Theoretische Physik 3
Klassische Elektrodynamik

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Wintersemester 2025/26

Version: 2. Februar 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation, Einführung in die Feldtheorie **5**

1.1 Primitives Beispiel einer Feldtheorie: schwingende Saite 6

1.2 Fortgeschrittene Feldtheorien: z.B. Feldtheorien, die elementare Teilchen beschreiben (ED, ...) 11

1.3 Gliederung der Vorlesung 15

2 Elektrostatik **16**

2.1 Coulomb-Gesetz 16

2.2 Elektrisches Feld 17

2.3 δ-Funktion 19

2.4 Elektrisches Feld (Fortsetzung) 20

2.5 Elektrostatisches Potential 21

2.6 Feldgleichungen 22

2.7 Satz von Gauß und Satz von Stokes 22

2.8 Feldgleichungen (Fortsetzung) 27

2.9 Feldlinien, Äquipotentialflächen 28

2.10 Homogen geladene Kugel: Berechnung des E-Feldes 29

2.11 Energie einer Ladungsverteilung 32

2.12 Elektrostatische Randwertprobleme 33

2.13 Kondensator 37

2.14 Laplace-Gleichung in 2 Raumdimensionen: Polarkoordinaten 39

2.14.1 Motivation 39

2.14.2 Polarkoordinaten 40

2.14.3 Separationsansatz 40

2.14.4 Vollständige Orthonormalsysteme 42

2.14.5 Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs 43

2.15 Laplace-Gleichung in 3 Raumdimensionen: Kugelkoordinaten 46

2.15.1 Motivation 46

2.15.2 Kugelkoordinaten 46

2.15.3 Separationsansatz 47

2.15.4 Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs 48

2.16 Multipolentwicklung 49

3 Magnetostatik **52**

3.1 Strom, Stromdichte, Kontinuitätsgleichung 52

3.2 Magnetisches Feld 55

3.3 Vektorpotential, Eichsymmetrie 59

3.4 Feldgleichungen 60

3.5 Gegenüberstellung: Elektrostatik ↔ Magnetostatik 62

3.6 Multipolentwicklung 63

4 Spezielle Relativitätstheorie (Wiederholung) **66**

5 Elektrodynamik (Grundlagen) **67**

5.1 Lagrange-Formalismus für Felder 67

5.2 Lagrange-Funktion und Feldgleichungen der Elektrodynamik für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$ 68

5.3 Lagrange-Funktion und Feldgleichungen der Elektrodynamik für $\rho \neq 0$ und/oder $\mathbf{j} \neq 0$ 73

5.4 Zusammenfassung und Diskussion der Feldgleichungen 74

5.5 Energie und Impuls des em Feldes 75

6 Elektrodynamik (Anwendungen) **78**

6.1 Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen 78

6.2 Fourier-Transformation 79

6.3 Greensche Funktionen 80

6.4 Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen (Fortsetzung) 81

6.5 Lorenz-Eichung, Coulomb-Eichung im Vakuum, monochromatische ebene Wellen 83

6.6 Hohlraumwellen und Wellenleiter 86

6.7 E-Felder, B-Felder und em Strahlung beschleunigter Ladungen 88

7 Elektrodynamik in Materie **92**

7.1 Aufteilung von Feldern und Ladungen ("ungestört", "extern", "induziert") . . . 93

7.2 Übergang von mikroskopischen zu makroskopischen Größen 95

7.3 Reaktion von Materie, linearer Response 96

7.4 Makroskopische Maxwell-Gleichungen 98

7.5 Verhalten von **E**, **B**, **D** und **H** auf Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Materiesorten 100

A Herleitung des Energie-Impuls-Tensors und der zugehörigen Kontinuitätsglei-

chungen aus dem Noether-Theorem **103**

****** 14. Oktober 2025 (1. Vorlesung) ******

1 Motivation, Einführung in die Feldtheorie

- Inhalt der Vorlesung: Grundlagen der (klassischen = nicht-quantisierten) Feldtheorie am Beispiel der Elektrodynamik (ED).
  - Grundlagen der Feldtheorie: sehr wichtig.
  - Beispiel der ED: nicht unwichtig, aber weniger wichtig, als Grundlagen der Feldtheorie.
- Warum ist Feldtheorie von zentraler Bedeutung für die Physik?
  - Feldtheorien beschreiben sämtliche elementaren Teilchen (z.B. Elektronen, Quarks, Photonen, Gluonen, ...) und die zwischen ihnen wirkenden fundamentalen Kräfte (elektromagnetische [em] Kraft, starke Wechselwirkung [WW], schwache WW, Gravitation).
  - Daraus ergeben sich alle weiteren in der Physik beobachteten Phänomene (z.B. Bildung und Eigenschaften von Atomkernen, Atomen, Molekülen, Festkörpern, Planeten, Sonnensystemen, Galaxien, ...), häufig beschrieben durch effektive Theorien.
  - Z.B. ist die in letzten beiden Semestern diskutierte Mechanik nur eine effektive Theorie[1], die Berechnung der Trajektorien von makroskopischen Objekten (z.B. Steine, Tennisbälle, ...) in guter Näherung erlaubt.
  - **Feldtheorien bilden somit die Grundlage der Physik.**
  - Feldtheorien finden außerdem in zahlreichen effektiven Theorien Anwendung.
- Was ist ein Feld, wie wird es mathematisch beschrieben?
  - Ein Feld ist eine Funktion der Zeit t und einer oder mehrerer räumlicher Koordinaten, z.B. (x, y, z) oder (r, ϑ, φ).
  - Beispiele:
    - $z(x, t)$: eine in x-Richtung gespannte Saite (Gummiband), die in z-Richtung transversal schwingt.
    - $z(x, y, t)$: eine in der x-y-Ebene gespannte Membran (Trommel), die in z-Richtung transversal schwingt.
    - $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$: elektrisches und magnetisches Feld bzw. in Kombination das em Feld.
    - $A^\mu(\mathbf{r}, t) \equiv A^\mu(x^\nu)$ (wobei $x^\nu = (ct, x, y, z)$): relativistische Schreibweise des em Feldes (äquivalent zu $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$).
    - $\psi_A(\mathbf{r}, t)$: Feld, das Elektronen beschreibt (A: Spinindex; nicht in dieser Vorlesung, erst in der Vorlesung "Einführung in die Quantenfeldtheorie").

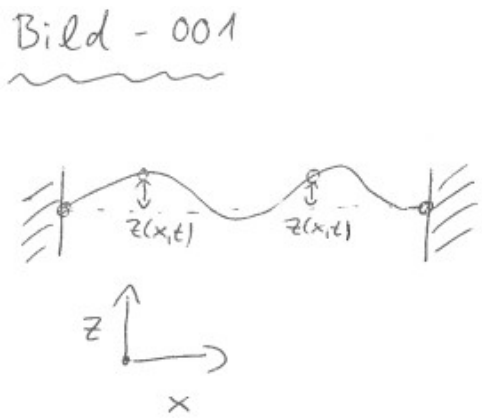
[1] Wiki: Als Effektive Theorie wird in der Wissenschaft, gewöhnlich in der Physik, eine Theorie bezeichnet, die eine tiefere, zugrundeliegende Theorie vereinfachend oder zusammenfassend darstellt. Eine effektive Theorie erlaubt für den Anwendungsbereich, für den sie entwickelt wurde, einfachere Berechnungen, die eine gute Näherung an die beobachteten Phänomene darstellen.

* $u_A^a(\mathbf{r},t)$, $d_A^a(\mathbf{r},t)$, ...: Felder, die up-Quarks, down-Quarks, ... beschreiben (A: Spinindex; a: Farbindex; nicht in dieser Vorlesung, erst in der Vorlesung "Einführung in die Quantenfeldtheorie").
* ...

In dieser Vorlesung behandelte Grundlagen der Feldtheorie betreffen nicht nur das em Feld, sondern zu großen Teilen alle genannten Felder und viele weitere.
Statt
"Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik"
wäre ein besser geeigneterer Name für diese Vorlesung
"Theoretische Physik 3 – Einführung in die Feldtheorie".

1.1 Primitives Beispiel einer Feldtheorie: schwingende Saite

- Beschreibung einer schwingenden Saite ist Teil der **Kontinuumsmechanik**:
  - Dynamik von deformierbaren Objekten, Flüssigkeiten und Gasen.
  - Betrachte kontinuierliche Massenverteilungen statt Bahnen einzelner Massenpunkte (z.B. $\mathbf{r}_j(t)$).
  - Mathematisch beschrieben durch Felder, z.B. $z(x,t)$ bzw. $z(x,y,t)$ (Saite bzw. Membran) oder $\rho(\mathbf{r},t)$ (Massendichte einer Flüssigkeit oder eines Gases), d.h. durch Funktionen die von Ort und Zeit, also von 2 oder mehr Variablen abhängen.
- Betrachte in 2 Raumdimensionen eine in x-Richtung gespannte Saite, beschrieben durch $z(x,t)$ (z: transversale Auslenkung bei x zum Zeitpunkt t; longitudinale Auslenkungen werden nicht zugelassen).

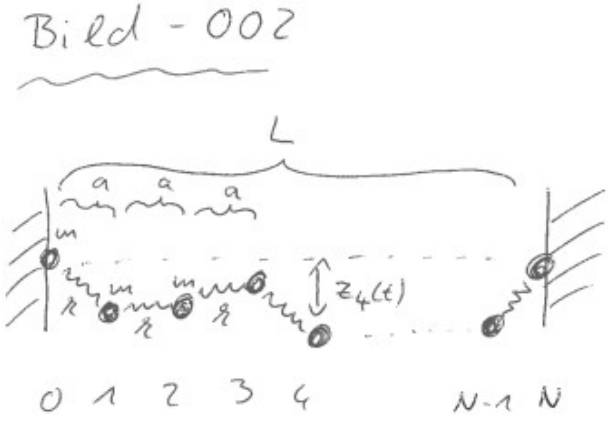


- Einfaches Beispiel einer Feldtheorie:
  - z hängt nur von 2 Variablen x und t ab.
  - Bedeutung von z offensichtlich.
  - Deutlich komplizierteres Beispiel bildet die ED: Elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und magnetisches Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ sind Vektoren, hängen von 4 Variablen $\mathbf{r}$ und t ab, Bedeutung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ eher abstrakt.

- Modelliere Saite durch $N+1$ identische Massenpunkte (Massen m, Positionen $\mathbf{r}_j = (x_j, z_j)$) verbunden mit N identischen Federn (Ruhelängen 0, Federkonstanten k):
  - Saite an beiden Enden im Abstand L in x-Richtung eingespannt, keine longitudinalen Auslenkungen (d.h. Auslenkungen in x-Richtung): $x_j = aj$ mit Abstand $a = L/N$ zwischen benachbarten Massenpunkten.
  - Dynamische Freiheitsgrade sind transversale Auslenkungen $z_j(t)$.
  - Lagrange-Funktion:

$$L \;=\; T - V \;=\; \sum_{j=0}^{N} \frac{m}{2}\dot{z}_j^2(t) - \sum_{j=1}^{N} \frac{k}{2}\Big(a^2 + (z_j(t) - z_{j-1}(t))^2\Big). \tag{1}$$

    (nahezu identisch zur Lagrange-Funktion des 1-dimensionalen Kristalls aus "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik [SoSe 2020]", Abschnitt 4.4).



- Übergang ins Kontinuum (**Kontinuumslimes**):
  - $N \to \infty$, wobei $L = Na = \text{const}$ (Positionen der Endpunkte verändern sich nicht), d.h. $a = L/N \to 0$.
  - Massendichte (bzw. Gesamtmasse) der Saite bleibt konstant, $\rho = m/a = \text{const}$, d.h. $m = \rho a \to 0$,
  - $\kappa = ka = \text{const}$, d.h. $k = \kappa/a \to \infty$ (eine Feder [Federkonstante k] in 2 "halbe Federn" zu zerschneiden liefert 2 Federn jeweils mit Federkonstante $2k$:
    $V = kx^2/2 = (2k)(x/2)^2/2 + (2k)(x/2)^2/2 = \text{const}$).
  - Endliche m und k sind im Kontinuumslimes nicht sinnvoll, müssen durch endliche ρ und κ ersetzt werden.
  - Außerdem

$$z_j(t) \;\to\; z(x,t) \quad (x = aj) \tag{2}$$

$$\sum_j a \;\to\; \int_0^L dx \tag{3}$$

$$\frac{z_j(t) - z_{j-1}(t)}{a} \;\to\; \frac{\partial}{\partial x} z(x,t) \;=\; z'(x,t), \tag{4}$$

d.h. diskreter Index j wird durch kontinuierliche Variable x ersetzt, Summen durch Integrale, finite Differenzen durch Ableitungen.

– Lagrange-Funktion:

$$L = \sum_{j=0}^{N} a\frac{m}{2a}\dot{z}_j^2(t) - \sum_{j=1}^{N} a\frac{ka}{2}\left(\frac{z_j(t)-z_{j-1}(t)}{a}\right)^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^L dx \Bigg(\underbrace{\frac{\rho}{2}\dot{z}^2(x,t) - \frac{\kappa}{2}z'^2(x,t)}_{=\mathcal{L}(\dot{z},z',z)}\Bigg) \tag{5}$$

(unterscheidet sich um irrelevante Konstante von (1)).

* $\mathcal{L}(\dot{z},z',z)$ wird als **Lagrange-Dichte** bezeichnet (Integral über x liefert Lagrange-Funktion).
* Wirkung der Saite:

$$S[z] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx\, \mathcal{L}(\dot{z},z',z). \tag{6}$$

***** 17. Oktober 2025 (2. Vorlesung) ******

- Prinzip der kleinsten Wirkung (auch als Hamiltonsches Prinzip bezeichnet): Physikalische Zeitentwicklung von $z(x,t)$ entspricht Extremum der Wirkung, d.h. beliebige $\delta z(x,t)$ liefern $\delta S = 0$.

- Bewegungsgleichungen bzw. Feldgleichungen mit Hilfe von Variationsrechnung,

$$\begin{aligned}
0 = \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\delta\dot{z} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'}\delta z' + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\delta z\right) = \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\delta z\right) + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'}\delta z\right) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\right)\delta z = \\
&= \underbrace{\int_0^L dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\delta z\Big|_{t=t_i}^{t=t_f}}_{=0} + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'}\delta z\Big|_{x=0}^{x=L} \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\right)\delta z.
\end{aligned} \tag{7}$$

– Erster Term nach letztem Gleichheitszeichen verschwindet aufgrund des Prinzips der kleinsten Wirkung, bei dem $z(x,t)$ bei $t = t_i$ und bei $t = t_f$ vorgegeben ist, d.h. $\delta z(x,t_i) = \delta z(x,t_f) = 0$.

– Damit $\delta S = 0$, wenn

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z'} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

(eine Variante der Euler-Lagrange-Gleichungen, die zum hier diskutierten Beispiel gehörige **Feldgleichung**) und

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z \Big|_{x=0}^{x=L} \quad = \quad 0 \tag{9}$$

(eine Gleichung am Rand des Felds, also an den Endpunkten der Saite, d.h. bei $x = 0$ und $x = L$) erfüllt sind.

- Feldgleichungen, wie z.B. (8), sind **partielle DGls**, d.h. DGls in mehreren Variablen, und daher i.A. viel schwieriger zu lösen, als gewöhnliche DGls der Mechanik (umfassendere Behandlung von partiellen DGls in "Theoretische Physik 3, Mathematische Ergänzungen zur Vorlesung").
- Zusätzliche Gleichungen am Rand, wie z.B. (9), sind in der Feldtheorie ebenso wichtig, wie Feldgleichungen (8), dürfen nicht ignoriert oder vergessen werden.

- Einsetzen der Lagrange-Dichte der Saite (5) liefert Feldgleichung

$$\rho \ddot{z}(x,t) - \kappa z''(x,t) \quad = \quad 0 \tag{10}$$

sowie

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left(z'(L,t)\delta z(L,t) - z'(0,t)\delta z(0,t) \right) \quad = \quad 0. \tag{11}$$

***** 21. Oktober 2025 (3. Vorlesung) *****

- Allgemeine Lösung der Feldgleichung (10) einfach (durch "scharfes Hinschauen"),

$$z(x,t) \quad = \quad z_+(x+vt) + z_-(x-vt) \quad , \quad v \quad = \quad \sqrt{\kappa/\rho}. \tag{12}$$

  - z_+ und z_- sind beliebige unabhängige Funktionen in jeweils einer Variable.
  - $z_+(x+vt)$ entspricht einer in negativer x-Richtung mit Geschwindigkeit v laufenden Welle.
    $z_-(x-vt)$ entspricht einer in positiver x-Richtung mit Geschwindigkeit v laufenden Welle.
    $\rightarrow$ (10) wird auch als **Wellengleichung** bezeichnet.
  - Wellengleichungen analog zu (10) existieren auch in 3 oder mehr Variablen (z.B. Feldgleichung einer schwingenden Membran, Feldgleichungen des em Feldes), dann einfache Lösung wie in (12) nicht mehr möglich.

- Für weitere Einschränkung der Lösung ist physikalische Vorgabe für Endpunkte der Saite erforderlich (z.B. eingespannt, frei beweglich, periodisch).

- Typische Vorgabe ist beidseitig eingespannte Saite (sogenannte **Dirichlet-Randbedingungen**): $z(0,t) = z(L,t) = 0$.

  - Es folgt $\delta z(0,t) = \delta z(L,t) = 0$, damit (11) automatisch erfüllt.

– Einsetzen von (12) liefert Bedingungen an z_+ und z_-:

$$z(0,t) = z_+(+vt) + z_-(-vt) = 0 \quad (13)$$

$$z(L,t) = z_+(L+vt) + z_-(L-vt) = 0, \quad (14)$$

woraus

$$z_+(+u) + z_-(-u) = 0 \quad (15)$$

$$z_+(+u+2L) + z_-(-u) = 0 \quad (16)$$

bzw.

$$z_+(+u+2L) - z_+(+u) = 0 \quad , \quad z_-(+u) = -z_+(-u) \quad (17)$$

folgt.
$\rightarrow$ z_+ ist damit beliebige $2L$-periodische Funktion.
$\rightarrow$ z_- ist durch z_+ vollständig festgelegt.

- Spezielle Lösung erfordert Vorgabe von ABs, z.B. $z(x,0) = f(x)$ (Auslenkung der Saite bei $t = 0$) und $\dot{z}(x,0) = g(x)$ (Geschwindigkeit der Saite bei $t = 0$), legen z_+ und damit $z(x,t)$ eindeutig fest:

  – Einsetzen von (17) [rechte Gleichung] in (12) liefert z und $\dot{z}$ ausgedrückt durch z_+:

$$z(x,t) = z_+(+x+vt) - z_+(-x+vt) \quad (18)$$

$$\dot{z}(x,t) = v\Big(z'_+(+x+vt) - z'_+(-x+vt)\Big) \quad (19)$$

  (z'_+ bzw. z'_- bezeichnet Ableitung nach Argument von z_+ bzw. z_-, nicht Ableitung nach x).

  – ABs liefern Gleichungssystem zur Bestimmung von z_+:

$$z(x,0) = z_+(+x) - z_+(-x) = f(x)$$

$$\dot{z}(x,0) = v\Big(z'_+(+x) - z'_+(-x)\Big) = g(x)$$

$$\rightarrow \quad v\Big(z_+(+x) + z_+(-x)\Big) = \int dx\, g(x) = G(x)$$

$$\rightarrow \quad z_+(+x) + z_+(-x) = \frac{G(x)}{v}$$

$$\rightarrow \quad z_+(+x) = \frac{1}{2}\left(+ f(x) + \frac{G(x)}{v}\right)$$

$$\rightarrow \quad z_+(-x) = \frac{1}{2}\left(- f(x) + \frac{G(x)}{v}\right) \quad (20)$$

  (G ist Stammfunktion von g; Gleichungen gelten für $0 \le x \le L$, legen damit $z_+(u)$ für $-L \le u \le +L$ fest, Periodizität (17) [linke Gleichung] legt dann $z_+(u)$ für $u \in \mathbb{R}$ fest und damit $z(x,t)$ gemäß (18); unbestimmte Konstante in G aufgrund der Integration fällt in (18) wegen Differenz weg).

  – Konkretes Beispiel:

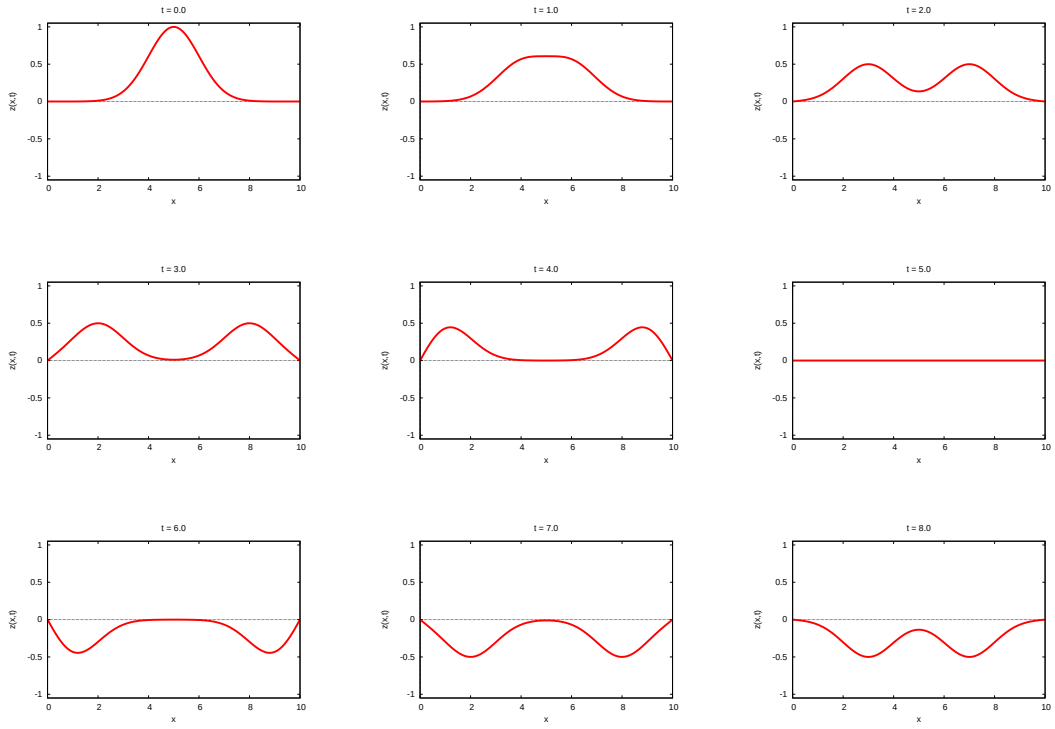
    * ABs

$$z(x,0) = f(x) = \Delta\left(\exp\left(- \frac{(x-L/2)^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(- \frac{(L/2)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \quad (21)$$

$$\dot{z}(x,0) = g(x) = 0 \quad \rightarrow \quad G(x) = 0, \quad (22)$$

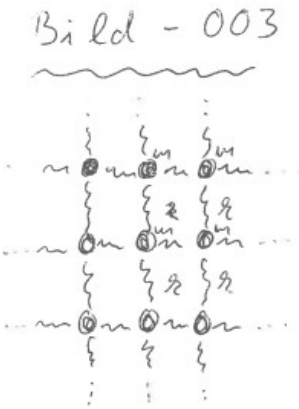
d.h. bei $t = 0$ mittige nahezu Gauß-förmige Auslenkung um Δ mit Breite σ, Saite dabei in Ruhe.

∗ Abbildungen für $L = 10.0$, $\Delta = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $v = 1.0$: Gauß-förmige Auslenkung teilt sich in links- und rechtslaufende Welle, wird an eingespannten Enden reflektiert, läuft mit umgekehrtem Vorzeichen wieder zurück.

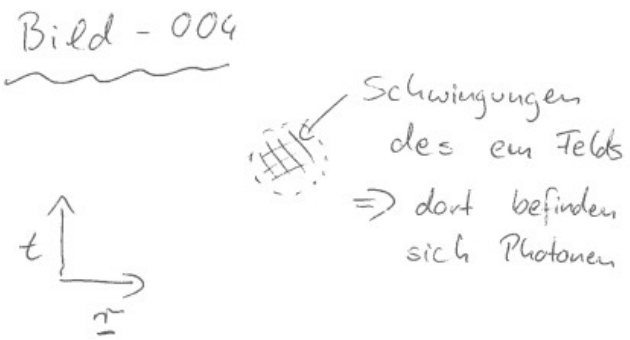


1.2 Fortgeschrittene Feldtheorien: z.B. Feldtheorien, die elementare Teilchen beschreiben (ED, ...)

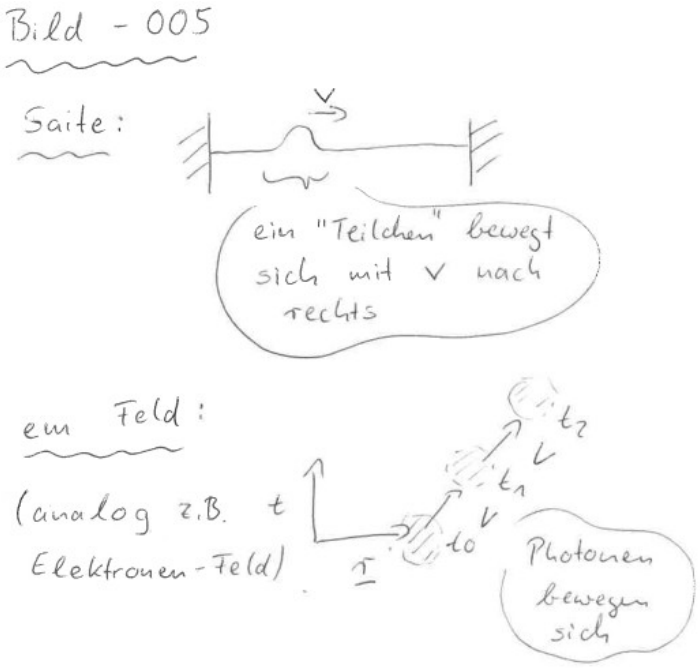
- Im Folgenden eine rein qualitative, oberflächliche, anschauliche Diskussion von Feldtheorien und typischen von ihnen beschriebenen Phänomenen.
  - Soll Bedeutung und Potential von Feldtheorien motivieren.
  - Nur Teile davon in dieser Vorlesung (Fortsetzung ist "Quantenfeldtheorie").
- Konstruktion der schwingenden Saite mit Massenpunkten und Federn geradlinig auf 2 oder 3 Raumdimensionen übertragbar.



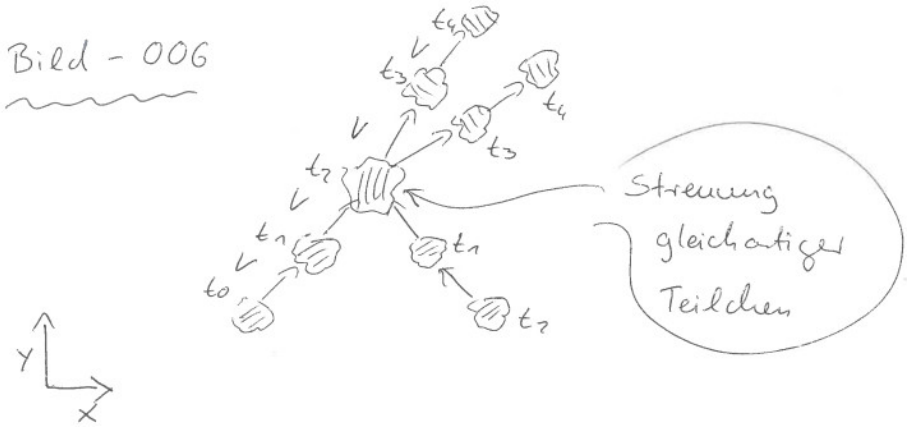
- Das em Feld und andere Felder sind mathematisch sehr ähnlich zu einem feinen, den Raum ausfüllenden, 3-dimensionalen Netzwerk von Massenpunkten und Federn.
  - *"Anschaulich kann man sich Felder als solche Netzwerke vorstellen."*
- Wie kann eine Feldtheorie Teilchen beschreiben?
  - Jeder Teilchensorte (z.B. Elektronen, Photonen, ...) ist ein entsprechendes Feld zugeordnet (siehe Beispiele oben).
  - Wenn ein Feld in der Nähe des Raumzeitpunkts $(\mathbf{r}, t)$ seinen Wert (z.B. $\mathbf{E}$) zeitlich oder räumlich verändert oder der Wert $\neq 0$ ist, steckt in diesem Bereich und zu dieser Zeit Energie im Feld. Ein Experimentator beobachtet bzw. interpretiert das als ein oder mehrere Teilchen bei $(\mathbf{r}, t)$ (z.B. im Fall von $\mathbf{E}$ Photonen).
    - *"In der Nähe des Raumzeitpunkts $(\mathbf{r}, t)$ schwingt das Netzwerk von Massenpunken und Federn und/oder ist deformiert, was einem oder mehreren Teilchen entspricht.*



  - Teilchenbewegungen werden durch Wellen beschrieben:
    - Wiki: *"Eine Welle ist eine sich räumlich ausbreitende Veränderung (Störung) oder Schwingung einer orts- und zeitabhängigen physikalischen Größe."*
    - Bewegt sich der Bereich, in dem Energie im Feld enthalten ist, entspricht dies einer Teilchenbewegung. Im Rahmen der Feldtheorie spricht man von einer Welle.

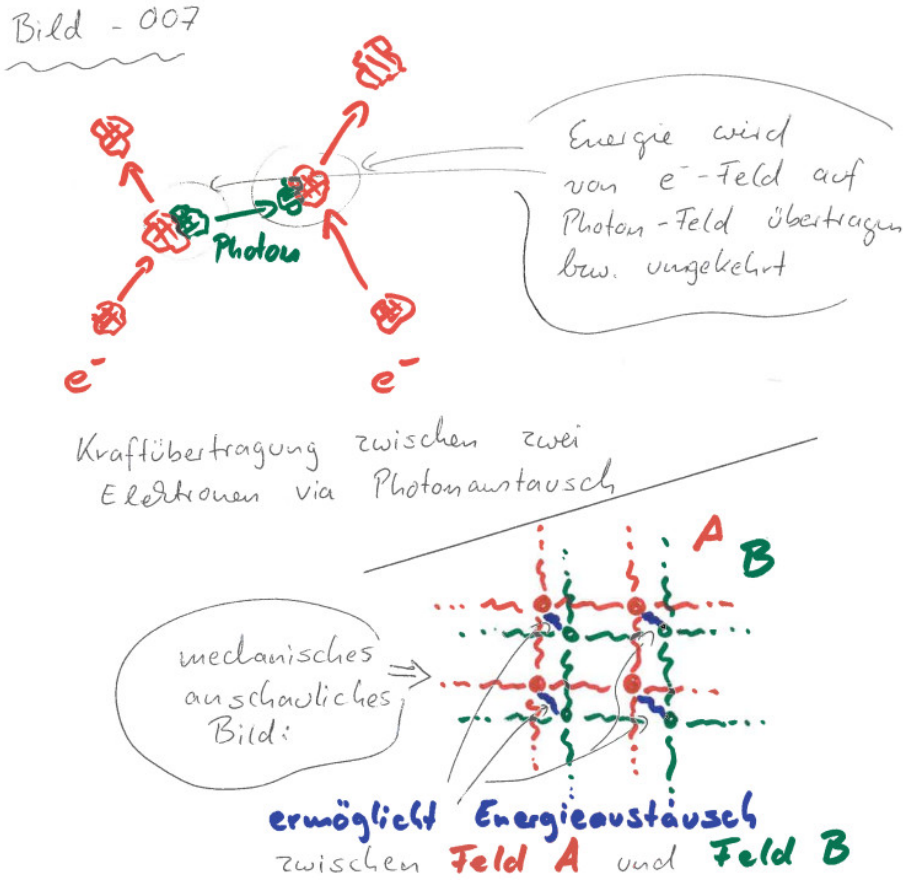


– Streuung gleichartiger Teilchen:
  * Beeinflussen sich kollidierende Wellen gegenseitig, entspricht dies der Streuung gleichartiger Teilchen.
  * Ob dies der Fall ist, hängt von konkreter Formulierung der Feldtheorie ab, d.h. der Lagrange-Dichte oder den Feldgleichungen.
  * Z.B. keine Photon-Photon-Streuung beim em Feld.



– Teilchenerzeugung und -vernichtung:
  * Energie kann von einem Feld A auf anderes Feld B übertragen werden
    $\rightarrow$ Teilchen der Sorte A verschwinden, Teilchen der Sorte B entstehen.
  * *"Kann man sich ebenfalls anschaulich durch Netzwerke von Massenpunkten und Federn vorstellen: Netzwerk A und Netzwerk B, zwischen denen zusätzliche Federn gespannt sind, können Energie austauschen."*

* Z.B. kann in der quantisierten ED (Quantenelektrodynamik, QED) ein Elektron ein Photon erzeugen (= aussenden) und ein anderes Elektron dieses Photon vernichten (= absorbieren), was eine abstoßenden Kraft zwischen den Elektronen bewirkt.



- Klassische Feldtheorie (Inhalt dieser Vorlesung) versus Quantenfeldtheorie (Inhalt spezieller fortgeschrittener Vorlesungen):
  - In Quantenfeldtheorie kann Feldenergie nur um von der Theorie vorgegebene Energiemengen (Quanten) erhöht oder erniedrigt werden. Jedes Quant entspricht Erzeugung oder Vernichtung von einem Teilchen. Teilchenanzahl ist also eine nicht-negative ganze Zahl.
  - In klassischer Feldtheorie kann die Feldenergie beliebig erhöht oder erniedrigt werden. Einschränkung auf ganze Teilchenzahlen existiert daher nicht. Eine solche Theorie ist wenig sinnvoll zur Beschreibung von Systemen weniger Teilchen, gut jedoch für Systeme sehr vieler Teilchen.
  - An Phänomenen der ED ist häufig große Anzahl von Photonen beteiligt (z.B. Einschalten einer Lampe, Feld in einem Kondensator, ...). Solche Phänomene lassen sich gut im Rahmen einer klassischen Feldtheorie (klassische ED) beschreiben und verstehen (wesentlicher Inhalt dieser Vorlesung).

