Theoretische Physik 1
Mathematische Methoden

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Wintersemester 2026/27

Version: 13. November 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen **3**

2 Kinematik von Massenpunkten **4**

2.1 Grundlagen der Vektorrechnung 4

2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung 8

2.2.1 Geschwindigkeit 8

2.2.2 Beschleunigung 9

2.2.3 Beispiel: Kreisbewegung 10

3 Dynamik von Massenpunkten (Grundlagen) **11**

3.1 Newtonsche Axiome 11

3.2 Typische in der Mechanik auftretende Kräfte 12

3.3 Lösung der Newtonschen BGl für spezielle "einfache Kräfte" (1) 13

3.3.1 Verschwindende Kraft $\mathbf{F} = 0$ 14

3.3.2 Konstante Kraft $\mathbf{F} = \text{const}$ 16

3.3.3 Zeitabhängige Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ (aber nicht ortsabhängig) 18

3.3.4 Lineare Reibungskraft 18

3.4 Einschub: Taylor-Näherung 20

3.5 Lösung der Newtonschen BGl für spezielle "einfache Kräfte" (2) 23

3.5.1 Konstante Kraft und lineare Reibungskraft 23

3.6 DGls: Zusammenfassung und Ergänzungen 25

4 Harmonischer Oszillator (HO) **28**

4.1 Komplexe Zahlen 28

4.1.1 Kartesische Darstellung 28

4.1.2 Polardarstellung 29

4.1.3 Beweis $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ 29

4.2 Ungedämpfter HO 30

4.3 Gedämpfter HO 31

4.3.1 Starke Dämpfung ($\alpha > \omega_0$) 31

4.3.2 Schwache Dämpfung ($\alpha < \omega_0$) 32

4.3.3 Kritische Dämpfung ($\alpha = \omega_0$) 32

****** 12. Oktober 2026 (1. Vorlesung) ******

1 Vorbemerkungen

- Ziel der Physik: Vermessung, Beschreibung und Verständnis der Naturgesetze.
- Experimentelle Wissenschaft ... theoretische Aussagen nur sinnvoll, wenn
  - durch Experiment nachprüfbar bzw. mit existierenden Experimenten verträglich,
  - diese Vorhersagekraft besitzen, d.h. der Ausgang zukünftiger Experimente mit ihrer Hilfe vorhergesagt werden kann.
- Ziele der theoretischen Physik:
  - Mathematische Beschreibung der Naturgesetze.
  - Zurückführen scheinbar unterschiedlicher physikalischer Phänomene auf eine mathematische Formel/ein Grundprinzip
    $\rightarrow$ Vereinheitlichung.
  - Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung beschreibt geradlinige Bewegung eines "freien Teilchens", Wurfparabel eines fliegenden Balls und ellipsenförmige Bewegung von Planeten um ihre Sonne.
  - Man will nicht 1000 Formeln für 1000 Phänomene ... dann hat man nichts gelernt. Man will eine (Welt-)Formel, die alles beschreibt.
- Theoretische Physik 1 bis 5:
  - 2$\times$ Mechanik.
  - Elektrodynamik.
  - Quantenmechanik.
  - Statistische Physik.
- Inhalt von "Theoretische Physik 1– Mathematische Methoden":
  - Mathematische Grundlagen anhand von physikalischen Beispielen.
  - Newtonsche Mechanik (Bewegung makroskopischer Objekte mit kleinen Geschwindigkeiten, z.B. fallende Steine, kreisende Planeten).
  - Eventuell spezielle Relativitätstheorie (Bewegung makroskopischer Objekte mit nahezu Lichtgeschwindigkeit).

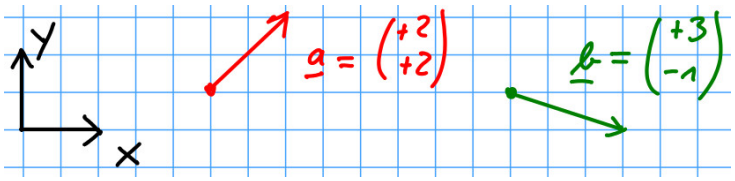
2 Kinematik von Massenpunkten

- Wiki: "Die **Kinematik** ist die Lehre der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum ... ohne die Ursache der Bewegung (Kräfte) zu kennen."
- Kinematik bildet Vorstufe der **Dynamik**, die die Kräfte mit einbezieht.
- Anstelle von ausgedehnten Objekten (Stein, Planet) betrachten wir häufig **Massenpunkte**:
  - Ausdehnung 0.
  - Approximation, die Rechnungen erheblich vereinfacht.
  - Approximation mag gut sein, wenn ausgedehntes Objekt nicht rotiert/seine Bewegung nicht von Rotation beeinflusst wird/etc. Güte der Approximation muss von Fall zu Fall diskutiert werden.
    (Ohne diese Approximation: Betrachte **Starre Körper** ["ausgedehnte feste Objekte"] statt Massenpunkte.)
- Position eines Massenpunkts durch x-, y- und z-Koordinate beschrieben, Zusammenfassung zu Vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (Einheit von x, y, z, $\mathbf{r}$: Länge, z.B. m).
- Sich bewegender Massenpunkt: x, y und z sind zeitabhängig, also Funktionen der Zeit t, d.h. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ bzw. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (wird als **Trajektorie** bezeichnet).
- Annahmen:
  - Absolute Zeit, d.h. Zeit vergeht für alle Beobachter gleich schnell.
    (Nicht mehr erfüllt in spezieller Relativitätstheorie, z.B. für sich bewegende Beobachter vergeht die Zeit langsamer.)
  - Flacher Raum, kann mit kartesischen Koordinaten beschrieben werden, Abstände können mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden.
    (Nicht mehr erfüllt in allgemeiner Relativitätstheorie, z.B. Winkelsumme im Dreieck $\neq 180°$.)

2.1 Grundlagen der Vektorrechnung

- Klassifikation physikalischer Größen:
  - **Skalare**: Eine Zahl (evtl. mit Einheit), z.B. Masse m, Temperatur T.
  - **Vektoren**: Im d-dimensionalen Raum Satz von d zusammengehörigen Größen (evtl. mit Einheit), besitzt eine Richtung ("Pfeil"), z.B. Position eines Massenpunkts $\mathbf{r}$, seine Geschwindigkeit $\mathbf{v}$.
  - **Tensoren**: Ein Satz von Größen, der mehrere Richtungen besitzt (kompliziert, daher erst später), z.B. Trägheitstensor (die Verallgemeinerung des Trägheitsmoments) oder Feldstärketensor (vereinheitlichte Beschreibung des elektrischen und magnetischen Felds).

- In Newtonscher Mechanik häufig 2- oder 3-dimensionale räumliche Vektoren, in spezieller Relativitätstheorie 4-dimensionale Raumzeitvektoren.
- Anschauliche Beschreibung eines Vektors: Pfeil.

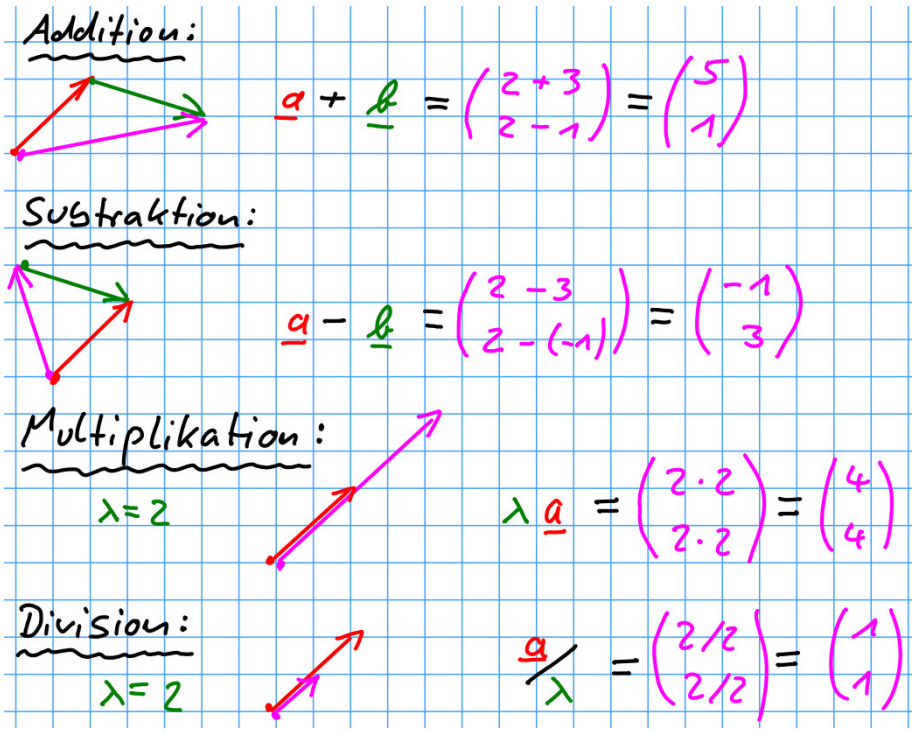


- Notation: in Form seiner **Komponenten**, streng genommen als Spalte von Größen, z.B. in 3 Dimensionen

