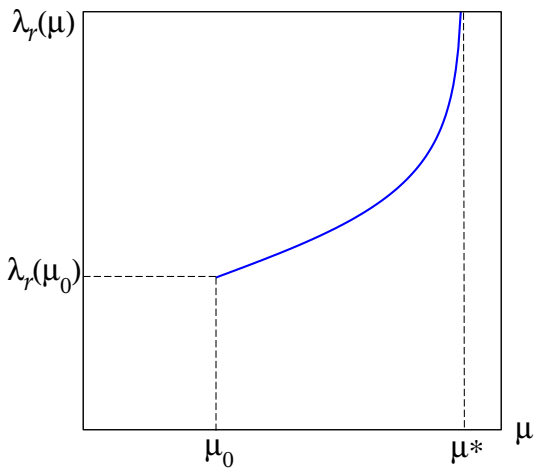


Abbildung 8.7: Die Kopplungskonstante der ϕ^4–Theorie.

Wir bestimmen zum Schluss dieses Abschnitts noch die laufende Kopplungskonstante $\lambda_r(\mu)$, indem wir die gerade berechnete β–Funktion (8.114) benutzen,

$$\begin{aligned}
\mu\,\frac{\partial\lambda_r}{\partial\mu} &= \beta(\lambda_r)=\frac{3\lambda_r^2}{16\pi^2}\,, \\
\Longleftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\lambda_r}{\lambda_r^2}\equiv -\mathrm{d}\frac{1}{\lambda_r} &= \frac{3}{16\pi^2}\,\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\equiv\frac{3}{16\pi^2}\,\mathrm{d}\ln\mu\,, \\
\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\lambda_r(\mu_0)}-\frac{1}{\lambda_r(\mu)} &= \frac{3}{16\pi^2}\,\ln\frac{\mu}{\mu_0}\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda_r(\mu)} &= \frac{1}{\lambda_r(\mu_0)}\left[1 - \frac{3\lambda_r(\mu_0)}{16\pi^2}\,\ln\frac{\mu}{\mu_0}\right] , \\
\Longleftrightarrow \quad \lambda_r(\mu) &= \frac{\lambda_r(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda_r(\mu_0)}{16\pi^2}\,\ln\frac{\mu}{\mu_0}} .
\end{aligned} \tag{8.115}
$$

Die Kopplungskonstante wächst also mit der Skala μ an. Störungstheoretisch gibt es sogar einen Pol bei

$$
\mu^* = \mu_0 \exp\left[\frac{16\pi^2}{3\lambda_r(\mu_0)}\right] , \tag{8.116}
$$

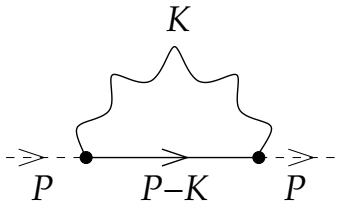
den sog. **Landau–Pol**, bei dem die Kopplungskonstante divergiert, vgl. Abb. 8.7.

8.5 Renormierung der QED

Bei der Quantenelektrodynamik (QED) handelt es sich um eine **renormierbare** Quantenfeldtheorie. Dies bedeutet, dass es genügt, die **primitiven Divergenzen** der Theorie zu identifizieren, um die für die störungstheoretische Renormierung in der Lagrange–Dichte benötigten Gegen-Terme zu bestimmen. Die primitiven Divergenzen der QED sind folgende:

(i) **Selbstenergie des Elektrons.** In Ein-Schleifen-Ordnung und in Feynman–Eichung für den Photon-Propagator gilt,

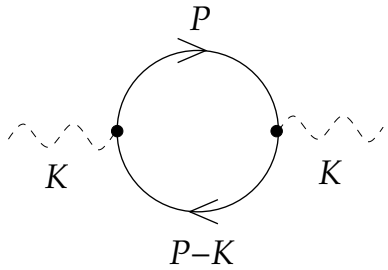
$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(P) &= (-ie)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu\,\frac{i(\not{P} - \not{K} + m)}{(P-K)^2 - m^2 + i\eta}\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{K^2 + i\eta}\,\gamma^\nu \\
&= \qquad\qquad .
\end{aligned} \tag{8.117}
$$



Der oberflächliche Grad der Divergenz dieses Diagramms ist $D = 1$, es handelt sich also um eine **lineare** UV–Divergenz. Die Elektron-Selbstenergie trägt sowohl zur **Massen**– als auch zur **Wellenfunktionsrenormierung** des Elektrons bei.