1.3 Gliederung der Vorlesung

- Zunächst spezielle einfach beschreibbare Phänomene der ED: Elektrostatik und Magnetostatik (keine zeitabhängigen Phänomene).
- Dann Kombination von Elektrostatik und Magnetostatik und Hinzunahme zeitabhängiger Phänomene
  $\rightarrow$ ED.
- Relativistische Formulierung der ED (in Form von Lorentz-Vektoren und -Tensoren, nicht mittels $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$).
- Diskussion von Phänomenen der ED.

2 Elektrostatik

- **Elektrostatik**: Ruhende, d.h. zeitunabhängige elektrische Ladungen und Ladungsverteilungen.

2.1 Coulomb-Gesetz

- **Elektrische Ladung** q (im Folgenden meist nur als Ladung bezeichnet): Eigenschaft eines Massenpunkts (man spricht dann auch von **Punktladung**) oder ausgedehnten Objekts, ähnlich zur in der "Mechanik" eingeführten Masse m.
  - *"m ist Ladung der Gravitation, q ist Ladung der ED."*
  - Während $m \geq 0$, kann q sowohl positiv als auch negativ sein.
- Grundlegende experimentelle Befunde:
  - Gleichnamige Ladungen (gleiches Vorzeichen) stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen (entgegengesetztes Vorzeichen) ziehen sich an (ein wesentlicher Unterschied zur Gravitation, bei der sich Massen stets anziehen).
  - Kraft zwischen zwei Punktladungen $\propto 1/(\text{Abstand})^2$.
  - Kraftgesetz ist das **Coulomb-Gesetz**:

$$\mathbf{F}_{j\to k} = \alpha \frac{q_j q_k}{r_{jk}^2} \hat{\mathbf{r}}_{j\to k}. \tag{23}$$

    * $\mathbf{F}_{j\to k}$: Kraft von Punktladung j auf Punktladung k.
    * q_j: Elektrische Ladung der Punktladung j.
    * $r_{jk} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|$ ($\mathbf{r}_j$: Position der Punktladung j).
    * $\hat{\mathbf{r}}_{j\to k} = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)/r_{jk}$.
    * $\alpha > 0$: Konstante (abhängig vom Maßsystem, d.h. den gewählten Einheiten; siehe unten).
  - Superpositionsprinzip: > 2 Punktladungen, Kraft auf Punktladung k

$$\mathbf{F}_k = \sum_{j\neq k} \mathbf{F}_{j\to k} \tag{24}$$

    (scheint selbstverständlich, ist aber nicht bei allen Theorien so, z.B. nicht der Fall bei starker WW [WW zwischen Quarks]).
  - Ladung von Elementarteilchen quantisiert:
    * Elektron: $q = -e$.
    * Proton: $q = +e$ (kein elementares Teilchen, setzt sich aus 2 u-Quarks und einem d-Quark zusammen).
    * u-Quark: $q = +(2/3)e$.
    * d-Quark: $q = -(1/3)e$.
    * ...
    * e nennt man **Elementarladung**.
  - **Ladungserhaltung**: Summe aller Ladungen in abgeschlossenem System erhalten.

    - Positive und negative Ladungen können sich gegenseitig auslöschen bzw. paarweise erzeugt werden.
    - Erzeugung/Vernichtung einer einzelnen positiven oder negativen Ladung nicht möglich.
    - Kann man mit Noether-Theorem zeigen ($\rightarrow$ Vorlesung "Quantenfeldtheorie").
  - Gültigkeitsbereich des Coulomb-Gesetzes: $10^{-14}\,\mathrm{m} \lesssim r_{jk} \lesssim 10^{8}\,\mathrm{m}$.
    - Kleinere Abstände: Erzeugung/Vernichtung von Teilchen, Quantenfeldtheorie erforderlich.
    - Größere Abstände: Präzisionsexperimente schwierig.

- Maßsysteme:
  - **Gauß-System**:
    - *"Wahl des Theoretikers."* (Wird in dieser Vorlesung überwiegend verwendet.)
    - $\alpha = 1$ (Definition).
    - Damit $[q] = \mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{m}^{3/2}/\mathrm{s}$.
    - $e \approx 4.80 \times 10^{-10}\,\mathrm{esu}$ (**electrostatic unit**); $1\,\mathrm{esu} = \mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}/\mathrm{s}$.
    - Elektrische und magnetische Felder haben gleiche Einheit (dazu später mehr).
  - **MKSA-System** (Meter-Kilogramm-Sekunde-Ampere) bzw. **SI-System** (Systeme International d'Unites):
    - *"Wahl des Experimentalisten."*
    - $\alpha = 10^{-7}\,\mathrm{N}\,c^2/\mathrm{A}^2$ (Definition; A: **Ampere**).
    - Damit $[q] = \mathrm{C}$ (**Coulomb**); $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\,s}$.
    - $e \approx 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.
    - Häufig $\alpha = 1/4\pi\epsilon_0$ (Definition von ϵ_0 [**Dielektrizitätskonstante des Vakuums**]; $\epsilon_0 \approx 8.84 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/\mathrm{N\,m}^2$).
    - Elektrische und magnetische Felder haben unterschiedliche Einheiten.

2.2 Elektrisches Feld

- Definition:

$$\textbf{elektrisches Feld } \mathbf{E} \quad = \quad \frac{\text{elektrostatische Kraft auf Punktladung } q}{q} \tag{25}$$

  ($\mathbf{E}$ bezeichnet man auch als **elektrische Feldstärke**, q als **Probeladung**).

- Das von N Punktladungen erzeugte elektrische Feld (E-Feld) lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \tag{26}$$

- E-Feld ist Vektorfeld, d.h. jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ wird ein Vektor $\mathbf{E}$ zugeordnet.

- Kraft auf Probeladung q im E-Feld:

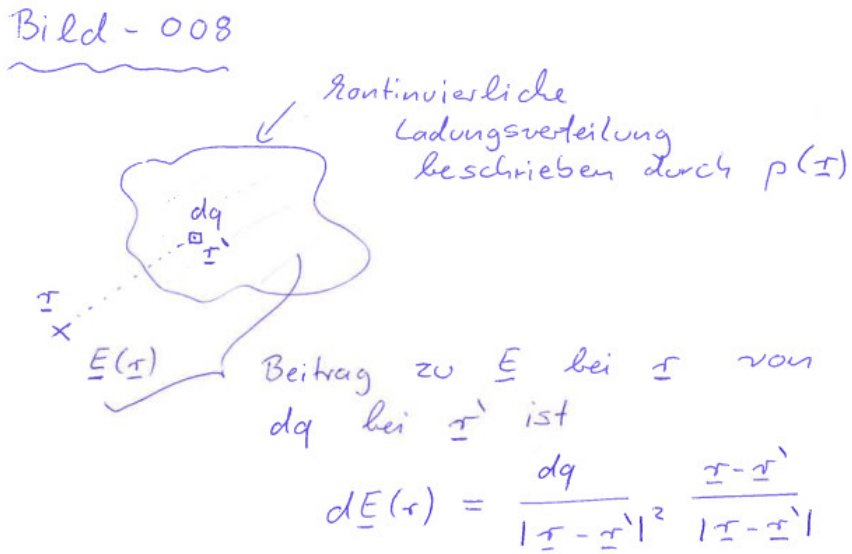
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad = \quad q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{27}$$

- Verallgemeinerung durch Einführen der (**elektrischen**) **Ladungsdichte**:

$$\rho(\mathbf{r}) \quad = \quad \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad = \quad \frac{dq}{dV}. \tag{28}$$

Damit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int \frac{dq}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad = \quad \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{29}$$



- Beispiel: E-Feld einer homogen geladenen Kugel im Ursprung (Radius R, Ladung q):
  - Ladungsdichte:

$$\rho(\mathbf{r}) \quad = \quad \begin{cases} 3q/4\pi R^3 & \text{falls } |\mathbf{r}| < R \\ 0 & \text{falls } |\mathbf{r}| \geq R \end{cases}. \tag{30}$$

  - E-Feld ergibt sich durch Einsetzen von (30) in (29) und Lösen des Integrals (siehe "Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden", Abschnitt 9.2 bzw. Hausaufgabe).

****** 24. Oktober 2025 (4. Vorlesung) ******

- Mit Hilfe der sogenannten δ-**Funktion** kann auch die Ladungsdichte einer Punktladung q_j bei $\mathbf{r}_j$ angegeben werden:

$$\rho(\mathbf{r}) \quad = \quad q_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j). \tag{31}$$

2.3 δ-Funktion

- Sehr häufig und wichtig in Physik, z.B. in Feldtheorie oder Quantenmechanik.
- δ-Funktion in 1 Dimension:
  - Definition von $\delta(x)$: Für jede glatte Funktion $f(x)$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x) \quad = \quad f(x_0). \tag{32}$$

  - "Anschauliche Definition" von $\delta(x)$:

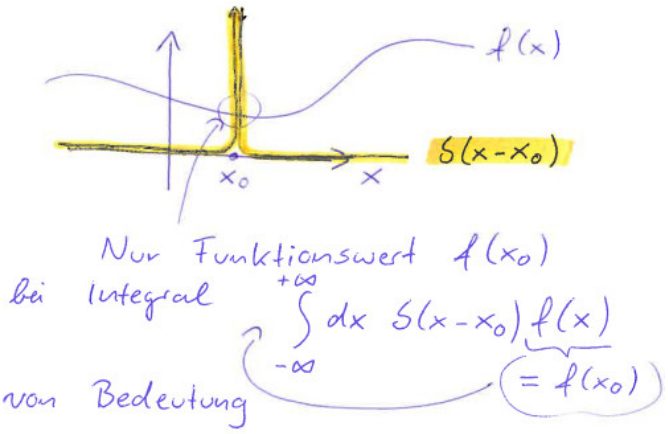
$$\delta(x - x_0) \quad = \quad \begin{cases} \infty & \text{falls } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{33}$$

    wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x - x_0) \quad = \quad 1, \tag{34}$$

    d.h. unendlich schmaler und hoher Peak bei $x = x_0$ mit Flächeninhalt 1.

Bild - 009



  - Rechnen mit δ-Funktionen i.d.R. sehr einfach, lediglich (32) muss verwendet werden: δ-Funktionen und Integrale löschen sich paarweise aus.
  - Gelegentlich erfordern Rechnungen mathematische Darstellung der δ-Funktion in Form eines Grenzwertes einer stetig differenzierbaren Funktion; viele Möglichkeiten, z.B.

$$\delta(x) \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-x^2/2\epsilon^2}; \tag{35}$$

    Grenzwert $\lim_{\epsilon \to 0}$ darf dabei erst am Ende der Rechnung gebildet werden (die δ-Funktion ist aus mathematischer Sicht keine Funktion, sondern eine **Distribution**).

- δ-Funktion in mehr als 1 Dimension, z.B. in 3 Raumdimensionen:
  - Produkt 1-dimensionaler δ-Funktionen,

$$\delta(\mathbf{r}) \quad = \quad \delta(x)\delta(y)\delta(z). \tag{36}$$

– Beispiel: Berechne/überprüfe Ladungsstärke der durch die Ladungsdichte (31) beschriebenen Punktladung:

$$q = \int d^3r\,\rho(\mathbf{r}) = q_j \int d^3r\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) =$$
$$= q_j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta(x-x_j)}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\delta(y-y_j)}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\delta(z-z_j)}_{=1} = q_j. \tag{37}$$

- Starke Analogie zwischen δ-Funktion (im Kontinuierlichen, d.h. im Kontext von Funktionen $f(x)$) und Kronecker-δ (im Diskreten, d.h. im Kontext von Vektoren f_j), z.B.

$$\sum_j \delta_{jk} = 1 \quad \text{(analog zu (34))} \tag{38}$$
$$\sum_j \delta_{jk} f_j = f_k \quad \text{(analog zu (32))}. \tag{39}$$

2.4 Elektrisches Feld (Fortsetzung)

- Das von N Punktladungen erzeugte E-Feld (26) kann damit auch gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{N} q_j \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j)}_{\text{Ladungsdichte der } N \text{ Punktladungen}} \Bigg) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{40}$$

geschrieben werden.

- Vertauschen von Integral und Summe und Lösen des Integrals führt zurück zu (26):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} q_j \int d^3r'\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}. \tag{41}$$

- Ist "glatte Ladungsdichte" (Ladungsdichte beschrieben durch stückweise stetige Funktion), wie z.B. in (30), realistisch?
  - Ladungen in Natur quantisiert und mit elementaren Teilchen, d.h. Massenpunkten assoziert ...?
  - Müssten also nicht stets Ladungsdichten der Form

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} q_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \tag{42}$$

verwendet werden ...?
  - Im Prinzip ja ...
  - ... aber glatte Ladungsdichten, wie z.B. (30), sind häufig gute Näherungen (z.B. im Fall der homogen geladenen Kugel, wenn Probeladungen, E-Feld, etc. nur in Bereichen hinreichend weit von den Punktladungen entfernt betrachtet werden).

– Mit solchen **mittleren Ladungsdichten** (gemittelt über kleine räumliche Bereiche deren Ausdehnung etwa dem Abstand benachbarter Punktladungen entspricht) kann man meist leichter rechnen, als mit **mikrokopischen Ladungsdichten** (42) (detaillierte Diskussion in Abschnitt 7.2).

– Analogie: Mechanik, starrer Körper, auch da wurden mittlere Massendichten betrachtet, obwohl die Masse in winzigen Bereichen konzentriert ist ("in den Atomkernen").

2.5 Elektrostatisches Potential

- In Mechanik wurden konservativen Kräften ($\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$) Potentiale V zugeordnet:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}). \tag{43}$$

- Coulomb-Kraft ist Zentralkraft und daher konservativ.

- Da E-Feld proportional zur Kraft ($\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, Gleichung (27)), ist es zweckmäßig auch dem E-Feld ein Potential zuzuordnen, das **elektrostatische Potential** Φ:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}). \tag{44}$$

- Potential, in dem sich eine Probeladung q bewegt, ergibt sich aus elektrostatischem Potential analog zu (27) gemäß

$$V(\mathbf{r}) = q\Phi(\mathbf{r}). \tag{45}$$

- Elektrostatisches Potential und E-Feld einer Punktladung q_j bei $\mathbf{r}_j$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \tag{46}$$

(mathematische Struktur und Berechnung analog zur in "Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden", Kapitel 5 und 6 betrachteten Gravitationskraft).

- Elektrostatische Potentiale zu E-Feldern (26) und (29) lauten damit

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \tag{47}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{48}$$

2.6 Feldgleichungen

- Mit (29) lässt sich für gegebene Ladungsdichte E-Feld berechnen.
- Zusätzlich zu diesem Integralausdruck ist äquivalente DGl wünschenswert, die sogenannte **Feldgleichung**.
- Wende dafür ∇ auf (29) an:

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad \nabla \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad = \quad \int d^3r' \, \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad = \quad \ldots \tag{49}$$

- Nebenrechnung:

$$\partial_j \frac{r_j}{|\mathbf{r}|^3} \quad = \quad \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3 r_j}{|\mathbf{r}|^4} \frac{r_j}{|\mathbf{r}|} \quad = \quad 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \neq 0 \tag{50}$$

  ($\partial_j \equiv \partial/\partial r_j$; $\partial_j |\mathbf{r}| = r_j/|\mathbf{r}|$ wurde verwendet); Ergebnis gilt nicht für $\mathbf{r} = 0$, da $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ dort nicht differenzierbar; für Aussage bei $\mathbf{r} = 0$ benötigt man Satz von Gauß.

***** 28. Oktober 2025 (5. Vorlesung) *****

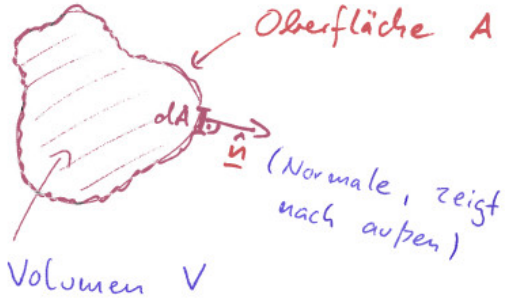
2.7 Satz von Gauß und Satz von Stokes

- Satz von Gauß und Satz von Stokes: Wichtige Integralsätze der Feldtheorie.
- **Satz von Gauß**:

$$\int_V dV \, \underbrace{\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{= \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{r})} \quad = \quad \oint_A d\mathbf{A} \, \mathbf{f}(\mathbf{r}). \tag{51}$$

  - $\int_V dV$: Integration über d-dimensionales Volumen V (häufig in $d = 3$ Raumdimensionen, dann $\int_V dV = \int_V d^3r$).
  - $\oint_A d\mathbf{A} = \oint_A dA \, \hat{\mathbf{n}}$: Integration über geschlossene das Volumen V begrenzende $d-1$-dimensionale (Hyper-)Fläche A (dA: Flächenelement; $\hat{\mathbf{n}}$: Flächennormale).
  - $\mathbf{f}$: Beliebige (stetig differenzierbare) vektorielle Funktion (d Komponenten).

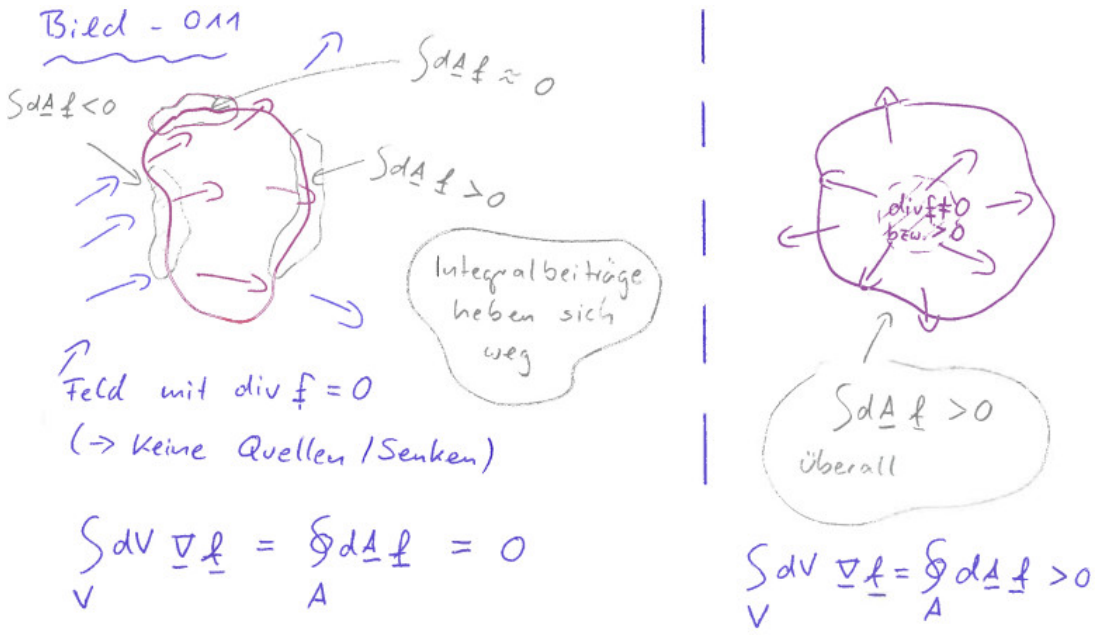
Bild-010 (Gauß)



- Erlaubt Umschreiben eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral.
- Anschaulich:
  - $\mathbf{f}$ kann man sich als Flussdichte von z.B. Wasser vorstellen (das Wasser fließt entlang der Vektorpfeile; je länger die Pfeile, desto mehr Wasser pro Zeit).
  - div $\mathbf{f}$: Wiki, *"Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben ... Interpretiert man das Vektorfeld als Strömungsfeld einer Größe, für die die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist die Divergenz die Quelldichte. Senken haben negative Divergenz."*
  - Satz von Gauß in Worten:

    Summe über alle Quellen und Senken innerhalb von V $=$

    $=$ Flussdichte durch die das Volumen V begrenzende Fläche. (52)



- Beispiel: V ist Kugel mit Zentrum im Ursprung und Radius R, $\mathbf{f} = (x, 0, 0)$,

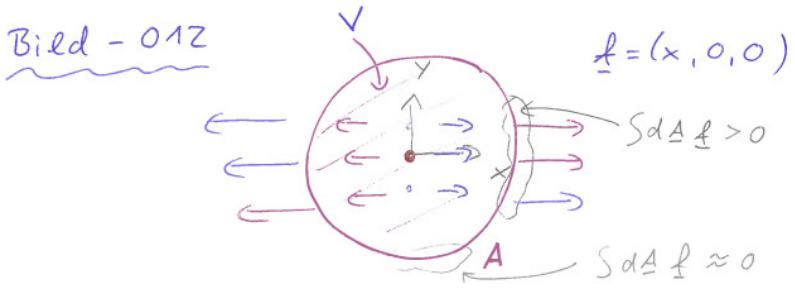
$$\int_V dV \underbrace{\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=1} = \frac{4\pi R^3}{3} \tag{53}$$

$$\oint_A d\mathbf{A}\, \mathbf{f}(\mathbf{r}) = R^2 \int_0^\pi d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathbf{e}_r x \mathbf{e}_x =$$

$$= R^2 \int_0^\pi d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} R \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R^3 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta\, \sin^3(\vartheta)}_{=4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos^2(\varphi)}_{=\pi} = \frac{4\pi R^3}{3}, \tag{54}$$

Satz von Gauß scheint also zu stimmen.



- Beweisskizze (für $d = 2$):
  - Teile Volumen V in sehr viele kleine (d.h. unendlich viele infinitesimale) Quadrate auf.
  - Für jedes infinitesimale Quadrat gilt

$$dV\,\nabla\mathbf{f}(\mathbf{r}) = dx\,dy\left(\frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial y}\right) \tag{55}$$

$$\begin{aligned} &d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}+\mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}-\mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}+\mathbf{e}_y dy/2) + d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}-\mathbf{e}_y dy/2) = \\ &= dy\,\mathbf{e}_x\Big(\mathbf{f}(\mathbf{r}+\mathbf{e}_x dx/2) - \mathbf{f}(\mathbf{r}-\mathbf{e}_x dx/2)\Big) \\ &\quad + dx\,\mathbf{e}_y\Big(\mathbf{f}(\mathbf{r}+\mathbf{e}_y dy/2) - \mathbf{f}(\mathbf{r}-\mathbf{e}_y dy/2)\Big) = \\ &= dx\,dy\,\underbrace{\frac{f_x(\mathbf{r}+\mathbf{e}_x dx/2) - f_x(\mathbf{r}-\mathbf{e}_x dx/2)}{dx}}_{=\partial f_x/\partial x} \\ &\quad + dx\,dy\,\underbrace{\frac{f_y(\mathbf{r}+\mathbf{e}_y dy/2) - f_y(\mathbf{r}-\mathbf{e}_y dy/2)}{dy}}_{=\partial f_y/\partial y} \end{aligned} \tag{56}$$

  und damit

$$\begin{aligned} dV\,\nabla\mathbf{f}(\mathbf{r}) = &\Big(d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}+\mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}-\mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}+\mathbf{e}_y dy/2) \\ &+ d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}-\mathbf{e}_y dy/2)\Big). \end{aligned} \tag{57}$$

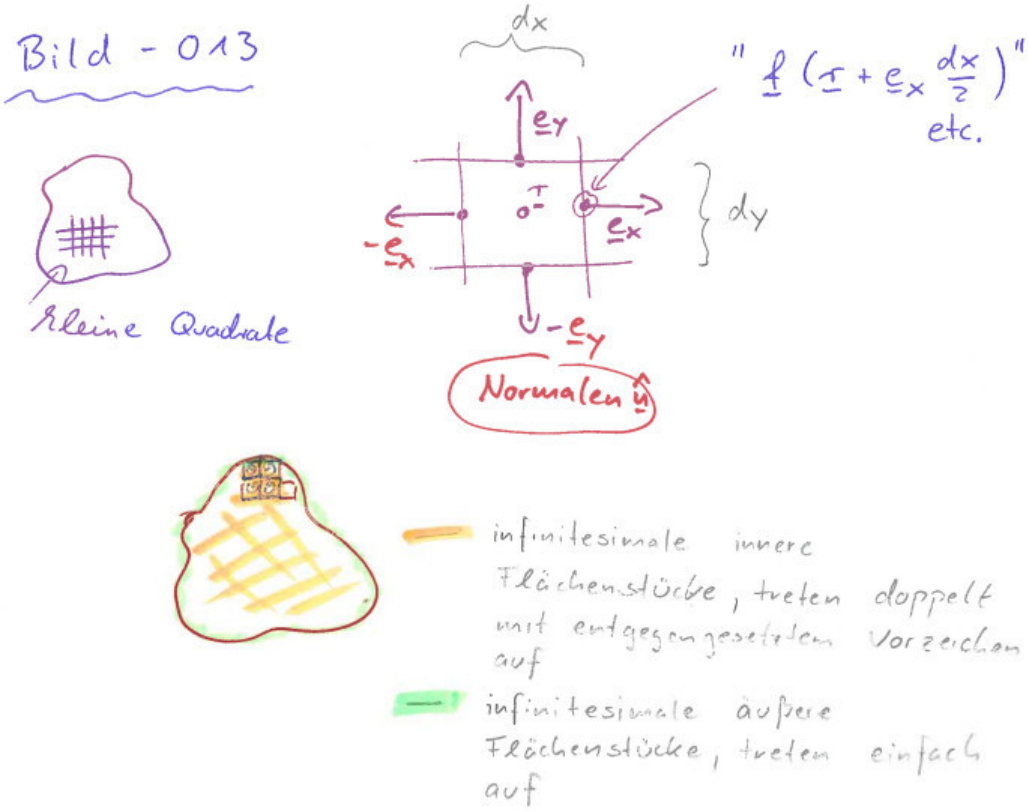
  - Summiere über alle infinitesimalen Quadrate, d.h. integriere über Volumen V:
    - Linke Seite von (57):

$$\int_V dV\,\nabla\mathbf{f}(\mathbf{r}). \tag{58}$$

    - Rechte Seite von (57): Infinitesimale Flächenstücke im Inneren von V treten jeweils doppelt mit entgegengesetztem Vorzeichen auf, heben sich also weg,

$$\oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{f}(\mathbf{r}). \tag{59}$$

    - Satz von Gauß damit bewiesen.

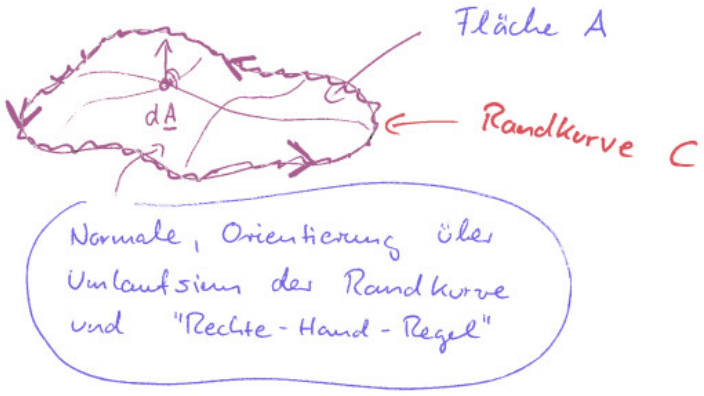


- **Satz von Stokes** (in 3 Dimensionen):

$$\int_A d\mathbf{A}\, \underbrace{\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{r})} \;=\; \oint_C d\mathbf{r}\, \mathbf{f}(\mathbf{r}). \tag{60}$$

  - $\int_A d\mathbf{A}$: Integration über 2-dimensionale eventuell gekrümmte Fläche.
  - $\oint_C d\mathbf{r}$: Integration über geschlossene die Fläche A begrenzende Kurve C.
  - $\mathbf{f}$: Beliebige (stetig differenzierbare) vektorielle Funktion.

Bild - 014 (Stokes)



- Erlaubt Umschreiben eines Flächenintegrals in ein Kurvenintegral.
- Beispiel: A ist Kreis in x-y-Ebene mit Zentrum im Ursprung und Radius R, $\mathbf{f} = (+y, -x, 0)$,

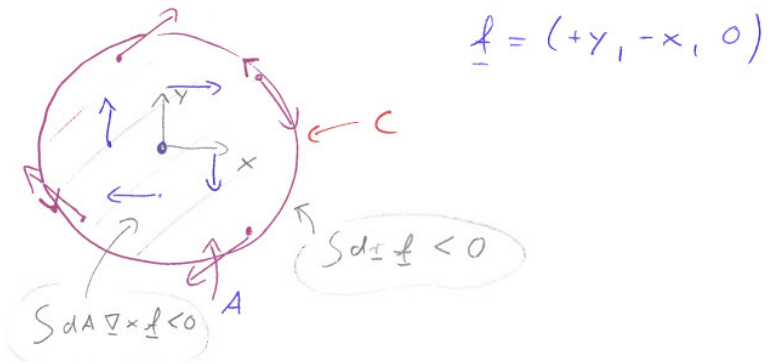
$$\int_A d\mathbf{A} \underbrace{\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=(0,0,-2)} = -2\pi R^2 \tag{61}$$

$$\mathbf{r}(\lambda) = R \begin{pmatrix} +\cos(\lambda) \\ +\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ +\cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint_C d\mathbf{r}\, \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{f}(\mathbf{r}(\lambda)) = -R^2 \int_0^{2\pi} d\lambda = -2\pi R^2,$$

Satz von Stokes scheint also zu stimmen.

Bild - 015



- Beweisskizze: Hausaufgabe.

****** 31. Oktober 2025 (6. Vorlesung) ******

2.8 Feldgleichungen (Fortsetzung)

- Bestimmung von $\nabla \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ auch für $\mathbf{r} = 0$:
  - Betrachte dazu
    $$\int_V d^3r\, \nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad = \quad \ldots \tag{62}$$
    (V ist Kugel im Ursprung mit Radius $R > 0$; Ergebnis unabhängig vom Radius, da $\nabla \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 = 0$ für $\mathbf{r} \neq 0$).
  - Satz von Gauß:
    $$\ldots \quad = \quad \oint_A d\mathbf{A}\, \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad = \quad R^2 \int_0^\pi d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathbf{e}_r \frac{\mathbf{e}_r}{R^2} \quad = \quad 4\pi. \tag{63}$$
  - Auch für $R \to 0$ gilt
    $$\int_V d^3r\, \nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad = \quad 4\pi, \tag{64}$$
    damit
    $$\nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad = \quad 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad \text{bzw.} \quad \triangle \frac{1}{r} \quad = \quad -4\pi\delta(\mathbf{r}). \tag{65}$$
  - Beweis nicht korrekt, da Satz von Gauß stetig differenzierbares $\mathbf{f}$ erfordert, im vorliegenden Fall aber $\mathbf{f} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ nicht stetig differenzierbar bei $\mathbf{r} = 0$; also bestenfalls ein Plausibilitätsargument.
  - Echter Beweis zeitaufwändig: Betrachte z.B. keine Punktladung, sondern homogen geladene Kugel mit Radius R, wiederhole obige Überlegungen, bilde am Ende Grenzwert $R \to 0$ (eventuell Hausaufgabe).
- Fortsetzung von (49):
  $$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int d^3r'\, \rho(\mathbf{r}') \underbrace{\nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}_{4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad = \quad 4\pi\rho(\mathbf{r}). \tag{66}$$
- Außerdem:
  $$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad -\underbrace{\nabla \times \nabla}_{=0} \Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad 0. \tag{67}$$
- Zentrale Gleichungen der Elektrostatik, die Beziehung zwischen Ladungsdichte und E-Feld herstellen:
  $$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad 4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0 \tag{68}$$
  bzw.
  $$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad 4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0 \tag{69}$$
  (Teil eines Satzes von Gleichungen, die wir später als **Maxwell-Gleichungen** kennenlernen werden).

- Integrale Formen von (68) bzw. (69) mit Satz von Gauß bzw. Satz von Stokes:

$$\oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \int_V d^3r\,\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; 4\pi\int_V d^3r\,\rho(\mathbf{r}) \;=\; 4\pi q_{\text{innerhalb von } V} \tag{70}$$

$$\oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \int_A d\mathbf{A}\,\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; 0 \tag{71}$$

  ((70) wird als **Gaußsches Gesetz** bezeichnet).

- Einsetzen von (44) in linke Gleichung von (68):

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) \;=\; -4\pi\rho(\mathbf{r}) \tag{72}$$

  (wird als **Poisson-Gleichung** bezeichnet, für $\rho = 0$ als **Laplace-Gleichung**), ist äquivalent zu (68).

