Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Lehrende: Prof. Dr. Roser Valentí, Raum 01.130
Übungsgruppenleitung: Karim Zantout, Room 01.142

Frankfurt, 11.11.2019

Einführung in die Theoretische Festkörperphysik

Wintersemester 2019/20

Blatt 4

(Abgabe: 18.11.2019)

Aufgabe 1 (**Phononen der eindimensionalen Kette mit einatomiger Basis**) (4 Punkte)

Eine eindimensionale Kette bestehe aus Atomen einer einzigen Spezies. Die Atome seien mit ihren nächsten Nachbarn durch eine Federkonstante α gekoppelt. Der Abstand zwischen benachbarten Atomen betrage a.

a) Geben Sie die potentielle Energie des Systems an.
b) Berechnen Sie die dynamische Matrix $D(\vec{r})$ des Systems.
c) Berechnen Sie die Dispersionsrelation $\omega(q)$ der Phononen dieses Systems. Welche Dispersion ergibt sich für $q \to 0$?
d) Skizzieren Sie die Dispersionsrelation $\omega(q)$. Geben Sie $\omega(q = 0)$ und $\omega(q = \pi/a)$ an.

Aufgabe 2 (**Eindimensionale Kette mit zweiatomiger Basis**) (4 Punkte)

In der eindimensionalen Kette aus Aufgabe 5.1 werde jedes zweite Atom durch ein Atom mit Masse $M_2 \neq M_1$ ersetzt. Alle Atome seien mit ihren nächsten Nachbarn durch eine Federkonstante α gekoppelt. Der Abstand zwischen benachbarten Atomen betrage a.

a) Geben Sie die potentielle Energie des Systems an.
b) Berechnen Sie die dynamische Matrix $D(\vec{r})$ des Systems. Welche Dimension hat diese Matrix nun?
c) Berechnen Sie die Dispersionsrelation $\omega(q)$ der Phononen dieses Systems. Wie viele Bänder ergeben sich nun? Berechnen Sie wiederum die Dispersion für $q \to 0$.
d) Skizzieren Sie die Dispersionsrelation $\omega(q)$ für den Fall $M_1 = M_2$. Geben Sie $\omega(q = 0)$ und $\omega(q = \pi/2a)$ an. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der vorangegangenen Aufgabe.
e) Skizzieren Sie die Dispersionsrelation $\omega(q)$ für den Fall $M_1 = \frac{2}{3}M_2$. Geben Sie $\omega(q = 0)$ und $\omega(q = \pi/2a)$ an. Worin besteht der qualitative Unterschied zum Fall $M_1 = M_2$?

Aufgabe 3 (**Bose- und Fermi-Operatoren**) (2 Punkte)

Betrachten Sie einen Hamilton-Operator H, der folgende Vertauschungsrelationen mit bosonischen Operatoren $b_l^\dagger$ erfüllt:

$$[H, b_l^\dagger] = E_l b_l^\dagger \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass H diagonal in den bosonischen Operatoren ist, d.h.

$$H = \sum_l E_l b_l^\dagger b_l + H', \tag{2}$$

wobei H' folgende Vertauschungsrelation erfüllt:

$$[H', b_l^\dagger] = [H', b_l] = 0. \tag{3}$$

b) Was ändert sich im Falle, wenn (1) für fermionische Operatoren $b_l^\dagger$ gilt?