(ii) **Selbstenergie des Photons.** Es gilt in Ein-Schleifen-Ordnung

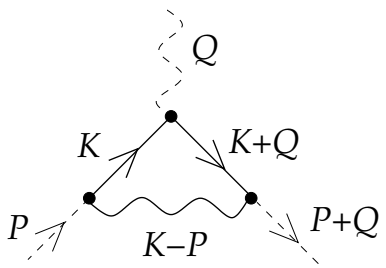
$$
\begin{aligned}
i\Pi^{\mu\nu}(K) &= -(-ie)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4P}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\,\frac{i(\not{P} + m)}{P^2 - m^2 + i\eta}\,\gamma^\nu\,\frac{i(\not{P} - \not{K} + m)}{(P-K)^2 - m^2 + i\eta}\right] \\
&= \qquad\qquad .
\end{aligned} \tag{8.118}
$$



Der oberflächliche Grad der Divergenz dieses Diagramms ist $D = 2$, es ist also **quadratisch** UV–divergent. Die Photon-Selbstenergie trägt zur **Wellenfunktionsrenormierung** des Photons bei.

(iii) **Vertex-Korrektur.** In Ein-Schleifen-Ordnung trägt folgendes Diagramm zum Photon-Elektron-Vertex bei (wiederum rechnen wir in Feynman–Eichung),

$$
\begin{aligned}
&-ie\,\Lambda^\mu(P+Q,P,Q) \\
&= (-ie)^3 \int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,\frac{-ig_{\nu\lambda}}{(K-P)^2+i\eta}\,\gamma^\nu\,\frac{i(\not{K}+\not{Q}+m)}{(K+Q)^2-m^2+i\eta}\,\gamma^\mu\,\frac{i(\not{K}+m)}{K^2-m^2+i\eta}\,\gamma^\lambda \\
&=
\end{aligned}
$$



$$.\qquad (8.119)$$

Dieses Diagramm hat den oberflächlichen Grad der Divergenz $D = 0$, ist also **logarithmisch** UV–divergent. Es trägt zur **Renormierung der Kopplungskonstanten**, d.h. also zur **Ladungsrenormierung** bei.

Nun müssen die divergenten Beiträge in diesen Diagrammen extrahiert werden. Dies geht wiederum am besten mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung. Wir geben hier nur das Ergebnis an und verweisen für die explizite Rechnung auf die Literatur [3],

$$
\begin{aligned}
\Sigma(P) &= \frac{e^2}{8\pi^2\,\epsilon}\,(4m - \not{P}) + \text{ endliche Terme}\,, \\
\Pi^{\mu\nu}(K) &= \frac{e^2}{6\pi^2\,\epsilon}\,(K^\mu K^\nu - g^{\mu\nu}K^2) + \text{ endliche Terme}\,, \qquad (8.120) \\
\Lambda^\mu(P+Q,P,Q) &= \frac{e^2}{8\pi^2\,\epsilon}\,\gamma^\mu + \text{ endliche Terme}\,. \qquad (8.121)
\end{aligned}
$$

14.7.2021

Die **Zwei-Punkt-Vertex-Funktion des Elektrons** lautet dann (in Ein-Schleifen-Ordnung und unter Vernachlässigung endlicher Terme)

$$
\begin{aligned}
\Gamma_f^{(2)}(P) &= S_F^{-1}(P) - \Sigma(P) = \not{P} - m + \frac{e^2}{8\pi^2\,\epsilon}\,\not{P} - \frac{e^2}{2\pi^2\,\epsilon}\,m \\
&= \not{P}\left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\,\epsilon}\right) - m\left(1 + \frac{e^2}{2\pi^2\,\epsilon}\right)\,. \qquad (8.122)
\end{aligned}
$$