2.9 Feldlinien, Äquipotentialflächen

- Vektorfelder, z.B. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, lassen sich durch Feldlinien $\mathbf{r}(\lambda)$ (Linien mit ausgezeichneter Richtung) graphisch veranschaulichen.
  - Feldlinien $\mathbf{r}(\lambda)$ definiert durch

$$\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}\mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) \;=\; \left|\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}\right|\Big|\mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda))\Big|, \tag{73}$$

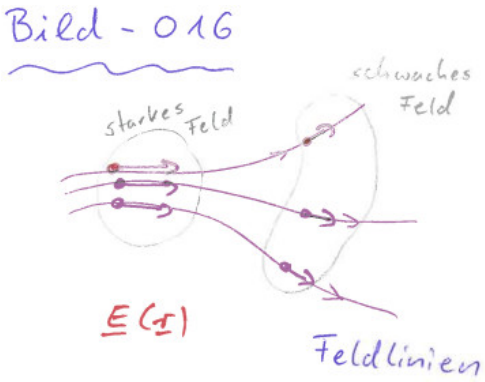
    d.h. sie folgen an jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ den durch $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ beschriebenen Vektorpfeilen, d.h. $d\mathbf{r}(\lambda)/d\lambda \parallel \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda))$ bzw. $d\mathbf{r}(\lambda)/d\lambda \times \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) = 0$.
  - Elektrostatische Kraft auf Probeladung in Richtung der Feldlinien, Stärke der Kraft proportional zur Dichte der Feldlinien.
  - Es gibt keine geschlossenen elektrischen Feldlinien.
    - Beweis durch Widerspruch.
    - Annahme: Es gibt eine geschlossene elektrische Feldlinie $\mathbf{r}(\lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$.
    - Dann gilt aufgrund von (71)

$$\int_0^1 d\lambda\,\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}\mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) \;=\; \oint d\mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; 0. \tag{74}$$

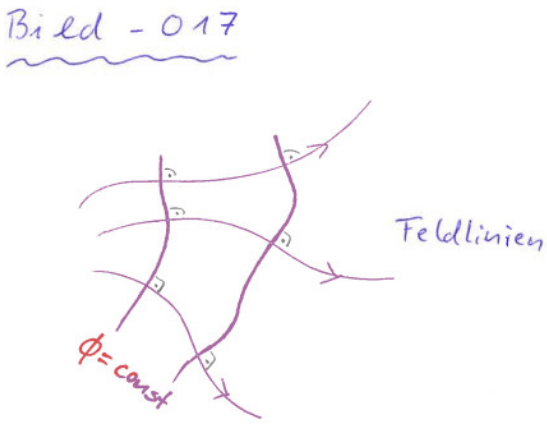
    - Außerdem gilt aufgrund von (73)

$$\int_0^1 d\lambda\,\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}\mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) \;=\; \int_0^1 d\lambda\,\underbrace{\left|\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}\right|}_{>0}\underbrace{\Big|\mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda))\Big|}_{>0} \;>\; 0. \tag{75}$$

    - (74) und (75) im Widerspruch, d.h. Annahme muss falsch sein.



- Gradientenfelder, z.B. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$, lassen sich durch Äquipotentialflächen von $\Phi(\mathbf{r})$ graphisch veranschaulichen.
  - Äquipotentialflächen definiert durch
    $$\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \text{const.} \tag{76}$$
  - Elektrostatische Kraft auf Probeladung und damit Feldlinien senkrecht zu Äquipotentialflächen.



****** 4. November 2025 (7. Vorlesung) ******

2.10 Homogen geladene Kugel: Berechnung des E-Feldes

- Typische Fragestellung in Elektrostatik: Gegeben ist Ladungsverteilung ... wie lautet das zugehörige E-Feld bzw. elektrostatische Potential?
- Häufig mehrere Lösungswege, z.B.
  - (A) Mit Gaußschem Gesetz (70) (i.d.R. einfach, aber nur für hochgradig symmetrische Probleme anwendbar).
  - (B) Lösung der Poisson-Gleichung (72).
  - (C) Berechnung des Integrals (48).

- Betrachte im Folgenden homogen geladene Kugel mit Radius R und Ladung q, d.h.

$$\rho(\mathbf{r}) \quad = \quad \begin{cases} \rho_0 = 3q/4\pi R^3 & \text{falls } |\mathbf{r}| < R \\ 0 & \text{falls } |\mathbf{r}| \geq R \end{cases} . \tag{77}$$

- **(A) Mit Gaußschem Gesetz:**
  - Aufgrund von Rotationssymmetrie muss $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ gelten.
  - Gaußsches Gesetz (70), $V =$ Kugel um den Ursprung mit Radius r:
    - Linke Seite:

$$\oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad r^2 \int_0^\pi d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathbf{e}_r E(r) \mathbf{e}_r \quad = \quad 4\pi r^2 E(r). \tag{78}$$

    - Rechte Seite:

$$4\pi q_{\text{innerhalb von } V} \quad = \quad \begin{cases} 4\pi(4\pi r^3/3)\rho_0 = 4\pi(r/R)^3 q & \text{falls } r < R \\ 4\pi(4\pi R^3/3)\rho_0 = 4\pi q & \text{falls } r \geq R \end{cases} . \tag{79}$$

    - Damit

$$E(r) \quad = \quad \begin{cases} qr/R^3 & \text{falls } r < R \\ q/r^2 & \text{falls } r \geq R \end{cases} . \tag{80}$$

  - E-Feld außerhalb der Kugel also ununterscheidbar von dem einer Punktladung q im Ursprung.

- **(B) Lösung der Poisson-Gleichung:**
  - Aufgrund von Rotationssymmetrie muss $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r)$ gelten.
  - Poisson-Gleichung (72) reduziert sich damit auf

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr}\right) \quad = \quad -4\pi\rho(r) \tag{81}$$

    (siehe Hausaufgabe zu "Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik" im Wintersemester 2016/17, Blatt 2, Aufgabe 6).
  - Für $\rho(r) = \rho_0$, d.h. für $r < R$, folgt

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\Phi_{<R}(r)}{dr} \quad &= \quad -\frac{4\pi\rho_0}{3} r^3 + C_1 \quad = \quad -\frac{q}{R^3} r^3 + C_1 \\ \Phi_{<R}(r) \quad &= \quad -\frac{q}{2R^3} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2. \end{aligned} \tag{82}$$

  - Für $\rho(r) = 0$, d.h. für $r \geq R$, folgt

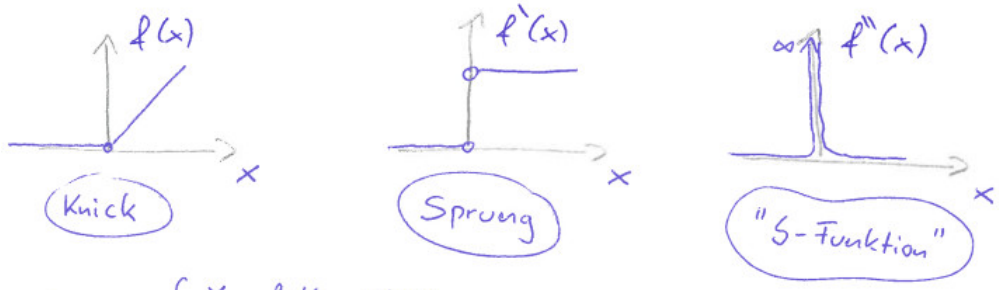
$$\Phi_{\geq R}(r) \quad = \quad -\frac{C_3}{r} + C_4. \tag{83}$$

  - Setze $C_4 = 0$ (eine Konstante kann willkürlich gewählt werden, Physik hängt nicht davon ab), damit $\Phi(r = \infty) = 0$.
  - C_1/r entspricht Potential einer Punktladung im Ursprung, da nicht vorhanden $C_1 = 0$.

– Rechte Seite von (81) hat Sprung bei $r = R$, damit auch $(d/dr)(r^2 d\Phi/dr)$, damit hat $r^2 d\Phi/dr$ Knick bei $r = R$, damit auch $d\Phi/dr$, damit sind Φ und $\Phi' = d\Phi/dr$ stetig bei $r = R$:

$$\begin{aligned} &\Phi_{<R}(R) = \Phi_{\geq R}(R) \quad , \quad \Phi'_{<R}(R) = \Phi'_{\geq R}(R) \\ \rightarrow \quad &\left(-\frac{q}{2R^3} r^2 + C_2 = -\frac{C_3}{r} \right)\Big|_{r=R} \quad , \quad \left(-\frac{q}{R^3} r = \frac{C_3}{r^2} \right)\Big|_{r=R} \\ \rightarrow \quad &C_3 = -q \quad , \quad C_2 = \frac{3q}{2R}. \end{aligned} \tag{84}$$

Bild - 018



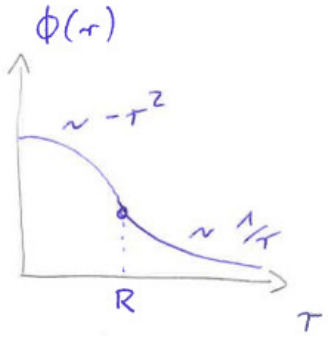
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{" } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \Theta(x) \quad \text{(Heaviside-Funktion)}$$

$$f''(x) = \delta(x) \quad \text{(δ-Funktion)}$$

– Insgesamt

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{q}{2R^3} r^2 + \frac{3q}{2R} & \text{falls } r < R \\ \frac{q}{r} & \text{falls } r \geq R \end{cases} . \tag{85}$$

Bild - 019



– Aus $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ und $\Phi = \Phi(r)$ folgt $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ mit $E(r) = -d\Phi/dr$; Ausführen dieser Ableitung ergibt das bekannte Ergebnis (80).

- **(C) Berechnung des Integrals:**
  - Siehe "Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden", Abschnitt 9.2 und Hausaufgabe.

2.11 Energie einer Ladungsverteilung

- Um zwei unendlich weit entfernte Punktladungen q_1 und q_2 auf Abstand $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ aneinander heranzubringen, wird Energie

$$E_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \tag{86}$$

  benötigt (bei negativem Vorzeichen gewinnt man Energie).

- Um eine dritte unendlich weit entfernte Punktladung q_3 nach $\mathbf{r}_3$ heranzubringen, wird zusätzlich Energie

$$E_{13}+E_{23} = \frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|}+\frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|} \tag{87}$$

  benötigt.

- Verallgemeinerung für N Ladungen:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,k\neq j}^{N}\frac{q_j q_k}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_k|}. \tag{88}$$

- Für kontinuierliche Ladungsverteilung ergibt sich damit

$$E = \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r' \,\frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{89}$$

****** 7. November 2025 (8. Vorlesung) ******

  - Einschränkung $j \neq k$ wurde beim Übergang von Summen zu Integralen nicht berücksichtigt ... zulässig?
  - Annahme: $\rho(\mathbf{r}) < \rho_{\max}$, d.h. keine Unendlichkeiten, z.B. keine Beiträge von δ-Funktionen bzw. Punktladungen.
  - Zusätzlicher "$j=k$"-Beitrag im Integralausdruck entspricht $\mathbf{r}\approx\mathbf{r}'$, kann abgeschätzt werden,

$$\propto \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int d^3r \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<\epsilon} d^3r' \,\frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r \lim_{\epsilon\to 0} 4\pi \underbrace{\int_0^{\epsilon} d\tilde{r}\,\tilde{r}^2 \frac{\rho_{\max}^2}{\tilde{r}}}_{\propto\epsilon^2}}_{=0}, \tag{90}$$

    verschwindet also ohnehin und muss daher nicht ausgeschlossen werden.

- Einsetzen von (48) und (72), partielle Integration und Satz von Gauß, Einsetzen von (44):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\int d^3r\,\rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\Big(\triangle\Phi(\mathbf{r})\Big)\Phi(\mathbf{r}) = \\ &= -\frac{1}{8\pi}\underbrace{\int d^3r\,\nabla\Big(\Big(\nabla\Phi(\mathbf{r})\Big)\Phi(\mathbf{r})\Big)}_{=\oint d\mathbf{A}\,(\nabla\Phi(\mathbf{r}))\Phi(\mathbf{r})=0} + \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\Big(\nabla\Phi(\mathbf{r})\Big)^2 = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\Big(\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big)^2 \end{aligned} \quad (91)$$

  - Annahme dabei ist dass $\oint d\mathbf{A}\,(\nabla\Phi)\Phi = 0$, d.h. $(\nabla\Phi)\Phi$ für $r \to \infty$ hinreichend schnell verschwindet.
  - Z.B. für Punktladung erfüllt: $\Phi \propto 1/r$ und $\nabla\Phi \propto 1/r^2$, damit $(\nabla\Phi)\Phi \propto 1/r^3$; außerdem $\oint d\mathbf{A} \propto r^2$, daher $\oint d\mathbf{A}\,(\nabla\Phi)\Phi = 0$.
  - Für lokalisierte Ladungsverteilung (d.h. Ladungsverteilung, die nicht unendlich ausgedehnt ist), ebenfalls erfüllt (kann man mit Multipolentwicklung zeigen, siehe Abschnitt 2.16).

- (91) legt Interpretation von

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi}\Big(\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big)^2 \quad (92)$$

  als Energiedichte des E-Feldes nahe (wird später mit dem Noether-Theorem gezeigt, siehe Abschnitt 5.5).

2.12 Elektrostatische Randwertprobleme

- Poisson-Gleichung

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (93)$$

  ist inhomogene lineare DGl.

- Allgemeine Lösung ist $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r})$, setzt sich zusammen aus
  - $\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) = \sum_j A_j\Phi_j(\mathbf{r})$, lineare Superposition aller linear unabhängigen Lösungen $\Phi_j(\mathbf{r})$ der homogenen DGl

    $$\triangle\Phi_j(\mathbf{r}) = 0 \quad (94)$$

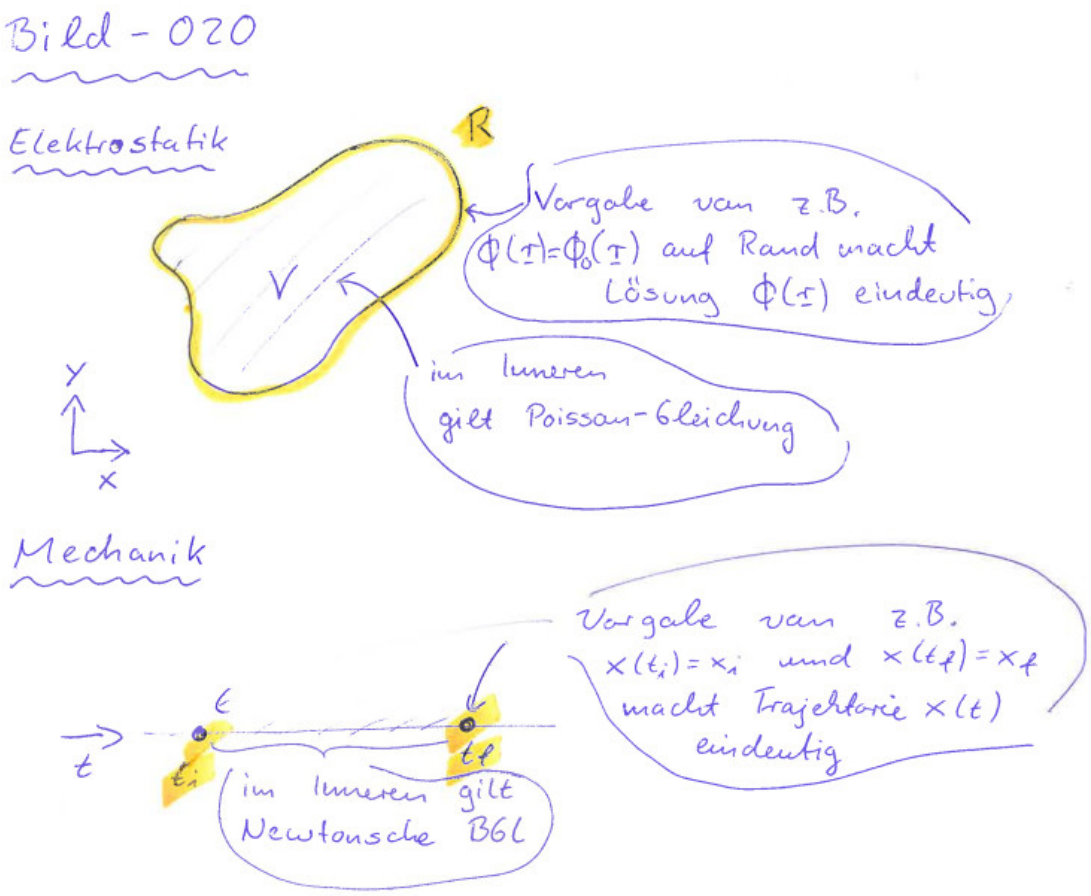
    (davon gibt es unendlich viele),
  - einer beliebigen Partikulärlösung von (93) (auch davon gibt es unendlich viele, denn beliebige Linearkombination homogener Lösungen kann addiert werden), z.B.

    $$\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) = \int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (95)$$

  (siehe auch "Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden", Abschnitt 3.6).

- Lösung wird erst durch Vorgabe von Randbedingungen (RBs) eindeutig bzw. nahezu eindeutig festgelegt.

- Betrachte Volumen $\mathcal{V}$, innerhalb dessen die Poisson-Gleichung (93) erfüllt sein soll.
- Vorgabe von RBs auf $\mathcal{R}$, dem Rand von $\mathcal{V}$.
- Z.B. Vorgabe des Feldes $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$.
  - Sogenannte **Dirichlet RBs**.
  - Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ wird dadurch eindeutig festgelegt (Beweis in Fließbach, "Elektrodynamik", Kapitel 7).
- Z.B. Vorgabe der Ableitung des Feldes senkrecht zum Rand $(\nabla\Phi(\mathbf{r}))\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \partial\Phi(\mathbf{r})/\partial\hat{\mathbf{n}} = \Phi_0'(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$.
  - Sogenannte **Neumann RBs**.
  - Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ wird dadurch bis auf additive Konstante eindeutig festgelegt, diese ist physikalisch irrelevant (Beweis in Fließbach, "Elektrodynamik", Kapitel 7).
- Diese Sorte Problem heißt **Randwertproblem (RWP)**.
- Analogie Mechanik:
  - Allgemeine Lösung der Newtonschen BGl liefert Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ mit zwei unbestimmten Konstanten pro Raumdimension.
  - Vorgabe von Anfangsbedingungen, z.B. $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f$ (entsprechen Dirichlet RBs in der Zeit), legt Lösung eindeutig fest.



- Bisher war $\mathcal{V}$ unendlich ausgedehnter Raum, $\mathcal{R}$ "Rand im Unendlichen", eine "Kugel mit unendlichem Radius", mit Dirichlet RBs $\Phi(r \to \infty) = 0$.

- Beispiel: Punktladung im Ursprung.

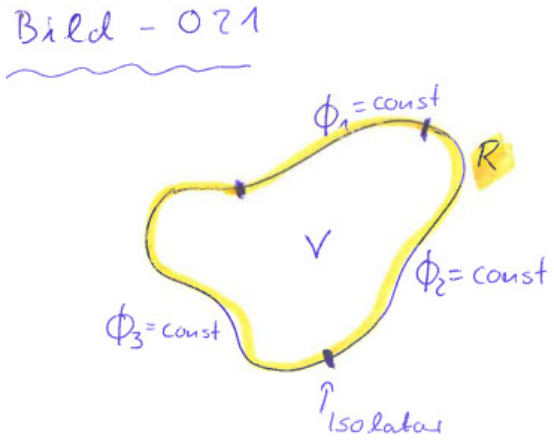
  - $\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) = q/|\mathbf{r}|$, $\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) = 0$, damit RBs $\Phi(r \to \infty) = 0$ erfüllt.
  - Wäre auch Lösung für $\mathcal{V}$ = "Kugel mit Radius R" und Dirichlet RBs $\Phi(r = R) = q/R$.
  - Andere mögliche Lösungen der homogenen DGl (94) sind z.B.

    $$\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) \quad = \quad \Phi_0 e^{+\lambda_x x} \sin(\lambda_y y) \sin(\lambda_z z) \tag{96}$$

    mit $\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \lambda_z^2 = 0$, dann wären obige RBs aber nicht mehr erfüllt, sondern andere RBs.
  - Wie man unendlich viele Lösungen der homogenen Poisson-Gleichung findet und diese dann so linear kombiniert, dass vorgegebene RBs erfült werden, wird in Abschnitt 2.14 und 2.15 diskutiert.

- Physikalisch kann Rand $\mathcal{R}$ mit Dirichlet RBs z.B. durch umgebende leitende Metallplatte realisiert werden.

  - Im Metall gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ und damit $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const}$.
  - Ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$, bewegen sich die im Metall in hinreichender Menge vorhandenen frei beweglichen Ladungen (Elektronen) entgegen der Richtung von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und bauen damit ein Gegenfeld gleicher Stärke auf.
  - Der Rand kann auch durch mehrere voneinander isolierte Metallplatten gebildet werden, die unterschiedliche konstante Potentiale $\Phi_1 \neq \Phi_2 \neq \ldots$ ($\Phi_1 = \text{const}$, $\Phi_2 = \text{const}$, ...) aufweisen.



****** 11. November 2025 (9. Vorlesung) ******

- E-Feld am Rand von $\mathcal{V}$ für den Fall umgebender leitender Metallplatten ($E(\mathbf{r}) = 0$ im Metall):

– Tangentialkomponente:

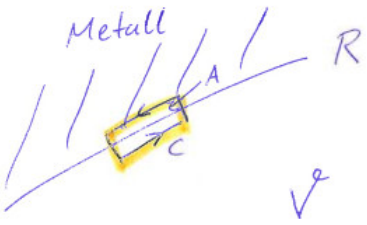
  * Verwende (71) ("Satz von Stokes") gemäß Abbildung, A ist infinitesimales Rechteck (infinitesimal entlang der Seiten, die von $\mathcal{V}$ ins Metall führen):

$$\oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0 \quad \text{(da die Gleichung in der Zeile vorher für alle } C \text{ gilt)} \qquad (97)$$

($\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E} - (\mathbf{E}\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ die Normale der Randfläche ist).

Bild - 022



– Normalkomponente:

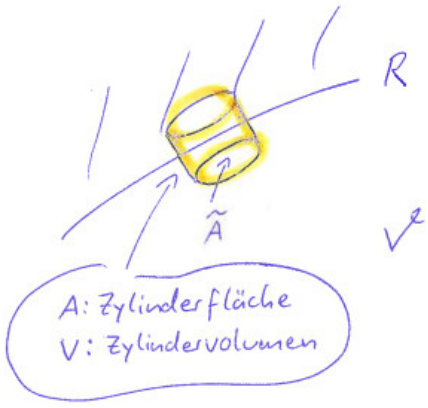
  * Verwende Gaußsches Gesetz (70) gemäß Abbildung, V ist Zylinder mit infinitesimaler Höhe und einem Radius, der klein gegenüber der Skala ist, auf der das elektrische Feld sich verändert:

$$\oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad 4\pi q_{\text{innerhalb von } V}$$

$$\rightarrow \quad E_{\perp}(\mathbf{r}) \quad = \quad \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \quad = \quad \mathbf{E}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \quad = \quad \frac{4\pi q_{\text{innerhalb von } V}}{\tilde{A}} \quad = \quad 4\pi\sigma(\mathbf{r}) \qquad (98)$$

($\mathbf{E}_{\perp} = (\mathbf{E}\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ die nach außen gerichtete Normale der Randfläche ist; $\sigma(\mathbf{r})$ ist Flächenladungsdichte an Metalloberfläche bei $\mathbf{r}$).

Bild - 023



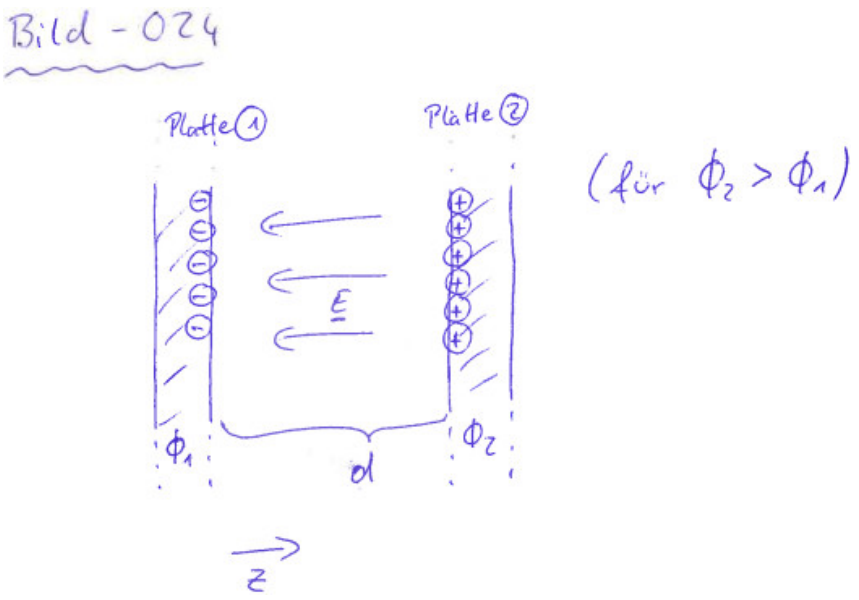
* Flächenladungsdichte nicht vorgegeben, wird stattdessen durch Ladungen im Inneren von $\mathcal{V}$ generiert, kann nach Lösung des RWPs, d.h. nach Berechnung von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathcal{V}$, mit (98) bestimmt werden.
* (98) kann auch für elektrostatisches Potential $\Phi(\mathbf{r})$ formuliert werden:

$$E_\perp(\mathbf{r}) \;=\; -\Big(\nabla\Phi(\mathbf{r})\Big)\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\hat{\mathbf{n}}} \;=\; 4\pi\sigma(\mathbf{r}). \tag{99}$$

- **Faraday-Käfig**:
  - Ladungsfreies von geschlossener Metallhülle umgebenes Volumen.
  - $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 = \text{const}$ im Metall (Dirichlet RBs).
  - $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 = \text{const}$ löst außerdem Poisson-Gleichung (93) mit $\rho(\mathbf{r}) = 0$, d.h. Lösung im von der Metallhülle umgebenen Volumen.
  - Damit $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 = \text{const}$ bzw. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = 0$ im Faraday-Käfig, ein Faraday-Käfig schirmt E-Felder also vollständig ab.

2.13 Kondensator

- **Kondensator**:
  - Zwei metallische Körper mit elektrostatischen Potentialen $\Phi_1 = \text{const}$ und $\Phi_2 = \text{const}$.
  - Ein anwendungsbezogenes elektrostatisches RWP (eventuell muss zusätzlich noch $\Phi(r \to \infty) = 0$ vorgegeben werden).
- Um Ladung q von Körper 1 zu Körper 2 zu verschieben, muss Energie $\Delta E = q(\Phi_2 - \Phi_1)$ aufgewendet werden (Ladung bewegt sich in Potential $V = q\Phi$).
- Potentialdifferenz $U_{21} = \Phi_2 - \Phi_1$ bezeichnet man als **Spannung**. Damit $\Delta E = qU_{21}$.
- **Plattenkondensator**:
  - Zwei unendlich ausgedehnte Metallplatten, parallel zur x-y-Ebene, Abstand d.



  - Berechnung des elektrostatischen Potentials bzw. des E-Feldes zwischen den Platten: Hausaufgabe, Blatt 4, Aufgabe 15, lineares Potential, $\mathbf{E} = -((\Phi_2 - \Phi_1)/d)\mathbf{e}_z = -(U_{21}/d)\mathbf{e}_z$.
  - Ladungsdichte auf Metallplatten: $\sigma = \pm|\mathbf{E}|/4\pi = \pm U_{21}/4\pi d$ (falls $\Phi_2 > \Phi_1$: positive Ladungsdichte für Platte 2, negative Ladungsdichte für Platte 1).
  - Endliche Plattenfläche A (obige Überlegungen dann nur noch näherungsweise gültig), Ladung auf Metallplatten: $q = \sigma A = \pm U_{21} A/4\pi d$.
  - **Kapazität** eines Kondensators:

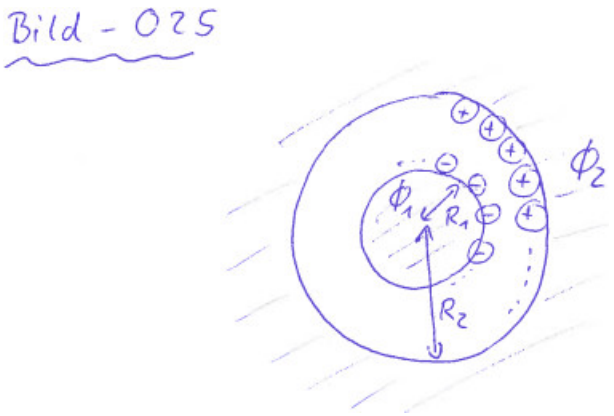
$$C = \frac{\text{Ladung}}{\text{Spannung}} = \left|\frac{q}{U_{21}}\right|. \tag{100}$$

  - Kapazität eines Plattenkondensators:

$$C = \frac{A}{4\pi d} \tag{101}$$

    (hängt also nur von Geometrie, d.h. Plattenfläche A und Abstand d, ab).

- **Kugelkondensator**:
  - Zwei konzentrische Metallkugeln, Radien R_1 und $R_2 > R_1$.



– Berechnung von elektrostatischem Potential, E-Feld, Ladungsdichte, Ladung und Kapazität: Hausaufgabe, Blatt 4, Aufgabe 16.

2.14 Laplace-Gleichung in 2 Raumdimensionen: Polarkoordinaten

2.14.1 Motivation

- Betrachte elektrostatisches RWP aus Abschnitt 2.12, d.h. finde $\Phi(\mathbf{r})$, das Folgendes erfüllt:
  - Poisson-Gleichung im Volumen $\mathcal{V}$ für darin vorgegebene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$, d.h.
    $$\triangle\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{V}. \tag{102}$$
  - Dirichlet-RBs auf dem Rand von $\mathcal{V}$, d.h.
    $$\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \Phi_0(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \tag{103}$$
- Lösung des RWPs ist
  $$\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}), \tag{104}$$
  wobei partikuläre Lösung z.B.
  $$\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_{\mathcal{V}} d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{105}$$
- Dann ist $\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r})$ so zu bestimmen, dass Folgendes erfüllt ist:
  - Laplace-Gleichung
    $$\triangle\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{V}. \tag{106}$$
  - RBs
    $$\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) \quad = \quad \Phi_0(\mathbf{r}) - \Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) \quad = \quad \tilde{\Phi}_0(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \tag{107}$$
- Studiere in diesem Abschnitt das verbleibendene durch (106) und (107) gegebene Problem in 2 Raumdimensionen, d.h. $\mathbf{r} = (x, y)$ (Rechnungen einfacher, Konzepte aber identisch zu 3 Raumdimensionen [siehe Abschnitt 2.15]).

2.14.2 Polarkoordinaten

- Ist $\mathcal{V}$ Kreis (Radius R) bzw. $\mathcal{R}$ Rand dieses Kreises, bietet sich Verwendung von Polarkoordinaten $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ an.
- Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten (siehe Hausaufgabe zu "Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik" im Wintersemester 2016/17, Blatt 2, Aufgabe 6):

$$\triangle\Phi(r,\varphi) \quad = \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi(r,\varphi)}{\partial\varphi^2} \quad = \quad 0. \tag{108}$$

- Dirichlet RBs:

$$\Phi(r=R,\varphi) \quad = \quad \tilde{\Phi}_0(\varphi). \tag{109}$$

2.14.3 Separationsansatz

- Häufig funktionierender Ansatz zur Lösung "einfacher" partieller DGls: **Separationsansatz** ,

$$\Phi(r,\varphi) \quad = \quad R(r)Y(\varphi), \tag{110}$$

  d.h. gesuchte Funktion (hier $\Phi(r,\varphi)$) wird als Produkt von Funktionen (hier $R(r)$ und $Y(\varphi)$) geschrieben, die jeweils nur von einer Koordinate abhängen.

- Einsetzen in (108), Multiplikation mit $r^2/R(r)Y(\varphi)$:

$$\begin{aligned} & Y(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + R(r)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y(\varphi)}{\partial\varphi^2} \quad = \quad 0 \\ \rightarrow \quad & \frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) \quad = \quad -\frac{1}{Y(\varphi)}\frac{\partial^2 Y(\varphi)}{\partial\varphi^2} \quad = \quad C \quad = \quad \text{const} \end{aligned} \tag{111}$$

  (linke Seite von (111) ist Funktion von r, rechte Seite von (111) ist Funktion von φ, müssen also gleich einer Konstante sein [wesentliche Eigenschaft, nur dann ist ein Separationsansatz zielführend]).

- DGl für $Y(\varphi)$:

$$\frac{d^2Y(\varphi)}{d\varphi^2} \quad = \quad -CY(\varphi) \tag{112}$$

  (DGl hat gleiche Form wie die des HO).

- Unabhängige Lösungen:

$$Y_m(\varphi) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{+im\varphi} \quad , \quad m = \pm\sqrt{C} \quad , \quad m = \ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots \tag{113}$$

  – Komplexe Exponentialfunktionen praktischer als relle sin- und cos-Funktionen.

- $m \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$ garantiert 2π-Periodizität im Winkel φ, d.h. $Y_m(\varphi + 2\pi) = Y_m(\varphi)$.
- Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ nicht notwendig, aber zweckmäßig (Normierung, siehe Abschnitt 2.14.4).
- $Y(\varphi) = \varphi$ ist auch Lösung von (112) für $C = 0$, erfüllt aber Periodizitätsbedingung $Y_m(\varphi + 2\pi) = Y_m(\varphi)$ nicht, daher im Folgenden nicht relevant.

***** 14. November 2025 (10. Vorlesung) *****

- DGl für $R(r)$:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) \quad = \quad m^2 R(r). \tag{114}$$

- Unabhängige Lösungen:
  - Ansatz: $R(r) = r^\alpha$.
  - Einsetzen in (114):

$$\rightarrow \quad \underbrace{r\frac{d}{dr}\underbrace{\left(r\frac{dr^\alpha}{dr}\right)}_{\alpha r^\alpha}}_{=\alpha^2 r^\alpha} \quad = \quad m^2 r^\alpha$$

$$\rightarrow \quad \alpha \quad = \quad \pm m. \tag{115}$$

  - Damit

$$R_m(r) \quad = \quad r^m \quad \text{bzw.} \quad R_m(r) \quad = \quad \frac{1}{r^m}. \tag{116}$$

  - (114) ist lineare gewöhnliche DGl 2. Ordnung, daher keine weiteren linear unabhängigen Lösungen für $m \neq 0$.
  - Für $m = 0$ liefert Ansatz $R(r) = r^\alpha$ nur eine Lösung, $R_0(r) = 1$, zweite Lösung ist $R_0(r) = \ln(r/r_0)$ (r_0 ist beliebige aus Dimensionsgründen notwendige konstante Länge).

- Da Laplace-Gleichung (108) lineare DGl, gilt lineare Superposition, d.h. allgemeine komplexe Lösung

$$\Phi(r, \varphi) \quad = \quad A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + B_0 \frac{\ln(r/r_0)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m \neq 0} \left(A_m r^{|m|} + B_m \frac{1}{r^{|m|}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi} \tag{117}$$

(r_0 und A_0 nicht unabhängig [wähle irgendeine für das Problem typische Länge, z.B. $r_0 = R$, Lösung (117) trotzdem noch allgemein]; Betragsstriche bei Exponenten nicht notwendig, aber zweckmäßig: A_m [$m \neq 0$] beziehen sich dann auf positive r-Potenzen, B_m [$m \neq 0$] auf negative r-Potenzen).