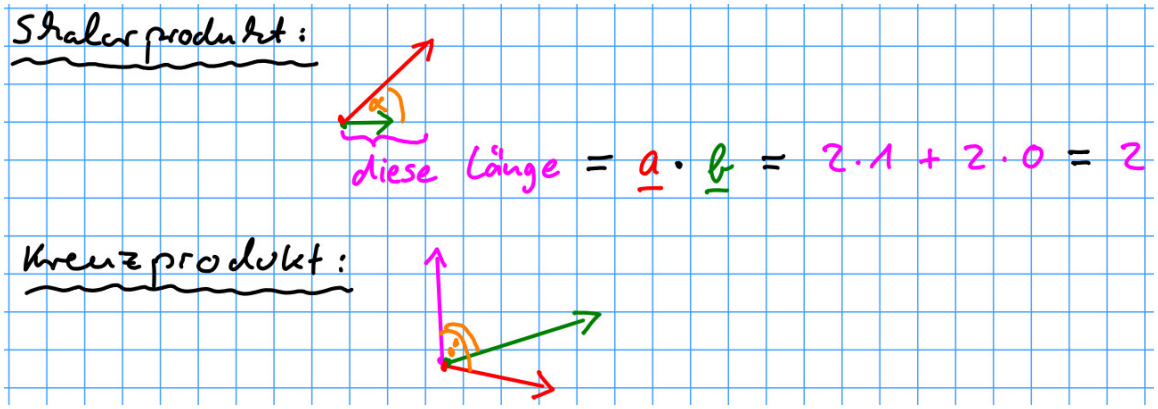
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

  im Folgenden aber auch häufig als Zeile, d.h. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ist äquivalent.

- Grundlegende Rechnenoperationen mit Vektoren und geometrische Bedeutung:
  - **Addition:** (zwei Vektoren)
    $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
    Entspricht Aneinandersetzen von Pfeilen (Pfeilende von $\mathbf{b}$ an Pfeilspitze von $\mathbf{a}$).



– **Subtraktion:** (zwei Vektoren)
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.
Entspricht Aneinandersetzen von Pfeilen (Pfeilspitze von $\mathbf{b}$ an Pfeilspitze von $\mathbf{a}$).
  * Negativer Vektor $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ ist umgekehrter Pfeil.
– **Multiplikation:** (Vektor und Zahl)
$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.
Länge des Pfeils wird um Faktor λ verändert.
– **Division:** (Vektor und Zahl)
$\mathbf{a}/\lambda = (a_1/\lambda, a_2/\lambda, a_3/\lambda)$.
Länge des Pfeils wird um Faktor $1/\lambda$ verändert.
– **Multiplikation (Skalarprodukt):** (zwei Vektoren)
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
Hat der Vektor $\mathbf{b}$ Länge 1, entspricht $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ senkrechter Projektion von $\mathbf{a}$ auf $\mathbf{b}$.



  * Beispiel zur Illustration:
$\mathbf{a} = a(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ (a ist die Länge von $\mathbf{a}$), $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$
$\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\cos(\alpha)$.
  * Allgemein
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos(\alpha). \tag{2}$$
  * Folglich kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen,
$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}\right), \tag{3}$$
oder die Länge eines Vektors,
$$a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \tag{4}$$
(häufig auch Notation $|\mathbf{a}| = a$, **Betragsstriche** bzw. "**Betrag von a**"; nach letztem Gleichheitszeichen "Pythagoras").

****** 16. Oktober 2026 (2. Vorlesung) ******

– **Multiplikation (Kreuz- bzw. Vektorprodukt):** (zwei Vektoren)
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$.
Tipp: Eine Komponente zu merken, reicht aus ... Rest über **zyklische Vertauschung**, $(123) \rightarrow (231) \rightarrow (312)$ *(häufig in theoretischer Physik).*
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sowohl **orthogonal** (= senkrecht) zu $\mathbf{a}$ als auch zu $\mathbf{b}$.

* Beispiel zur Illustration:
  Erneut $\mathbf{a} = a(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$
  $\rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, -a\sin(\alpha))$.
* Es gilt
  $$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \quad = \quad ab\sin(\alpha), \tag{5}$$
  $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ entspricht also der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
* Man kann den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen,
  $$\alpha \quad = \quad \text{asin}\left(\frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{ab}\right). \tag{6}$$
* $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \vec{0}$ (häufig schreibt man 0 statt $\vec{0}$).
* Ausrichtung von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ über Rechte-Hand-Regel: Daumen = $\mathbf{a}$, Zeigefinger = $\mathbf{b}$, Mittelfinger = $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (Voraussetzung: **Rechtshändiges Koordinatensystem**, d.h. Daumen = x-Achse, Zeigefinger = y-Achse, Mittelfinger = z-Achse).
* Vorsicht:
  - Skalare ("normale Zahlen"):
    $a(b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz)
    $ab = ba$ (Kommutativgesetz)
    $a(bc) = (ab)c$ (Assoziativgesetz).
  - Kreuzprodukt:
    $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (Distributivgesetz erfüllt)
    $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (Kommutativgesetz nicht erfüllt)
    $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ (Assoziativgesetz nicht erfüllt).

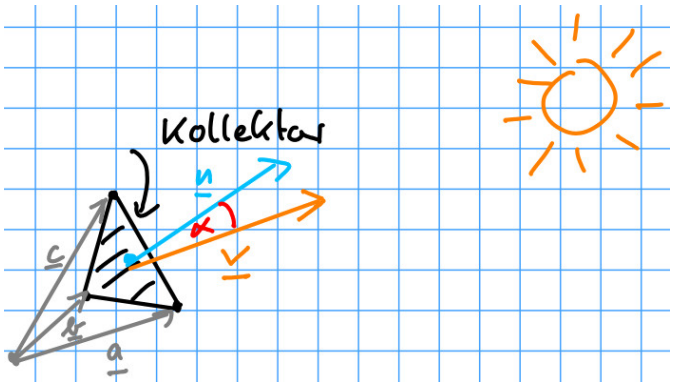
– **Division:** (Vektor und Vektor)
  Unsinn! Gibt es nicht! Niemals machen!

- Einheitsvektoren:
  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$,
  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$,
  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$.
  Damit $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$. Ausdrücken eines Vektors durch Einheitsvektoren (bzw. allgemeiner **orthonormale Basisvektoren** = Satz von senkrechten Vektoren der Länge 1) und den Komponenten bezüglich dieser Vektoren häufig zweckmäßig (Anwendungen später).

- Fast alle bisherigen Aussagen gelten in beliebiger Anzahl von Dimensionen d, z.B. Skalarprodukt
  $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad = \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad = \quad \sum_{j=1}^{d} a_j b_j. \tag{7}$$
  Ausnahme ist Kreuzprodukt, existiert nur in $d = 3$ Dimensionen.

Beispielaufgabe

Ein Dreieck (z.B. ein kleines Flächenstück eines Sonnenkollektors) ist durch seine Eckpunkte **a**, **b**, **c** definiert. Die Sonne steht in Richtung **v** (**v** hat Länge 1) am Himmel. Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf das Dreieck?



- **Normale** des Dreiecks (= senkrecht auf dem Dreieck stehender Vektor der Länge 1):

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad , \quad \mathbf{u} \;=\; (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}). \tag{8}$$

- Winkel der Sonneneinstrahlung:

$$\alpha \;=\; \mathrm{acos}\left(\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|}\right) \;=\; \mathrm{acos}(|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|) \tag{9}$$

(die Betragstriche bei $|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|$ sorgen für einen Winkel zwischen $0\ldots90°$).

****** 19. Oktober 2026 (3. Vorlesung) ******

2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

2.2.1 Geschwindigkeit

- 1-dimensionale Bewegung, $x(t)$:
  - Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$:

$$v_{\mathrm{av}}(t, t+\Delta t) \;=\; \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{10}$$

(v von *velocity*; Einheit von v: Länge/Zeit, z.B. m/s).

– Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ergibt sich im Grenzfall $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{av}}(t, t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \quad (11)$$

($\dot{x}$ ist abkürzende Schreibweise für "Zeitableitung von x"; zur Erinnerung: Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist $f'(x) = (d/dx)f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x+\Delta x) - f(x))/\Delta x$).

– Negatives Vorzeichen von $v(t)$ möglich, entspricht Bewegung in negative x-Richtung.

- 3-dimensionale Bewegung, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

  – Analog:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)). \quad (12)$$

  – Ableitung einer vektorwertigen Funktion durch Ableiten ihrer Komponenten.

  – Die Geschwindigkeit in 3 Dimensionen ist ein 3-dimensionaler Vektor:

    * Betrag der Geschwindigkeit:

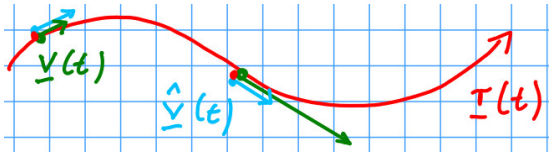
$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2 + (v_z(t))^2} =$$
$$= \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}. \quad (13)$$

    * Richtung der Geschwindigkeit:

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \quad (14)$$

      (eine Richtung hat Länge 1; man spricht auch von einem normierten Vektor, bezeichnet durch $\hat{}$, allgemein $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$).

    * Geschwindigkeit bzw. Richtung der Geschwindigkeit ist Tangente an Trajektorie.