Die auftretenden Divergenzen müssen durch **Gegen-Terme** im Dirac–Anteil der Lagrange–Dichte eliminiert werden,

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = Z_2\,\bar{\psi}_r\,i\not{\partial}\,\psi_r - Z_m\,m_r\,\bar{\psi}_r\psi_r\,, \qquad (8.123)$$

wobei

$$\psi = \sqrt{Z_2}\,\psi_r\ , \quad m = \frac{Z_m\, m_r}{Z_2}\ . \tag{8.124}$$

Die benötigten Gegen-Terme lauten explizit

$$\begin{aligned} Z_2 &\equiv 1 + B = 1 - \frac{e_r^2}{8\pi^2\,\epsilon}\ , \\ Z_m\, m_r &= m_r + A = m_r\left(1 - \frac{e_r^2}{2\pi^2\,\epsilon}\right)\ . \end{aligned} \tag{8.125}$$

Damit können wir die Lagrange–Dichte (8.123) schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= (1+B)\bar{\psi}_r\, i\partial\!\!\!/\,\psi_r - (m_r + A)\bar{\psi}_r\psi_r \\ &= \mathcal{L}_{f,r} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2\ , \end{aligned} \tag{8.126}$$

mit der **renormierten** Dirac–Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_{f,r} = \bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m_r)\psi_r\ , \tag{8.127}$$

und den **Gegen-Termen**

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_1 &= -A\,\bar{\psi}_r\psi_r = \frac{e_r^2}{2\pi^2\,\epsilon}\, m_r\,\bar{\psi}_r\psi_r\ , \\ \delta\mathcal{L}_2 &= B\,\bar{\psi}_r\, i\partial\!\!\!/\,\psi_r = -\frac{e_r^2}{8\pi^2\,\epsilon}\,\bar{\psi}_r\, i\partial\!\!\!/\,\psi_r\ . \end{aligned} \tag{8.128}$$

Die Vorzeichen in den Gegen-Termen sind so gewählt, dass sie die Divergenzen in Gl. (8.122) exakt wegheben.

Die **Zwei-Punkt-Vertex-Funktion des Photons** lautet (in Ein-Schleifen-Ordnung, in Feynman–Eichung, und unter Vernachlässigung endlicher Terme)

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}_{b,\mu\nu}(K) &= \Delta^{-1}_{\mu\nu}(K) - \Pi_{\mu\nu}(K) = K^2\, g_{\mu\nu} + \frac{e^2}{6\pi^2\,\epsilon}\,(g_{\mu\nu}K^2 - K_\mu K_\nu) \\ &= K^2\left(1 + \frac{e^2}{6\pi^2\,\epsilon}\right) g_{\mu\nu} - \frac{e^2}{6\pi^2\,\epsilon}\, K_\mu K_\nu\ . \end{aligned} \tag{8.129}$$

Der zweite Term bedeutet, dass man nicht länger in Feynman–Eichung rechnet. Um ihn zu eliminieren (und die Feynman–Eichung zu restaurieren), muss man auch einen Gegen-Term für den **eichfixierenden Term** im Eichfeld-Anteil der Lagrange–Dichte berücksichtigen. Wir werden dies hier aber nicht weiter ausführen, sondern konzentrieren uns stattdessen auf den Gegen-Term, der die Divergenz des ersten Terms eliminiert. Die Photon–Lagrange–Dichte lautet

$$\mathcal{L}_b = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{Z_3}{4}\, F_{r,\mu\nu}F_r^{\mu\nu}\ , \tag{8.130}$$

wobei

$$F_r^{\mu\nu} = \partial^\mu A_r^\nu - \partial^\nu A_r^\mu\ , \quad A^\mu = \sqrt{Z_3}\, A_r^\mu\ , \tag{8.131}$$

und

$$Z_3 \equiv 1 + C = 1 - \frac{e_r^2}{6\pi^2\,\epsilon}\,. \tag{8.132}$$

Damit lautet die Photon–Lagrange–Dichte (8.130)

$$\mathcal{L}_b = -\frac{1+C}{4}\,F_{r,\mu\nu}F_r^{\mu\nu} = \mathcal{L}_{b,r} + \delta\mathcal{L}_3\,, \tag{8.133}$$

mit der **renormierten** Photon–Lagrange–Dichte

$$\mathcal{L}_{b,r} = -\frac{1}{4}\,F_{r,\mu\nu}F_r^{\mu\nu}\,, \tag{8.134}$$

und dem **Gegen-Term**

$$\delta\mathcal{L}_3 = -\frac{C}{4}\,F_{r,\mu\nu}F_r^{\mu\nu} = \frac{e_r^2}{24\pi^2\,\epsilon}\,F_{r,\mu\nu}F_r^{\mu\nu}\,. \tag{8.135}$$