- Ziel ist nun Bestimmung von A_m und B_m so, dass RBs (109) erfüllt (dazu benötigt man Kenntnisse über vollständige Orthonormalsysteme).

2.14.4 Vollständige Orthonormalsysteme

- Funktionen können als Vektoren mit unendlich vielen Einträgen interpretiert werden: statt Vektor f_j (im Folgenden stets Komponentenschreibweise, d.h. j indiziert Komponenten von $\mathbf{f}$) Funktion $f(x)$, diskreter Index j wird durch Argument bzw. kontinuierlichen Index x ersetzt.

- Im Folgenden häufig verwendete Operation ist Skalarprodukt:

  - Skalarprodukt zweier Vektoren $f_j^{(1)}$ und $f_j^{(2)}$:

    $$\sum_j (f_j^{(1)})^* f_j^{(2)} \tag{118}$$

    (bei Beschränkung auf reelle Zahlen kann * weggelassen werden).

  - **Skalarprodukt zweier Funktionen** $f^{(1)}(x)$ und $f^{(2)}(x)$ (Definitionsbereich $x \in [a,b]$) ist analog zu (118) definiert,

    $$(f^{(1)}, f^{(2)}) \quad = \quad \int_a^b dx\, f^{(1)*}(x) f^{(2)}(x) \tag{119}$$

    ($(\ldots,\ldots)$ ist übliche Notation für Skalarprodukt zweier Funktionen).

- Orthonormalbasis (ONB) eines Vektorraums (linear unabhängige Basisvektoren $g_j^{(n)}$) äquivalent zu **vollständigem Orthonormalsystem (VONS)** eines Funktionenraums (linear unabhängigen Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$), wobei n Basisvektoren bzw. Basisfunktionen indiziert.

- Wesentliche Eigenschaften einer ONB bzw. eines VONS:

  - **Orthonormalität:**

    * ONB: Basisvektoren müssen paarweise orthogonal und auf Länge 1 normiert sein,

      $$\sum_j (g_j^{(m)})^* g_j^{(n)} \quad = \quad \delta_{mn}. \tag{120}$$

    * VONS: Analog muss für Basisfunktionen

      $$(g^{(m)}, g^{(n)}) \quad = \quad \int_a^b dx\, (g^{(m)})^*(x) g^{(n)}(x) \quad = \quad \delta_{mn} \tag{121}$$

      gelten.

  - **Vollständigkeit:**

    * ONB: Basisvektoren müssen vollständig sein, d.h. beliebiger Vektor f_j muss eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar sein,

      $$\sum_n (g_j^{(n)})^* g_k^{(n)} \quad = \quad \delta_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\sum_n (\mathbf{g}^{(n)})^* \otimes \mathbf{g}^{(n)}}_{\text{dyadisches Produkt}} \quad = \quad \mathbb{1}. \tag{122}$$

      · Vektor f_j lässt sich wie folgt als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

        $$f_j \quad = \quad \sum_n A_n g_j^{(n)} \tag{123}$$

        mit Koeffizienten

        $$A_n \quad = \quad \sum_j (g_j^{(n)})^* f_j. \tag{124}$$

· Beweis durch Einsetzen und Verwenden von (122):

$$\sum_n A_n g_j^{(n)} \quad = \quad \sum_n \left(\sum_k (g_k^{(n)})^* f_k \right) g_j^{(n)} \quad = \quad \sum_k f_k \underbrace{\sum_n (g_k^{(n)})^* g_j^{(n)}}_{=\delta_{kj}} \quad = \quad f_j. \tag{125}$$

****** 18. November 2025 (11. Vorlesung) ******

∗ VONS: Analog muss für Basisfunktionen

$$\sum_n (g^{(n)})^*(x) g^{(n)}(y) \quad = \quad \delta(x-y) \tag{126}$$

gelten.

· Funktion $f(x)$ lässt sich wie folgt als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen:

$$f(x) \quad = \quad \sum_n A_n g^{(n)}(x) \tag{127}$$

mit Koeffizienten

$$A_n \quad = \quad (g^{(n)}, f) \quad = \quad \int_a^b dx\, (g^{(n)}(x))^* f(x). \tag{128}$$

· Beweis: Hausaufgabe.

- Beispiel eines VONS:

$$g^{(n)}(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{L}} e^{+2\pi i n x/L}, \tag{129}$$

$n \in \mathbb{Z}$, wenn Definitionsbereich $x \in [a,b]$ mit $L = b-a$ und die darzustellenden Funktionen periodische RBs aufweisen.

  – Nachweis der Orthonormalität und Vollständigkeit: Hausaufgabe.
  – Darstellung einer Funktion $f(x)$ als Linearkombination der Basisfunktionen:

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n A_n e^{+2\pi i n x/L} \quad \text{mit} \quad A_n \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b dx\, e^{-2\pi i n x/L} f(x). \tag{130}$$

  – $f(x)$ und die unendlich vielen A_n enthalten die gleiche Information.
  – (130) nennt man **Fourier-Reihe**, Darstellung einer Funktion durch "sin- und cos-Funktionen", sehr häufig und wichtig, vor allem in Quantenmechanik.

2.14.5 Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs

- A_m und B_m in allgemeiner Lösung (117) müssen so bestimmt werden, dass RBs (109) erfüllt, d.h. $\Phi(r = R, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\varphi)$.

- Da $\mathcal{V}$ Kreis, der Ursprung enthält, dürfen singuläre Terme $\ln(r/r_0)$ und $1/r^{|m|}$ in (117) nicht in Lösung auftreten, d.h. $B_m = 0$ bzw.

$$\Phi(r,\varphi) \quad = \quad A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m \neq 0} A_m r^{|m|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi}. \tag{131}$$

- Lösung auf Rand $\mathcal{R}$:

$$\Phi(r=R,\varphi) \;=\; \sum_m A_m R^{|m|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi} \tag{132}$$

(ist Darstellung als Linearkombination der Funktionen $e^{+im\varphi}$).

- Mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung der A_m:
  - 1. Möglichkeit:
    - Entwickle vorgegebene RBs $\tilde{\Phi}_0(\varphi)$ nach Basisfunktionen

$$g^{(m)}(\varphi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi} \tag{133}$$

(bilden VONS, siehe Abschnitt 2.14.4),

$$\tilde{\Phi}_0(\varphi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m C_m e^{+im\varphi} \quad \text{mit} \quad C_m \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi) \tag{134}$$

(selbst wenn Integrale zur Bestimmung von C_m nicht analytisch gelöst werden können, ist es leicht, diese mit einem Computer zu berechnen).

    - Koeffizientenvergleich von (132) und (134) ergibt

$$A_m R^{|m|} \;=\; C_m \quad\rightarrow\quad A_m \;=\; \frac{C_m}{R^{|m|}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi} R^{|m|}} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi). \tag{135}$$

  - 2. Möglichkeit:
    - Startpunkt ist

$$\Phi(r=R,\varphi) \;=\; \tilde{\Phi}_0(\varphi). \tag{136}$$

    - Skalarprodukt von $e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ mit beiden Seiten von (136):
      - Linke Seite:

$$(e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}, \Phi(r=R)) \;=$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} \sum_n A_n R^{|n|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+in\varphi} \;=$$

$$= \sum_n A_n R^{|n|} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+in\varphi}}_{=(e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}, e^{+in\varphi}/\sqrt{2\pi}) = \delta_{mn}} \;=\; A_m R^{|m|} \tag{137}$$

((132) wurde verwendet).

      - Rechte Seite:

$$(e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}, \tilde{\Phi}_0) \;=\; \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi). \tag{138}$$

    - Damit

$$A_m \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi} R^{|m|}} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi) \tag{139}$$

(identisch zu (135)).

  - Beide Möglichkeiten verwenden, dass Lösung auf Rand $\mathcal{R}$ (Gleichung (132)) Linearkombination von Funktionen ist, die VONS bilden.

  - Falls nicht der Fall, sind weitere Schritte notwendig, z.B. Orthonormalisierung der die Lösung bildenden Terme mit Gram-Schmidtschem Orthogonalisierungsverfahren (siehe z.B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidtsches_Orthogonalisierungsverfahren`).

- Beispiel:

  - Gegeben: Dirichlet RBs,

$$\Phi(r=R,\varphi) \;=\; \tilde{\Phi}_0(\varphi) \;=\; \alpha\sin(3\varphi) \;=\; \frac{\alpha\sqrt{2\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{+3i\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-3i\varphi}\right) \tag{140}$$

  (ein sehr einfaches Beispiel, bei dem Integrale (135) analytisch lösbar bzw. direkt ablesbar sind, außerdem fast alle A_m verschwinden).

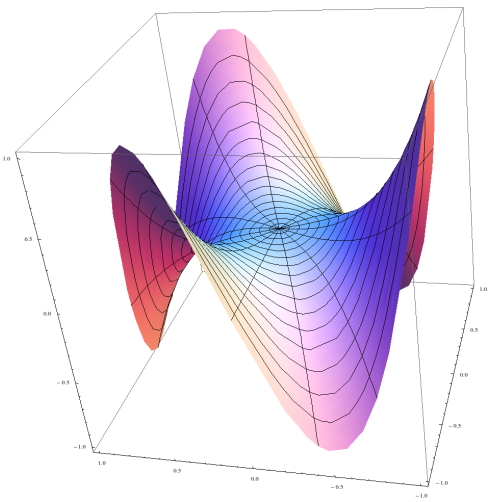
  - Verwende Orthonormalität der Funktionen $e^{+im\varphi}/\sqrt{2}$, damit

$$A_m \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}R^{|m|}}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-im\varphi}\tilde{\Phi}_0(\varphi) \;=\; \begin{cases} -\alpha\sqrt{2\pi}/2iR^3 & \text{falls } m=-3 \\ +\alpha\sqrt{2\pi}/2iR^3 & \text{falls } m=+3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{141}$$

  - Lösung der Laplace-Gleichung durch Einsetzen in (131):

$$\Phi(r,\varphi) \;=\; A_{-3}r^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-3i\varphi} + A_{+3}r^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{+3i\varphi} \;=\; \alpha\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin(3\varphi) \tag{142}$$

  (Abbildung zeigt $\Phi(r,\varphi)$ für $R=1$ und $\alpha=1$).



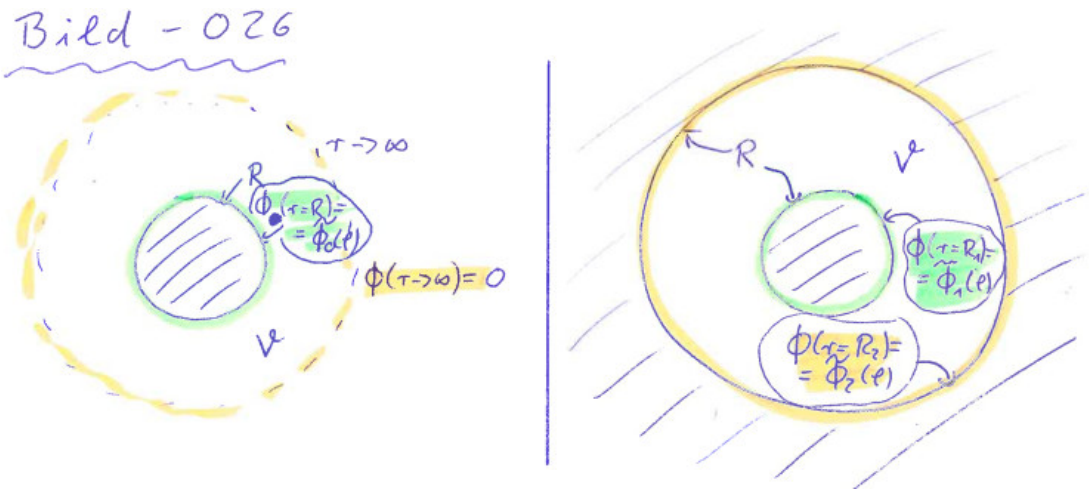
****** 21. November 2025 (12. Vorlesung) ******

- Folgende ähnliche RWPs können analog gelöst werden:

  - $\mathcal{V}$ ist gesamter 2-dimensionaler Raum bis auf Kreis mit Radius R:
    Vorgabe von Dirichlet-RBs $\Phi(r=R,\varphi)=\tilde{\Phi}_0(\varphi)$ und $\Phi(r\to\infty)=0$.

– $\mathcal{V}$ ist Kreisring, innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2:
Vorgabe von Dirichlet-RBs $\Phi(r = R_1, \varphi) = \tilde{\Phi}_1(\varphi)$ und $\Phi(r = R_2, \varphi) = \tilde{\Phi}_2(\varphi)$.

Siehe Hausaufgabe zu "Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik" im Wintersemester 2016/17, Blatt 6, Aufgabe 22.



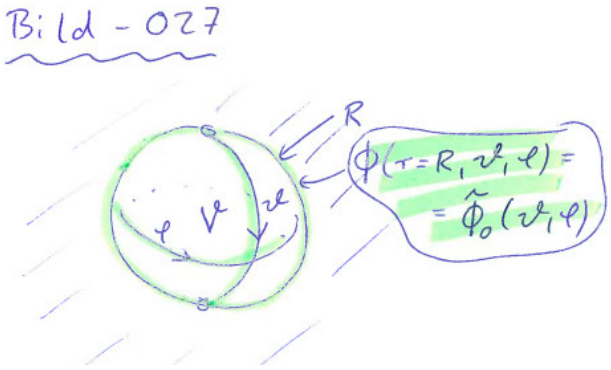
2.15 Laplace-Gleichung in 3 Raumdimensionen: Kugelkoordinaten

2.15.1 Motivation

- Wie in Abschnitt 2.14.1.

2.15.2 Kugelkoordinaten

- Ist $\mathcal{V}$ Kugel (Radius R) bzw. $\mathcal{R}$ Rand dieser Kugel, bietet sich Verwendung von Kugelkoordinaten $x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$ und $z = r\cos(\vartheta)$ an.



- Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (siehe Hausaufgabe zu "Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik" im Wintersemester 2016/17, Blatt 2, Aufgabe 6):

$\triangle\Phi(r, \vartheta, \varphi) \quad =$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(r\Phi(r,\vartheta,\varphi)\Big) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\Phi(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\Phi(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (143)$$

- Dirichlet RBs:

$$\Phi(r=R,\vartheta,\varphi) = \tilde{\Phi}_0(\vartheta,\varphi). \quad (144)$$

2.15.3 Separationsansatz

- Separationsansatz

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R(r)}{r}P(\cos(\vartheta))Q(\varphi) \quad (145)$$

führt auf drei unabhängige gewöhnliche DGls (Faktor $1/r$ und Verwendung von $\cos(\vartheta)$ als Argument nicht notwendig, vereinfacht aber DGls).

- DGl für $Q(\varphi)$:

$$\frac{d^2Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -CQ(\varphi). \quad (146)$$

- Unabhängige Lösungen:

$$Q_m(\varphi) = e^{+im\varphi} \quad , \quad m=\pm\sqrt{C} \quad , \quad m=\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots \quad (147)$$

- DGl für $P(x)$ mit $x=\cos(\vartheta)$:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0. \quad (148)$$

- Unabhängige Lösungen: **Zugeordnete Legendrepolynome**,

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \quad , \quad \lambda = l(l+1) \quad , \quad l=0,1,2,\ldots \quad ,$$
$$m=-l,-l+1,-l+2,\ldots,+l-2,+l-1,+l. \quad (149)$$

- DGl für $R(r)$:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) = 0. \quad (150)$$

- Unabhängige Lösungen:

$$R_l(r) = r^{l+1} \quad \text{bzw.} \quad R_l(r) = \frac{1}{r^l}. \quad (151)$$

- Allgemeine komplexe Lösung der Laplace-Gleichung (143):

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left(A_{lm}r^l + B_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}\right)Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \tag{152}$$

mit den **Kugelflächenfunktionen**

$$Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \;=\; \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos(\vartheta))e^{+im\varphi}. \tag{153}$$

- Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$:
  - Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators:

$$\left(\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \;=\; -l(l+1)Y_{l,m}(\vartheta,\varphi). \tag{154}$$

  - Häufig und daher wichtig in Physik, nicht nur in Feldtheorie, z.B. auch in Quantenmechanik bei Atomorbitalen.
  - $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ (Definitionsbereich $\vartheta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$) beschreiben Schwingungen auf Einheitskugel, analog zu $\sin(n\varphi)$ und $\cos(n\varphi)$ (Definitionsbereich $\varphi\in[0,2\pi]$), die Schwingungen auf Einheitskreis beschreiben (Englische Bezeichnung für $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ ist **Spherical Harmonics**):

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{155}$$

$$Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) \;=\; \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\vartheta) \quad , \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) \;=\; \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\vartheta)e^{\pm i\varphi} \tag{156}$$

$$Y_{2,0}(\vartheta,\varphi) \;=\; \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\Big(3\cos^2(\vartheta)-1\Big) \quad , \quad \ldots \tag{157}$$

    (graphische Darstellung und weitere Eigenschaften:
    `https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelflächenfunktionen`).
  - Orthonormal und vollständig.

2.15.4 Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs

- A_{lm} und B_{lm} in allgemeiner Lösung (152) müssen so bestimmt werden, dass RBs (144), d.h. $\Phi(r=R,\vartheta,\varphi)=\tilde{\Phi}_0(\vartheta,\varphi)$, erfüllt.
- Da $\mathcal{V}$ Kugel, die Ursprung enthält, dürfen singuläre Terme $1/r^{l+1}$ in (152) nicht in Lösung auftreten, d.h. $B_{lm}=0$ bzw.

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}A_{lm}r^lY_{l,m}(\vartheta,\varphi). \tag{158}$$

- Lösung auf Rand $\mathcal{R}$:

$$\Phi(r=R,\vartheta,\varphi) \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} A_{lm}R^l Y_{l,m}(\vartheta,\varphi). \tag{159}$$

- Bestimmung der A_{lm}:
  - Startpunkt ist

$$\Phi(r=R,\vartheta,\varphi) \quad = \quad \tilde{\Phi}_0(\vartheta,\varphi). \tag{160}$$

  - Skalarprodukt von $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ mit beiden Seiten von (160):
    - Linke Seite:

$$(Y_{l,m},\Phi(r=R)) \quad =$$

$$= \quad \int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, (Y_{l,m}(\vartheta,\varphi))^* \sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{+l'} A_{l'm'}R^{l'} Y_{l',m'}(\vartheta,\varphi) \quad =$$

$$= \quad \sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{+l'} A_{l'm'}R^{l'} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, (Y_{l,m}(\vartheta,\varphi))^* Y_{l',m'}(\vartheta,\varphi)}_{=(Y_{l,m},Y_{l',m'})=\delta_{ll'}\delta_{mm'}} \quad =$$

$$= \quad A_{lm}R^l \tag{161}$$

      (Orthonormalität der Y_{lm} wurde verwendet).
    - Rechte Seite:

$$(Y_{l,m},\tilde{\Phi}_0) \quad = \quad \int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, (Y_{l,m}(\vartheta,\varphi))^* \tilde{\Phi}_0(\vartheta,\varphi). \tag{162}$$

  - Damit

$$A_{lm} \quad = \quad \frac{1}{R^l} \int_0^{\pi} d\vartheta\, \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, (Y_{l,m}(\vartheta,\varphi))^* \tilde{\Phi}_0(\vartheta,\varphi). \tag{163}$$

2.16 Multipolentwicklung

- Entwicklung des elektrostatischen Potentials $\Phi(\mathbf{r})$ einer um den Ursprung lokalisierten Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ ($\rho(\mathbf{r})=0$ für $|\mathbf{r}|>R$) für große Abstände, d.h. $|\mathbf{r}| \gg R$.



$\phi(\underline{r}) = ?$
(weit entfernt von Ladungen)

- Startpunkt ist (48),

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{164}$$

- Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2\mathbf{r}\mathbf{r}'+r'^2}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2+(r'/r)^2}} = \\ &= \frac{1}{r}\Big(1-\frac{1}{2}\Big(-2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2+(r'/r)^2\Big)+\frac{3}{8}\Big(-2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2\Big)^2+\mathcal{O}((r'/r)^3)\Big) = \\ &= \frac{1}{r}\Big(1+\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2}-\frac{r'^2}{2r^2}+\frac{3(\mathbf{r}\mathbf{r}')^2}{2r^4}+\mathcal{O}((r'/r)^3)\Big),\end{aligned} \tag{165}$$

  wobei

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \;=\; \frac{1}{1+\epsilon/2-\epsilon^2/8+\mathcal{O}(\epsilon^3)} \;=\; 1-\frac{1}{2}\epsilon+\frac{3}{8}\epsilon^2+\mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{166}$$

  verwendet wurde.

- Einsetzen in (164):

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) \;=\; &\frac{1}{r}\underbrace{\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')}_{=Q\text{ Monopol}}+\frac{r_j}{r^3}\underbrace{\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')r'_j}_{p_j\text{ Dipol}}+\frac{1}{2}\frac{r_jr_k}{r^5}\underbrace{\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\Big(3r'_jr'_k-r'^2\delta_{jk}\Big)}_{Q_{jk}\text{ Quadrupol}} \\ &+\mathcal{O}(1/r^4)\end{aligned} \tag{167}$$

  (**kartesische Multipolentwicklung**).

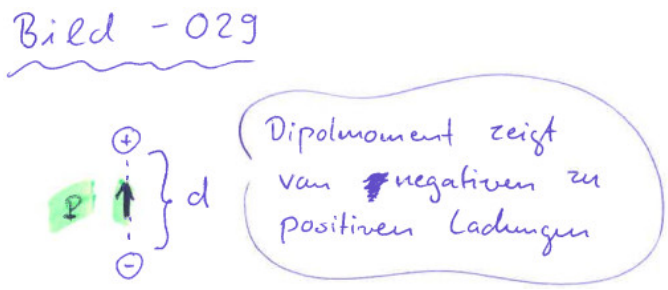
- Das Fernfeld der Ladungsverteilung kann damit durch einige wenige Größen charakterisiert bzw. mit den entsprechenden Termen approximiert werden:
  - **Gesamtladung** Q
    (1 Größe, $\propto 1/r$),
  - **Dipolmoment p**
    (3 Größen, $\propto 1/r^2$),
  - **Quadrupolmoment** Q_{jk}
    (5 unabhängige Größen [$Q_{jk}=Q_{kj}$, symmetrisch; $\sum_j Q_{jj}=0$, spurlos], $\propto 1/r^3$),
  - ...

- **Dipol**:
  - Ladungen $+q$ und $-q$ im Abstand d, z.B. $+q$ bei $\mathbf{r}_+ = (0,0,+d/2)$ und $-q$ bei $\mathbf{r}_- = (0,0,-d/2)$.
  - Ladungsdichte: $\rho(\mathbf{r}) = +q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_+) - q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)$.
  - Gesamtladung: $Q=0$ (offensichtlich).

– Dipolmoment:

$$\mathbf{p} \quad = \quad \int d^3r'\, \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}' \quad = \quad q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \quad = \quad q(0,0,d). \tag{168}$$

– **Punktdipol**: Grenzwert $d \to 0$ so dass $\mathbf{p} = \text{const}$ (damit $q \propto 1/d$, d.h. $q \to \infty$); alle höheren Momente verschwinden.



- **Quadrupol**:
  - Hausaufgabe.
- **Sphärische Multipolentwicklung**:
  - Potential $\Phi(\mathbf{r})$ für $r > R$ (d.h. außerhalb der Ladungsverteilung) erfüllt Poisson-Gleichung $\triangle\Phi(\mathbf{r}) = 0$, verschwindet außerdem im Unendlichen, d.h. $\Phi(r \to \infty) = 0$.
  - $\Phi(\mathbf{r})$ für $r > R$ kann damit gemäß (152) mit $A_{lm} = 0$ dargestellt werden,

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi). \tag{169}$$

  - Koeffizienten B_{lm} können berechnet werden, Ergebnis ist

$$B_{lm} \quad = \quad \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{lm} \tag{170}$$

    mit den **sphärischen Multipolmomenten**

$$q_{lm} \quad = \quad \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r\, r^l (Y_{l,m}(\vartheta,\varphi))^* \rho(r,\vartheta,\varphi). \tag{171}$$

    * 1 sphärisches Multipolmoment q_{00}, Beitrag zu $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ ist $\propto 1/r$ (entspricht Gesamtladung, d.h. $q_{00} = Q$).
    * 3 sphärische Multipolmomente q_{1m}, Beitrag zu $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ ist $\propto 1/r^2$ (entsprechen Dipolmoment $\mathbf{p}$).
    * 5 sphärische Multipolmomente q_{2m}, Beitrag zu $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ ist $\propto 1/r^3$ (entsprechen Quadrupolmoment Q_{jk}).

****** 25. November 2025 (13. Vorlesung) ******

3 Magnetostatik

- Bewegen sich (elektrische) Ladungen, spricht man von **(elektrischen Ladungs-) Strömen**.
- Experimenteller Befund: Zwischen sich bewegenden Ladungen wirken Kräfte (zusätzlich zu elektrischen Kräften aus Kapitel 2).
- Beispiel: Stromdurchflossene Drähte (verschwindende Ladungsdichte [gleiche Anzahl von Protonen und Elektronen], negative Ladungsträger [Elektronen] bewegen sich) ziehen sich an oder stoßen sich ab.
- Diese Kräfte werden durch ein **magnetisches Feld** beschrieben (Zusammenhang nicht so offensichtlich, wie bei elektrostatischer Kraft, z.B. Kräfte nicht in Richtung des magnetischen Feldes).
- **Magnetostatik**: Zeitlich konstante, d.h. stationäre Ströme und damit zeitunabhängige magnetische Felder.

3.1 Strom, Stromdichte, Kontinuitätsgleichung

- **Strom** I: Ladungsmenge, die sich pro Zeit durch eine Fläche (z.B. Querschnittsfläche eines Drahtes) bewegt, d.h.

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{172}$$

- **Stromdichte** j (als skalare Größe): Strom pro Fläche, d.h.

$$j = \frac{dI}{dA}. \tag{173}$$

- **Stromdichte j** (als vektorielle Größe):

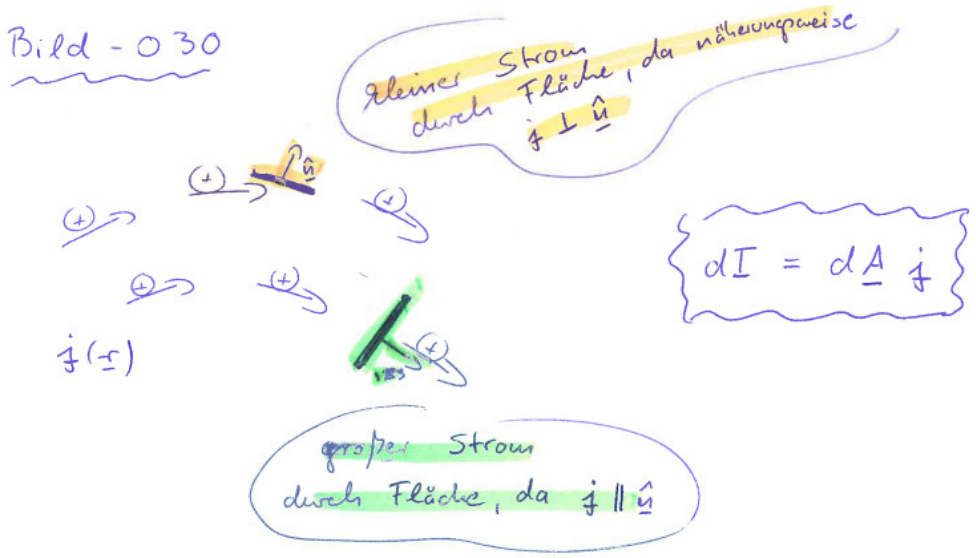
$$dI = d\mathbf{A}\,\mathbf{j} \tag{174}$$

  mit $d\mathbf{A} = dA\,\hat{\mathbf{n}}$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ Flächennormale bezeichnet.

  - Richtung von **j** beschreibt Bewegungsrichtung positiver Ladungen (bzw. negative Bewegungsrichtung negativer Ladungen).
  - Einsetzen führt zurück auf (173):

$$dI = d\mathbf{A}\,\mathbf{j} = dA\,\hat{\mathbf{n}}\mathbf{j}$$
$$\rightarrow \quad \frac{dI}{dA} = \hat{\mathbf{n}}\mathbf{j} = j \tag{175}$$

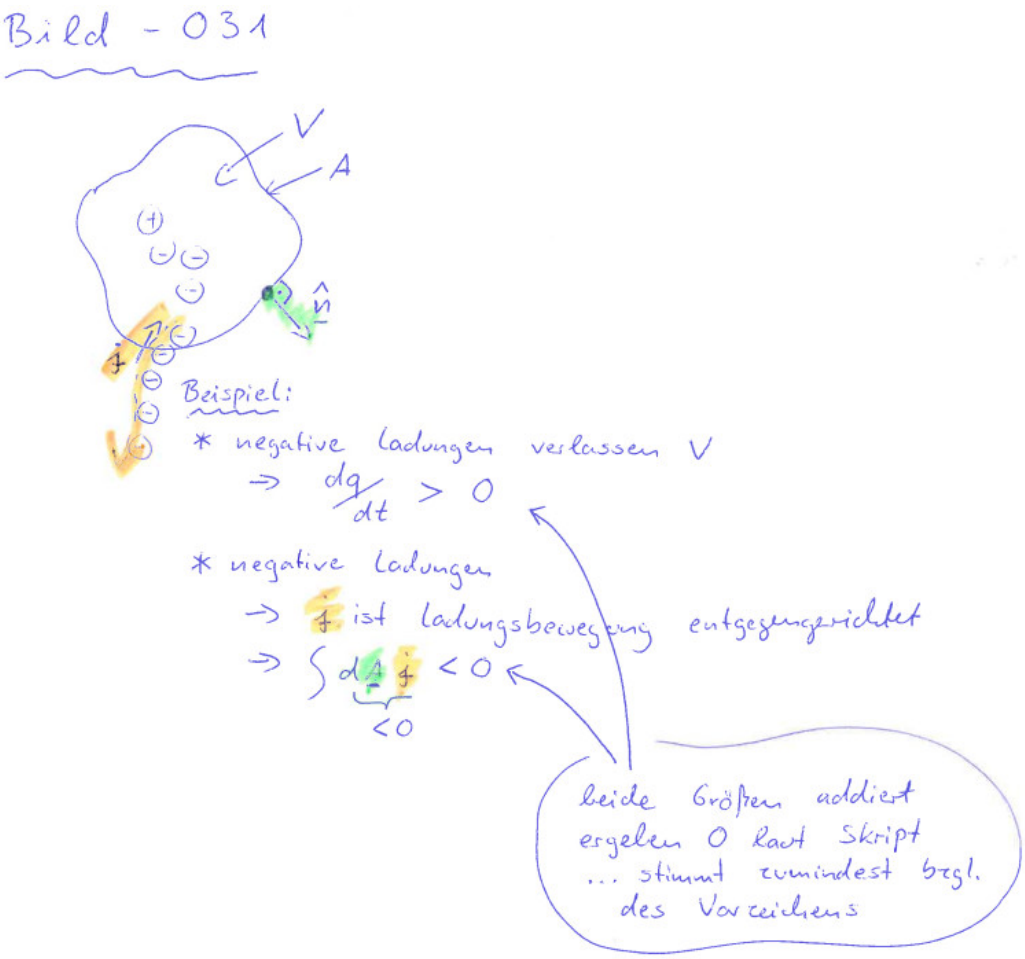
    (Vektor der Stromdichte **j** muss mit Flächennormale $\hat{\mathbf{n}}$ multipliziert werden, um "skalare Stromdichte bezüglich einer Flächenorientierung j" zu bekommen; j bezeichnet hier also nicht Betrag von **j**).



- **Kontinuitätsgleichung**:
  - Gesamtladung ist Erhaltungsgröße (siehe Abschnitt 2.1).
  - Damit muss

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_V d^3r\, \rho(\mathbf{r},t)}_{q \text{ in } V} + \oint_A d\mathbf{A}\, \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad = \quad 0 \tag{176}$$

    gelten (Ladungsveränderung in V [linker Term] ist gleich Strom durch Oberfläche von V [rechter Term]).



  - Verwende Satz von Gauß:

$$\int_V d^3r\, \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \int_V d^3r\, \nabla\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad = \quad \int_V d^3r \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \nabla\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\right) \quad = \quad 0. \tag{177}$$

  - Da V beliebig, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \nabla\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad = \quad 0, \tag{178}$$

    die Kontinuitätsgleichung.
  - Kontinuitätsgleichung häufig in der Physik, gilt auch für Dichten und Ströme anderer Größen, z.B. Aufenthaltswahrscheinlichkeit (in QM) oder Masse (in Hydrodynamik).

- Ladungsdichte und Stromdichte einer Punktladung q mit Trajektorie $\mathbf{r}_q(t)$:

$$\rho(\mathbf{r},t) \quad = \quad q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t)) \tag{179}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad = \quad q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t))\frac{d\mathbf{r}_q(t)}{dt}. \tag{180}$$

  - $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \propto q$.
  - $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \neq 0$ nur bei $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$, daher $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \propto \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t))$.

– $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ zeigt in Richtung der Geschwindigkeit von q, d.h. $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \propto d\mathbf{r}_q(t)/dt$.

– Dies legt (180) nahe, Einsetzen in Kontinuitätsgleichung bestätigt (180):

∗ Linke Seite:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) = q\frac{\partial\delta(\mathbf{u})}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial t} = -q\frac{\partial\delta(\mathbf{u})}{\partial u_j}\frac{dr_{q,j}(t)}{dt} \tag{181}$$

$(\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t))$.