2.2.2 Beschleunigung

- Geschwindigkeit ist Veränderung des Ortes pro Zeit.
- Beschleunigung a bzw. $\mathbf{a}$ ist Veränderung der Geschwindigkeit pro Zeit (a von *acceleration*).
- Damit Gleichungen aus Abschnitt 2.2.1 nach Ersetzung $x \to v$ und $v \to a$ bzw. $\mathbf{r} \to \mathbf{v}$ und $\mathbf{v} \to \mathbf{a}$ ebenfalls gültig, z.B.

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (16)$$

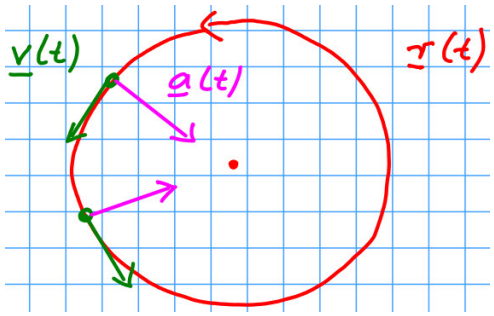
($\ddot{x}$ ist abkürzende Schreibweise für "doppelte Zeitableitung von x"; Einheit von a: Länge/Zeit^2, z.B. m/s^2).

2.2.3 Beispiel: Kreisbewegung

- Trajektorie einer Kreisbewegung (Radius R) mit konstanter Geschwindigkeit (genauer $|\mathbf{v}| = \text{const}$):

$$\mathbf{r}(t) = R(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) \quad , \quad \varphi(t) = \omega t \tag{17}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t)). \tag{18}$$



- ω ist die (hier konstante) Winkelgeschwindigkeit (Einheit: 1/Zeit, z.B. 1/s):
  - Beziehung zum Betrag der Geschwindigkeit v:
    Kreisumfang $2\pi R$,
    Zeitdauer eines Umlaufs $2\pi/\omega$
    ... also $v = 2\pi R/(2\pi/\omega) = R\omega$.
  - Analog zu $v = \dot{x}$ gilt $\omega = \dot{\varphi}$.

- Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), +\cos(\omega t)) \tag{19}$$

(ω aufgrund der Kettenregel: $(d/dt)f(g(t)) = f'(g(t))\dot{g}(t)$; hier: $f(g) = R\cos(g)$ bzw. $f(g) = R\sin(g)$, $g(t) = \omega t$).

  - $(-\sin(\omega t), +\cos(\omega t))$ hat Länge 1 (wegen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), ist also normiert.
  - $\rightarrow$ Betrag der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}(t)| = R\omega$ (konsistent mit obigen Überlegungen).
  - $\rightarrow$ Richtung der Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}(t) = (-\sin(\omega t), +\cos(\omega t))$, Tangente an kreisförmige Trajektorie.

- Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = R\omega^2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)). \tag{20}$$

  - $(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$ hat Länge 1, ist also normiert.
  - $\rightarrow$ Betrag der Beschleunigung $|\mathbf{a}(t)| = R\omega^2$.
  - $\rightarrow$ Richtung der Beschleunigung $\hat{\mathbf{a}}(t) = (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$, nach innen gerichtet (Zentripetalbeschleunigung, spürbar in Form nach außen gerichteter Zentrifugalkraft).
  - Obwohl der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist, ist die Beschleunigung von 0 verschieden, da sich die Richtung der Beschleunigung ständig verändert.

3 Dynamik von Massenpunkten (Grundlagen)

- Ziel: Berechne bei gegebener Kraft auf einen Massenpunkt (z.B. Schwerefeld der Erde, vorgegebene Kraft erzeugt durch einen Raketenantrieb) die resultierende Trajektorie dieses Massenpunkts.

3.1 Newtonsche Axiome

- **1. Axiom (Trägheitsprinzip)**:
  Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.
  - Scheint im ersten Moment unserer Alltagserfahrung zu widersprechen (→ Reibungskräfte).
  - Sollte eigentlich strenger formuliert werden:
    Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein Körper ...
  - Solche Koordinatensysteme nennt man **Inertialsysteme** (Koordinatensysteme, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen bzw. sich relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegen; keine Innertialsysteme sind z.B. Koordinatensysteme innerhalb eines beschleunigenden Fahrzeugs oder auf einem Karusell).
- **2. Axiom (Aktionsprinzip)**:
  Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

$$\dot{\mathbf{p}} \;=\; m\ddot{\mathbf{r}} \;=\; m\mathbf{a} \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \tag{21}$$

  (**Newtonsche Bewegungsgleichung (BGl)**).
  - Zeitabhängigkeit von $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, ... hier und im Folgenden meist weggelassen.
  - m ist **träge Masse** (quantifiziert, wie stark ein Massenpunkt bei gegebener Kraft beschleunigt wird; hat zunächst nichts mit **schwerer Masse** zu tun, die im Gravitationsgesetz auftritt; Experiment: $m_t = m_s$ mit großer Genauigkeit, daher meist keine Unterscheidung, d.h. $m = m_t = m_s$).
  - Kraft $\mathbf{F}$ (Einheit: Masse $\times$ Länge/Zeit^2, z.B. $\mathrm{kg\,m/s^2}$) kann vom Ort $\mathbf{r}$ abhängen (z.B. Gravitationsfeld), von der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ (z.B. Luftwiderstand) und von der Zeit t (z.B. sich veränderndes elektrisches Feld).
  - $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}$ ist der **Impuls** (Einheit: Masse $\times$ Länge/Zeit, z.B. $\mathrm{kg\,m/s}$).
  - (21) ist eine **Differentialgleichung (DGl)** (genauer eine **gewöhnliche Differentialgleichung**), d.h. eine Gleichung in der eine Funktion (hier $\mathbf{r}$) in einer Variable (hier t) und deren Ableitungen (hier $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$) auftreten; ein Großteil der theoretischen Physik besteht aus dem Lösen von DGls (hier dem Finden einer speziellen Trajektorie oder aller möglichen Trajektorien $\mathbf{r}$ bei gegebener Kraft $\mathbf{F}$).
- **3. Axiom (Wechselwirkungsprinzip)**:
  Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 eine

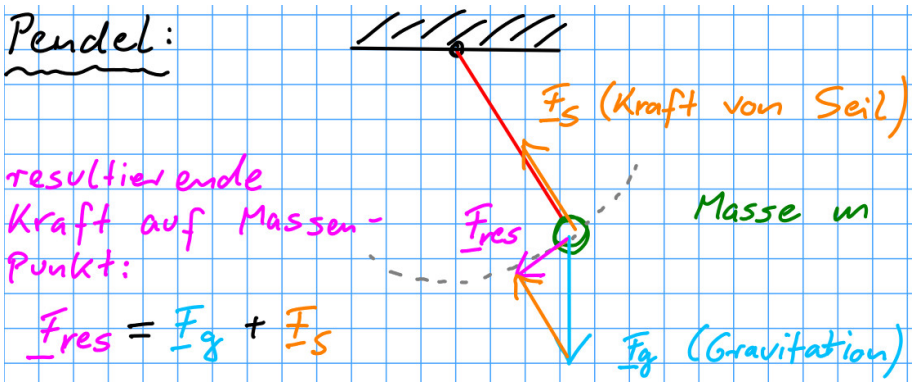
Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper 2 auf Körper 1 (reactio).

$$\mathbf{F}_{1\to 2} \quad = \quad -\mathbf{F}_{2\to 1}. \tag{22}$$

- **4. Axiom (Superpositionsprinzip)**:
  Wirken auf einen Punkt (oder einen starren Körper) mehrere Kräfte, so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft auf.

$$\mathbf{F}_{\text{res}} \quad = \quad \sum_j \mathbf{F}_j. \tag{23}$$

- Zeichnen aller auftretenden Kräfte ist häufig zum Verständnis eines physikalischen Problems hilfreich.



****** 23. Oktober 2026 (4. Vorlesung) ******

3.2 Typische in der Mechanik auftretende Kräfte

- **Gravitationskraft**:
  Ein Massenpunkt 1 ([schwere] Masse m_1) übt auf einen Massenpunkt 2 ([schwere] Masse m_2) die Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_{1\to 2} \quad = \quad -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{1\to 2} \tag{24}$$

  aus[1].

  - $G = 6.674\ldots \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2$, **Gravitationskonstante**.
  - $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, Abstand der beiden Massenpunkte.
  - $\hat{\mathbf{r}}_{1\to 2} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, Richtung der Kraft, von 1 nach 2.
  - Stärke der Gravitationskraft nimmt quadratisch mit Abstand ab.

[1] Diskussion träge vs. schwere Masse, siehe Abschnitt 3.1.

– $\mathbf{F}_{1\to 2} = -\mathbf{F}_{2\to 1}$ (3. Newtonsches Axiom).