Es bleibt noch, den Wechselwirkungsterm zwischen Elektron und Photon in der Lagrange–Dichte zu renormieren. Dieser lautet

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\,\bar{\psi}\,\not{A}\,\psi = -e\,\sqrt{Z_3}\,Z_2\,\bar{\psi}_r\,\not{A}_r\,\psi_r \equiv -Z_1\,e_r\,\mu^{\epsilon/2}\,\bar{\psi}_r\,\not{A}_r\,\psi_r\,. \tag{8.136}$$

Hier haben wir im ersten Schritt die Definitionen (8.124) und (8.131) der renormierten Felder eingesetzt. Im zweiten Schritt haben wir die **renormierte Kopplungskonstante** e_r durch die Definition

$$e \equiv \frac{Z_1\,\mu^{\epsilon/2}}{\sqrt{Z_3}\,Z_2}\,e_r \tag{8.137}$$

eingeführt. Der Faktor $\mu^{\epsilon/2}$ ergibt sich aus der Forderung, dass e_r auch in $d = 4-\epsilon$ Dimensionen dimensionslos sein soll. Aus den kinetischen Termen bestimmt man die kanonischen Dimensionen von Photon- und Elektron-Feld zu

$$[A^\mu] = \Lambda^{d/2-1}\,, \quad [\psi] = \Lambda^{(d-1)/2}\,, \tag{8.138}$$

und damit die der Kopplungskonstanten zu

$$[e] = \Lambda^{d-d/2+1-(d-1)} = \Lambda^{2-d/2} = \Lambda^{(4-d)/2} \equiv \Lambda^{\epsilon/2}\,. \tag{8.139}$$

Um die Divergenz im Ein-Schleifen-Beitrag (8.121) zum Photon-Elektron-Vertex zu eliminieren, müssen wir

$$Z_1 \equiv 1 + D = 1 - \frac{e_r^2}{8\pi^2\,\epsilon} \equiv Z_2 \tag{8.140}$$

wählen. Damit vereinfacht sich Gl. (8.137) zu

$$e = \frac{\mu^{\epsilon/2}}{\sqrt{Z_3}}\,e_r\,. \tag{8.141}$$

Die Wechselwirkungs–Lagrange–Dichte (8.136) liest sich damit

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e_r\,\mu^{\epsilon/2}\,\bar{\psi}_r\,\not{A}_r\,\psi_r + \delta\mathcal{L}_4\,, \tag{8.142}$$

mit dem **Gegen-Term**

$$\delta\mathcal{L}_4 = -D\, e_r\, \mu^{\epsilon/2}\, \bar{\psi}_r\, \not{A}_r\, \psi_r = \frac{e_r^3\, \mu^{\epsilon/2}}{8\pi^2\, \epsilon}\, \bar{\psi}_r\, \not{A}_r\, \psi_r\ . \tag{8.143}$$

Zum Schluss dieses Abschnitts bestimmen wir noch die β–**Funktion** der QED (ähnlich wie wir dies in Gl. (8.110) für die ϕ^4–Theorie getan haben). Gemäß Gl. (8.141) ist

$$0 = \frac{\partial e}{\partial \mu} = \frac{\epsilon}{2}\, \mu^{\epsilon/2-1}\, \frac{e_r}{\sqrt{Z_3}} + \mu^{\epsilon/2}\, \frac{\partial(e_r/\sqrt{Z_3})}{\partial \mu} = \mu^{\epsilon/2-1} \left[\frac{\epsilon}{2}\, \frac{e_r}{\sqrt{Z_3}} + \mu\, \frac{\partial e_r}{\partial \mu}\, \frac{\partial(e_r/\sqrt{Z_3})}{\partial e_r} \right]\ , \tag{8.144}$$

bzw.