∗ Rechte Seite:

$$\nabla\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial j_j(\mathbf{r},t)}{\partial r_j} = q\frac{\partial\delta(\mathbf{u})}{\partial u_k}\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial r_j}}_{=\delta_{kj}}\frac{dr_{q,j}(t)}{dt} = q\frac{\partial\delta(\mathbf{u})}{\partial u_j}\frac{dr_{q,j}(t)}{dt}. \tag{182}$$

***** 28. November 2025 (14. Vorlesung) *****

- In Magnetostatik stationäre Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, damit $\nabla\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$.

3.2 Magnetisches Feld

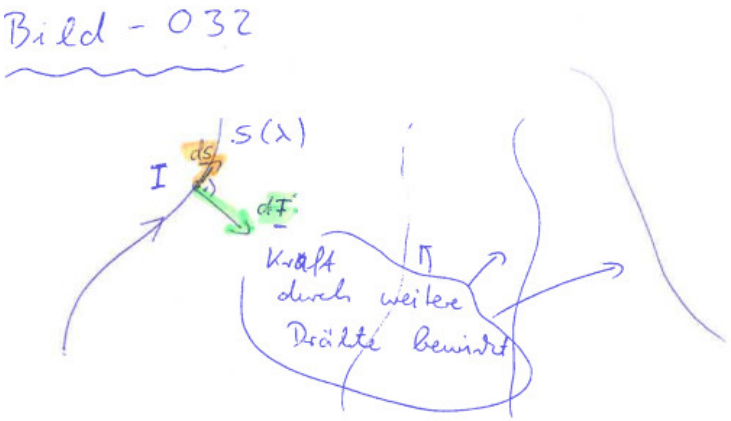
- Bei experimentellem Vermessen der Kräfte zwischen stromdurchflossenen Drähten findet man für Kraft $\mathbf{F}$ auf Draht durch den Strom I fließt

  – $|d\mathbf{F}(\mathbf{s})| \propto I$,

  – $|d\mathbf{F}(\mathbf{s})| \propto |d\mathbf{s}|$,

  – $d\mathbf{F}(\mathbf{s}) \perp d\mathbf{s}$

  (Draht wird durch Kurve $\mathbf{s}(\lambda)$ beschrieben).



- Beitrag zur Kraft $\mathbf{F}$ lautet damit

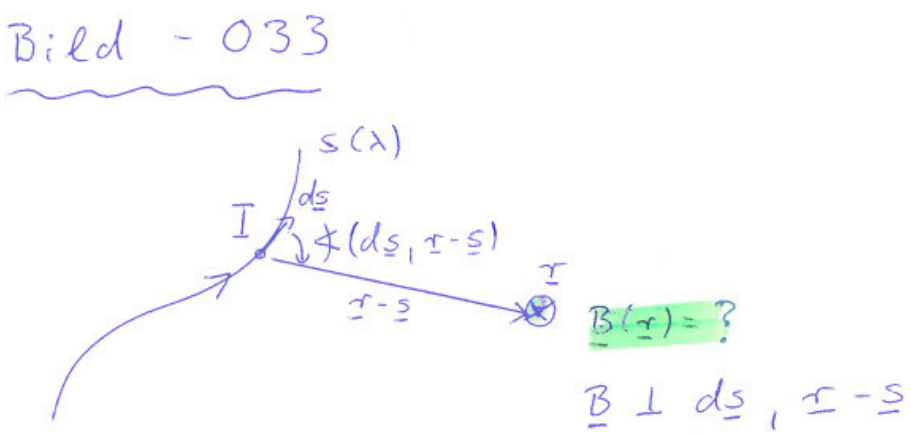
$$d\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{I}{c}d\mathbf{s}\times\mathbf{B}(\mathbf{s}). \tag{183}$$

  – (183) ist Definition des **magnetischen Feldes B** (B-Feld).

    - ∗ Ähnlich zu $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ (Gleichung (27)), Definition des elektrischen Feldes.
    - ∗ Definition von $\mathbf{B}$ durch einzelne bewegte Ladung q in Magnetostatik nicht möglich, da diese keiner stationären Stromdichte entspricht.
  - Faktor $1/c$ (c: Lichtgeschwindigkeit) willkürlich aber zweckmäßig, z.B. für relativistische Formulierung der ED, da damit elektrisches und magnetisches Feld gleiche Einheit und in em Welle gleiche Amplitude haben (Aussage bezieht sich auf Gauß-System; im MKSA-System kein $1/c$; siehe auch Abschnitt 2.1).
  - Korrekte aus historischen Gründen gewählte Bezeichnung für $\mathbf{B}$ ist **magnetische Induktion** oder **magnetische Flussdichte**; angebrachter wäre "magnetische Feldstärke", da $\mathbf{B}$ Gegenstück zur elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}$ ist; dieser Begriff ist aber an andere Größe vergeben (siehe Kapitel 7 zu ED in Materie).

- Experimentelles Vermessen der Beiträge eines stromdurchflossenen Drahtes zu $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:
  - $|d\mathbf{B}(\mathbf{r})| \propto I$,
  - $|d\mathbf{B}(\mathbf{r})| \propto |d\mathbf{s}|$,
  - $d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \perp d\mathbf{s}$,
  - $d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \perp (\mathbf{r} - \mathbf{s})$,
  - $|d\mathbf{B}(\mathbf{r})| \propto \sin(\sphericalangle(d\mathbf{s}, \mathbf{r} - \mathbf{s}))/|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2$ ($\sphericalangle(\ldots,\ldots)$ bezeichnet Winkel zwischen Vektoren)

  (Draht wird durch Kurve $\mathbf{s}(\lambda)$ beschrieben, durch ihn fließt Strom I).



- Beitrag zum B-Feld lautet konsistent zu obigen Überlegungen

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{I}{c} d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \tag{184}$$

  (**Biot-Savart-Gesetz**; Faktor $1/c$ hier nicht willkürlich, ergibt sich aus Experiment).

- Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ kann man sich durch unendlich viele infinitesimal dünne stromdurchflossene Drähte generiert vorstellen:
  - Strom I durch einen solchen Draht wird (bei endlicher Stromdichte) dann zu infinitesimalem Strom dI.

– Für $\mathbf{j} \parallel \hat{\mathbf{n}}$ gilt $\mathbf{j} = (\mathbf{j}\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$.

– Damit folgt für $\mathbf{j} \parallel \hat{\mathbf{n}}$ und $d\mathbf{A} = dA\,\hat{\mathbf{n}}$ und aus $dI = d\mathbf{A}\,\mathbf{j}$ (Gleichung (174))

$$dI\hat{\mathbf{n}} \;=\; \Big(dA\,\hat{\mathbf{n}}\mathbf{j}\Big)\hat{\mathbf{n}} \;=\; dA\,\mathbf{j}. \tag{185}$$

– Multiplikation mit ds:

$$dI\,d\mathbf{s} \;=\; d^3r\,\mathbf{j} \tag{186}$$

($d\mathbf{s}$ ist Wegelement tangential zu infinitesimal dünnem gedachten Draht; $ds\,dA = d^3r$ ist Volumenelement bei $\mathbf{s}$, da Wegelement ds senkrecht zum Flächenelement dA).

– (184) kann damit für Stromdichte formuliert werden,

$$\begin{aligned} d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{dI}{c}d\mathbf{s}\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} \;=\; \frac{1}{c}d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\ \to\quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{1}{c}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \tag{187}$$

(im letzten Schritt der ersten Zeile wurde $\mathbf{s}$ in $\mathbf{r}'$ umbenannt), d.h. aus gegebenem $\mathbf{j}$ kann $\mathbf{B}$ berechnet werden.

- Kraft auf Punktladung (beschrieben durch Trajektorie $\mathbf{r}(t)$):

– Startpunkt ist (183).

– Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}(\mathbf{s}) \;&=\; \frac{I}{c}d\mathbf{s}\times\mathbf{B}(\mathbf{s}) \;=\; \frac{1}{c}\frac{dq}{dt}d\mathbf{s}\times\mathbf{B}(\mathbf{s}) \;=\; \frac{1}{c}dq\,\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{B}(\mathbf{s}) \\ \to\quad \mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \;&=\; q\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{188}$$

(in zweiter Zeile wurde $\mathbf{s}$ in $\mathbf{r}$ umbenannt), die **Lorentz-Kraft**.

– Em Kraft:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \;=\; q\bigg(\mathbf{E}(\mathbf{r})+\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\times\mathbf{B}(\mathbf{r})\bigg). \tag{189}$$

- Magnetfeld eines unendlich langen geraden Drahtes (auf z-Achse):

– Stromdichte:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; I\delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z. \tag{190}$$

– Berechnung des B-Feldes:

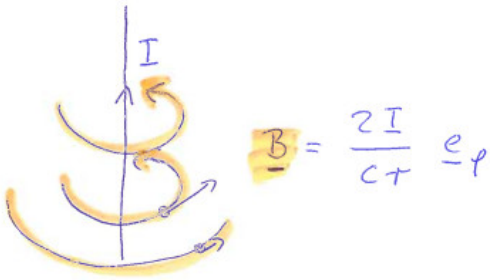
∗ Aus Symmetriegründen kann $\mathbf{B}$ nicht von z abhängen, d.h. $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x,y)$.

∗ Verwende (187) mit $z = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x,y) \;&=\; \frac{1}{c}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \;= \\ &=\; \frac{1}{c}\int dx'\int dy'\int dz'\,I\delta(x')\delta(y')\mathbf{e}_z\times\frac{(x,y,0)-\mathbf{r}'}{|(x,y,0)-\mathbf{r}'|^3} \;= \\ &=\; \frac{I}{c}\int dz'\,\mathbf{e}_z\times\frac{(x,y,0)-(0,0,z')}{|(x,y,0)-(0,0,z')|^3} \;=\; \frac{I}{c}\mathbf{e}_\varphi\int dz'\,\frac{r}{(r^2+z'^2)^{3/2}} \;= \\ &=\; \frac{I}{c}\mathbf{e}_\varphi\frac{rz'}{r^2(r^2+z'^2)^{1/2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} \;=\; \frac{2I}{cr}\mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \tag{191}$$

wobei $\mathbf{e}_z \times (+x, +y, -z') = (-y, +x, 0) = r\mathbf{e}_\varphi$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ verwendet wurde.

Bild - 034

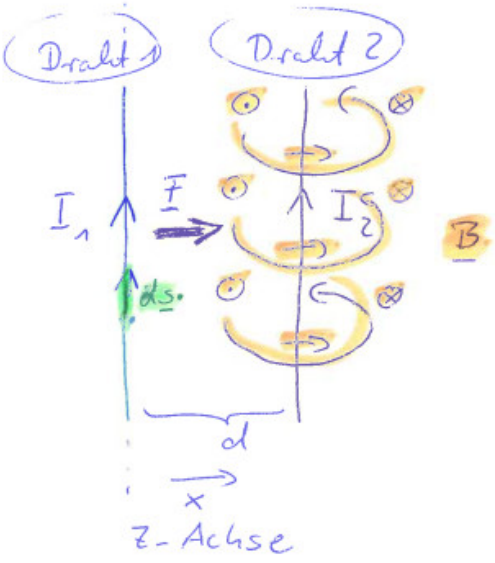


– Wie in Elektrostatik auch in Magnetostatik oft mehrere Rechenwege möglich, z.B. kann man auch (184) verwenden, um (191) zu erhalten.

****** 2. Dezember 2025 (15. Vorlesung) ******

- Kraft zwischen zwei parallelen geraden Drähten:
  – Berechne Kraft auf Draht 1 (auf z-Achse, Strom I_1) aufgrund von Draht 2 (parallel um d in x-Richtung verschoben, Strom I_2).

Bild - 035



– Verwende (183):

$$d\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{I}{c} d\mathbf{s} \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) = \frac{I_1}{c} dz\, \mathbf{e}_z \times \frac{2I_2}{cd}(-\mathbf{e}_y) = dz\, \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}\mathbf{e}_x$$
$$\frac{d\mathbf{F}}{dz} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}\mathbf{e}_x \quad \text{bzw.} \quad \frac{dF}{dz} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}. \tag{192}$$

– Unendlich starke Kraft bei unendlich langen Drähten, daher sinnvoll Kraft pro Länge $\frac{d\mathbf{F}}{dz}$ bzw. $\frac{dF}{dz}$ anzugeben.

– Bei gleichgerichteten Strömen Anziehung, bei entgegengesetzten Strömen Abstoßung.

3.3 Vektorpotential, Eichsymmetrie

- Ziel: Definition eines Potentials, analog zum elektrostatischen Potential Φ, aus dem man durch Ableiten das B-Feld erhält.

- Startpunkt ist (187):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\frac{1}{c}\int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} =$$
$$= \nabla \times \frac{1}{c}\int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{193}$$

  wobei nach letztem Gleichheitszeichen zu $\mathbf{B}$ gehörige **Vektorpotentiale** $\mathbf{A}$ eingeführt wurden.

- $\mathbf{A}$ nicht eindeutig, sondern

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \nabla\Lambda(\mathbf{r}) \tag{194}$$

  mit beliebiger Funktion Λ, da $\nabla \times \nabla\Lambda = 0$.

- Anders ausgedrückt: Das zu einem Vektorpotential $\mathbf{A}$ gehörige B-Feld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ erhält man auch aus dem Vektorpotential

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}) \tag{195}$$

  mit beliebiger Funktion Λ.

- B-Feld $\mathbf{B}$ ist messbar (z.B. über Kräfte auf stromdurchflossene Drähte), Vektorpotential $\mathbf{A}$ ist dagegen nicht direkt messbar (nur indirekt über Messung des B-Feldes, damit aber nicht eindeutig bestimmbar).

- $\mathbf{A}$ enthält also zusätzlich zur vollständigen Information über $\mathbf{B}$ weitere unphysikalische Freiheitsgrade, sogenannte **Eichfreiheitsgrade**.

- (195) nennt man **Eichtransformation** und die Invarianz von $\mathbf{B}$ und von Gleichungen, in denen $\mathbf{B}$ vorkommt, z.B. (188), **Eichsymmetrie**.

- Eichsymmetrie ist von zentraler Bedeutung bei theoretischer Beschreibung jeder der vier fundamentalen Kräfte (ED, starke WW, schwache WW, Gravitation).
  - Damit können diese Theorien konstruiert werden (mit Hilfe des **Eichprinzips**, an dieser Stelle noch nicht verständlich) ...
  - ... manchmal ist Eichfreiheit hilfreich, indem man gemäß (195) von einem gegebenem $\mathbf{A}$ zu einem **eichäquivalenten** $\mathbf{A}'$ übergeht, mit dem das physikalische Problem mathematisch leichter zu lösen ist ...
  - ... häufig (insbesondere in Quantenfeldtheorie) bereitet die Eichfreiheit jedoch mathematische Schwierigkeiten.
- **Eichfixierung**:
  - Gelegentlich stellt man zusätzliche Bedingungen an $\mathbf{A}$, die die Beziehung zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ eindeutig(er) machen (die möglichen $\mathbf{A}$ werden eingeschränkt, nicht aber die möglichen $\mathbf{B}$).
  - Beispiel **Coulomb-Eichung**, zusätzliche Bedingung

    $$\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; 0. \tag{196}$$

  - Einsetzen von (194),

    $$\begin{aligned}\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;&=\; \nabla\frac{1}{c}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\triangle\Lambda(\mathbf{r}) \;=\\ &=\; -\frac{1}{c}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\triangle\Lambda(\mathbf{r}) \;=\\ &=\; \frac{1}{c}\int d^3r'\,\underbrace{\Big(\nabla'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\Big)}_{=0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\triangle\Lambda(\mathbf{r}) \;=\; \triangle\Lambda(\mathbf{r}) \;=\; 0\end{aligned} \tag{197}$$

    (am Rand des Integrationsvolumens [z.B. im Unendlichen] wurden verschwindende Ströme angenommen).
  - Bei Coulomb-Eichung also in (194) nur noch Funktionen Λ erlaubt, die $\triangle\Lambda = 0$ erfüllen, ebenso in (195).

****** 5. Dezember 2025 (16. Vorlesung) ******

3.4 Feldgleichungen

- Mit (187) lässt sich für gegebene Stromdichte das B-Feld berechnen.
- Zusätzlich zu diesem Integralausdruck ist äquivalente DGl wünschenswert, eine Feldgleichung.
- Zunächst Berechnung von $\nabla\times\mathbf{B}$ in Komponenten:

$$\begin{aligned}\Big(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})\Big)_j \;&=\; \Big(\nabla\times\Big(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})\Big)\Big)_j \;=\; \epsilon_{jkl}\partial_k\epsilon_{lmn}\partial_m A_n(\mathbf{r}) \;=\\ &=\; \Big(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\Big)\partial_k\partial_m A_n(\mathbf{r}) \;=\; \partial_k\partial_j A_k(\mathbf{r})-\partial_k\partial_k A_j(\mathbf{r}) \;=\\ &=\; \Big(\nabla(\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}))-\triangle\mathbf{A}(\mathbf{r})\Big)_j.\end{aligned} \tag{198}$$

- Einsetzen von (194) liefert die Feldgleichung,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \\
&= \nabla \underbrace{\left(\nabla \frac{1}{c} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)}_{=0 \text{ (Gleichung (197))}} - \triangle \frac{1}{c} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&\quad + \underbrace{\nabla \Big(\nabla \nabla \Lambda(\mathbf{r}) \Big) - \triangle \nabla \Lambda(\mathbf{r})}_{=0} \quad = \\
&= -\frac{1}{c} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{\triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad = \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \qquad (199)
\end{aligned}$$

- Außerdem

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \nabla \Big(\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \Big) \quad = \quad \underbrace{\partial_j \epsilon_{jkl} \partial_k}_{=0} A_l(\mathbf{r}) \quad = \quad 0. \qquad (200)$$

- Zentrale Gleichungen der Magnetostatik, die Beziehung zwischen Stromdichte und B-Feld herstellen:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad (201)$$

  bzw.

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad (202)$$

  (analog zu (68) und (69) in Elektrostatik; Teil eines Satzes von Gleichungen, die wir später als **Maxwell-Gleichungen** kennenlernen werden).

- Integrale Formen von (201) bzw. (202) mit Satz von Gauß bzw. Satz von Stokes:

$$\Phi_m \quad = \quad \oint_A d\mathbf{A} \, \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_V d^3r \, \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0 \qquad (203)$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \, \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_A d\mathbf{A} \, \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{4\pi}{c} \int_A d\mathbf{A} \, \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{4\pi}{c} I_{\text{durch } A}. \qquad (204)$$

  - Analog zu (70) und (71) in Elektrostatik.
  - Φ_m wird als magnetischer Fluss bezeichnet, daher auch $\mathbf{B}$ als magnetische Flussdichte.
  - (203): Es gibt keine Endpunkte für magnetische Feldlinien, d.h. keine magnetischen Ladungen (= **magnetische Monopole**).
  - (204) wird als **Amperesches Gesetz** bezeichnet.

- Einsetzen von (193) in rechte Gleichung von (201):

$$\triangle \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla(\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r})) \quad = \quad -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{205}$$

bzw. falls man Coulomb-Eichung fordert, $\nabla \mathbf{A} = 0$,

$$\triangle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad = \quad -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{206}$$

(drei Poisson-Gleichungen mit zusätzlicher Bedingung $\nabla \mathbf{A} = 0$; analog zu (72) in Elektrostatik).

- RWPs und RBs:
  - Mathematik wie bei Elektrostatik: Eindeutige Lösung der Feldgleichungen erfordert Vorgabe geeigneter RBs.
  - Physikalisch schwieriger zu motivieren bzw. zu realisieren (eventuell später eine entsprechende Diskussion).
  - Betrachte momentan triviale RBs, d.h. unendlich ausgedehneter Raum mit $\mathbf{B}(r \to \infty) = 0$.

3.5 Gegenüberstellung: Elektrostatik $\leftrightarrow$ Magnetostatik

- Die folgende Gegenüberstellung soll nicht nur als Formelsammlung dienen, sondern zeigen, wie ähnlich Elektrostatik und Magnetostatik sind (später werden beide Theorien zur ED kombiniert).

- Ladungen und Ströme (im Wesentlichen (28) $\leftrightarrow$ (186)):

$$dq \quad = \quad d^3r\,\rho \quad \leftrightarrow \quad dI\,d\mathbf{s} \quad = \quad d^3r\,\mathbf{j}. \tag{207}$$

- Definition des elektrischen und magnetischen Feldes (im Wesentlichen (27) $\leftrightarrow$ (183)):

$$d\mathbf{F} \quad = \quad dq\,\mathbf{E} \quad \leftrightarrow \quad d\mathbf{F} \quad = \quad \frac{I}{c}d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \tag{208}$$

- Elektrische und magnetische Kraft auf Punktladung ((27) $\leftrightarrow$ (188)):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad = \quad q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad = \quad q\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{209}$$

- Beziehung zwischen Feldern und Potentialen ((44) $\leftrightarrow$ (193)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{210}$$

- Potentiale aus Ladungen/Strömen ((48) $\leftrightarrow$ (194)):

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \text{const} \quad\leftrightarrow\quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{c}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \nabla\Lambda(\mathbf{r}). \tag{211}$$

- Feldgleichungen ((68) $\leftrightarrow$ (201)):

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;&=\; 4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad,\quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; 0 \quad\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\quad \nabla\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;&=\; 0 \quad,\quad \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{212}$$

- Integrale Formen der Feldgleichungen (70), (71) $\leftrightarrow$ (203), (204)):

$$\begin{aligned}\oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;&=\; 4\pi q_{\text{innerhalb von } V} \quad,\quad \oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; 0 \quad\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\quad \oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;&=\; 0 \quad,\quad \oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{4\pi}{c} I_{\text{durch } A}.\end{aligned} \tag{213}$$

- Feldgleichungen für Potentiale ((72) $\leftrightarrow$ (206)):

$$\begin{aligned}\triangle\Phi(\mathbf{r}) \;&=\; -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\quad \triangle\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;&=\; -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \text{(in Coulomb-Eichung, d.h. für } \nabla\mathbf{A}=0).\end{aligned} \tag{214}$$

3.6 Multipolentwicklung

- Im Wesentlichen analog zur Multipolentwicklung in Elektrostatik.
- Entwicklung des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ einer um den Ursprung lokalisierten Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{j}(\mathbf{r})=0$ für $|\mathbf{r}|>R$) für große Abstände, d.h. $|\mathbf{r}|\gg R$.

Bild - 036



$\times\ \underline{A}(\underline{r}) = ?$
$(|\underline{r}| >> R)$

- Startpunkt ist (194),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{c}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{215}$$

- Verwende Nebenrechnung (165),

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2}+\mathcal{O}((r'/r)^2)\right), \tag{216}$$

damit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')+\frac{1}{cr^3}\int d^3r'\,(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')+\mathcal{O}((1/r)^3). \tag{217}$$

- Erster Term auf rechter Seite in (217):

$$\frac{1}{cr}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0. \tag{218}$$

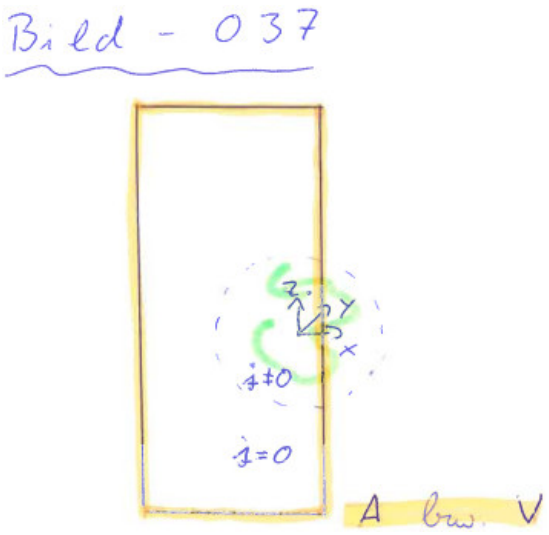
  - Betrachte exemplarisch und passend zur Abbildung unten die y-Komponente:

$$\int d^3r\,j_y(\mathbf{r}) = \int dy \underbrace{\int dx \int dz\, j_y(\mathbf{r})}_{=0} = 0. \tag{219}$$

  - Dabei wurde der Satz von Gauß verwendet,

$$\int dy \int dz\, j_x(\mathbf{r}) = \oint_A d\mathbf{A}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r\,\underbrace{\nabla\mathbf{j}(\mathbf{r})}_{=0} = 0 \tag{220}$$

    (das Integrationsvolumen ist ein in $+x$-, $-x$-, $-y$-, $-z$- und $+z$-Richtung (nicht aber in $+y$-Richtung) unendlich ausgedehnter Würfel; die in der Abbildung gelb gezeichnete Fläche entspricht einer der unendlich ausgedehnten Würfelseiten, senkrecht zur y-Achse bei endlichem Wert von y, d.h. die einzige Würfelseite, die sich nicht vollständig im Unendlichen befindet).



- Zweiter Term auf rechter Seite in (217):

– Nebenrechnung:

$$\partial_j\Big(r_k j_j(\mathbf{r})\Big) = \delta_{jk} j_j(\mathbf{r}) + r_k \underbrace{\partial_j j_j(\mathbf{r})}_{=0} \quad = \quad j_k(\mathbf{r}). \tag{221}$$

– Damit

$$\int d^3r'\, r'_j j_k(\mathbf{r}') \quad = \quad \int d^3r'\, r'_j \partial'_l\Big(r'_k j_l(\mathbf{r}')\Big) \quad = \quad -\int d^3r' \underbrace{\Big(\partial'_l r'_j\Big)}_{=\delta_{lj}} r'_k j_l(\mathbf{r}') \quad =$$

$$= \quad -\int d^3r'\, r'_k j_j(\mathbf{r}'). \tag{222}$$

– Damit

$$\frac{1}{cr^3}\int d^3r'\,(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad = \quad \frac{1}{2cr^3}\int d^3r'\,\Big(\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\Big) \quad =$$

$$= \quad \frac{1}{2cr^3}\int d^3r'\,\mathbf{r}\times\Big(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\mathbf{r}'\Big) \quad = \quad \underbrace{\left(\frac{1}{2c}\int d^3r'\,\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')\right)}_{=\vec{\mu}}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{223}$$

wobei das **magnetische Dipolmoment** $\vec{\mu}$ definiert wurde.

- Insgesamt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{\vec{\mu}\times\mathbf{r}}{r^3} + \mathcal{O}((1/r)^3). \tag{224}$$

- Das magnetische Dipolmoment charakterisiert das Fernfeld einer lokalisierten Stromdichte (analog zu Gesamtladung und elektrischem Dipolmoment, die das Fernfeld einer lokalisierten Ladungsverteilung charakterisieren).

- **Magnetischer Punktdipol**: Hausaufgabe.

****** 9. Dezember 2025 (17. Vorlesung), 12. Dezember 2025 (18. Vorlesung) ******

4 Spezielle Relativitätstheorie (Wiederholung)

- Siehe "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik" im Sommersemester 2022, Kapitel 1 (insbesondere Abschnitt 1.2 und Abschnitt 1.3).

****** 16. Dezember 2025 (19. Vorlesung) ******

5 Elektrodynamik (Grundlagen)

- **Elektrodynamik** (ED): Zeitabhängige elektrische Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und magnetische Felder $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ sowie Ladungsdichten $\rho(\mathbf{r},t)$ und Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$.
- Bis jetzt "historischer Zugang" zu Feldgleichungen: Ausgehend von experimentellen Beobachtungen werden Feldgleichungen schrittweise aufgebaut.
- Ab jetzt "moderner Zugang" zu Feldgleichungen, **Lagrange-Formalismus für Felder**:
  (1) Konstruiere eine mit beobachteten oder vermuteten Symmetrien verträgliche Langrage-Dichte $\mathcal{L}$.
  (2) Bestimme Feldgleichungen mit Variationsrechnung, d.h. mit Euler-Lagrange-Gleichungen.
  (3) Prüfe Verträglichkeit der Feldgleichungen mit experimentellen Beobachtungen (eventuell Nachbesserung bei $\mathcal{L}$ [Schritt (1)] erforderlich, d.h. iterativer Prozess).
- Kombination von Elektrostatik und Magnetostatik zur ED mit historischem Zugang problemlos möglich.
- Verwende modernen Zugang aus pädagogischen Gründen: Lagrange-Formalismus für Felder unverzichtbar für kompliziertere Theorien als ED, z.B. Quantenchromodynamik (QCD), elektroschwache WW, Standardmodell der Teilchenphysik.

5.1 Lagrange-Formalismus für Felder

- Siehe auch Abschnitt 1.1 (schwingende Saite).
- Gegeben:
  - Felder $\Phi^a(\mathbf{r},t)$, $a = 1,\ldots,N$ (Φ^a kann z.B. für Potential Φ und Vektorpotential $\mathbf{A}$ stehen, dann $a = 1,\ldots,4$).
  - Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\partial_\mu\Phi^a, \Phi^a)$ (hängt von Feldern und ersten Ableitungen der Felder ab; Erfahrung zeigt, dass zweite und höhere Ableitungen i.d.R. nicht zu sinnvollen physikalischen Theorien führen).
- Wirkung:

$$S[\Phi^a] \;=\; \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3r\, \mathcal{L}(\partial_\mu\Phi^a, \Phi^a). \tag{225}$$

- Prinzip der kleinsten Wirkung: $\delta S = 0$ legt physikalische Feldkonfigurationen fest,

$$0 \;=\; \delta S \;=\; \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3r \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^a)} \delta\partial_\mu\Phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^a}\delta\Phi^a \right) \;=$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3r\, \partial_0 \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi^a)} \delta\Phi^a \Big) + \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3r\, \partial_j \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Phi^a)} \delta\Phi^a \Big) \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3r \Big(- \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} \Big) \delta\Phi^a \quad = \\
&= \underbrace{\int d^3r\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi^a)} \delta\Phi^a \Big|_{t=t_i}^{t=t_f}}_{=0} + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \oint dA_j\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Phi^a)} \delta\Phi^a}_{=0} \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3r \Big(- \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} \Big) \delta\Phi^a . \qquad (226)
\end{aligned}
$$

- $\int d^3r \ldots = 0$ aufgrund des Prinzips der kleinsten Wirkung (Feldkonfiguration bei $t = t_i$ und $t = t_f$ vorgegeben, daher $\delta\Phi^a(t = t_i) = \delta\Phi^a(t = t_f) = 0$).
- $\oint dA_j \ldots = 0$ aufgrund der Annahme/Voraussetzung, dass Felder im Unendlichen hinreichend stark verschwinden, d.h. "$\Phi^a(|\mathbf{r}| \to \infty) = 0$" (könnte man genauer ausarbeiten, ist im Folgenden aber nicht von zentraler Bedeutung).

- Es folgen die Feldgleichungen bzw. Euler-Lagrange-Gleichungen der Feldtheorie

$$
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} \quad = \quad 0 \quad , \quad a = 1, \ldots, N \qquad (227)
$$

(gleiche Form, wie Euler-Lagrange-Gleichungen der Mechanik, $(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}^j) - \partial L/\partial q^j = 0$).

5.2 Lagrange-Funktion und Feldgleichungen der Elektrodynamik für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$

- Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ der ED aufgrund von Symmetrien eingeschränkt.
  - ED in jedem Inertialsystem gleich ("Licht bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit, verhält sich in jedem Inertialsystem gleich"), d.h. relativistische Invarianz der Feldgleichungen.
    - S muss Lorentz-Skalar sein.
    - Da $d^4x = c\,dt\,d^3r = d^4x' = c\,dt'\,d^3r'$ (Beweis in Hausaufgabe) muss auch $\mathcal{L}$ Lorentz-Skalar sein.
  - Für relativistische Formulierung sind Felder notwendig, die Viererindizes tragen:
    - $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sind Dreiervektoren, keine offensichtliche 0-Komponente vorhanden.
    - Potentiale $\Phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ bilden naheliegenden Kandidat für Vierervektor, $A^\mu(x) = (\Phi(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))$ (**Viererpotential**), wobei $x \equiv x^\mu = (x^0 = ct, \mathbf{r})$.
    - $\mathcal{L}$ ist also Funktion von A^μ und Ableitungen von A^μ.
  - Invarianz der Feldgleichungen unter Raumspiegelung.
    - S muss spiegelsymmetrisch sein, d.h. **paritätsinvariant** (in Experimenten zur Elektrodynamik beobachtet man keine Bevorzugung von links- gegenüber rechtshändigen Prozessen oder umgekehrt).

- $\mathcal{L}$ muss eichinvariant sein.
  - Aussage kommt nicht aus dem Experiment, sondern ist ein mächtiges theoretisches Prinzip, das **Eichprinzip**, das Lagrange-Funktionen fundamentaler Theorien stark einschränkt (erlaubt nahezu die Herleitung der Lagrange-Funktionen der unsere vier fundamentalen Kräfte beschreibenden Theorien).
  - Die in Abschnitt 3.3 diskutierte Eichsymmetrie und zugehörigen Eichtransformationen $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ (Gleichung (195)) werden relativistisch verallgemeinert,
    $$A'^{\mu}(x) \quad = \quad A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}\Lambda(x). \tag{228}$$
  - $\mathcal{L}$ muss invariant unter Eichtransformationen (228) sein.

- Weitere Einschränkungen bzw. Richtlinien (basieren auf Erfahrungen mit Lagrange-Formalismus in Mechanik oder mit fehlgeschlagenen Versuchen in Feldtheorie):
  - $\mathcal{L}$ ist Funktion von A^{μ} und ersten Ableitungen von A^{μ}, höhere Ableitungen treten dagegen nicht auf, damit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_{\mu}A^{\nu}, A^{\mu})$.
  - $\mathcal{L}$ enthält "kinetischen Term", d.h. Term der quadratisch in ersten Ableitungen der Felder ist (z.B. in Mechanik $m\dot{x}^2/2$).
  - $\mathcal{L}$ hat einfache mathematische Struktur.