- **Erdanziehung**:
  Bei Bewegung eines Massenpunkts (Masse m) in vergleichsweise kleinem Gebiet Näherung der Gravitationskraft (24) gemäß

$$\mathbf{F}_g \;=\; -mg\mathbf{e}_z. \tag{25}$$

  – Kleines Gebiet: Relative (d.h. prozentuale) Veränderung von r_{12} und $\hat{\mathbf{r}}_{1\to 2}$ klein.
  – z-Achse zeigt nach oben.
  – Beziehung zwischen G und g (Ortsfaktor): $g = GM/R^2$, wobei M die Erdmasse und R der Erdradius ist ($M \approx 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R \approx 6.37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$; damit $g \approx 10\mathrm{m/s^2}$).
  Bemerkung: Man müsste und kann zeigen, dass die über den gesamten Erdball verteilte Masse über der Erdoberfläche die gleiche Kraft erzeugt wie ein am Erdmittelpunkt sitzender Massenpunkt, dessen Masse der Erdmasse entspricht (siehe Abschnitt **??***).*

- **Harmonische Kraft**:
  Kraft proportional zur Auslenkung aus einer Ruhelage $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{F} \;=\; -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{26}$$

  – Realisierbar z.B. mit Feder (festgemacht bei $\mathbf{r}_0$, Ruhelänge 0), gültig für kleine Auslenkungen.
  – Massenpunkte, die unter Einfluss einer harmonischen Kraft (26) schwingen, werden als **harmonische Oszillatoren** bezeichnet.
  – Sehr allgemein anwendbar: Systeme von Massenpunkten in der Nähe von Gleichgewichtslagen schwingen harmonisch (mehr dazu z.B. in der Vorlesung "Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik" im Sommersemester); tritt häufig auf, sehr wichtig.

- **Reibungskräfte**:
  – $\mathbf{F} = -\alpha\hat{\mathbf{v}}$ (konstant); z.B. Gleit- und Rollreibung.
  – $\mathbf{F} = -\beta v\hat{\mathbf{v}}$ (linear, Stokes); z.B. langsame Bewegung in Flüssigkeiten.
  – $\mathbf{F} = -\gamma v^2\hat{\mathbf{v}}$ (quadratisch, Newton); z.B. schnelle Bewegung in Luft.
  – Stets der Geschwindigkeit entgegen gerichtet.
  – In Natur meist viel komplizierter; obige Formeln dienen grober Modellierung von Reibung für ein vorliegendes System.

3.3 Lösung der Newtonschen BGl für spezielle "einfache Kräfte" (1)

- Lösen von DGls (z.B. Newtonsche BGl (21)) i.A. sehr schwierig.
- Analytisch nur für spezielle "einfache Kräfte" möglich.
- Ansonsten Einsatz von Computern für numerische Lösung erforderlich.

– Numerik/Computereinsatz ist wichtiger Teil moderner Physik.
Tipp: Möglichst bald mit Computer vertraut machen (Datenanalyse, Plotten von Funktionen, Programmieren, Computeralgebrasysteme, etc.).
– Analytische Lösung ist numerischer Lösung immer überlegen, daher, wenn möglich, BGl analytisch lösen.
– Oft Kombination erforderlich, z.B. analytische Vorbereitungen damit Numerik funktioniert.

3.3.1 Verschwindende Kraft $\mathbf{F} = 0$

- Beispiel: Bewegung fernab von Gravitationsquellen im Weltraum.
- Freie Newtonsche BGl (d.h. $F = 0$) in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} \quad = \quad 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} \quad = \quad 0. \tag{27}$$

- **Methode 1 (durch "scharfes Hinschauen und Überlegen")**:
  – Welche Funktion $x(t)$ ist zweifach abgeleitet 0?
  – Konstante, $x(t) = A$.
  – Linearer Term, $x(t) = Bt$.
  – Allgemeine Lösung: $x(t) = Bt + A$.

****** 26. Oktober 2026 (5. Vorlesung) ******

  – Bedeutung von A:
  $x(t = 0) = A$, also ist A die Position des Massenpunkts bei $t = 0$ ... verwende zur besseren Lesbarkeit Notation $A \to x_0$.
  – Bedeutung von B:
  $\dot{x} = B$, also ist B die Geschwindigkeit des Massenpunkts bei $t = 0$ (und auch zu jedem anderen Zeitpunkt) ... verwende zur besseren Lesbarkeit Notation $B \to v_0$.
  – Damit $x(t) = v_0 t + x_0$.
  – x_0, v_0 sind frei wählbare Konstanten.
    * Parametrisieren mögliche Lösungen der freien Newtonschen BGl (hat nicht nur eine Lösung, sondern unendlich viele, alle möglichen Trajektorien bei verschwindender Kraft, d.h. geradlinige Bewegungen mit beliebigem Startpunkt und beliebiger Geschwindigkeit).
    * Müssen so gewählt werden, dass **Anfangsbedingungen** (ABs) erfüllt sind, z.B. Vorgabe von Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$, $x(t = 0) = x_0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0$.
  – Allgemein: Vollständige Lösung einer **gewöhnlichen DGl n-ter Ordnung** (Funktion und deren 1-te bis n-te Ableitung treten auf) beinhaltet n unbestimmte Konstanten.

– ABs der Newtonschen BGl müssen nicht notwendig Ort und Geschwindigkeit bei $t = 0$ sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispielaufgabe

Berechne die Trajektorie eines sich frei bewegenden Massenpunkts, der sich zur Zeit t_1 bei x_1 und zur Zeit t_2 bei x_2 befindet.

- Starte mit allgemeiner Lösung $x(t) = Bt + A$.
- Stelle Gleichungssystem zur Bestimmung von A und B auf:
  (1): $x(t_1) = Bt_1 + A = x_1$
  (2): $x(t_2) = Bt_2 + A = x_2$.
- Löse Gleichungssystem:
  (2) − (1): $B(t_2 - t_1) = x_2 - x_1 \quad \rightarrow \quad B = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$.
  (1): $A = x_1 - Bt_1 = x_1 - ((x_2 - x_1)/(t_2 - t_1))t_1$.
- Endergebnis:

$$x(t) = \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{=v}(t - t_1) + x_1. \tag{28}$$

- **Methode 2 ("unbestimmte Integration")**:
  – Integriere BGl 2-mal ohne Verwendung von Integrationsgrenzen (unbestimmte Integrale):

$$\int dt\, \ddot{x} = \int dt\, 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = B \tag{29}$$

$$\int dt\, \dot{x} = \int dt\, B \quad \rightarrow \quad x = Bt + A. \tag{30}$$

  – ABs wie bei Methode 1 (Gleichungssystem aufstellen und lösen).
- **Methode 3 ("bestimmte Integration")**:
  – Integriere BGl 2-mal mit Verwendung von Integrationsgrenzen (bestimmte Integrale), z.B. von festem Startzeitpunkt 0 zu "aktuellem Zeitpunkt" t:

$$\int_0^t dt'\, \ddot{x}(t') = \int_0^t dt'\, 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x}(t')\Big|_{t'=0}^{t'=t} = C\Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$\rightarrow \quad \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(t=0)}_{=v_0} = 0 \tag{31}$$

$$\int_0^t dt' \left(\dot{x}(t') - v_0\right) = \int_0^t dt'\, 0 \tag{32}$$

$$\rightarrow \quad \left(x(t') - v_0 t'\right)\Big|_{t'=0}^{t'=t} = C\Big|_{t'=0}^{t'=t} \quad \rightarrow \quad x(t) - v_0 t - \underbrace{x(t=0)}_{=x_0} = 0, \tag{33}$$

also $x(t) = v_0 t + x_0$ (beachte, dass Integrationsvariable in t' umbenannt wurde, darf nicht t lauten, da t bereits als Integrationsgrenze verwendet wird).

- ABs $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ automatisch erfüllt.

- Alle drei Methoden äquivalent, Geschmacksfrage bzw. manchmal eine Methode zweckmäßiger als eine andere.

- Freie Newtonsche BGl (d.h. $\mathbf{F} = 0$) in 3 Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{r}} = 0. \tag{34}$$

  - Entspricht drei unabhängigen DGls, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = 0$.
  - Lösung jeder der drei Gleichungen wie im 1-dimensionalen Fall, d.h.
    $x(t) = v_{0,x} t + x_0$
    $y(t) = v_{0,y} t + y_0$
    $z(t) = v_{0,z} t + z_0$,
    insgesamt $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$.
  - Für eindeutige Trajektorie 6 ABs notwendig, z.B. $\mathbf{r}(t=0)$, $\dot{\mathbf{r}}(t=0)$.

3.3.2 Konstante Kraft $\mathbf{F} = \text{const}$

- Beispiele: Erdanziehung, d.h. fallender Massenpunkt, geladenes Teilchen im Plattenkondensator.

- Newtonsche BGl in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = F = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = F/m = \text{const}. \tag{35}$$

- **Methode 1**:

  - Welche Funktion $x(t)$ ist zweifach abgeleitet F/m?
  - $x(t) = (F/m)t^2/2$.
  - Außerdem
    Addition einer Konstante möglich, $x(t) \to x(t) + x_0$,
    Addition eines linearen Terms möglich, $x(t) \to x(t) + v_0 t$.
  - Allgemeine Lösung:

$$x(t) = \frac{F}{2m} t^2 + v_0 t + x_0 \tag{36}$$

    (vollständige Lösung, da DGl 2-ter Ordnung und 2 unbestimmte Konstanten x_0, v_0).
  - Bestimmung von x_0, v_0 über Vorgabe von ABs und Lösen eines Gleichungssystems (analog zum freien Fall).