$$\beta(e_r) \equiv \mu\, \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = -\frac{\epsilon}{2}\, \frac{e_r/\sqrt{Z_3}}{\frac{\partial(e_r/\sqrt{Z_3})}{\partial e_r}}\ . \tag{8.145}$$

Mit Z_3 aus Gl. (8.132) und bis zu Termen der Ordnung $O(e_r^3)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\beta(e_r) &= -\frac{\epsilon}{2}\, \frac{e_r}{\sqrt{1-\frac{e_r^2}{6\pi^2\,\epsilon}}} \left[\frac{\partial}{\partial e_r}\, \frac{e_r}{\sqrt{1-\frac{e_r^2}{6\pi^2\,\epsilon}}} \right]^{-1} \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\, e_r \left(1 + \frac{e_r^2}{12\pi^2\,\epsilon}\right) \left[\frac{\partial}{\partial e_r} e_r \left(1 + \frac{e_r^2}{12\pi^2\,\epsilon}\right) \right]^{-1} + O(e_r^5) \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\, e_r \left(1 + \frac{e_r^2}{12\pi^2\,\epsilon}\right) \left(1 + \frac{e_r^2}{4\pi^2\,\epsilon}\right)^{-1} + O(e_r^5) \\
&= -\frac{\epsilon}{2}\, e_r \left(1 + \frac{e_r^2}{12\pi^2\,\epsilon} - \frac{e_r^2}{4\pi^2\,\epsilon}\right) + O(e_r^5) = -\frac{\epsilon}{2}\, e_r \left(1 - \frac{e_r^2}{6\pi^2\,\epsilon}\right) + O(e_r^5) \\
&\longrightarrow \frac{e_r^3}{12\pi^2} + O(e_r^5) \quad (\epsilon \longrightarrow 0)\ .
\end{aligned} \tag{8.146}$$

Die β–Funktion ist also **positiv** und QED damit **keine** asymptotisch freie Theorie. Die laufende Kopplungskonstante bestimmen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mu\, \frac{\partial e_r}{\partial \mu} &= \beta(e_r) = \frac{e_r^3}{12\pi^2} \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}e_r}{e_r^3} = -\frac{1}{2}\mathrm{d}e_r^{-2} &= \frac{1}{12\pi^2}\, \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{1}{12\pi^2}\, \mathrm{d}\ln\mu \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{e_r^2(\mu_0)} - \frac{1}{e_r^2(\mu)} &= \frac{1}{6\pi^2}\, \ln\frac{\mu}{\mu_0} \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{e_r^2(\mu)} &= \frac{1}{e_r^2(\mu_0)} \left[1 - \frac{e_r^2(\mu_0)}{6\pi^2}\, \ln\frac{\mu}{\mu_0} \right] \\
\Longleftrightarrow \quad e_r^2(\mu) &= \frac{e_r^2(\mu_0)}{1 - \frac{e_r^2(\mu_0)}{6\pi^2}\, \ln\frac{\mu}{\mu_0}}\ .
\end{aligned} \tag{8.147}$$

Wie in der ϕ^4–Theorie wird die Kopplungskonstante bei größeren Impulsskalen (kleineren Abständen) stärker, bzw. bei kleineren Impulsskalen (größeren Abständen) kleiner.

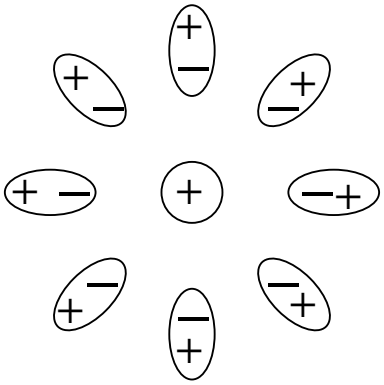


Abbildung 8.8: Abschirmung einer Ladung aufgrund der Polarisation des Vakuums.