****** 19. Dezember 2025 (20. Vorlesung) ******

- Suche Kandidaten für Langrange-Funktion der ED:
  - Quadratischer Ausdruck in $\partial_{\mu}A^{\nu}$ mindestens erforderlich, außerdem muss über alle Viererindizes summiert werden (Lorentz-Invarianz).
  - Versuch:
    $$\mathcal{L}(\partial_{\mu}A^{\nu}, A^{\mu}) \quad = \quad \#(\partial_{\mu}A^{\mu})^2 \tag{229}$$
    ... nein ... nicht eichinvariant (Nachweis in Hausaufgabe); außerdem treten nur wenige Kombinationen von ∂_{μ} und A^{μ} auf, z.B. $\partial_0 A^0$, aber keine Zeitableitungen von A^j.
  - Versuch:
    $$\mathcal{L}(\partial_{\mu}A^{\nu}, A^{\mu}) \quad = \quad \#(\partial_{\mu}A^{\nu})(\partial^{\mu}A_{\nu}) \tag{230}$$
    ... nein ... nicht eichinvariant (Nachweis in Hausaufgabe).
  - Versuch:
    $$\mathcal{L}(\partial_{\mu}A^{\nu}, A^{\mu}) \quad = \quad \#(\partial_{\mu}A^{\nu})(\partial_{\nu}A^{\mu}) \tag{231}$$
    ... nein ... ebenfalls nicht eichinvariant (Nachweis in Hausaufgabe).
  - Die antisymmetrische Kombination
    $$F^{\mu\nu} \quad = \quad \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \tag{232}$$
    ist eichinvariant, da
    $$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} \quad &= \quad \partial^{\mu}A'^{\nu} - \partial^{\nu}A'^{\mu} \quad = \quad \partial^{\mu}\Big(A^{\nu} - \partial^{\nu}\Lambda\Big) - \partial^{\nu}\Big(A^{\mu} - \partial^{\mu}\Lambda\Big) \quad = \\ &= \quad \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \quad = \quad F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{233}$$

– Versuch:

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu) \;=\; \#(F^\mu{}_\mu)^2. \tag{234}$$

∗ ... nein ... $F^\mu{}_\mu = 0$.

– Versuch:

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu) \;=\; \#F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{235}$$

∗ Lorentz-invariant (offensichtlich, kein offener Viererindex).

∗ Paritätsinvariant:

· Parität bewirkt $\partial_\mu = ((1/c)\partial_t, \nabla) \to_P (+(1/c)\partial_t, -\nabla)$ und $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}) \to_P (+\Phi, -\mathbf{A})$ (Beweis ist Hausaufgabe).

· Damit $F^{00} \to_P +F^{00}$, $F^{jk} \to_P +F^{jk}$ und $F^{0j} \to_P -F^{0j}$, $F^{j0} \to_P -F^{j0}$.

· Damit $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \to_P +F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

∗ Eichinvariant (offensichtlich, da $F^{\mu\nu}$ eichinvariant).

∗ Außerdem quadratisch in $\partial_\mu A^\nu$ und einfach.

Scheint also guter Kandidat zu sein.

- Berechne Feldgleichungen für (235), d.h.

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu) \;=\; -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{236}$$

(Vorfaktor $-1/16\pi$ ist Konvention, Feldgleichungen unabhängig davon),

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} \;=\; 0 \\
\to\quad &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \;=\; -\frac{1}{8\pi}F^{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\Big(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho\Big) \;= \\
&\quad = \; -\frac{1}{8\pi}F^{\rho\sigma}\Big(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\Big) \;=\; -\frac{1}{8\pi}\Big(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}\Big) \;=\; -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu} \\
\to\quad &\partial_\mu F^{\mu\nu} \;=\; 0 \quad , \quad \nu = 0, \ldots, 3.
\end{aligned} \tag{237}$$

- 0-Komponente der Feldgleichungen (237):

$$\partial_\mu F^{\mu 0} \;=\; \partial_j F^{j0} \;=\; \partial_j\Big(\partial^j A^0 - \partial^0 A^j\Big) \;=\; -\triangle\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\mathbf{A} \;=\; 0. \tag{238}$$

- j-Komponenten der Feldgleichungen (237):

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu F^{\mu j} \;=\; \partial_0 F^{0j} + \partial_k F^{kj} \;=\; \partial_0 F^{0j} + \partial_k\Big(\partial^k A^j - \partial^j A^k\Big) \;= \\
&\quad = \; \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}F^{0j} - \triangle A^j + \frac{\partial}{\partial x^j}\nabla\mathbf{A} \;=\; 0.
\end{aligned} \tag{239}$$

- (238) und (239) ergeben für zeitunabhängiges Φ und $\mathbf{A}$, d.h. für zeitunabhängiges A^μ,

$$\triangle\Phi \;=\; 0 \quad , \quad \triangle\mathbf{A} - \nabla(\nabla\mathbf{A}) \;=\; 0, \tag{240}$$

die Feldgleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik (siehe z.B. (72) und (205)) in Abwesenheit von Ladungen und Strömen.

– (238) und (239) gelten auch für zeitabhängige Felder, sind in dieser Hinsicht also allgemeiner als (72) und (205).

– (236) scheint also guter Startpunkt für Lagrange-Dichte der ED zu sein (momentan fehlen allerdings noch Ladungen und Ströme).

- In $F^{\mu\nu}$ finden sich Komponenten des E-Feldes $\mathbf{E}$ und des B-Feldes $\mathbf{B}$:

  – $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch, d.h. $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, daher $F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$.

  – 0-j-Komponenten:

$$F^{0j} \;=\; \partial^0 A^j - \partial^j A^0 \;=\; \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \nabla\Phi\right)_j \;\equiv\; -E_j, \tag{241}$$

  $\ldots \equiv -E_j$ ist als verallgemeinerte Definition der Beziehung zwischen Potentialen und elektrischem Feld zu verstehen, gilt auch für zeitabhängiges $\mathbf{A}$, ist konsistent mit $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ für zeitunabhängiges $\mathbf{A}$ (Index j von E_j ist kein kovarianter Index, also keine Unterscheidung zwischen unterem und oberem Index).

  – j-k-Komponenten:

$$F^{12} \;=\; \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \;=\; -\frac{\partial}{\partial x}A_y + \frac{\partial}{\partial y}A_x \;=\; -B_z \tag{242}$$

$$F^{13} \;=\; \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \;=\; -\frac{\partial}{\partial x}A_z + \frac{\partial}{\partial z}A_x \;=\; +B_y \tag{243}$$

$$F^{23} \;=\; \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \;=\; -\frac{\partial}{\partial y}A_z + \frac{\partial}{\partial z}A_y \;=\; -B_x \tag{244}$$

$$\rightarrow \quad B_j \;=\; -\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}F^{kl} \tag{245}$$

  (Index j von B_j und Indizes von ϵ sind keine kovarianten Indizes).

  – Nach F^{jk} aufgelöste Version von (245) häufig hilfreich:

$$\epsilon_{jkl}B_l \;=\; -\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}F^{mn} \;=\; -\frac{1}{2}\Big(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\Big)F^{mn} \;=\; -F^{jk}. \tag{246}$$

  – $F^{\mu\nu}$ wird als **Feldstärketensor** bezeichnet.

  – $F^{\mu\nu}$ in Matrixschreibweise:

$$F^{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{247}$$

***** 13. Januar 2026 (21. Vorlesung) *****

- Feldgleichungen für zeitabhängige Potentiale (238) und (239) können nun durch ebenfalls zeitabhängige E-Felder und B-Felder ausgedrückt werden:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} \;=\; \partial_j F^{j0} \;=\; \frac{\partial}{\partial x^j}E_j \;=\; 0$$
$$\rightarrow \quad \nabla\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; 0 \tag{248}$$

$$\partial_\mu F^{\mu j} = \partial_0 F^{0j} + \partial_k F^{kj} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_j + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(-\epsilon_{kjl}B_l\Big) =$$
$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_j + \epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^k}B_l = 0$$
$$\rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{249}$$

(249) ist Erweiterung von $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ für zeitabhängige em Felder (noch immer für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$).

- Was ist mit Erweiterung der Gleichungen $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \mathbf{B} = 0$ für zeitabhängige em Felder?
  - Definiere total antisymmetrischen Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ via
    - $\epsilon_{0123} = +1$,
    - Vertauschung benachbarter Indizes kehrt Vorzeichen um

    (damit z.B. $\epsilon_{1023} = -1$, $\epsilon_{0023} = 0$, ...).
  - Vergabe von Viererindizes an $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ sinnvoll, da $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ Lorentz-invariant, d.h. $\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ (Beweis in Hausaufgabe).
  - Betrachte
    $$\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \tag{250}$$
    (ergibt 0 wegen ϵ-Tensor und doppelt auftretendem ∂_μ [d.h. ist mathematische Identität], nicht aufgrund von Prinzip der kleinsten Wirkung).
    - 0-Komponente:
      $$0 = \frac{1}{2}\epsilon_{0\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^j}F^{kl} = \frac{\partial}{\partial x^j}B_j$$
      $$\rightarrow \quad \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{251}$$
    - j-Komponenten:
      $$0 = \frac{1}{2}\epsilon_{j\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = \ldots \quad \text{(Rechnung ist Hausaufgabe)}$$
      $$\rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{252}$$
      (252) ist Erweiterung von $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ für zeitabhängige em Felder.
  - $\tilde{F}^{\mu\nu} = (1/2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ nennt man **dualen Feldstärketensor**.
  - Damit lässt sich (250) kompakter schreiben,
    $$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{253}$$
- Zusammenfassung der Feldgleichungen der ED für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$:
  - Kovariante Form:
    $$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \quad , \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{254}$$
  - Ausgedrückt durch E-Feld und B-Feld:
    $$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{255}$$
    $$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{256}$$

5.3 Lagrange-Funktion und Feldgleichungen der Elektrodynamik für $\rho \neq 0$ und/oder $\mathbf{j} \neq 0$

- Naheliegender Kandidat für Vierervektor, der Ladungsdichte und Stromdichte enthält: $j^\mu(x) = (\rho(\mathbf{r},t)c, \mathbf{j}(\mathbf{r},t))$ (**Viererstrom**).
  - Exemplarischer Nachweis, dass sich j^μ unter Lorentz-Transformation wie ein Vierervektor verhält in Hausaufgabe.
- Komponenten von j^μ treten in Feldgleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik linear als Inhomogenität auf, legt Erweiterung von $\mathcal{L}$ gemäß

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu) \quad = \quad -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \# j^\mu A_\mu \tag{257}$$

  nahe.
- Zusatzterm $\# j^\mu A_\mu$ erfüllt geforderte Symmetrien für $\mathcal{L}$ bzw. S:
  - Lorentz-invariant (offensichtlich, kein offener Viererindex).
  - Paritätsinvariant:
    - Parität bewirkt $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j}) \to_P (+\rho c, -\mathbf{j})$ und $A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \to_P (+\phi, -\mathbf{A})$ (Beweis ist Hausaufgabe).
    - Damit $j^\mu A_\mu \to_P + j^\mu A_\mu$.
  - Eichinvariant (nur S, nicht $\mathcal{L}$):

$$\int d^4x\, j^\mu A'_\mu \quad = \quad \int d^4x\, j^\mu \Big(A_\mu - \partial_\mu \Lambda \Big) \quad =$$

$$= \quad \int d^4x\, j^\mu A_\mu - \underbrace{\int d^4x\, \partial_\mu (j^\mu \Lambda)}_{= \oint dn_\mu\, j^\mu \Lambda = 0} + \int d^4x\, \underbrace{(\partial_\mu j^\mu)}_{=0} \Lambda \quad = \quad \int d^4x\, j^\mu A_\mu \tag{258}$$

    (Oberflächenterm $\oint dn_\mu j^\mu \Lambda = 0$, z.B. wenn A^μ am Rand vorgegeben ist und daher dort $\Lambda = 0$ gilt und/oder j^μ auf dem Rand verschwindet; $\partial_\mu j^\mu = 0$ [Kontinuitätsgleichung]); in vollständiger quantenfeldtheoretischer Beschreibung, d.h. wenn Ladungsträger ebenfalls durch Felder repräsentiert werden, ist auch $\mathcal{L}$ eichinvariant (siehe Vorlesung "Einführung in die Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik").

  Scheint also guter Kandidat zu sein.
- Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \quad = \quad 0 \tag{259}$$

  liefern Feldgleichungen

$$-\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \# j^\nu \quad = \quad 0 \quad \nu = 0, \ldots, 3. \tag{260}$$

- Gemäß (248) und (249) sind diese äquivalent zu

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -4\pi \# \rho(\mathbf{r},t)c \tag{261}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -4\pi \# \mathbf{j}(\mathbf{r},t), \tag{262}$$

wobei Vergleich mit den Feldgleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik (212) ($\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho$ und $\nabla \times \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$) den Vorfaktor $\# = -1/c$ festlegt.

5.4 Zusammenfassung und Diskussion der Feldgleichungen

- Langrange-Dichte und Wirkung der ED:

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu) = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu A_\mu \quad , \quad S[A] = \int d^4x\, \mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu) \tag{263}$$

mit Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{264}$$

- Inhomogene Feldgleichungen (nennt man auch **inhomogene Maxwellgleichungen**):
  - Kovariante Form:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu. \tag{265}$$

  - Ausgedrückt durch E-Feld und B-Feld:

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho(\mathbf{r},t) \tag{266}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t). \tag{267}$$

- Homogene Feldgleichungen (nennt man auch **homogene Maxwellgleichungen**):
  - Kovariante Form:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{268}$$

  - Ausgedrückt durch E-Feld und B-Feld:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{269}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{270}$$

- Interpretation:
  - (266):
    Elektrische Ladungen sind Anfangs- und Endpunkte elektrischer Feldlinien.

– (269):
Es gibt keine magnetischen Ladungen, magnetische Feldlinien haben keine Anfangs- und Endpunkte.

– (267):
Zeitlich veränderliche elektrische Felder führen zu magnetischen Wirbelfeldern und umgekehrt.

– (270):
Zeitlich veränderliche magnetische Felder führen zu elektrischen Wirbelfeldern und umgekehrt.

****** 20. Januar 2026 (23. Vorlesung) ******

∗ Satz von Stokes:

$$U = \oint_C d\mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_A d\mathbf{A}\,\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_m, \tag{271}$$

d.h. verändert sich der magnetische Fluss Φ_m durch eine Leiterschleife, wird eine Spannung U induziert; die Spannung bewirkt einen Strom, dieser ein B-Feld, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegen gerichtet ist (**Lenzsche Regel**).

Bild - 038



Leiterschleife

B-Feld

Verändert sich magnetischer Fluss durch Leiterschleife (z.B. B wird stärker), wird Spannung U induziert

∗ In (271) ist C eine fest vorgegebene, d.h. sich zeitlich nicht verändernde geschlossene Kurve, d.h. $U = -(1/c)(\partial/\partial_t)\Phi_m$ wurde für ruhende Leiterschleifen gezeigt.

∗ (271) gilt auch für sich bewegende Kurven C und Leiterschleifen (kann man zeigen), wird als **Faradaysche Induktion** bezeichnet.

5.5 Energie und Impuls des em Feldes

- Betrachte Vakuum, d.h. $j^\mu = 0$.

- Noether-Theorem für Felder (speziell für ED)

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu(s), A^\mu(s), x)\bigg|_{s=0} \quad = \quad \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu, x)}{\partial(\partial_\rho A^\sigma)}\frac{\partial A^\sigma(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right) \tag{272}$$

  mit Transformation $A^\mu(x) \to A^\mu(s,x)$, wobei $A^\mu(0,x) = A^\mu(x)$, und Notation $A^\mu(s) \equiv A^\mu(s,x)$ und $A^\mu \equiv A^\mu(x)$.

  - Herleitung ist freiwillige Hausaufgabe (analog zur Herleitung in "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik [SoSe 2020]", Abschnitt 2.7.2).
  - Zum Vergleich: Noether-Theorem für Mechanik,

$$\frac{\partial}{\partial s}L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)\bigg|_{s=0} \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial\dot{q}^k}\frac{\partial q^k(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right). \tag{273}$$

- Mit den vier Transformationen $A^\mu(x) \to A^\mu(s,x) = A^\mu(se_\nu + x)$, $\nu = 0,\ldots,3$ (e_ν bezeichnet den ν-ten Einheitsvektor, z.B. $e_0 = (1,0,0,0)$, $e_1 = (0,1,0,0)$) lassen sich vier Kontinuitätsgleichungen herleiten,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \quad = \quad 0 \tag{274}$$

  (analog zur Herleitung der Energieerhaltung aus der Translation in der Zeit in "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik [SoSe 2020]", Abschnitt 2.7.2; ein detaillierte Rechnung findet sich außerdem in Anhang A).

- $T^{\mu\nu}$ wird als Energie-Impuls-Tensor bezeichnet, er hat die Form

$$T^{\mu\nu} \quad = \quad \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right). \tag{275}$$

- Für im Unendlichen verschwindendes E-Feld und B-Feld ($F^{\mu\nu}(|\mathbf{r}| \to \infty) = 0$) ergeben sich mit Satz von Gauß vier Erhaltungsgrößen,

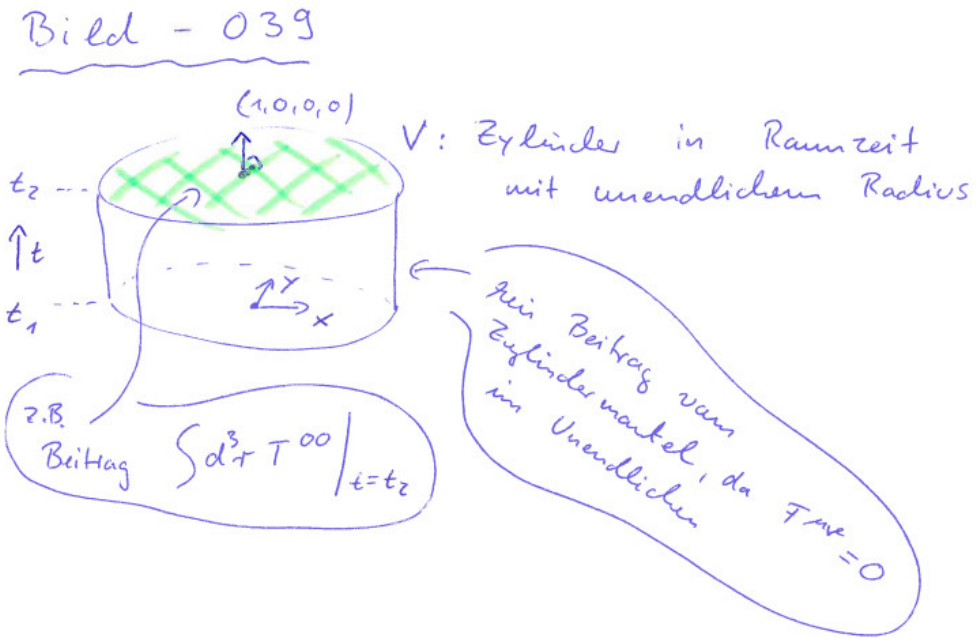
$$\int_V d^4x\,\partial_\mu T^{\mu 0} \quad = \quad \int d^3r\,T^{00}\bigg|_{t=t_2} - \int d^3r\,T^{00}\bigg|_{t=t_1} \quad = \quad 0 \tag{276}$$

$$\to \quad E \quad = \quad \int d^3r\,T^{00} \quad = \quad \text{const} \tag{277}$$

  (Interpretation als **Gesamtenergie** des em Feldes, da Transformation Translation in der Zeit) und analog

$$\to \quad P^j \quad = \quad \int d^3r\,T^{0j} \quad = \quad \text{const} \tag{278}$$

  (Interpretation als **Gesamtimpuls** des em Feldes, da Transformation Translation im Raum).



- Ausdrücken der Komponenten von $T^{\mu\nu}$ durch E-Feld und B-Feld und Interpretation:
  - T^{00}: **Energiedichte**,

    $$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\Big(\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r},t)\Big) \tag{279}$$

    (konsistent mit Ergebnis aus Elekrostatik, $\mathcal{E} = (1/8\pi)\mathbf{E}^2$ [Gleichung 92]).
  - cT^{j0}: **Energiestromdichte**,

    $$cT^{j0} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t). \tag{280}$$

  - T^{j0}/c: **Impulsdichte**.
  - T^{jk}: **Impulsstromdichte**.
- Nachrechnen bzw. Herleiten aller der in diesem Abschnitt angegebenen Beziehungen ist gutes Training für Umgang mit Viererindizes (freiwillige Hausaufgabe).

6 Elektrodynamik (Anwendungen)

6.1 Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen

- Vorgehen ähnlich wie in Elektrostatik, Abschnitt 2.12, Abschnitt 2.14 und Abschnitt 2.15 (Lösung der Poisson-Gleichung).
- Drücke inhomogene Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form durch Viererpotentiale aus:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu \Big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Big) \quad = \quad \Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) \quad = \quad \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{281}$$

  - $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2) - \triangle$ nennt man **d'Alembert-Operator**.
  - Homogene Maxwell-Gleichungen sind mathematische Identitäten, die von beliebigen Viererpotentialen A^μ erfüllt werden, müssen also nur berücksichtigt werden, wenn man mit E-Feld und B-Feld rechnet.
  - Wesentliche Schwierigkeit bei Lösung: 4 gekoppelte DGls.
- Entkopplung durch Eichfixierung, **Lorenz-Eichung**,

$$\partial_\mu A^\mu \quad = \quad 0 \tag{282}$$

  (zulässige Bedingung, da $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ nicht eingeschränkt werden [kann man zeigen, siehe Abschnitt 6.5]; ähnlich zu Coulomb-Eichung $\nabla \mathbf{A} = 0$ in Magnetostatik), damit

$$\Box A^\nu \quad = \quad \frac{4\pi}{c} j^\nu, \tag{283}$$

  d.h. 4 entkoppelte DGls identischer Form (gleiche Struktur wie Poisson-Gleichung $\triangle \Phi = -4\pi\rho$).

****** 23. Januar 2025 (24. Vorlesung) ******

- $\nu = 0$ (Lösung der anderen drei Gleichungen analog):

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \right) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad = \quad 4\pi\rho(\mathbf{r}, t). \tag{284}$$

- Inhomogene lineare DGl, daher allgemeine Lösung

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \quad = \quad \Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}, t) + \Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}, t) \tag{285}$$

  (benötigt wird beliebige Partikulärlösung und allgemeine Lösung der homogenen DGl).
- Lösung der homogenen Gleichung:

– Separationsansatz

$$\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r},t) \;=\; T(t)X(x)Y(y)Z(z) \tag{286}$$

führt auf 4 gewöhnliche DGLs

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) \;=\; -k_x^2 X(x) \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y) \;=\; -k_y^2 Y(y) \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) \;=\; -k_z^2 Z(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) \;=\; -\omega^2 T(t) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = (k_x^2+k_y^2+k_z^2)c^2. \tag{287}$$

– Lösungen sind jeweils komplexe Exponentialfunktionen,

$$T(t) \;=\; e^{\pm i\omega t} \quad , \quad X(x) \;=\; e^{\pm ik_x x} \quad , \quad Y(y) \;=\; e^{\pm ik_y y} \quad , \quad Z(z) \;=\; e^{\pm ik_z z}. \tag{288}$$

– Damit allgemeine reelle Lösung der homogenen DGl

$$\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r},t) \;=\; \int d^3k \left(a(\mathbf{k}) e^{+i(\omega t - \mathbf{kr})} + (a(\mathbf{k}))^* e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})} \right) \tag{289}$$

mit $d^3k = dk_x\, dk_y\, dk_z$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2}c = |\mathbf{k}|c$ und beliebiger komplexer Funktion $a(\mathbf{k})$.

– Vorgabe von RBs (wie bei Diskussion der Poisson-Gleichung) und ABs (z.B. $\Phi(t=0,\mathbf{r})$ und $\dot{\Phi}(t=0,\mathbf{r})$ [analog zu $x(t=0)$ und $\dot{x}(t=0)$ in Mechanik]) legt $a(\mathbf{k})$ eindeutig fest.

- Partikulärlösung: Für Konstruktion wird Wissen über Fourier-Transformation und Greensche Funktionen benötigt.

6.2 Fourier-Transformation

- In Abschnitt 2.14.4 ("Vollständige Orthonormalsysteme") wurde eine Funktion $f(x)$, definiert auf einem endlichen Intervall $x \in [a,b]$ mit periodischen RBs, als Summe komplexer Exponentialfunktionen dargestellt,

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n A_n e^{+2\pi i n x/L} \quad , \quad A_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b dx\, e^{-2\pi i n x/L} f(x) \tag{290}$$

mit $L = b - a$ (Fourier-Reihe, Gleichung (130)).

- Betrachte nun Limes $a \to -\infty$, $b \to +\infty$:

  – Definiere $k(n) = 2\pi n/L$.

  – Damit $\Delta k = k(n+1) - k(n) = 2\pi/L \to dk$, d.h. infinitesimal kleiner Abstand zwischen zwei benachbarten k, betrachte k daher als kontinuierliche Variable.

  – Damit $A_n \to A(k)$.

  – Damit $\sum_n = (1/\Delta k) \sum_n \Delta k \to (L/2\pi) \int dk$.

  – Einsetzen in (290):

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{L}}{2\pi} \int dk\, A(k) e^{+ikx} \quad , \quad A(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{L}} \int dx\, e^{-ikx} f(x). \tag{291}$$

- Durch Umdefinition von $A(k) \to \tilde{f}(k) = \sqrt{L/2\pi} A(k)$ kann $\sqrt{L}$ eliminiert werden und eine im Vorfaktor symmetrische Form erzeugt werden,

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{+ikx} \tilde{f}(k) \quad , \quad \tilde{f}(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx} f(x). \tag{292}$$

- (292) nennt man **Fourier-Transformation**, $\tilde{f}(k)$ die **Fourier-Transformierte** von $f(x)$.
- Anschaulich: $\tilde{f}(k)$ gibt an, wie stark die Schwingung mit "Frequenz" k, d.h. e^{+ikx}, in $f(x)$ vertreten ist.

6.3 Greensche Funktionen

- Gegeben ist inhomogene lineare DGl

$$D(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \;=\; g(\mathbf{x}) \tag{293}$$

($\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; $D(\mathbf{x})$: Differentialoperator, enthält nicht nur x_j, sondern auch $\partial/\partial x_j$; $f(\mathbf{x})$: gesuchte Lösung der DGl; $g(\mathbf{x})$: vorgegebene Inhomogenität).

- Die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ des Differentialoperators $D(\mathbf{x})$ ist definiert als Lösung von

$$D(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \;=\; \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{294}$$

- Ist die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ bekannt, kann für beliebige Inhomogenität $g(\mathbf{x})$ eine Partikulärlösung von (293) als Integralausdruck angegeben werden:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) \int d^n x'\, g(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \;&=\; \int d^n x'\, g(\mathbf{x}') D(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \;=\; \int d^n x'\, g(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \;= \\ &=\; g(\mathbf{x}) \\ \to \quad f(\mathbf{x}) \;&=\; \int d^n x'\, g(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \end{aligned} \tag{295}$$

- Beispiel: Elektrostatik, Poisson-Gleichung,

$$\triangle \Phi(\mathbf{r}) \;=\; -4\pi \rho(\mathbf{r}). \tag{296}$$

  - $D \equiv \triangle$, $f \equiv \Phi$, $g \equiv -4\pi\rho$.
  - Greensche Funktion von $\triangle$ bekannt,

$$\triangle \frac{1}{-4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \;=\; \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \to \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \;=\; \frac{1}{-4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{297}$$

    (siehe Gleichung (65)).

– Partikulärlösung von (296) damit

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \int d^3r' \Big(-4\pi\rho(\mathbf{r}')\Big) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; \int d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{298}$$

(ist bekannte Gleichung (48), wurde in Kapitel 2 ausgehend von experimentellen Ergebnissen aufgestellt, nun als Lösung der Poisson-Gleichung mit Hilfe der bekannten Greenschen Funktion von $\triangle$ angegeben).

****** 27. Januar 2026 (25. Vorlesung) ******

6.4 Allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen (Fortsetzung)

- Partikulärlösung:
  - Fourier-Transformation von $\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},t)$ und $\rho(\mathbf{r},t)$ bezüglich t:

$$\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \, e^{+i\omega t} \tilde{\Phi}_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},\omega) \tag{299}$$

$$\rho(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \, e^{+i\omega t} \tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega). \tag{300}$$

  - Einsetzen in DGl (284):

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right) \int d\omega \, e^{+i\omega t} \tilde{\Phi}_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},\omega) \;=\; 4\pi \int d\omega \, e^{+i\omega t} \tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega)$$

$$\rightarrow \quad -\int d\omega \, e^{+i\omega t} \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle\right) \tilde{\Phi}_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \int d\omega \, e^{+i\omega t} 4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega)$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle\right) \tilde{\Phi}_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},\omega) \;=\; -4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r},\omega). \tag{301}$$

  - Nebenrechnung:
    - Die bekannte Beziehung $\triangle(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ kann auf

$$\left(k^2 + \triangle\right)\left(-\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}\right) \;=\; \delta(\mathbf{r}). \tag{302}$$

      erweitert werden.
      - Rechnung ist freiwillige Hausaufgabe.
      - Rechnung z.B. auch in Fließbach, "Elektrodynamik", Kapitel 3.
      - Alternative Diskussion mit **Residuensatz** z.B. im Vorlesungsskript von Dirk Rischke, "Theoretische Physik III: Elektrodynamik", Abschnitt 4.2.1 (`https://itp.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_Elektrodynamik.pdf`).
    - Damit

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \triangle\right)\left(-\frac{e^{\pm i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \;=\; \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{303}$$

      d.h.

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; -\frac{e^{\pm i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{304}$$

      ist Greensche Funktion von $\omega^2/c^2 + \triangle$.

– $\tilde{\Phi}_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},\omega)$ in (301) kann damit als Integral angegeben werden,

$$\tilde{\Phi}_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \int d^3r' \Big(-4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r}',\omega)\Big) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=$$
$$= \int d^3r'\, \tilde{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \left(\frac{e^{\pm i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right). \tag{305}$$

– $\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},t)$ ergibt sich aus (299),

$$\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega\, e^{+i\omega t} \tilde{\Phi}_{\text{partikulär}}(\mathbf{r},\omega) \;=$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega\, e^{+i\omega t} \int d^3r'\, \tilde{\rho}(\mathbf{r}',\omega) \left(\frac{e^{\pm i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \;=$$
$$= \int d^3r'\, \frac{\rho(\mathbf{r}', t \pm |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{306}$$

  * (306) ist eine mögliche Partikulärlösung; durch Addition von Lösungen der homogenen DGl lassen sich unendlich viele unterschiedliche Partikulärlösungen konstruieren; hier aber eine beliebige ausreichend.
  * Wahl von Vorzeichen $-$ im Zeitargument von ρ, d.h. Zeitargument $t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$:
    · Übliche Wahl.
    · Eine zeitliche Veränderung von ρ bei $\mathbf{r}'$ zum Zeitpunkt t wird damit bei $\mathbf{r}$ erst zum Zeitpunkt $t + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ sichtbar.
    · Der Effekt der Veränderung breitet sich damit mit Lichtgeschwindigkeit c aus.
    · Lösung (306) mit Vorzeichen $-$ nennt man aufgrund dieser Verzögerung auch **retardierte Lösung**.
    · Entspricht der Erwartung an eine sinnvolle Theorie für E-Felder und B-Felder, d.h. für Photonen.
  * Wahl von Vorzeichen $+$ im Zeitargument von ρ, d.h. Zeitargument $t + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$:
    · Wahl unüblich, da i.d.R. unpraktisch.
    · Eine zeitliche Veränderung von ρ bei $\mathbf{r}'$ zum Zeitpunkt t wird damit bei $\mathbf{r}$ bereits zum Zeitpunkt $t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ sichtbar.
    · Scheint der Kausalität zu widersprechen und damit unphysikalisch; ist jedoch nicht falsch, da homogene Lösung für typische RBs und ABs sehr kompliziert und die scheinbaren Widersprüche korrigiert.
    · Lösung (306) mit Vorzeichen $+$ nennt man **avancierte Lösung**.

- Allgemeine Lösung von (284):

$$\Phi(\mathbf{r},t) \;=$$
$$= \int d^3r'\, \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int d^3k \left(a(\mathbf{k}) e^{+i(\omega t - \mathbf{kr})} + (a(\mathbf{k}))^* e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})} \right). \tag{307}$$

- Allgemeine Lösung von (283):

$$A^\mu(\mathbf{r},t) \;=$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{j^\mu(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int d^3k \left(a^\mu(\mathbf{k})e^{+i(\omega t - \mathbf{kr})} + (a^\mu(\mathbf{k}))^* e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}\right) \tag{308}$$

mit zusätzlicher Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ (Lorenz-Eichung).

****** 30. Januar 2026 (26. Vorlesung) ******

6.5 Lorenz-Eichung, Coulomb-Eichung im Vakuum, monochromatische ebene Wellen

- Eichfixierung (Lorenz-Eichung):
  - Starte mit beliebigem Vierpotential A^μ.
  - Lorenz-Eichung:
    - Eichtransformation: $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$.
    - Bedingung für Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu(A^\mu - \partial^\mu\Lambda) = 0$, d.h. wähle Λ so, dass $\Box\Lambda = \partial_\mu A^\mu$.
    - Λ existiert (konstruktiver Beweis ist Abschnitt 6.4).
- Betrachte im Folgenden das Vakuum, d.h. $j^\mu = 0$.
- Eichfixierung (Coulomb-Eichung im Vakuum):
  - Λ nicht eindeutig:
    - Beliebige Addition von Λ' mit $\Box\Lambda' = 0$ erlaubt (allgemeine Form von Λ' kann angegeben werden, siehe Abschnitt 6.1).
    - In anderen Worten: Weitere Eichtransformation mit Λ' gemäß $A''^\mu = A'^\mu - \partial^\mu\Lambda'$ erhält Lorenz-Eichung, d.h. es gilt $\partial_\mu A''^\mu = 0$.
  - Verwende verbleibende Eichfreiheit, um zusätzlich Bedingung $A''^0 = 0$ zu erfüllen (**temporale Eichung**).
    - $A''^0 = A'^0 - \partial^0\Lambda' = 0$, d.h. wähle Λ' so, dass $\partial^0\Lambda' = A'^0$.
    - Ein solches Λ' existiert, da
      - im Vakuum in Lorenz-Eichung $\Box A'^0 = 0$ gilt, d.h. A'^0 die in (289) angegebene Struktur hat,
      - $\Box\Lambda' = 0$ die einzige Einschränkung an Λ' ist, d.h. Λ' die gleiche Struktur wie (289) hat, und die Struktur von Λ' (im Wesentlichen) identisch zur Struktur von $\partial^0\Lambda'$ ist, also ebenfalls (289) entspricht.
  - Da $\partial_\mu A''^\mu = 0$ und $A''^0 = 0$, gilt auch $\nabla\mathbf{A}'' = 0$, d.h. Coulomb-Eichung.
  - Gleichzeitig $\partial_\mu A''^\mu = 0$ und $A''^0 = 0$ erfordert Vakuum.
- Maxwell-Gleichungen und Bedingungen aufgrund der Eichfixierung (verwende ab jetzt A^μ an Stelle von A''^μ):

$$A^0 = 0 \quad , \quad \Box\mathbf{A} = 0 \quad , \quad \nabla\mathbf{A} = 0. \tag{309}$$

- Aus (308) folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \int d^3k \left(\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{+i(\omega t-\mathbf{kr})} + (\mathbf{a}(\mathbf{k}))^* e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}\right) \tag{310}$$

  mit $\omega = |\mathbf{k}|c$.