- **Methode 3**:

$$\int_0^t dt'\,\ddot{x}(t') \;=\; \int_0^t dt'\,\frac{F}{m} \quad\to\quad \dot{x}(t')\Big|_{t'=0}^{t'=t} \;=\; \frac{F}{m}t'\Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$\to\quad \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(t=0)}_{=v_0} \;=\; \frac{F}{m}t \tag{37}$$

$$\int_0^t dt'\,\Big(\dot{x}(t') - v_0\Big) \;=\; \int_0^t dt'\,\frac{F}{m}t' \tag{38}$$

$$\to\quad \Big(x(t') - v_0 t'\Big)\Big|_{t'=0}^{t'=t} \;=\; \frac{F}{2m}t'^2\Big|_{t'=0}^{t'=t} \quad\to\quad x(t) - v_0 t - \underbrace{x(t=0)}_{=x_0} \;=\; \frac{F}{2m}t^2. \tag{39}$$

****** 30. Oktober 2026 (6. Vorlesung) ******

- Newtonsche BGl in 3 Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{F} \;=\; \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{r}} \;=\; \frac{\mathbf{F}}{m} \;=\; \text{const.} \tag{40}$$

  - Entspricht drei unabhängigen DGls, eine Gleichung für x, eine für y, eine für z (analog zum freien Fall).
  - Lösung jeder der drei Gleichungen wie im 1-dimensionalen Fall.
  - Bei 2 oder 3 Dimensionen mag es Richtungen geben, in die die konstante Kraft nicht wirkt (d.h. sie steht senkrecht auf diesen Richtungen), wie z.B. in folgender Aufgabe.

Beispielaufgabe

Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet er sich am Ort $\mathbf{r}_0$, seine Geschwindigkeit beträgt $\mathbf{v}_0$. Berechne die Trajektorie des Massenpunkts.

- Schwerkraft wirkt in negative z-Richtung, d.h. konstante Kraft in z-Komponente.
- x- und y-Komponente: Freie Bewegung.
- Viel mehr gibt es nicht zu tun ... Abschreiben der oben erzielten Ergebnisse führt zu

$$\mathbf{r}(t) \;=\; -\frac{g}{2}t^2\mathbf{e}_z + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \;=\; \Big(v_{0,x}t + x_0\ ,\ v_{0,y}t + y_0\ ,\ -\frac{g}{2}t^2 + v_{0,z}t + z_0\Big). \tag{41}$$

3.3.3 Zeitabhängige Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ (aber nicht ortsabhängig)

- Beispiel: Motor/Rakete, mit zeitabhängiger Antriebskraft.
- Newtonsche BGl in 3 Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t). \tag{42}$$

- Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \, \ddot{\mathbf{r}}(t'') &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \, \frac{\mathbf{F}(t'')}{m} \\ \rightarrow \quad \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \, \frac{\mathbf{F}(t'')}{m} \end{aligned} \tag{43}$$

(nur formale Lösung, konkrete Lösung [analytisch oder numerisch] erfordert Vorgabe von $\mathbf{F}(t)$).

3.3.4 Lineare Reibungskraft

- 2-fache Integration der Newtonschen BGl nur möglich, wenn Kraft nicht von $\mathbf{r}$ oder $\dot{\mathbf{r}}$ abhängt; Letzteres häufig der Fall, wie z.B. im Folgenden.
- Newtonsche BGl in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x}. \tag{44}$$

- Im Gegensatz zu bisher diskutierten Fällen eine "echte DGl", d.h. verschiedene Ableitungen von x treten auf ($\dot{x}$ und $\ddot{x}$, nicht nur $\ddot{x}$, wie bisher).
- 2-fache Integration der Newtonschen BGl daher nicht möglich.
- (44) ist DGl 2-ter Ordnung, kann aber problemlos auf DGl 1-ter Ordnung reduziert werden,

$$m\dot{v} = -\beta v. \tag{45}$$

- Wenn Lösung v vorliegt, einfach integrieren,

$$\dot{x} = v \quad \rightarrow \quad x = x_0 + \int_0^t dt' \, v(t'). \tag{46}$$

- Benötigen also Lösungsmethoden für (45).
- **Methode 1 (Exponentialansatz)**:
  - (45) hat Struktur $\dot{v} = v$, d.h. welche Funktion ergibt abgeleitet sich selbst? Antwort: exp-Funktion.
  - Legt Ansatz $v = Ae^{Bt}$ nahe.

– Einsetzen in (45):

$$mABe^{Bt} \;=\; -\beta Ae^{Bt} \quad\to\quad mB \;=\; -\beta. \tag{47}$$

– Ansatz ist Lösung für beliebiges A und $B = -\beta/m$, d.h. $v = Ae^{-(\beta/m)t}$ (A ist unbestimmte Konstante, die vollständige Lösung einer DGl 1-ter Ordnung enthalten muss; da $v(t=0) = A$, Umbenennung $A \to v_0$ zweckmäßig).

– Exponentialansatz geeignet, wenn sämtliche Terme der DGl linear in x, $\dot{x}$ oder $\ddot{x}$, d.h. eine **lineare (gewöhnliche) DGl** vorliegt ($\dot{x}^2$, $x\dot{x}$, $\sin(x)$ etc. dürfen nicht auftreten).

– Integration (zur Vollständigkeit; hat nichts mit Exponentialansatz zu tun):

$$\begin{aligned} x \;&=\; x_0 + \int_0^t dt'\, v_0 e^{-(\beta/m)t'} \;=\; x_0 - \frac{v_0 m}{\beta} e^{-(\beta/m)t'}\Big|_0^t \;= \\ &=\; x_0 + \frac{v_0 m}{\beta}\Big(1 - e^{-(\beta/m)t}\Big). \end{aligned} \tag{48}$$

– Check: $v_0 m/\beta$ hat Einheit Länge.

– Physikalische Interpretation: Bewegung verlangsamt sich exponentiell, Massenpunkt kommt nach Strecke $v_0 m/\beta$ zur Ruhe.

****** 02. November 2026 (7. Vorlesung) ******

• **Methode 2 (Trennung der Variablen)**:

– Allgemein:

∗ Gegeben: DGl der Form

$$\frac{dy}{dx} \;=\; F(x)G(y). \tag{49}$$

∗ Lösung: Bringe alle x und dx auf die rechte Seite, alle y und dy auf die linke Seite, dann Integration,

$$dy\,\frac{1}{G(y)} \;=\; dx\,F(x) \tag{50}$$

$$\int dy\,\frac{1}{G(y)} \;=\; \int dx\,F(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_{y_0}^{y} dy'\,\frac{1}{G(y')} \;=\; \int_{x_0}^{x} dx'\,F(x'). \tag{51}$$

– Konkret:

∗ Gegeben:

$$\frac{dv}{dt} \;=\; -\frac{\beta}{m}v. \tag{52}$$

∗ Lösung:

· Zunächst

$$dv\,\frac{1}{v} \;=\; -dt\,\frac{\beta}{m}. \tag{53}$$

· Dann unbestimmte Integration,

$$\int dv\,\frac{1}{v} \;=\; -\int dt\,\frac{\beta}{m}$$

$$\to\quad \ln(v/A) \;=\; -\frac{\beta}{m}t \quad\to\quad v \;=\; Ae^{-(\beta/m)t}. \tag{54}$$

Links oder rechts muss unbestimmte Konstante stehen.
Bei Lösung einer mathematischen Gleichung gleicher Struktur (einheitenlose Größen v, β, ...) würde man $\ln(v)+A'$ schreiben (äquivalent zu Konstante im ln, da $\ln(v)+A' = \ln(v)+\ln(e^{A'}) = \ln(v/e^{-A'})$); ist aufgrund von Einheiten in Physik nicht möglich.
A hat Einheit einer Geschwindigkeit, entspricht v_0 (siehe oben), also $A \to v_0$.

- Oder bestimmte Integration,

$$\int_{v_0}^{v} dv' \frac{1}{v'} = -\int_0^t dt' \frac{\beta}{m}$$

$$\to \quad \ln(v/v_0) = -\frac{\beta}{m}t \quad \to \quad v = v_0 e^{-(\beta/m)t}. \tag{55}$$

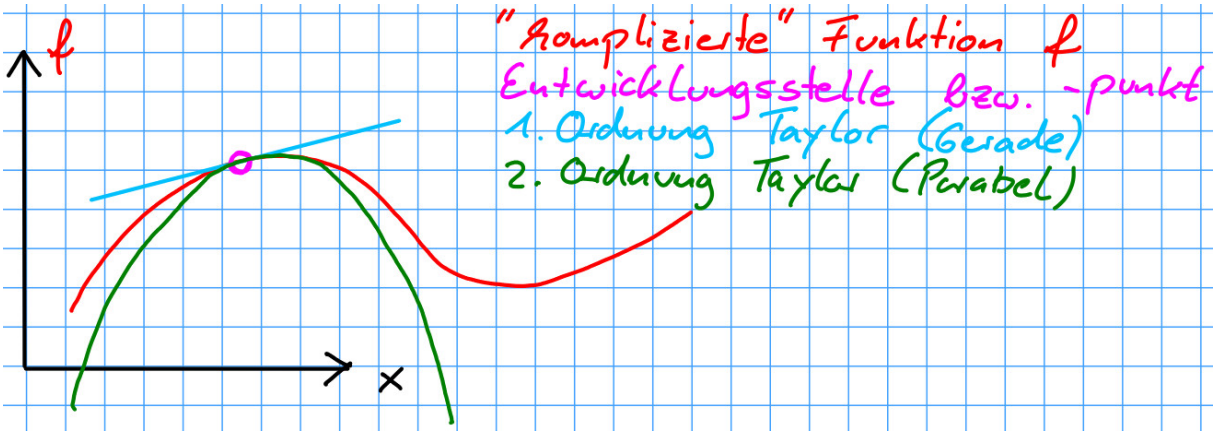
(obere und untere Integrationsgrenzen hängen jeweils zusammen: Geschwindigkeit v_0 bzw. v zur Zeit 0 bzw. t).