Dies ist der Effekt der **Abschirmung der elektrischen Ladung** aufgrund der **Polarisation des Vakuums**. Um dies zu verstehen, erinnere man sich daran, dass die Wellenfunktions-Renormierungskonstante Z_3 die Divergenzen der Photon-Selbstenergie $\Pi^{\mu\nu}$, auch **Photon-Polarisationstensor** genannt, enthält. Physikalisch beschreibt dieser Tensor die Modifikation der Propagation des Photons durch Erzeugung **virtueller Elektron-Positron-Paare**, vgl. das Diagramm in Gl. (8.118). Diese Paare schirmen eine Ladung effektiv so ab, dass sie bei größeren Abständen kleiner erscheint, s. Abb. 8.8.

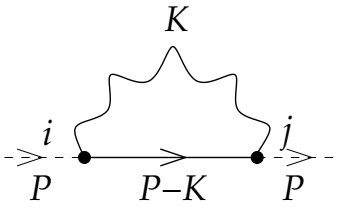
Mit der Hilfe der Ward–Takahashi–Identitäten kann man die Renormierbarkeit der QED in allen Ordnungen zeigen, vgl. Ref. [3].

8.6 Renormierung der QCD

Die **primitiven Divergenzen** der Quantenchromodynamik (QCD) sind im Prinzip die gleichen wie bei der QED:

(i) **Selbstenergie der Quarks.** In Ein-Schleifen-Ordnung und in Feynman–Eichung für den Gluon-Propagator gilt,

$$\Sigma_{ij}(P) \;=\;$$



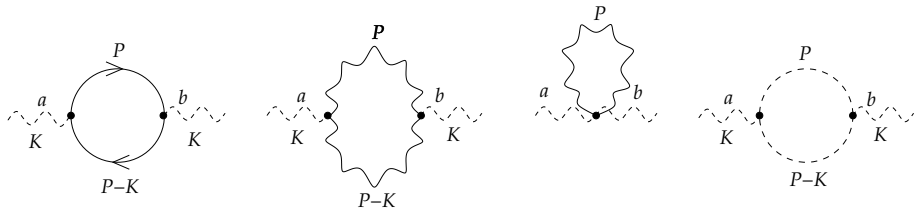
$$= \frac{4}{3}\,\delta_{ij}\,\frac{g^2}{8\pi^2\,\epsilon}\,(4m - \not{P}) + \;\text{ endliche Terme ,}$$

$$\Longrightarrow \quad Z_2 \;=\; 1 - \frac{4}{3}\,\frac{g_r^2}{8\pi^2\,\epsilon}\;. \tag{8.148}$$

Hier sind i, j fundamentale Quark-Farbindizes und der Faktor 4/3 ergibt sich aus der Tatsache, dass Gluonen adjungierte Farben tragen.

(ii) **Selbstenergie der Gluonen.** Es gilt in Ein-Schleifen-Ordnung,

$$\Pi^{\mu\nu}_{ab}(K) \;=\;$$



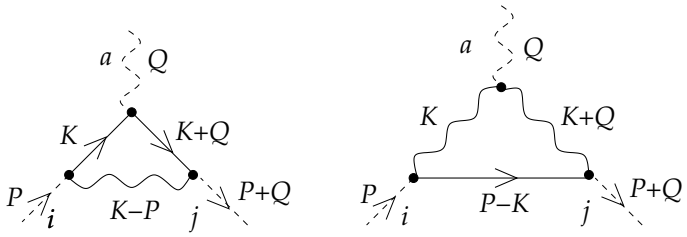
$$= \left(\frac{N_f}{2} - \frac{15}{4}\right) \delta_{ab} \, \frac{g^2}{6\pi^2\,\epsilon} \left(K^\mu K^\nu - g^{\mu\nu} K^2\right) + \quad \text{endliche Terme} \,,$$

$$\Longrightarrow \quad Z_3 \;=\; 1 - \frac{g_r^2}{6\pi^2\,\epsilon} \left(\frac{N_f}{2} - \frac{15}{4}\right) \,. \tag{8.149}$$

Abgesehen vom Faktor $N_f/2 - 15/4$ und dem Kronecker–Delta in den adjungierten Farb-Indizes hat der divergente Term im gluonischen Polarisationstensor dieselbe Form wie im Photon-Polarisationstensor in der QED, vgl. Gl. (8.120). Hierbei stammt der Term $N_f/2$ von der Quark-Schleife (da dort N_f Quark-Flavors umlaufen können) und der Term $15/4$ von den Gluon- und Geist-Schleifen. Man beachte, dass sich die beiden Beiträge im Vorzeichen unterscheiden, was eine wichtige Rolle für die β–Funktion der QCD spielen wird.