- Coulomb-Eichung erfordert

$$\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \int d^3k \left((-i\mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{k})e^{+i(\omega t-\mathbf{kr})} + (-i\mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{k})^* e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}\right) \;=\; 0 \tag{311}$$

  d.h. $\mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{k} = 0$ bzw. $\mathbf{a}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$.

- Spezialfall ist **monochromatische Welle**, nur für ein spezielles ω, d.h. für $|\mathbf{k}| = \omega/c$, sind $\mathbf{a}(\mathbf{k}) \neq 0$.

- Einfachste Feldkonfiguration: Betrachte nur einen Term in (310), d.h. ein spezielles $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{a}(\mathbf{k})e^{+i(\omega t-\mathbf{kr})} + (\mathbf{a}(\mathbf{k}))^* e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}. \tag{312}$$

  - Spezialfall einer monochromatischen Welle.
  - Außerdem **ebene Welle**, da Ortsabhängigkeit nur entlang einer räumlichen Richtung, der $\mathbf{k}$-Richtung.
  - E-Feld und B-Feld:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;&=\; -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; -\frac{i\omega}{c}\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{+i(\omega t-\mathbf{kr})} + \text{c.c.} \;= \\ &=\; \frac{\omega}{c}\sum_{\lambda=1,2}\alpha_\lambda(\mathbf{k})\vec{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi_\lambda(\mathbf{k}))\end{aligned} \tag{313}$$

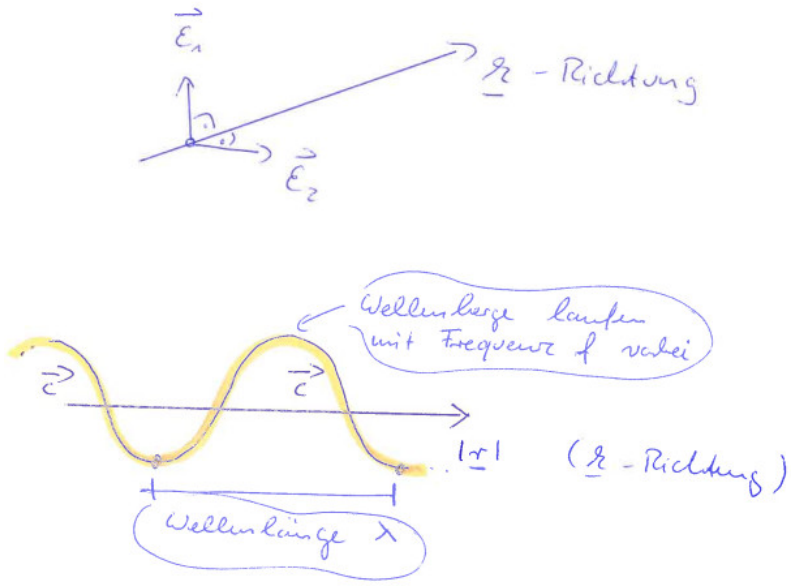
$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;&=\; \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; -i\mathbf{k}\times\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{+i(\omega t-\mathbf{kr})} + \text{c.c.} \;= \\ &=\; \mathbf{k}\times\sum_{\lambda=1,2}\alpha_\lambda(\mathbf{k})\vec{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi_\lambda(\mathbf{k})) \;= \\ &=\; \frac{\omega}{c}\Big(\alpha_1(\mathbf{k})\vec{\epsilon}_2(\mathbf{k})\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi_1(\mathbf{k})) - \alpha_2(\mathbf{k})\vec{\epsilon}_1(\mathbf{k})\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi_2(\mathbf{k}))\Big),\end{aligned} \tag{314}$$

    d.h. $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$ und $\mathbf{B}$ bezüglich $\mathbf{E}$ um $\pi/2$ um $\mathbf{k}$-Achse gedreht.

    * $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ hat gleiche Einheit wie A_μ; $\alpha(\lambda)$ hat gleiche Einheit wie $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ (man könnte ω/c in (313) und (314) auch weglassen, dann hätte $\alpha(\lambda)$ allerdings die gleiche Einheit wie $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$).
    * c.c. steht für komplex konjugierten Term (complex conjugate).
    * Bei "komplexer Schreibweise" 4 FHGs im komplexen Vektor $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ (keine 6 FHGs aufgrund der Einschränkung $\mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{k} = 0$).
    * Bei "reeller Schreibweise" 4 FHGs in rellen Parametern $\alpha_1(\mathbf{k})$, $\alpha_2(\mathbf{k})$, $\varphi_1(\mathbf{k})$ und $\varphi_2(\mathbf{k})$.
    * $\vec{\epsilon}_1(\mathbf{k})$, $\vec{\epsilon}_2(\mathbf{k})$: reelle Einheitsvektoren (**Polarisationsvektoren**).
      · $\vec{\epsilon}_1(\mathbf{k})$ beliebiger Einheitsvektor senkrecht zu $\mathbf{k}$, d.h. $\vec{\epsilon}_1(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$.

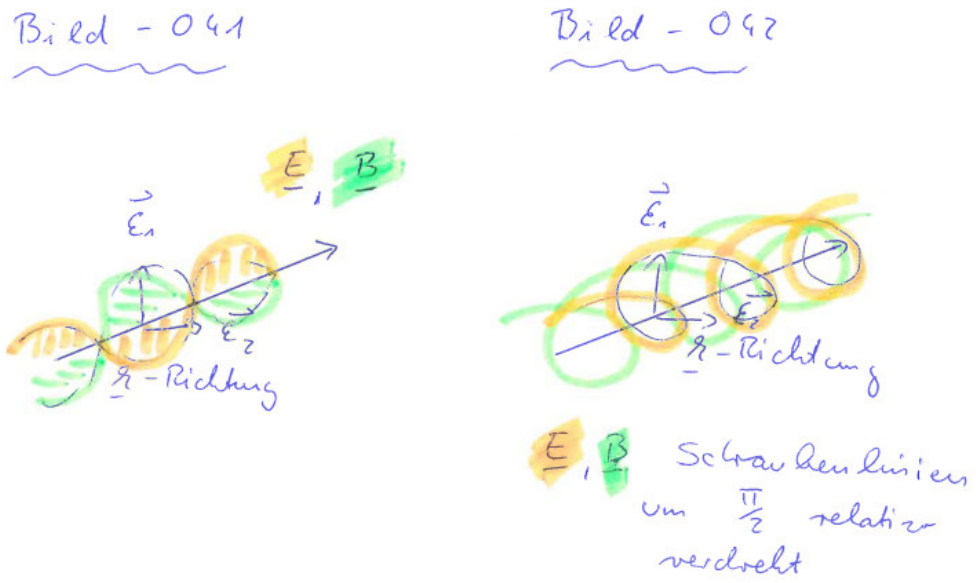
· $\vec{\epsilon}_2(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}_1(\mathbf{k})$, d.h. $\vec{\epsilon}_2(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}, \vec{\epsilon}_1(\mathbf{k})$.

– Festes $\mathbf{k}$ entspricht einer Welle (einem "Lichtstrahl") in vorgegebener Richtung $\hat{\mathbf{k}}$ mit Frequenz $f = \omega/2\pi = |\mathbf{k}|c/2\pi$, Wellenlänge $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}| = 2\pi c/\omega$ und Geschwindigkeit $\lambda f = c$.



– Gewisse Freiheiten auch bei festem $\mathbf{k}$ über Parameter $\alpha_1(\mathbf{k})$, $\alpha_2(\mathbf{k})$, $\varphi_1(\mathbf{k})$ und $\varphi_2(\mathbf{k})$:

* **Linear polarisiertes Licht**:
  $\alpha_2(\mathbf{k}) = 0$.
  $\mathbf{E}$ stets parallel zu $\vec{\epsilon}_1(\mathbf{k})$, d.h. zeigt immer in die gleiche Richtung.
  $\mathbf{B}$ stets parallel zu $\vec{\epsilon}_2(\mathbf{k})$, d.h. zeigt immer in die gleiche Richtung.
* **Zirkular polarisiertes Licht**:
  $\alpha_2(\mathbf{k}) = \pm\alpha_1(\mathbf{k})$, $\varphi_2(\mathbf{k}) = \varphi_1(\mathbf{k}) - \pi/2 + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$,
  $$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad = \quad \frac{\omega}{c}\alpha_1(\mathbf{k})\Big(\vec{\epsilon}_1(\mathbf{k})\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi_1(\mathbf{k})) \pm \vec{\epsilon}_2(\mathbf{k})\sin(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi_1(\mathbf{k}))\Big). \tag{315}$$
  $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ rotieren mit Kreisfrequenz ω um $\mathbf{k}$-Achse, $|\mathbf{E}|$ und $|\mathbf{B}|$ zeitlich konstant.
* **Elliptisch polarisiertes Licht**: Mischung der obigen beiden Fälle.

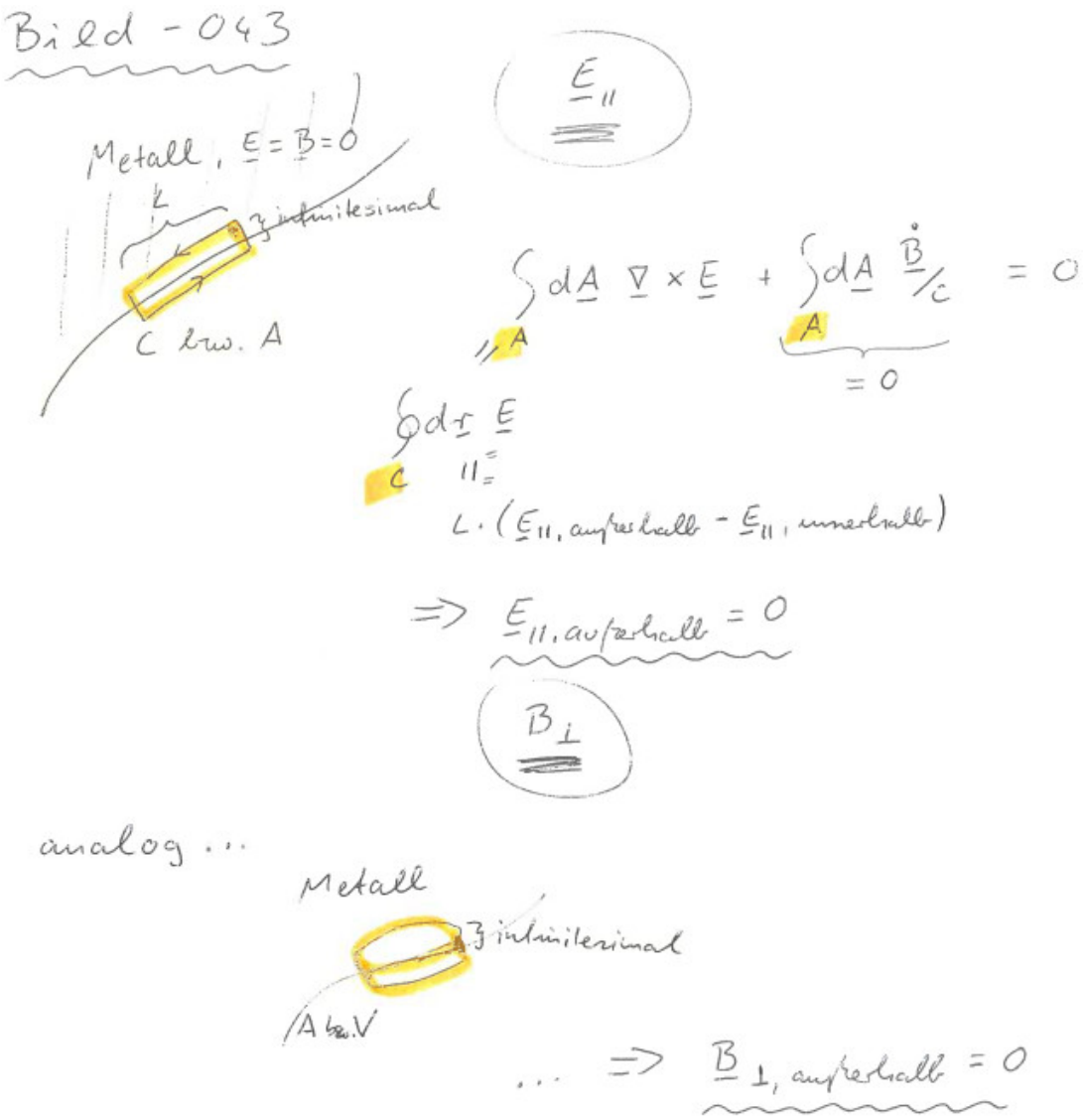


  - Ebene monochromatische Welle transportiert Energie und Impuls ("Photonen bewegen sich in **k**-Richtung"): Energie- und Impulsdichten und -stromdichten können mit Energie-Impuls-Tensor berechnet werden (siehe Abschnitt 5.5; Berechnung ist Hausaufgabe).

- Tageslicht: Lineare Superposition der unendlich vielen möglichen Frequenzen und Polarisationen gemäß (310).

6.6 Hohlraumwellen und Wellenleiter

- **Hohlraumwellen**: Em Wellen in einem von Metallwänden umgebenen Volumen.
- RBs an der Grenze zum Metall:
  - Annahme: Ladungen im Metall bewegen sich so, dass $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ innerhalb des Metalls.
  - $\mathbf{E}_\parallel = 0$ (folgt aus $\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}/c = 0$ [Gleichung (270)], Annahme von endlichem $\dot{\mathbf{B}}$ und Satz von Stokes (siehe auch Elektrostatik, Gleichung (97)).
  - $\mathbf{B}_\perp = 0$ (folgt aus $\nabla \mathbf{B} = 0$ [Gleichung (269)] und Satz von Gauß).
- Betrachte nun Spezialfall eines metallischen **Wellenleiters** mit quadratischem Querschnitt (Ausdehung L in x-Richtung und y-Richtung, d.h. $0 \leq x, y \leq L$, unendlich ausgedehnt in z-Richtung).



- Zu lösen ist also ein RWP (Maxwell-Gleichungen im Vakuum [Gleichungen (266) bis (270)] mit $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$ und oben angegebene RBs):
  - Prinzipielles Vorgehen beim Lösen von RWPs umfangreich in Elektrostatik diskutiert: Separationsansatz, allgemeine Lösung der Feldgleichungen, Anpassen an RBs, ... (siehe Abschnitt 2.14 und Abschnitt 2.15).
  - Vorgehen hier analog.
  - Rechnung ist freiwillige Hausaufgabe (siehe auch in Fließbach, "Elektrodynamik", Kapitel 21).
- Ergebnis: Zwei Sorten von Wellen.
  - **Transversale elektrische Welle:**

$$E_x = \mathrm{Re}\Big(C_1 \cos(l\pi x/L) \sin(m\pi y/L) e^{i(\omega t - kz)}\Big) \tag{316}$$

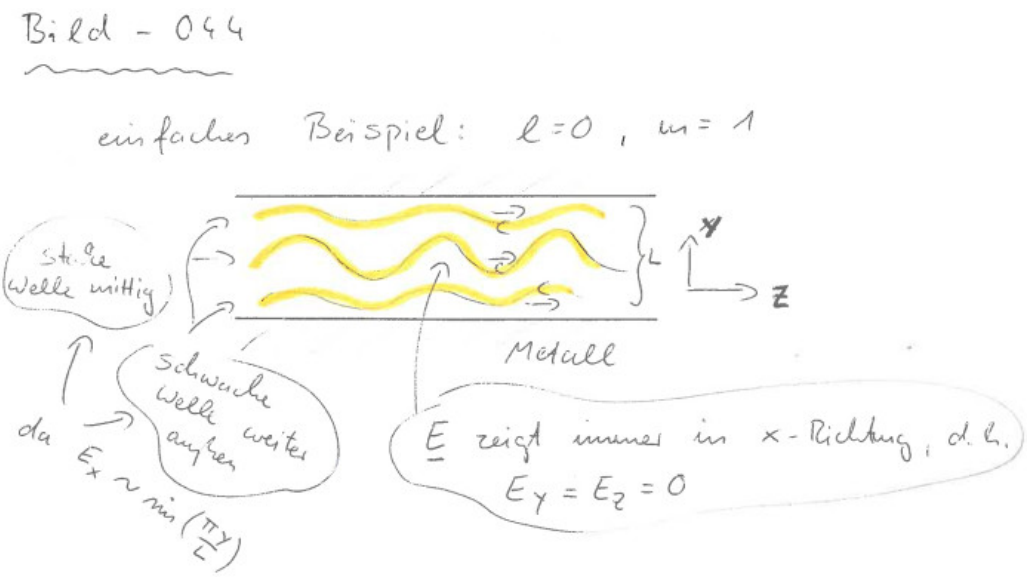
$$E_y = \mathrm{Re}\Big(C_2 \sin(l\pi x/L)\cos(m\pi y/L)e^{i(\omega t - kz)}\Big) \tag{317}$$

$$E_z = 0 \tag{318}$$

mit

$$\omega = \left(\frac{\pi^2 c^2 l^2}{L^2} + \frac{\pi^2 c^2 m^2}{L^2} + c^2 k^2\right)^{1/2}, \tag{319}$$

$k > 0$ (in $+z$-Richtung laufende Welle) und $l, m = 0, 1, 2, \ldots$, wobei $l = m = 0$ ausgeschlossen ist.



  - ∗ Transversale elektrische Welle, da $E_z = 0$, d.h. Komponente von **E** entlang des Wellenleiters verschwindet.
  - ∗ Magnetische Felder haben ähnliche Form, allerdings keine transversale magnetische Welle, d.h. $B_z \neq 0$.
  - ∗ Untergrenze für Frequenz ist $\omega_{\min} = \pi c/L$.
- **Transversale magnetische Welle:**
  - ∗ Ähnliche Form und Eigenschaften wie transversale elektrische Welle, allerdings $B_z = 0$ und $E_z \neq 0$.

- "Metallischer Schlauch" eignet sich also zum Transport em Wellen und damit zum Übertragen von Information (eng verwandt mit dem hier betrachteten quadratischen Leiter ist das Koaxialkabel).

6.7 E-Felder, B-Felder und em Strahlung beschleunigter Ladungen

- Beschleunigte Ladungen strahlen em Wellen ab, deren Berechnung in diesem Abschnitt skizziert wird (→ Energieverlust, z.B. interessant/problematisch bei Konstruktion von Teilchenbeschleunigern).

- Ausgangspunkt: Ladungsdichte und Stromdichte einer Punktladung q mit Trajektorie $\mathbf{r}_q(t)$,

$$\rho(\mathbf{r},t) \quad = \quad q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad = \quad q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t))\frac{d\mathbf{r}_q(t)}{dt} \tag{320}$$

  (Gleichung (179) und Gleichung (180)).

- Berechnung des Viererpotentials A^μ durch Einsetzen von (320) in retardierte Lösung der Maxwell-Gleichungen

$$A^\mu(\mathbf{r},t) \quad = \quad \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{j^\mu(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{321}$$

  (Gleichung (308) mit $a^\mu(\mathbf{k}) = 0$).

- Berechnung von E-Feld und B-Feld aus A^μ via $\mathbf{E} = -(1/c)(\partial/\partial t)\mathbf{A} - \nabla\Phi$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, allerdings aufwändig bzw. nicht ganz einfach (siehe z.B. Fließbach, "Elektrodynamik", Kapitel 23):

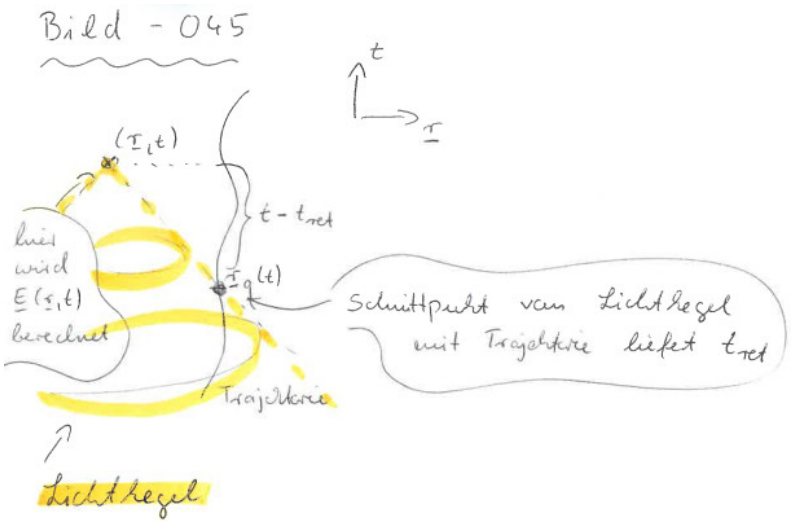
$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad = \quad \underbrace{\frac{q(\hat{\mathbf{R}}-\vec{\beta})}{R^2\gamma^2(1-\vec{\beta}\hat{\mathbf{R}})^3}\bigg|_{t=t_{\rm ret}}}_{\propto 1/R^2} + \underbrace{\frac{q\hat{\mathbf{R}}\times((\hat{\mathbf{R}}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{cR(1-\vec{\beta}\hat{\mathbf{R}})^3}\bigg|_{t=t_{\rm ret}}}_{\propto 1/R} \tag{322}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \quad = \quad \hat{\mathbf{R}}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{323}$$

  ($\vec{\beta} = \dot{\mathbf{r}}_q(t)/c$, $\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t)$, $R = |\mathbf{R}|$), wobei sich die "retardierte Zeit" durch Lösung von

$$t_{\rm ret} \quad = \quad t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t_{\rm ret})|}{c} \tag{324}$$

  ergibt.



- Test von (322) und (323) für ruhende Ladung, $\mathbf{r}_q(t) = \mathbf{r}_0 = \text{const}$:

$$\vec{\beta} = 0 \quad , \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{325}$$

  ... also zumindest nicht offensichtlich falsch.

- Zur Berechnung des Energieverlusts durch em Strahlung ist Energiestromdichte

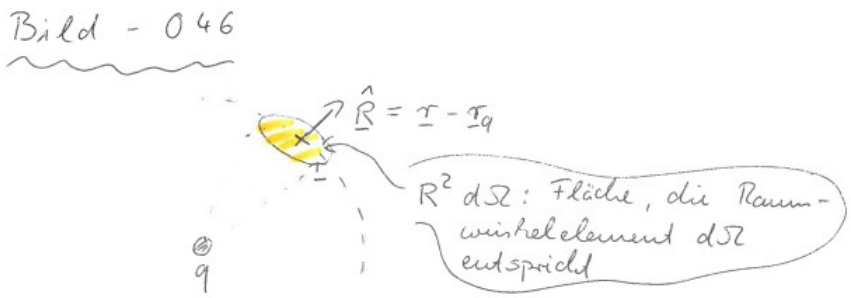
$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \tag{326}$$

  von Interesse (ergibt sich aus Energie-Impuls-Tensor bzw. Noether-Theorem; siehe Abschnitt 5.5).

- Energiestrom (= Energie/Zeit = P) pro Raumwinkel durch um die Ladung q zentrierte Kugelfläche (Radius R):

$$dP = d\Omega\, R^2 \hat{\mathbf{R}}\mathbf{S} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dP}{d\Omega} = R^2 \hat{\mathbf{R}}\mathbf{S} \tag{327}$$

  (für große Abstände R trägt nur zweiter Term ($\propto 1/R$) in (322) bei [ist nur $\neq 0$, falls $\dot{\vec{\beta}} \neq 0$, d.h. Ladung beschleunigt], erster Term ($\propto 1/R^2$) hat verschwindend kleinen Beitrag).



- Häufig interessante Größe ist Energie/retardierde Zeit = P' ("retardiere Zeit ist Zeit, zu der em Strahlung die Ladung q verlässt"),

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega}\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = \ldots = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{|\hat{\mathbf{R}} \times ((\hat{\mathbf{R}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})|^2}{(1 - \vec{\beta}\hat{\mathbf{R}})^5} \tag{328}$$

  (längere Rechnung, Einsetzen von (322) bis (324), (326) und (327)).

- Spezialfälle:

  - $|\vec{\beta}| \ll 1$ (nicht-relativistischer Grenzfall):

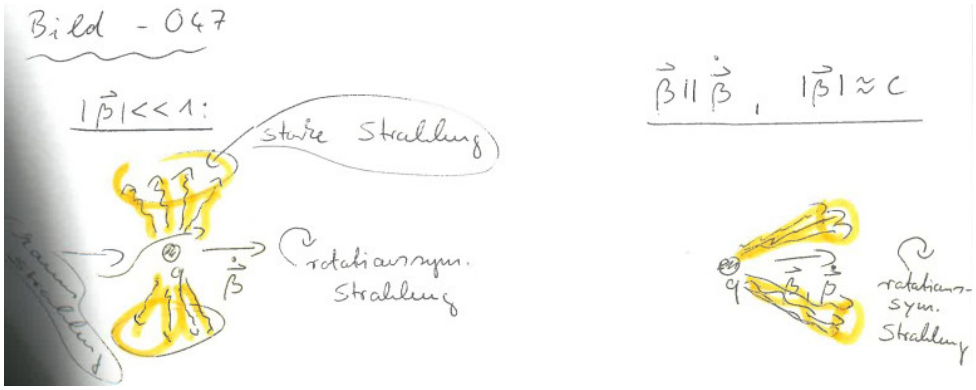
$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2(\theta) \tag{329}$$

    ($\theta = \sphericalangle(\hat{\mathbf{R}}, \dot{\vec{\beta}})$ ist Winkel zur Beschleunigungsrichtung).

– $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$:

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\vec{\beta}}^2 \frac{\sin^2(\theta)}{(1-|\vec{\beta}|\cos(\theta))^5} \tag{330}$$

($\theta = \sphericalangle(\hat{\mathbf{R}}, \vec{\beta}) = \sphericalangle(\hat{\mathbf{R}}, \dot{\vec{\beta}})$ ist Winkel zur Bewegungs- und Beschleunigungsrichtung).



- Ähnlich und durch Raumwinkelintegration können die folgenden Spezialfälle für P (Verlustleistung bei Beschleunigung) berechnet werden:

  – $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$:

  $$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\dot{\mathbf{p}}^2 \tag{331}$$

  ($\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$; $|\dot{\mathbf{p}}|$ entspricht beschleunigender Kraft; z.B. hilfreich zum Abschätzen von Energieverlusten in Linearbeschleunigern).

  – $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$:

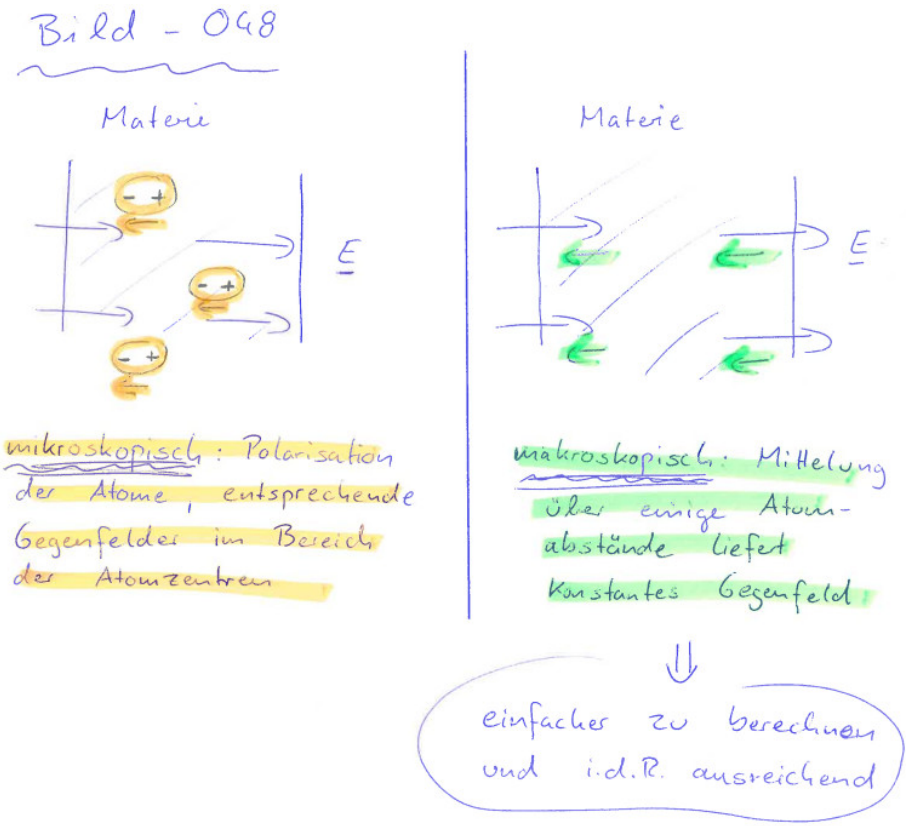
  $$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\gamma^2\dot{\mathbf{p}}^2 \tag{332}$$

  (z.B. hilfreich zum Abschätzen von Energieverlusten in Kreisbeschleunigern; Strahlungsverluste sind zentrales Problem bei Kreisbeschleunigern, da $P \propto \gamma^4$; ausgesandte Strahlung heißt **Synchrotronstrahlung**; Synchrotronstrahlung auch hilfreich, z.B. für Untersuchungen in Festkörperphysik).

- Details z.B. in Fließbach, "Elektrodynamik", Kapitel 23.

7 Elektrodynamik in Materie

- Ziel: ED in Materie formulieren, d.h. innerhalb von Festkörpern, Flüssigkeiten oder Gasen.
- Maxwell-Gleichungen (266), (267), (269) und (270) gelten auch in Materie.
  - Bei direkter Verwendung der Maxwell-Gleichungen müssen die von den einzelnen Protonen und Elektronen getragenen elektrischen Ladungen in Rechnungen einbezogen werden.
    $\rightarrow$ Extrem aufwändig, daher nicht zielführend.
  - Meist interessiert man sich nur für makroskopische Effekte der Materie auf E-Feld und B-Feld, nicht jedoch für mikroskopische Details.
- Durch wenige Annahmen und geeignete Mittelung kann man sogenannte **makroskopische Maxwell-Gleichungen** formulieren, in denen Effekte von Materie auf Längenskalen größer als einige Atomdurchmesser berücksichtigt sind (makroskopische Maxwell-Gleichungen sind viel einfacher zu lösen als mikroskopische Maxwell-Gleichungen).



7.1 Aufteilung von Feldern und Ladungen ("ungestört", "extern", "induziert")

- Umbenennung $\mathbf{E} \to \mathbf{E}_{\text{ges}}$, $\mathbf{B} \to \mathbf{B}_{\text{ges}}$, $\rho \to \rho_{\text{ges}}$, $\mathbf{j} \to \mathbf{j}_{\text{ges}}$ ("ges" für gesamt), d.h. Maxwell-Gleichungen lauten

$$\nabla \mathbf{E}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) \tag{333}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) \tag{334}$$

$$\nabla \mathbf{B}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{335}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{336}$$

- Gedankliches Aufteilen der "ges"-Größen in drei Teile:

$$\mathbf{E}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) + \underbrace{\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r},t)}_{=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)} \tag{337}$$

$$\mathbf{B}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r},t) + \underbrace{\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}_{\text{ind}}(\mathbf{r},t)}_{=\mathbf{B}(\mathbf{r},t)} \tag{338}$$

$$\rho_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = \rho_0(\mathbf{r},t) + \underbrace{\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \rho_{\text{ind}}(\mathbf{r},t)}_{=\rho(\mathbf{r},t)} \tag{339}$$

$$\mathbf{j}_{\text{ges}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r},t) + \underbrace{\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}_{\text{ind}}(\mathbf{r},t)}_{=\mathbf{j}(\mathbf{r},t)}. \tag{340}$$

- Maxwell-Gleichungen (333) bis (336) sind linear, gelten daher separat für jeden der drei Teile,

$$\nabla \mathbf{E}_X(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho_X(\mathbf{r},t) \tag{341}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_X(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_X(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_X(\mathbf{r},t) \tag{342}$$

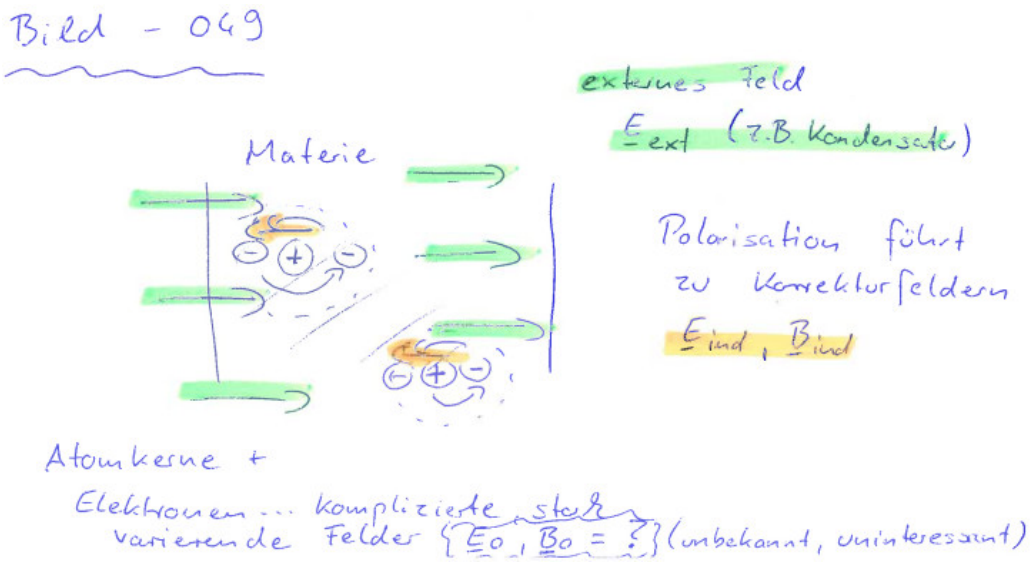
$$\nabla \mathbf{B}_X(\mathbf{r},t) = 0 \tag{343}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_X(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_X(\mathbf{r},t) = 0 \tag{344}$$

  mit $X \in \{0, \text{ext}, \text{ind}\}$.