3.4 Einschub: Taylor-Näherung

- Nähere komplizierte Funktion $f(x)$ in der Nähe eines Punkts x_0 (**Entwicklungsstelle**) durch einfaches Polynom (**Taylor-Polynom**), d.h. meist niedriger Grad.
- Anschaulich: $f(x)$ kann durch Tangente bei x_0 genähert werden,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{56}$$

(**Taylor-Näherung 1-ter Ordnung**).



- Noch immer anschaulich: Hinzunahme eines quadratischen Terms $\propto (x-x_0)^2$, der Krümmung bei x_0 beschreibt,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \tag{57}$$

(**Taylor-Näherung 2-ter Ordnung**).

– Terme wurden so gewählt, dass Funktionswert, 1-te und 2-te Ableitung der Näherung mit entsprechenden Werten von f übereinstimmen, d.h.

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2\Big|_{x=x_0} = f(x_0) \tag{58}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\Big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2\Big)\right)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \tag{59}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\Big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2\Big)\right)\Big|_{x=x_0} = f''(x_0). \tag{60}$$

- Verallgemeinerung zu n-ter Ordnung:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{61}$$

($f^{(k)}$: k-te Ableitung von f).

- In Nähe der Entwicklungsstelle, d.h. für $x \approx x_0$, werden höhere Terme $\propto (x - x_0)^k$ immer unbedeutender, da $x - x_0$ klein.

- $n \to \infty$ (**Taylor-Reihe**):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{62}$$

(in speziellen Fällen exakte Beschreibung von f durch Polynom, kann aber auch nicht oder nur in Nähe von x_0 konvergieren; mehr in Mathe-Vorlesungen).

- Häufig Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, dann

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad \text{bzw.} \quad f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2. \tag{63}$$

- $\mathcal{O}(x^k)$-Notation ("Ordung x^k"):
  - $\mathcal{O}(x^k)$ steht für $a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \ldots$, d.h. ein Polynom, dessen niedrigste Potenz x^k oder höher ist.
  - Z.B.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \mathcal{O}(x^2) \tag{64}$$

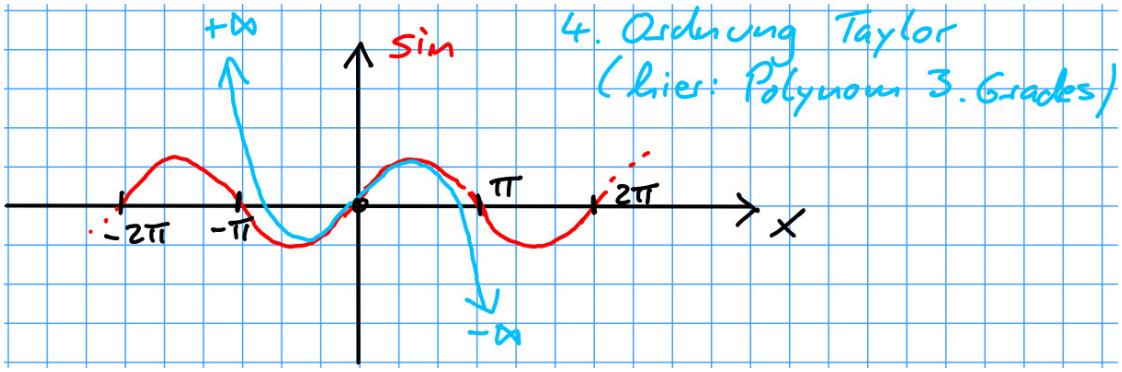
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \mathcal{O}(x^3) \tag{65}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1}). \tag{66}$$

  - Präziser als $\approx$, man sieht genau, welche Potenzen vernachlässigt wurden.

- Beispiel: Taylor-Näherung von $f(x) = \sin(x)$, Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

– $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f''''(x) = \sin(x)$.
– $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f''''(0) = 0$.
– Damit $\sin(x) = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$.



****** 06. November 2026 (8. Vorlesung) ******

- Taylor-Näherungen niedriger Ordnungen (ein oder zwei Terme) elementarer Funktionen sollte man auswendig lernen, z.B.
  – $\cos(x) = 1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$, $\tan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$, ... (weitere Winkelfunktionen als Übungsaufgabe),
  – $e^x = 1 + x + x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$, $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$,
  – $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + \mathcal{O}(x^2)$,
  – $1/(1+x) = 1 - x + \mathcal{O}(x^2)$,

  dann kann man durch einfaches "Ineinandereinsetzen" Taylor-Näherungen komplizierter Funktionen angeben, ohne umständlich Ableitungen berechnen zu müssen, z.B.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{A^2 + (\sin(Bx))^2}} &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + (Bx + \mathcal{O}(x^3))^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2x^2 + \mathcal{O}(x^4)}} = \\
&= \frac{1}{A\sqrt{1 + (B/A)^2x^2 + \mathcal{O}(x^4)}} = \frac{1}{A(1 + (B/A)^2x^2/2 + \mathcal{O}(x^4))} = \\
&= \frac{1 - (B/A)^2x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)}{A} = \frac{1}{A} - \frac{B^2}{2A^3}x^2 + \mathcal{O}(x^4). \qquad (67)
\end{aligned}$$

Beispielaufgabe

Zeige, dass die 1-dimensionale Bewegung unter Einfluss der linearen Reibungskraft $-\beta\dot{x}$,

$$x = x_0 + \frac{v_0 m}{\beta}\left(1 - e^{-(\beta/m)t}\right) \qquad (68)$$

(Gleichung (48)), im Grenzfall $\beta \to 0$ in die freie Bewegung $x = v_0 t + x_0$ übergeht. (Check des Ergebnisses aus Abschnitt 3.3.4.)

- $\lim_{\beta\to 0} x = x_0 + \infty \times 0$, ein unbestimmter Ausdruck.
- Berechnung mit Regel von L'Hospital möglich ... aber unüblich, da unpraktisch.
- Taylor-Näherung:

$$e^{-(\beta/m)t} = 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{69}$$

$$x = x_0 + \frac{v_0 m}{\beta}\left(\frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(\beta^2)\right) = x_0 + v_0 t + \mathcal{O}(\beta). \tag{70}$$

- $\lim_{\beta\to 0} x = x_0 + v_0 t$.

****** 09. November 2026 (9. Vorlesung) ******

3.5 Lösung der Newtonschen BGl für spezielle "einfache Kräfte" (2)

3.5.1 Konstante Kraft und lineare Reibungskraft

- Häufig Kombination mehrerer Kräfte, z.B. konstante Kraft und lineare Reibungskraft (sinkender Stein im Wasser).
- Bei konstanter Schwerkraft $-mg\mathbf{e}_z$ und ABs $v_x(t=0) = v_y(t=0) = 0$ gilt $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$, Rechnung kann also auf eine Dimension reduziert werden.
- Newtonsche BGl:

$$m\ddot{z} = -mg - \beta\dot{z}. \tag{71}$$

- DGl für $v = v_z$:

$$\dot{v} = -g - \frac{\beta}{m}v. \tag{72}$$

- Trennung der Variablen (AB: $v(t=0) = v_0$):

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\beta}{m}v \tag{73}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv' \, \frac{1}{g + (\beta/m)v'} = -\int_0^t dt' \tag{74}$$

$$\to \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{g + (\beta/m)v}{g + (\beta/m)v_0}\right) = -t \quad \to \quad v = \frac{m}{\beta}\left(\left(g + \frac{\beta}{m}v_0\right)e^{-(\beta/m)t} - g\right). \tag{75}$$

- Check:
  - Einheiten ... o.k.

– Spezialfall $g = 0$:
$\rightarrow \quad v|_{g=0} = v_0 e^{-(\beta/m)t}$ ... konsistent mit Abschnitt 3.3.4.

– Spezialfall $\beta = 0$:
Schwieriger ...

$$v\Big|_{\beta=0} = \underbrace{\frac{m}{\beta}}_{=\infty}\underbrace{\left(\left(g+\frac{\beta}{m}v_0\right)e^{-(\beta/m)t} - g\right)}_{=0} \tag{76}$$

... also unbestimmter Ausdruck $\infty \times 0$; verwende Taylor-Entwicklung in β,

$$e^{-(\beta/m)t} = 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{77}$$

$$\left(g+\frac{\beta}{m}v_0\right)e^{-(\beta/m)t} = \left(g+\frac{\beta}{m}v_0\right)\left(1-\frac{\beta}{m}t+\mathcal{O}(\beta^2)\right) =$$

$$= g + \frac{\beta}{m}\Big(v_0 - gt\Big) + \mathcal{O}(\beta^2) \tag{78}$$

$$v = \frac{m}{\beta}\left(g+\frac{\beta}{m}\Big(v_0-gt\Big) - g + \mathcal{O}(\beta^2)\right) = v_0 - gt + \mathcal{O}(\beta) \tag{79}$$

$$v\Big|_{\beta=0} = v_0 - gt \tag{80}$$

... konsistent mit Abschnitt 3.3.2.