(iii) **Quark-Gluon-Vertex-Korrektur.** In Ein-Schleifen-Ordnung tragen folgende Diagramme zum Quark-Gluon-Vertex bei (wiederum rechnen wir in Feynman–Eichung),

$$\Lambda^a_{\mu,ij}(P, P+Q, Q) \;=\;$$



$$= \frac{13}{3} \, \frac{g^2}{8\pi^2\,\epsilon} \, (T^a)_{ij} \gamma_\mu + \quad \text{endliche Terme} \,,$$

$$\Longrightarrow \quad Z_1 \;=\; 1 - \frac{13}{3} \, \frac{g_r^2}{8\pi^2\,\epsilon} \,. \tag{8.150}$$

Abgesehen von der Gell-Mann–Matrix T^a und dem Faktor $13/3$ hat der divergente Term im Vertex dieselbe Struktur wie der im Photon-Elektron-Vertex in der QED, vgl. Gl. (8.121).

Wir berechnen nun die β–Funktion der QCD. Zunächst gilt, weil die Struktur des Quark-Gluon-Wechselwirkungsterms dieselbe ist wie die der Photon-Elektron-Wechselwirkung in QED, analog zu Gl. (8.137)

$$g = \frac{Z_1 \, \mu^{\epsilon/2}}{\sqrt{Z_3}\, Z_2} \, g_r \,. \tag{8.151}$$

Wir setzen die Renormierungskonstanten Z_1, Z_2 und Z_3 aus den Glgen. (8.148), (8.149) und (8.150) ein und entwickeln bis zur Ordnung g_r^3,

$$\begin{aligned} g &= \left(1 - \frac{13}{3}\frac{g_r^2}{8\pi^2\,\epsilon}\right)\left[1 + \frac{g_r^2}{12\pi^2\,\epsilon}\left(\frac{N_f}{2} - \frac{15}{4}\right)\right]\left(1 + \frac{4}{3}\frac{g_r^2}{8\pi^2\,\epsilon}\right)\mu^{\epsilon/2}\,g_r + O(g_r^5) \\ &= \left(1 - 3\,\frac{g_r^2}{8\pi^2\,\epsilon}\right)\left[1 + \frac{g_r^2}{16\pi^2\,\epsilon}\left(\frac{2N_f}{3} - 5\right)\right]\mu^{\epsilon/2}\,g_r + O(g_r^5) \\ &= \left[1 + \frac{g_r^2}{16\pi^2\,\epsilon}\left(\frac{2N_f}{3} - 11\right)\right]\mu^{\epsilon/2}\,g_r + O(g_r^5)\,. \end{aligned} \tag{8.152}$$

Leiten wir diese Gleichung nach μ ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g}{\partial \mu} = \mu^{\epsilon/2}\,\frac{\partial g_r}{\partial \mu}\frac{\partial}{\partial g_r}\left\{g_r\left[1 + \frac{g_r^2}{16\pi^2\,\epsilon}\left(\frac{2N_f}{3} - 11\right)\right]\right\} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2}\,\mu^{\epsilon/2-1}\,g_r\left[1 + \frac{g_r^2}{16\pi^2\,\epsilon}\left(\frac{2N_f}{3} - 11\right)\right]\,, \end{aligned} \tag{8.153}$$

oder nach $\beta(g_r) \equiv \mu\partial g_r/\partial\mu$ umgestellt,

$$\begin{aligned} \beta(g_r) \equiv \mu\,\frac{\partial g_r}{\partial \mu} &= -\frac{\epsilon}{2}\,g_r\left[1 + \frac{g_r^2}{16\pi^2\,\epsilon}\left(\frac{2N_f}{3} - 11\right)\right]\left[1 + \frac{g_r^2}{16\pi^2\,\epsilon}\,(2N_f - 33)\right]^{-1} \\ &= -\frac{\epsilon}{2}\,g_r\left[1 - \frac{g_r^2}{8\pi^2\,\epsilon}\left(\frac{2N_f}{3} - 11\right)\right] + O(g_r^5) \\ &\longrightarrow \frac{g_r^3}{16\pi^2}\left(\frac{2N_f}{3} - 11\right) + O(g_r^5) \quad (\epsilon \longrightarrow 0)\,. \end{aligned} \tag{8.154}$$

