Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Lehrende: Prof. Dr. Roser Valentí, Raum 01.130
Übungsgruppenleitung: Karim Zantout, Room 01.142

Frankfurt, 15.11.2019

Einführung in die Theoretische Festkörperphysik

Wintersemester 2019/20

Blatt 5

(Abgabe: 25.11.2019)

Aufgabe 1 (**Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren**) (3 Punkte)

Der Hamiltonian für die Auslenkungen in harmonischer Näherung hat folgende Gestalt:

$$H_{ph} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}s} \left(\tilde{P}^{\dagger}_{\mathbf{q}s} \tilde{P}_{\mathbf{q}s} + \omega^2(\mathbf{q}s) \tilde{u}_{-\mathbf{q}s} \tilde{u}_{\mathbf{q}s} \right) \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass, nach Einführung der Erzeuger und Vernichter durch

$$\tilde{u}_{\mathbf{q}s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\mathbf{q}s)}} (b_{\mathbf{q}s} + b^{\dagger}_{-\mathbf{q}s}) \tag{2}$$

$$\tilde{P}_{\mathbf{q}s} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar\omega(\mathbf{q}s)}{2}} (b_{-\mathbf{q}s} - b^{\dagger}_{\mathbf{q}s}) \tag{3}$$

der Hamilton-Operator in die folgende Form gebracht werden kann:

$$H_{Ph} = \sum_{\mathbf{q}s} \hbar\omega(\mathbf{q}s) \left(b^{\dagger}_{\mathbf{q}s} b_{\mathbf{q}s} + \frac{1}{2} \right) \tag{4}$$

Aufgabe 2 (**Phononen im kontinuierlichen Grenzfall**) (3 Punkte)

Gegeben sei eine Kette von Atomen mit einatomiger Basis, der Gitterkonstante a und der Kopplungskonstante D (gehen Sie davon aus, dass nur nächste Nachbarn miteinander wechselwirken).

a) Zeigen Sie, dass für große Wellenlängen ($\lambda \gg a$) die Bewegungsgleichung auf die kontinuierliche elastische Wellengleichung reduziert wird:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

b) Vergleichen Sie die daraus resultierende Dispersionsrelation mit der für diesen Fall exakten Dispersionsrelation:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{D}{M}} \left| \sin \frac{qa}{2} \right| \tag{6}$$

Aufgabe 3 (**Spezifische Wärme von Europiumoxid**) (4 Punkte)

Die spezifische Wärme von EuO bei tiefen Temperaturen ist proportional zu $T^{3/2}$.

a) Bestimmen Sie die Dispersion der Quasiteilchen, die das beobachtete Verhalten verursachen. Nehmen Sie an, die Dispersion sei isotrop und habe die Form eines Potenzgesetzes: $\omega \propto q^a$.
Hinweis:
Vorfaktoren sind für diese Aufgabe irrelevant. Konzentrieren Sie sich auf die Form der Abhängigkeit von q. Um den Zusammenhang zwischen der spezifischen Hitze c_V und der Dispersion $\omega(q)$ zu finden, kann man mit 3D Zustandsdichte starten:

$$D(\omega) = \frac{V}{N} \sum_s \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{S(\omega)} \frac{dS}{|d\omega/dq|} \tag{7}$$

wobei S eine Hyperfläche mit konstantem ω ist. Zeigen Sie daraufhin, dass mittels $\omega \propto q^\alpha$ folgt, dass:

$$D(\omega) \propto \omega^{\frac{3}{\alpha}-1} \tag{8}$$

Nutzen Sie nun den Ausdruck für die spezifische Hitze von Bosonen:

$$c_V = \frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\hbar}{V} \int d\omega \; D(\omega) \; \omega \; \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \tag{9}$$

um eine Beziehung zwischen der Temperaturabhängigkeit von c_V und der Dispersion $\omega \propto q^\alpha$ zu finden. Nehmen Sie an, dass $c_V \propto T^\gamma$ bei niedrigen Temperaturen gilt und bestimmen Sie wie γ mit α in Relation steht.

b) Diskutieren Sie, ob die beobachtete spezifische Wärme von EuO durch Phononen erklärt werden kann.