- Physikalische Interpretation:

  – Kleine t: Erneut Taylor-Entwicklung, nun in t,

$$e^{-(\beta/m)t} = 1 - \frac{\beta}{m}t + \mathcal{O}(t^2) \tag{81}$$

$$v = \frac{m}{\beta}\left(\left(g+\frac{\beta}{m}v_0\right)\left(1-\frac{\beta}{m}t+\mathcal{O}(t^2)\right) - g\right) =$$

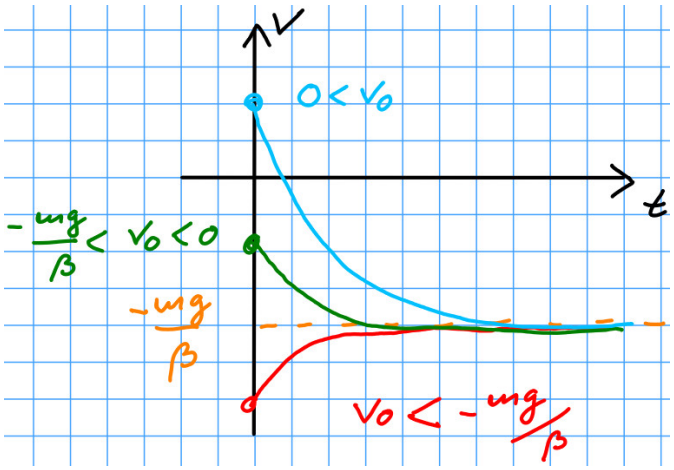
$$= v_0 - \left(g+\frac{\beta}{m}v_0\right)t + \mathcal{O}(t^2), \tag{82}$$

  Geschwindigkeit verändert sich, ausgehend vom Startwert v_0, zunächst linear, genau wie bei konstanter Kraft $-(mg + \beta v_0)$.

  – Große t:

$$\lim_{t\to\infty} v = -\frac{mg}{\beta}, \tag{83}$$

  Geschwindigkeit nähert sich exponentiell schnell diesem Wert an (Wert auch aus Kräftegleichgewicht erhältlich: $F_g + F_{\text{Reibung}} = 0$, also $-mg - \beta v = 0$ bzw. $v = -mg/\beta$).



- Integration führt auf z,

$$z \;=\; z_0 + \int_0^t dt'\, v(t') \;=\; \ldots \quad \text{(Übungsaufgabe)}.$$

3.6 DGls: Zusammenfassung und Ergänzungen

- Newtonsche BGl $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ ist eine **gewöhnliche DGl** (gewöhnlich → gesuchte Funktion $\mathbf{r}$ hängt nur von einer Variable t ab) **2-ter Ordung** (→ höchste Ableitung ist 2-te Ableitung).

- In 3 Dimensionen handelt es sich genauer gesagt um 3 im Allgemeinen **gekoppelte DGls**,

$$m\ddot{x} \;=\; F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{84}$$
$$m\ddot{y} \;=\; F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{85}$$
$$m\ddot{z} \;=\; F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{86}$$

  (gekoppelt → in einer Gleichung z.B. nicht nur x, sondern x und y), die nicht unabhängig voneinander gelöst werden können.

- Für spezielle Kräfte $\mathbf{F} = (F_x(x, \dot{x}, t)\,,\; F_y(y, \dot{y}, t)\,,\; F_z(z, \dot{z}, t))$ entkoppeln diese 3 DGls, d.h. können unabhängig nacheinander gelöst werden (**unabhängige DGls**) ... also drei 1-dimensionale und damit viel einfachere Probleme.

- Beispiele:

  - Lineare Reibungskraft $\mathbf{F} = -\beta\dot{\mathbf{r}} = -\beta(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$
    → 3 ungekoppelte DGls (einfach).
  - Quadratische Reibungskraft $\mathbf{F} = -\gamma\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}\dot{\mathbf{r}} = -\gamma(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\dot{x}\;\ldots)$
    → 3 gekoppelte DGls (schwierig).

- Vollständige Lösung einer DGl n-ter Ordnung enthält n **unabhängige Konstanten**.
  Vollständige Lösung eines Systems von N DGls n-ter Ordnung enthält nN **unabhängige Konstanten**.

– Z.B. $x(t; A_1, A_2)$ für Newtonsche BGl in 1 Dimension, $\mathbf{r}(t; A_1, \ldots, A_6)$ für Newtonsche BGl in 3 Dimensionen.

– Konstanten A_1, A_2 unabhängig $\rightarrow$ Veränderung von x durch Veränderung von A_1 kann nicht durch Veränderung von A_2 kompensiert werden.

– Z.B. A_1 und A_2 in $x = A_1 t + A_2 t$ nicht unabhängig, da Veränderung von x gemäß $A_1 \rightarrow A_1 + B$ durch $A_2 \rightarrow A_2 - B$ kompensiert werden kann.

– A_1 und A_2 in $x = A_1 + A_2 t$ dagegen unabhängig.

****** 13. November 2026 (10. Vorlesung) ******

- **Lineare DGl** ist wichtiger Spezialfall,

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(t) \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad = \quad g(t) \tag{87}$$

(f_k, g: vorgegebene Funktionen).

– **Homogene lineare DGl**, falls $g(t) = 0$:

∗ Ist $x(t)$ eine Lösung, dann auch $Ax(t)$.

∗ Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen, dann ist auch $x_1(t) + x_2(t)$ Lösung.

→ **Superpositionsprinzip**, vollständige Lösung hat die Form

$$x(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-1} A_k x_k(t). \tag{88}$$

· $x_k(t)$: n **linear unabhängige Lösungen**, d.h. kein $x_j(t)$ kann durch Superposition (= Linearkombination) der anderen $x_k(t)$ dargestellt werden.

· Z.B. sind $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = 3 - 7t$ linear abhängig, $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = t^2$ dagegen nicht.

· Vollständige Lösung der DGl kann damit auf einfachere Teilprobleme, das Finden linear unabhängiger $x_k(t)$ zurückgeführt werden.

– **Inhomogene lineare DGl**, falls $g(t) \neq 0$:

∗ Finde irgendeine Lösung der DGl (= **Partikulärlösung**) $x_p(t)$, unbestimmte Konstanten hierbei nicht notwendig.

∗ Vollständige Lösung ist dann

$$x(t) \quad = \quad x_p(t) + \sum_{k=0}^{n-1} A_k x_k(t) \tag{89}$$

($x_k(t)$: unabhängige Lösungen der homogenen DGl wie oben).

– **Homogene lineare DGl mit konstanten Koeffizienten**, falls $f_k(t) = \text{const}$, $g(t) = 0$:

∗ Kann mit Exponentialansatz $x(t) = Ae^{Bt}$ (siehe Abschnitt 3.3.4) und Superpositionsprinzip vollständig gelöst werden.

- Beispiel: Konstante Kraft, $m\ddot{x} = F = \text{const}$,

$$\rightarrow \quad x \;=\; \underbrace{\frac{F}{2m}t^2}_{=x_p(t)} + \underbrace{v_0}_{=A_0}\underbrace{t}_{=x_0(t)} + \underbrace{x_0}_{=A_1}\underbrace{1}_{=x_1(t)} \tag{90}$$

  (Abschnitt 3.3.2).

- Beispiel: Lineare Reibungskraft, $m\ddot{x} = -\beta\dot{x}$,

$$\rightarrow \quad x \;=\; x_0 + \frac{v_0 m}{\beta}\Big(1 - e^{-(\beta/m)t}\Big) \;=\; \underbrace{\left(x_0 + \frac{v_0 m}{\beta}\right)}_{=A_0}\underbrace{1}_{=x_0(t)} + \underbrace{\left(-\frac{v_0 m}{\beta}\right)}_{=A_1}\underbrace{e^{-(\beta/m)t}}_{=x_1(t)} \tag{91}$$

  (Abschnitt 3.3.4).

- Beispiel: Harmonischer Oszillator, $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$ (im Folgenden).

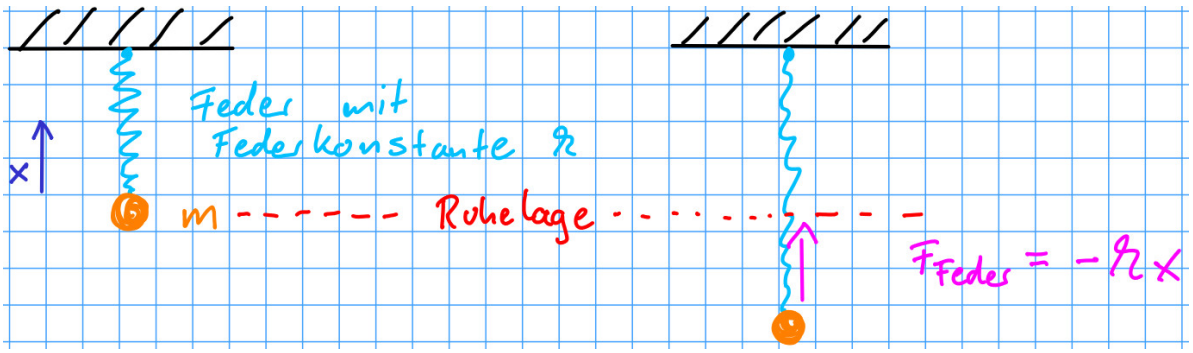
4 Harmonischer Oszillator (HO)

- Newtonsche BGl in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F(t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{92}$$

  ($\alpha = \beta/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $f(t) = F(t)/m$).

