Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Lehrende: Prof. Dr. Roser Valentí, Raum 01.130
Übungsgruppenleitung: Karim Zantout, Room 01.142

Frankfurt, 29.01.2020

Einführung in die Theoretische Festkörperphysik

Wintersemester 2019/20

Blatt 13

(Abgabe: 10.02.2020)

Aufgabe 1 (**Kompressibilität eines Fermigases**) (3 Punkte)

In dieser Aufgabe werden die thermodynamischen Eigenschaften eines idealen Fermigases, bestehend aus $S = \frac{1}{2}$ Teilchen, im Grenzwert $T \to 0$ diskutiert. Die Kompressibilität κ wird durch folgende Gleichung definiert:

$$\kappa^{-1} = n^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_T \tag{1}$$

wobei μ das chemische Potential und n die Teilchendichte ist. Für das ideale Fermigas aus Teilchen mit Spin lauten diese:

$$\mu|_{T\to 0} = \epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} \quad , \quad n = \frac{N_\uparrow + N_\downarrow}{V} = 2 \times \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{p_F}{\hbar}\right)^3 \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Kompressibilität eines idealen Fermigases durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\kappa = \frac{2}{n^2} D(\epsilon_F) \tag{3}$$

wobei $D(\epsilon_F)$ die (nicht-wechselwirkende) Zustandsdichte an der Fermienergie pro Spin ist.

Aufgabe 2 (**Kompressibilität einer Fermiflüssigkeit**) (7 Punkte)

Anders als im idealen Fermigas wird ein Teil der Wechselwirkung von $S = \frac{1}{2}$ Teilchen in der Theorie von Fermiflüssigkeiten berücksichtigt. Hierbei werden die ursprünglich wechselwirkenden Teilchen durch sogenannte Quasi-Teilchen beschrieben, die nicht miteinander wechselwirken, aber deren physikalische Eigenschaften, wie z.B. deren Masse m^* oder Zustandsdichte $D^*(E)$, aufgrund der Wechselwirkung renormiert ist.

Gegeben sei eine Fermiflüssigkeit aus $S = \frac{1}{2}$ Teilchen. In diesem Fall kann das chemische Potential als $\mu = \tilde{\epsilon}_{k_F}$, die Quasiteilchenenergie beim Fermiwellenvektor, angenommen werden. Dann gilt:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_{T\to 0} = \frac{\partial \epsilon_{k_F}}{\partial n} + \sum_{\vec{k}'\sigma'} f_{k_F\sigma;\vec{k}'\sigma'} \frac{\partial n_{\vec{k}'\sigma'}}{\partial n} \tag{4}$$

wobei

$$f_{\vec{k}\sigma;\vec{k}'\sigma'} = \frac{1}{2VD^*(\epsilon_F)} \sum_{l=0}^{\infty} (F_l^S + 4\sigma\sigma' F_l^A) P_l(\cos\vartheta) \tag{5}$$

und $D^*(\epsilon_F)$ die wechselwirkende Zustandsdichte bei der Fermienergie ist.

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition für die Kompressibilität in Aufgabe 14.1, dass:

$$\kappa^* = \frac{1}{n^2} \frac{2D^*(\epsilon_F)}{1 + F_0^S} \tag{6}$$

wobei κ^* die Kompressibilität der wechselwirkenden Fermiflüssigkeit ist.

Hinweis #1: Es ist hilfreich, die Ableitungen in Abhängigkeit des Fermiwellenvektors auszudrücken, indem Sie folgende Substitution vornehmen: $\frac{\partial}{\partial n} \to \frac{\partial k_F}{\partial n} \frac{\partial}{\partial k_F}$. In diesem Fall gilt, dass $\frac{\partial n_{\vec{k}\sigma}}{\partial k_F} = \delta(k_F - |\vec{k}|)$.

Hinweis #2: Es ist hilfreich, die Summation über k als Integral in sphärischen Koordinaten durchzuführen $\sum_{\vec{k}'} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}'$, da $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin(\vartheta) P_l(\cos\vartheta) = 4\pi\delta_{l,0}$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen für $D^*(\epsilon_F) := \frac{m^* p_F}{\pi \hbar^3}$, dass gilt:

$$\frac{\kappa^*}{\kappa} = \frac{1 + F_0^S/3}{1 + F_0^S} \tag{7}$$

wobei κ die Kompressibilität des Fermigases ist, welche Sie in Aufgabe 14.1 berechnet haben.