Nun ist $N_f \leq 6$, also

$$\frac{2N_f}{3} - 11 \leq -7 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta(g_r) < 0\,, \tag{8.155}$$

d.h. **QCD ist eine asymptotisch freie Theorie**. Während die Quark-Beiträge allein für eine Abschirmung von Farbladungen sorgen, $2N_f/3 > 0$, bewirken die Gluon- und Geist-Beiträge eine **Anti-Abschirmung**, $-11 < 0$, die die abschirmende Wirkung der Quarks mehr als kompensiert.

Durch Integration der β–Funktion erhalten wir die **laufende Kopplungskonstante** der QCD,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g_r}{g_r^3} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}g_r^{-2} &= -\frac{11 - 2N_f/3}{16\pi^2}\,\mathrm{d}\ln\mu\,, \\ \Longrightarrow \quad \frac{1}{g_r^2(\mu_0)} - \frac{1}{g_r^2(\mu)} &= -\frac{11 - 2N_f/3}{16\pi^2}\,\ln\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\,, \\ \Longrightarrow \quad g_r^2(\mu) &= \frac{g_r^2(\mu_0)}{1 + \frac{g_r^2(\mu_0)}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2N_f}{3}\right)\ln\frac{\mu^2}{\mu_0^2}}\,. \end{aligned} \tag{8.156}$$

Mit dem Äquivalent der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante für die QCD,

$$\alpha_S(\mu) \equiv \frac{g_r^2(\mu)}{4\pi} \ , \tag{8.157}$$

und unter Absorption der Eins im Nenner in der Renormierungsskala μ_0^2 schreibt sich dies in der landläufig gebrauchten Form

$$\alpha_S(\mu) = \frac{4\pi}{(11 - 2N_f/3)\ln(\mu^2/\bar{\mu}_0^2)} \ , \tag{8.158}$$

wobei

$$\bar{\mu}_0^2 = \mu_0^2 \exp\left[-\frac{4\pi}{\alpha_S(\mu_0)\,(11 - 2N_f/3)}\right] \ .$$

Literaturverzeichnis

[1] O. Philipsen, *Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik* (Springer Spektrum)

[2] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (Wiley, New York)

[3] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge)

[4] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, Reading)

[5] T. Kugo, *Eichtheorie* (Springer, Berlin)

[6] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw–Hill, New York)

[7] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I: Foundations* (Cambridge University Press, Cambridge)

[8] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields II: Modern Applications* (Cambridge University Press, Cambridge)

[9] K. Huang, *Quarks, Leptons, and Gauge Fields* (World Scientific, Singapore)

[10] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, Princeton)

[11] D. Bailin, A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Adam Hilger, Bristol)

[12] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge)

[13] M. Böhm, A. Denner, H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction* (Teubner, Stuttgart)

[14] S. Coleman, *Quantum Field Theory* (World Scientific, New Jersey)

[15] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford)

[16] B. Felsager, *Geometry, Particles, and Fields* (Springer, New York)

[17] https://pdg.lbl.gov

[18] https://physics.weber.edu/schroeder/feynman/AnnihilationTalk.pdf, 23.2.2014

[19] K. Brading and H. R. Brown, [arXiv:hep-th/0009058 [hep-th]], https://arxiv.org/pdf/hep-th/0009058.pdf

[20] M. Hamermesh, *Group Theory and its application to physical problems* (Dover Publications, New York), S. 313f.

[21] https://blogs.discovermagazine.com/cosmicvariance/2005/10/24/hidden-symmetries/#.U6_OehYWf-Y, 29.6.2014

[22] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego), Gl. (8.365.4)