- Physikalische Bedeutung der drei Teile:
  - **"0": Felder und Ladungen der ungestörten Materie.**
    - Z.B. ein Festkörper ohne zusätzliche äußere Felder oder Ladungen, ρ_0 und $\mathbf{j}_0$ sind damit Ladungs- und Stromdichte der Protonen und Elektronen des Festkörpers, $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ die von ihnen erzeugten E- und B-Felder.
    - Typischer Weise starke Variation innerhalb eines Atomabstands.
    - Schwer zu berechnen, in diesem Kapitel aber nur von untergeordnetem Interesse.
  - **"ext": Zusätzliche äußere Felder oder Ladungen ("ext" für extern).**

  - ∗ Z.B. das E-Feld eines Kondensators oder eine zusätzliche Ansammlung von Ladungen innerhalb oder außerhalb der Materie, im obigen Beispiel des Festkörpers.
- **“ind”: Induzierte Felder und Ladungen (“ind” für induziert).**
  - ∗ “ext”-Felder und -Ladungen verursachen (i.d.R. kleine) Störungen der Materie, ihre Ladungs- und Stromdichte wird zu $\rho_0 + \rho_{\text{ind}}$ und $\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{\text{ind}}$, die zugehörigen E- und B-Felder sind $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{ind}}$ und $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{ind}}$.



- $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ind}}$, etc. ist Umdefition von $\mathbf{E}$ (früheres $\mathbf{E}$ ist jetzt $\mathbf{E}_{\text{tot}}$):
  - Sinnvoll, $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ zu separieren, da die Ladungen ungestörter Materie beschrieben durch ρ_0 und $\mathbf{j}_0$ im Gleichgewicht sind, d.h. $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ keine Kräfte auf die Ladungen der ungestörten Materie bewirken und somit ρ_0 und $\mathbf{j}_0$ zeitlich konstant sind. “0”-Felder und Ladungen verändern sich also nicht und sind Lösung der Maxwell-Gleichungen (341) bis (344) mit $X = 0$, können also ignoriert werden.
  - $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ind}}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{ind}}$ liefern dagegen Kräfte, die Korrekturen der Ladungsverteilungen der Materie verursachen, d.h. typischer Weise $\rho_{\text{ind}} \neq 0$ und $\mathbf{j}_{\text{ind}} \neq 0$ erzeugen.
  - Aufgrund der Linearität der Maxwell-Gleichungen gilt auch

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \tag{345}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \tag{346}$$

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{347}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{348}$$

- Von Interesse ist nun Lösung von (341) bis (344) mit Indizes $X = \text{ext}$ und $X = \text{ind}$ (beziehungsweise äquivalent von (345) bis (348)).
  - Häufig einfach ist Lösung von (341) bis (344) mit Index $X = \text{ext}$ (zumindest nicht schwieriger, als in vorausgegangenen Kapiteln), z.B. Bestimmung des E-Feldes eines Kondensators.

– Problematisch ist Lösung von (341) bis (344) mit Index $X = \text{ind}$, da

  * ρ_{ind} und $\mathbf{j}_{\text{ind}}$ Reaktion der Materie auf äußere Felder $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ und $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ beschreiben und diese Reaktion schwierig zu bestimmen bzw. zu berechnen ist (Details z.B. in Vorlesungen über Festkörperphysik),
  * ρ_{ind} und $\mathbf{j}_{\text{ind}}$ nicht nur von $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ und $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ sondern auch von $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ und $\mathbf{B}_{\text{ind}}$ (enstehen erst durch Störung) abhängen, also (341) bis (344) mit Index $X = \text{ind}$ nicht für vorgegebene rechte Seiten, sondern selbstkonsistent gelöst werden müssen.
  * Näherungsweise Behandlung der Reaktion von Materie in Abschnitt 7.3 und Abschnitt 7.4.

7.2 Übergang von mikroskopischen zu makroskopischen Größen

- "0"-Größen und (damit auch) "ind"-Größen variieren auf Längenskalen kleiner als typischer Atomabstand a (im Festkörper z.B. eine Elementarzelle, $a \approx 10^{-10}\,\text{m}$), d.h. sie beschreiben mikrokopische Strukturen.

- "ext"-Größen variieren typischer Weise nur auf deutlich größeren Längenskalen.

- Häufig interessiert man sich nicht für mikroskopische Strukturen, zur Vereinfachung von Rechnungen ist es außerdem zweckmäßig, diese loszuwerden.

- Dies erreicht man durch Mittelung über Bereiche mit Durchmesser b, wobei $a \ll b \ll \lambda$ und λ die relevante Längenskala für die zu studierenden Phänomene ist.

- Typisches Beispiel für Mittelungsvorschrift ist

$$\langle A\rangle(\mathbf{r},t) \;=\; \int d^3r'\, w(\mathbf{r}')A(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t) \quad , \quad w(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{(2\pi b^2)^{3/2}} e^{-\mathbf{r}^2/2b^2}, \tag{349}$$

  d.h. "Gaußkurven-artige Verschmierung" der Größe A, mit
  $A \in \{\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \rho_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{E}_{\text{ind}}, \mathbf{B}_{\text{ind}}, \rho_{\text{ind}}, \mathbf{j}_{\text{ind}}\}$.

- A ist **mikroskopische Größe**, $\langle A\rangle$ ist **makroskopische Größe**.

- Da Mittelungsvorschrift mit zeitlichen und räumlichen Ableitungen vertauscht, gelten **mikroskopische Maxwell-Gleichungen** (333) bis (336), (341) bis (344) und (345) bis (348) auch für makroskopische Größen, z.B.

$$\nabla\langle\mathbf{E}\rangle(\mathbf{r},t) \;=\; 4\pi\langle\rho\rangle(\mathbf{r},t) \tag{350}$$

$$\nabla\times\langle\mathbf{B}\rangle(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathbf{E}\rangle(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{4\pi}{c}\langle\mathbf{j}\rangle(\mathbf{r},t) \tag{351}$$

$$\nabla\langle\mathbf{B}\rangle(\mathbf{r},t) \;=\; 0 \tag{352}$$

$$\nabla\times\langle\mathbf{E}\rangle(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathbf{B}\rangle(\mathbf{r},t) \;=\; 0. \tag{353}$$

- Siehe auch qualitative Diskussion im Rahmen der Elektrostatik in Abschnitt 2.4.

7.3 Reaktion von Materie, linearer Response

- $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ (und damit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ind}}$) ist Funktion von $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, wobei $\mathbf{E}_{\text{ind}} = 0$ falls $\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$ (Annahme: Keine Abhängigkeit von $\mathbf{B}_{\text{ext}}$).

- Häufig schwache äußere Felder $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, dann kann $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ bzw. $\mathbf{E}$ als Taylor-Reihe in $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ geschrieben werden,

$$E_j(\mathbf{r},t) \;=\; E_{\text{ext},j}(\mathbf{r},t) + E_{\text{ind},j}(\mathbf{r},t) \;= \int d^3r' \int dt' \, (\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t',T,p,\ldots) E_{\text{ext},k}(\mathbf{r}',t') + \mathcal{O}(|\mathbf{E}_{\text{ext}}|^2). \tag{354}$$

  - Bei Vernachlässigung der höheren Ordungen $\mathcal{O}(|\mathbf{E}_{\text{ext}}|^2)$ **lineares Response-Modell**, d.h. doppelt so große Störung in Form des externen E-Feldes bewirkt doppelt so großes induziertes E-Feld (vernachlässigte Terme können bei starken äußeren Feldern [z.B. Laserlicht] wichtig werden).
  - $(\epsilon^{-1})_{jk}$ heißt **mikroskopische Response-Funktion** (Bezeichnung ϵ^{-1} [statt z.B. ϵ] hat historische Gründe).
  - $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ nicht notwendig parallel zu $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, daher Tensorstruktur von $(\epsilon^{-1})_{jk}$ erforderlich ("$(\epsilon^{-1})_{jk}$ ist Matrix, nicht nur Zahl").
  - $(\epsilon^{-1})_{jk}$ kann vielfältige Effekte beschreiben, z.B. Störungen bei $(\mathbf{r}',t')$ können Effekte zu späteren Zeiten t an anderen Orten $\mathbf{r}$ bewirken (aufgrund der Homogenität der Zeit nur Argument $t-t'$ möglich), außerdem Abhängigkeit von Temperatur T, Druck p, etc. möglich (ab jetzt wird $T, p, \ldots$ nicht mehr notiert).
  - $(\epsilon^{-1})_{jk} = \delta_{jk}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$ bedeutet $\mathbf{E}_{\text{ind}} = 0$, d.h. keine Reaktion der Materie.
  - Mikroskopische Response-Funktion und deren Berechnung kompliziert ($\rightarrow$ z.B. Vorlesungen über Festkörperphysik).

- Im Folgenden eine Reihe von vereinfachenden Annahmen und Umformungen:

  - Räumliche Mittelung bezüglich $\mathbf{r}$ (wie in (349) definiert),

$$\langle E_j\rangle(\mathbf{r},t) \;=\; \int d^3r' \int dt' \, \langle(\epsilon^{-1})_{jk}\rangle(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t') E_{\text{ext},k}(\mathbf{r}',t'), \tag{355}$$

    wobei $\langle(\epsilon^{-1})_{jk}\rangle$ **makroskopische Response-Funktion** heißt.
  - Ab jetzt immer makroskopische Größen, d.h. $\langle\ldots\rangle$ wird weggelassen, also $(\epsilon^{-1})_{jk} \equiv \langle(\epsilon^{-1})_{jk}\rangle$, etc.
  - Annahme bezüglich $\mathbf{r}$- und $\mathbf{r}'$-Abhängigkeit von $(\epsilon^{-1})_{jk}$:

$$(\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t') \;=\; (\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{356}$$

    d.h. Störung durch $E_{\text{ext},k}(\mathbf{r}',t')$ bewirkt nur Reaktionen an gleicher Position $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, nicht aber davon entfernt, d.h. bei irgendeinem $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$; damit

$$E_j(\mathbf{r},t) \;=\; \int dt' \, (\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},t-t') E_{\text{ext},k}(\mathbf{r},t'). \tag{357}$$

– Verwende Fourier-Transformation bezüglich Zeitargument,

$$f(\omega) \;=\; \int dt\, e^{+i\omega t} f(t) \quad , \quad f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int dt\, e^{-i\omega t} f(\omega) \tag{358}$$

(in diesem Zusammenhang ist Notation bzw. Konvention üblich, die sich leicht von (292) unterscheidet), damit

$$\begin{aligned} E_j(\mathbf{r},\omega) \;&=\; \int dt\, e^{+i\omega t} E_j(\mathbf{r},t) \;= \\ &= \int dt\, e^{+i\omega t} \int dt'\, (\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},t-t') E_{\mathrm{ext},k}(\mathbf{r},t') \;= \\ &= \int dt'\, E_{\mathrm{ext},k}(\mathbf{r},t') \underbrace{\int dt\, e^{+i\omega t} (\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},t-t')}_{=\int dt\, e^{+i\omega(t+t')}(\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},t)} \;= \\ &= \left(\int dt'\, e^{+i\omega t'} E_{\mathrm{ext},k}(\mathbf{r},t') \right) \left(\int dt\, e^{+i\omega t} (\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},t) \right) \;= \\ &= \; (\epsilon^{-1})_{jk}(\mathbf{r},\omega) E_{\mathrm{ext},k}(\mathbf{r},\omega) \end{aligned} \tag{359}$$

(im Fourier-Raum wird "Faltungsintegral" (357) zu ordinärem Produkt).

– Auflösen nach $E_{\mathrm{ext},j}$,

$$E_{\mathrm{ext},j}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \epsilon_{jk}(\mathbf{r},\omega) E_k(\mathbf{r},\omega) \tag{360}$$

(ϵ_{jk} bezeichnet inverse Matrix zu $(\epsilon_{jk})^{-1}$, heißt **Dielektrizität**).

– Annahme: Eine Sorte von Materie, damit (nach räumlicher Mittelung) **homogen** ... außerdem (nach räumlicher Mittelung) **isotrop**, d.h. keine Richtung ausgezeichnet, dann

$$\epsilon_{jk}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \epsilon(\omega)\delta_{jk} \tag{361}$$

bzw.

$$\mathbf{E}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega). \tag{362}$$

  * Gase und Flüssigkeiten sind isotrop, Festkörper haben häufig durch Kristallstruktur ausgezeichnete Achsen ... Annahme muss also von Fall zu Fall überprüft werden ... o.k. z.B. bei kubischem Kristallgitter.
  * $\epsilon(\omega)$ heißt **dielektrische Funktion**, ist Materialeigenschaft, dimensionslos, kann komplex-wertig sein.

– **Dielektrizitätskonstante**:

$$\epsilon \;=\; \epsilon(\omega = 0) \tag{363}$$

(vereinfachender Übergang von dielektrischer Funktion zu Dielektrizitätskonstante sinnvoll, wenn ω-Abhängigkeit schwach, d.h. Materie auf unterschiedliche ["Licht"]-Frequenzen in gleicher Weise reagiert), dann

$$\mathbf{E}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},t) \;=\; \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \tag{364}$$

• Analoge Behandlung des magnetischen Feldes, Ergebnis

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \mu(\omega)\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},\omega) \tag{365}$$

bzw.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \mu\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \tag{366}$$

(μ heißt **Response-Funktion** bzw. **Permeabilität**).

7.4 Makroskopische Maxwell-Gleichungen

- Betrachte auch in diesem Abschnitt ausschließlich makrokopische Größen, daher wird $\langle\ldots\rangle$ stets weggelassen.
- Startpunkt sind Maxwell-Gleichungen für makroskopische Größen (350) bis (353):
  - Inhomogene Gleichungen für "ext" Größen:

$$\nabla\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \;=\; 4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \tag{367}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \tag{368}$$

    (Nicht-Betrachten der "ind" Größen vorteilhaft, da ρ_{ind} und $\mathbf{j}_{\text{ind}}$ unbekannt).
  - Homogene Gleichungen für Größen ohne Index, d.h. für "ext+ind" Größen:

$$\nabla\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; 0 \tag{369}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; 0 \tag{370}$$

    ($\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ sind die interessierenden Felder).
  - (367) bis (370) heißen **makrokopische Maxwell-Gleichungen**, ebenso wie alle weiteren daraus abgeleiteten und in diesem Kapitel diskutierten Versionen der Maxwell-Gleichungen.
- (367) und (368) darf nicht unabhängig von (369) und (370) gelöst werden, da $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ und $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ voneinander abhängen.
- Beziehung zwischen $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ und $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ in Abschnitt 7.3 diskutiert und unter vereinfachenden Annahmen berechnet.
- Einfachster Fall ist

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \;=\; \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad,\quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \mu\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t), \tag{371}$$

  dann werden (367) und (368) zu

$$\nabla\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; 4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \tag{372}$$

$$\nabla\times\frac{1}{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t). \tag{373}$$

- Bei Frequenzabhängigkeit

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \quad,\quad \mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) \;=\; \mu(\omega)\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r},\omega) \tag{374}$$

werden (367) bis (370) zu

$$\nabla\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = 4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},\omega) \tag{375}$$

$$\nabla\times\frac{1}{\mu(\omega)}\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)+\frac{i\omega}{c}\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},\omega) \tag{376}$$

$$\nabla\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) = 0 \tag{377}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)-\frac{i\omega}{c}\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) = 0, \tag{378}$$

wobei

$$\int dt\, e^{+i\omega t}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) = -\int dt\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}e^{+i\omega t}}_{=+i\omega e^{+i\omega t}}\right)\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) = -i\omega\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r},\omega) =$$

$$= -i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \tag{379}$$

und analoge Rechnung für B-Feld verwendet wurde.

- Häufig verwendet man Notation $\mathbf{D}\equiv\mathbf{E}_{\text{ext}}$ (**D** heißt **dielektrische Verschiebung**) und $\mathbf{H}\equiv\mathbf{B}_{\text{ext}}$ (**H** heißt **magnetische Feldstärke**); dann lauten (367) bis (370)

$$\nabla\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \tag{380}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t) \tag{381}$$

$$\nabla\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{382}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{383}$$

(immer gültig) und z.B. (371)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \tag{384}$$

(nur unter den in Abschnitt 7.3 diskutierten Annahmen gültig).

- Beispielanwendung: Dielektrikum im Kondensator.
  - Plattenkondensator (zwei unendlich ausgedehnte parallele Platten senkrecht zur z-Achse) mit vorgegebener Flächenladungsdichte $+\sigma$ und $-\sigma$.
  - Vakuum zwischen Platten:
    E-Feld zwischen Platten ist $\mathbf{E}=4\pi\sigma\mathbf{e}_z$ (leicht mit Satz von Gauß zu berechnen, siehe auch Abschnitt 2.13).
  - Homogenes isotropes Dielektrikum zwischen Platten:
    Verwende $\nabla\mathbf{D}=\nabla\epsilon\mathbf{E}=4\pi\rho_{\text{ext}}$ statt $\nabla\mathbf{E}=4\pi\rho_{\text{ext}}$, sonst bleibt alles gleich ... damit $\mathbf{D}=4\pi\sigma\mathbf{e}_z$ bzw. $\mathbf{E}=(4\pi\sigma/\epsilon)\mathbf{e}_z$, d.h. da $\epsilon>1$ (experimenteller Befund) reduziert ein Dielektrikum das elektrische Feld bei vorgegebener Flächenladungsdichte.
  - Kapazität $C=$ Ladung / Spannung, außerdem Spannung $\propto|\mathbf{E}|$
    $\rightarrow$ Dielektrikum vergrößert Kapazität eines Kondensators, $C\rightarrow\epsilon C$.

7.5 Verhalten von E, B, D und H auf Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Materiesorten

- (371) und (374) und die daraus folgenden Maxwell-Gleichungen gelten nur unter speziellen Annahmen, insbesondere Homogenität und Isotropie der Materie (siehe Abschnitt 7.3).
- Auf Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Materiesorten ist Homogenität und Isotropie verletzt, d.h. obige makroskopische Maxwell-Gleichungen gelten innerhalb einer Materiesorte, nicht aber auf Grenzflächen.
- Vorgehen bei Berechnung der Felder bei zwei aneinandergesetzten Materiesorten:
  - Lösen der Maxwell-Gleichungen innerhalb jeder der beiden Materiesorten.
  - Zusammensetzen der beiden Lösungen, so dass die Größen

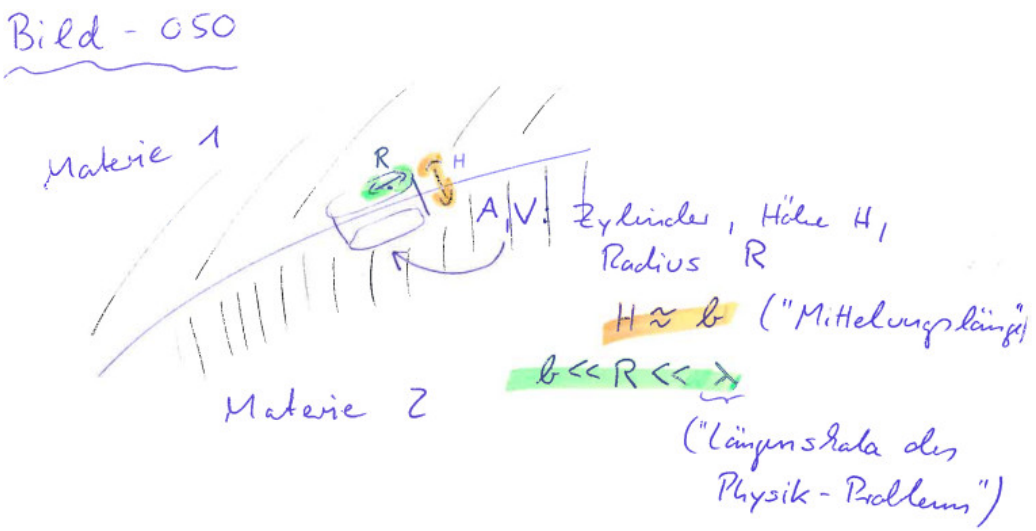
    $$D_\perp \quad , \quad \mathbf{H}_\parallel \quad , \quad B_\perp \quad , \quad \mathbf{E}_\parallel \tag{385}$$

    stetig sind.
  - Stetigkeitsbedingungen lassen sich wie schon zuvor (siehe z.B. Abschnitt 6.6) aus Maxwell-Gleichungen (380) bis (383) und den Stätzen von Gauß und von Stokes herleiten, z.B.

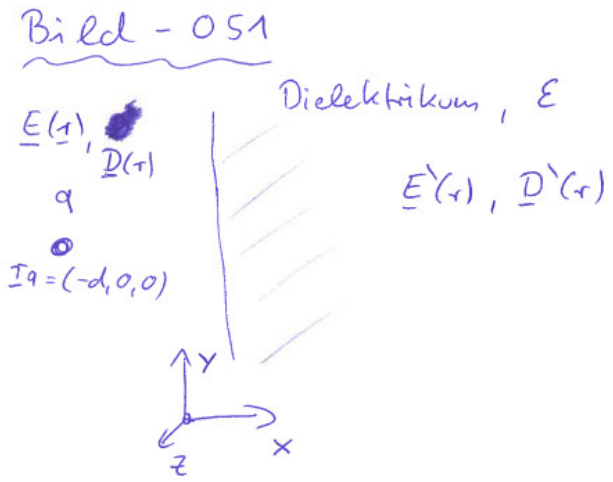
    $\nabla \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 0$ (Annahme: Keine externen Ladungen auf der Grenzfläche.)

    $$\rightarrow \quad 0 = \int_V d^3r\, \nabla \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \oint_A d\mathbf{A}\, \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = A\Big(D_{1,\perp} - D_{2,\perp}\Big)$$

    $$\rightarrow \quad D_{1,\perp} = D_{2,\perp}. \tag{386}$$



- Beispielanwendung: Punktladung und Dielektrikum
  - Betrachte Vakuum für $x < 0$, Dielektrikum für $x \geq 0$ (Dielektrizitätskonstante ϵ), ruhende Punktladung q bei $\mathbf{r}_q = (-d, 0, 0)$.



– Relevante Gleichung der Elektrostatik im Vakuum für $x < 0$ ist

$$\nabla \mathbf{D}(\mathbf{r}) \quad = \quad 4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad 4\pi q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q), \tag{387}$$

Lösung ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|^3} + \mathbf{E}_{\text{homogen}}(\mathbf{r}), \tag{388}$$

wobei $\mathbf{E}_{\text{homogen}}$ die allgemeine Lösung von $\nabla \mathbf{E}_{\text{homogen}} = 0$ ist.

– Relevante Gleichung der Elektrostatik im Dielektrikum für $x \geq 0$ ist

$$\nabla \mathbf{D}'(\mathbf{r}) \quad = \quad 4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \nabla \epsilon \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \quad = \quad 0, \tag{389}$$

Lösung ist

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) \quad = \quad \mathbf{E}'_{\text{homogen}}(\mathbf{r}), \tag{390}$$

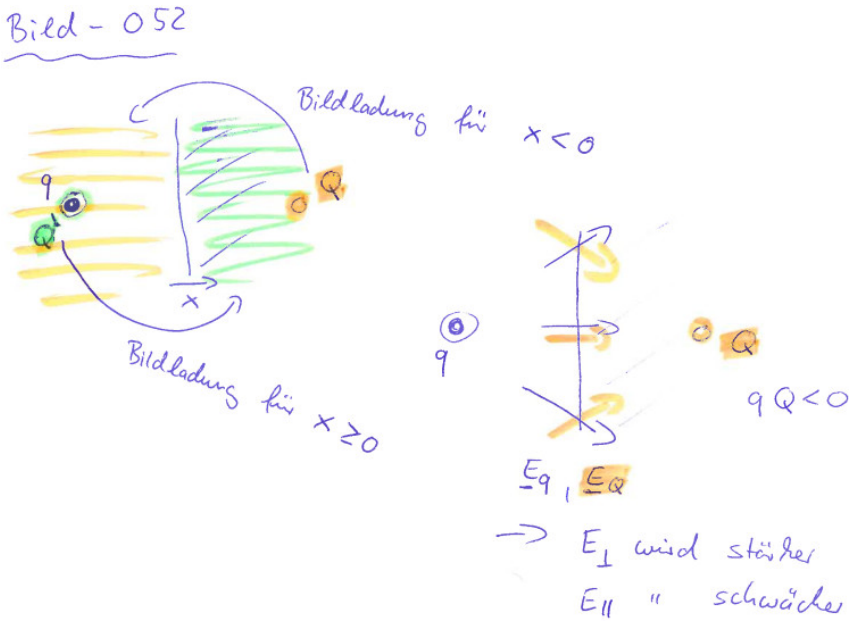
wobei $\mathbf{E}'_{\text{homogen}}$ die allgemeine Lösung von $\nabla \mathbf{E}'_{\text{homogen}} = 0$ ist.

– Zu lösendes Problem ist damit: Finde $\mathbf{E}$ und $\mathbf{E}'$ so, dass RBs erfüllt, d.h. $\mathbf{E}, \mathbf{E}' \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ sowie $D_\perp(x=0) = D'_\perp(x=0)$ (bzw. $E_\perp(x=0) = \epsilon E'_\perp(x=0)$) und $\mathbf{E}_\parallel(x=0) = \mathbf{E}'_\parallel(x=0)$.

– Ansatz:

$$\mathbf{E}_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{Q(\mathbf{r}+\mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_q|^3} \quad , \quad \mathbf{E}'_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{Q'(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|^3}. \tag{391}$$

  * "Bildladungen" Q und Q', lösen homogene Gleichungen, da Ladungen im jeweils ausgeschlossenen Halbraum $x \geq 0$ bzw. $x < 0$ positioniert sind.
  * Q' offensichtlich notwendig, z.B. im Fall $\epsilon = 1$ (Dielektrikum wird entfernt) $Q' = q$ und $Q = 0$.
  * Q ermöglicht es, $E_\perp(x=0) = \epsilon E'_\perp(x=0)$ und $\mathbf{E}_\parallel(x=0) = \mathbf{E}'_\parallel(x=0)$ zu erfüllen, da für $qQ < 0$ die Ladung Q das Feld $E_\perp$ von q verstärkt und das Feld $\mathbf{E}_\parallel$ von q schwächt (und umgekehrt für $qQ > 0$).



– Bestimmung von Q und Q':

$$
\begin{aligned}
& E_\perp(x=0) \;=\; \epsilon E'_\perp(x=0) \\
\rightarrow \quad & \mathbf{E}(x=0)\mathbf{e}_x \;=\; \epsilon \mathbf{E}'(x=0)\mathbf{e}_x \\
\rightarrow \quad & \frac{+qd}{(y^2+z^2+d^2)^{3/2}} + \frac{-Qd}{(y^2+z^2+d^2)^{3/2}} \;=\; \epsilon \frac{+Q'd}{(y^2+z^2+d^2)^{3/2}} \\
\rightarrow \quad & +q - Q = +\epsilon Q' \qquad (392)
\end{aligned}
$$

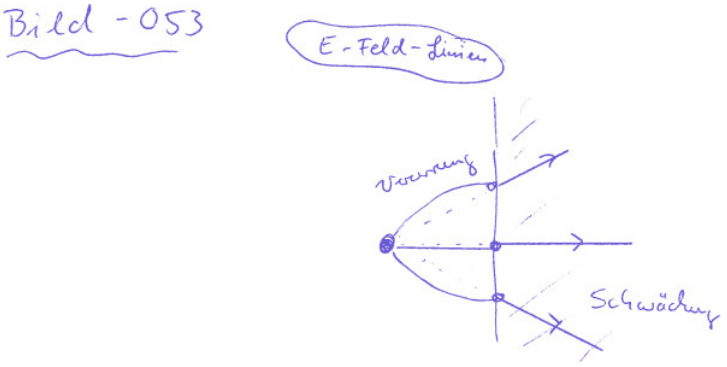
bzw. nach analoger Rechnung für $\mathbf{E}_\parallel$ und $\mathbf{E}'_\parallel$

$$
\rightarrow \quad +q + Q = +Q', \qquad (393)
$$

damit

$$
Q \;=\; -\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}q \quad , \quad Q' \;=\; +\frac{2}{\epsilon+1}q. \qquad (394)
$$

– D.h. $Q \leq 0$ (E-Feld im Vakuum wird verzerrt) und $0 \leq Q' \leq q$ (E-Feld im Dielektrikum wird lediglich um Faktor $2/(\epsilon+1)$ schwächer).



A Herleitung des Energie-Impuls-Tensors und der zugehörigen Kontinuitätsgleichungen aus dem Noether-Theorem

- Startpunkt ist $\mathcal{L} = -(1/16\pi)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, das Noether-Theorem (272),

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu(s), A^\mu(s), x)\Big|_{s=0} \;=\; \partial_\rho\Big(\frac{\partial\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu, x)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}\frac{\partial A_\sigma(s)}{\partial s}\Big|_{s=0}\Big), \tag{395}$$

  wobei der doppelt auftretende Index σ hoch- bzw. runtergezogen wurde (σ in $\partial/\partial(\partial_\rho A_\sigma)$ entspricht einem oberen Index), und die vier Transformationen
  $A^\mu(x) \to A^\mu(s,x) = A^\mu(se_\nu + x)$, $\nu = 0, \ldots, 3$.

- Einige Nebenrechnungen:

  - Rechte Seite von Gleichung (395), erster Term:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu, A^\mu, x)}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} &= -\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}F_{\alpha\beta} \;= \\ &= -\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}\Big(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\Big) \;=\; -\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\Big(\delta_{\rho\alpha}\delta_{\sigma\beta} - \delta_{\rho\beta}\delta_{\sigma\alpha}\Big) \;= \\ &= -\frac{1}{8\pi}\Big(F^{\rho\sigma} - F^{\sigma\rho}\Big) \;=\; -\frac{1}{4\pi}F^{\rho\sigma}.\end{aligned} \tag{396}$$

  - Rechte Seite von Gleichung (395), zweiter Term:

$$\frac{\partial A_\sigma(s)}{\partial s}\Big|_{s=0} \;=\; \frac{\partial A_\sigma(u)}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial s}\Big|_{s=0} \;=\; \underbrace{\frac{\partial A_\sigma(u)}{\partial u^\alpha}\Big|_{s=0}}_{=\partial_\alpha A_\sigma}\underbrace{e^\alpha_\nu}_{=\delta_{\nu\alpha}} \;=\; \partial_\nu A_\sigma, \tag{397}$$

    wobei der Vierervektor $u = se_\nu + x$ definiert wurde.

  - Linke Seite von Gleichung (395):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(\partial_\mu A^\nu(s), A^\mu(s), x)\Big|_{s=0} &= -\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial s}F_{\alpha\beta}(s)\Big|_{s=0} \;= \\ &= -\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial s}\Big(\partial_\alpha A_\beta(s) - \partial_\beta A_\alpha(s)\Big)\Big|_{s=0} \;= \\ &= -\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\Big(\partial_\alpha\partial_\nu A_\beta - \partial_\beta\partial_\nu A_\alpha\Big) \;=\; -\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} \;= \\ &= -\frac{1}{16\pi}\partial_\nu\Big(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\Big) \;=\; -\frac{1}{16\pi}\partial_\mu\Big(\eta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\Big),\end{aligned} \tag{398}$$

    wobei Gleichung (397) verwendet wurde.

- Damit ergibt sich aus Gleichung (395)

$$\partial_\mu\Big(\frac{1}{4}\eta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\Big) \;=\; \partial_\rho\Big(F^{\rho\sigma}\partial_\nu A_\sigma\Big), \tag{399}$$

  wobei die rechte Seite umgeschrieben werden kann,

$$\partial_\rho\Big(F^{\rho\sigma}\partial_\nu A_\sigma\Big) \;=\; \partial_\rho\Big(F^{\rho\sigma}\Big(\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu\Big)\Big) \;=\; \partial_\rho\Big(F^{\rho\sigma}F_{\nu\sigma}\Big). \tag{400}$$

Dabei wurde nach dem ersten Gleichheitszeichen "0" subtrahiert, da

$$\partial_\rho\Big(F^{\rho\sigma}\partial_\sigma A_\nu\Big) \quad = \quad \underbrace{(\partial_\rho F^{\rho\sigma})}_{=0}\,\partial_\sigma A_\nu + \underbrace{F^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma}_{=0}\,A_\nu \quad = \quad 0 \tag{401}$$

(der erste Term verschwindet aufgrund der Maxwell-Gleichungen im Vakuum, der zweite Term aufgrund der Antisymmetrie von $F^{\rho\sigma}$ und der Symmetrie von $\partial_\rho\partial_\sigma$).

- Die Gleichungen (399) und (400) liefern nach Umbenennung von Indizes und einigen kleineren Umformungen

$$\partial_\mu\left(F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) \quad = \quad 0. \tag{402}$$

Mit der Definition des Energie-Implus-Tensors (275) entspricht dies gerade den vier Kontinuitätsgleichungen (274).