  - $-kx$: Lineare rücktreibende Kraft, z.B. Feder, kleine Schwingung um Gleichgewichtslage.



  - $-\beta\dot{x}$: Lineare Reibungskraft.
  - $F(t)$: Äußere anregende Kraft, z.B. regelmäßiges Anstoßen der Feder.

- HO sehr häufig und wichtig, beschreibt z.B.
  - kleine Schwingungen um Gleichgewichtslagen (z.B. Molekülschwingungen in Festkörpern),
  - Materie und fundamentale Kräfte (Quantenfeldtheorie).

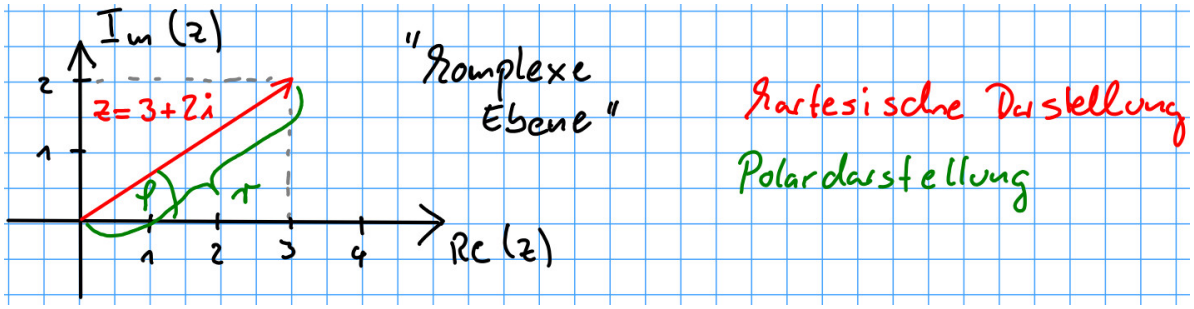
4.1 Komplexe Zahlen

- Erlauben z.B. Lösen von Gleichungen, in denen Wurzeln negativer Zahlen auftreten.
- Definition: $i^2 = -1$ ($\rightarrow \sqrt{-1} = \pm i$).

4.1.1 Kartesische Darstellung

- $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $x = \mathrm{Re}(z)$ (**Realteil**), $y = \mathrm{Im}(z)$ (**Imaginärteil**).
- **Komplex konjugierte Zahl**: $z^* = x - iy$.
- Addition/Subtraktion: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
- Multiplikation: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.
- **Betrag**: $|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Division: $z_1/z_2 = z_1 z_2^*/(z_2 z_2^*) = z_1 z_2^*/|z_2|^2$.



4.1.2 Polardarstellung

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ (Beweis $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ später), $r, \varphi \in \mathbb{R}$ bzw. $r = |z|$ (Betrag), $\varphi = \arg(z)$ (**Argument**, nicht eindeutig, $\varphi \equiv \varphi + 2\pi$).
- Beziehung kartesische Darstellung $\leftrightarrow$ Polardarstellung:
  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$ (für $x > 0$).
  $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$.
- Addition/Subtraktion: Einfacher in kartesischer Darstellung.
- Multiplikation: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.
- Division: $z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.
- (2-te) Wurzel: $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2+\pi k)}$, $k = 0, 1$.
- n-te Wurzel: $z^{1/n} = r^{1/n}e^{i(\varphi/n+2\pi k/n)}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

4.1.3 Beweis $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

- Taylor-Reihe von $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$,

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\varphi^{2k} \tag{93}$$

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\varphi^{2k+1}. \tag{94}$$

- Taylor-Reihe von e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k, \tag{95}$$

Ersetzung $x \to i\varphi$,

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - i\frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{24}\varphi^4 + \ldots = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\varphi^{2k}}_{=\cos(\varphi)} + i\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\varphi^{2k+1}}_{=\sin(\varphi)}. \tag{96}$$

- Häufig hilfreich: Ausdrücken von Winkelfunktionen durch komplexe exp-Funktionen, z.B.

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \quad , \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2i}\left(e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) \tag{97}$$

(folgt aus $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$).

4.2 Ungedämpfter HO

- Newtonsche BGl:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{98}$$

- **Lösung durch "scharfes Hinschauen und Überlegen"**:
  - Welche Funktion x ist zweifach abgeleitet $-x$?
    $\to$ cos oder sin.
  - Da cos und sin linear unabhängig, vollständige Lösung

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{99}$$

(A, B: Unbestimmte Konstanten, durch ABs festgelegt).
  - Alternative Form der vollständigen Lösung:

$$x = C\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{100}$$

(Beziehung zwischen A, B und C, $\varphi_0 \to$ Hausaufgabe).

- **Lösung durch Exponentialansatz** ((98) ist lineare DGl mit konstanten Koeffizienten):
  - Ansatz: $x = e^{\lambda t}$,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \omega_0^2\right) = 0 \quad \to \quad \lambda = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0. \tag{101}$$

  - Vollständige Lösung: $x = Ae^{+i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$, ist aber komplexe Funktion, Trajektorie muss reell sein.
  - Realitätsbedingung:

$$\begin{aligned} & x = x^* \\ \to \quad & Ae^{+i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} = A^* e^{-i\omega_0 t} + B^* e^{+i\omega_0 t} \\ \to \quad & B = A^*. \end{aligned} \tag{102}$$

  - Drücke A, B durch zwei reelle unbestimmte Konstanten a, b aus, $A = a+ib$, $B = a-ib$,

$$x = (a+ib)e^{+i\omega_0 t} + (a-ib)e^{-i\omega_0 t} = 2a\cos(\omega_0 t) - 2b\sin(\omega_0 t) \tag{103}$$

(äquivalent zu (99)).

4.3 Gedämpfter HO

- Newtonsche BGl:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x \quad = \quad 0. \tag{104}$$

- Lösung durch "scharfes Hinschauen und Überlegen" schwierig.
- Exponentialansatz dagegen geradlinig: $x = e^{\lambda t}$,

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x \quad = \quad e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2\right) \quad = \quad 0$$

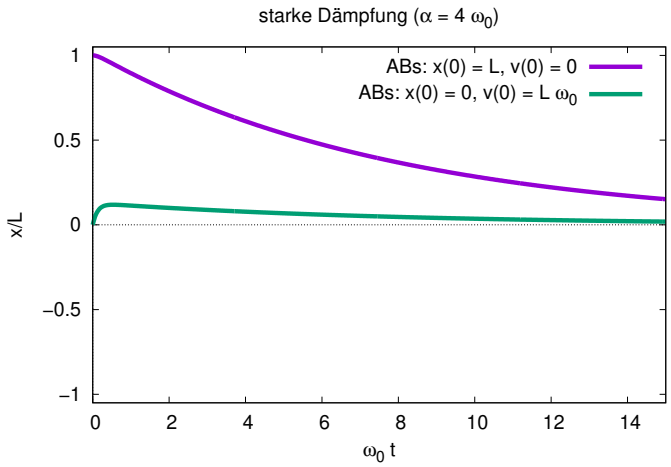
$$\rightarrow \quad \lambda \quad = \quad -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \tag{105}$$

- Unterscheide drei Fälle,
  - $\alpha > \omega_0$ (starke Dämpfung) ,
  - $\alpha < \omega_0$ (schwache Dämpfung) ,
  - $\alpha = \omega_0$ (kritische Dämpfung).

4.3.1 Starke Dämpfung ($\alpha > \omega_0$)

- Vollständige Lösung:

$$x \quad = \quad Ae^{-(\alpha-\Delta\alpha)t} + Be^{-(\alpha+\Delta\alpha)t} \quad , \quad \Delta\alpha \quad = \quad \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \in \quad \mathbb{R}. \tag{106}$$



- Keine Oszillationen.
- x geht exponentiell gegen 0.
- Für große t dominiert $Ae^{-(\alpha-\Delta\alpha)t}$.
- Eventuell ein Nulldurchgang.
- A, B über ABs.

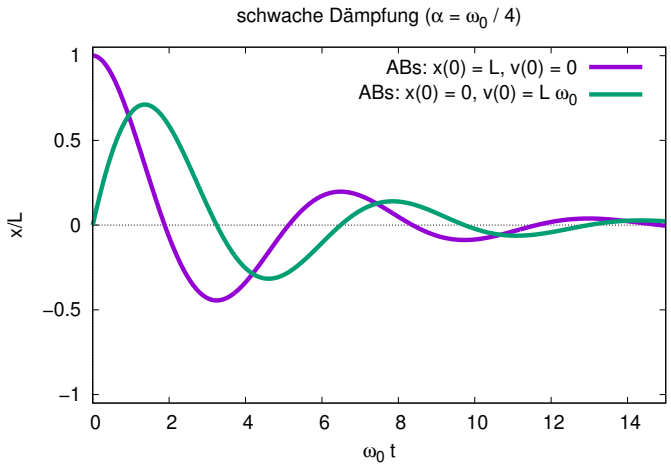
4.3.2 Schwache Dämpfung ($\alpha < \omega_0$)

- Vollständige komplexe Lösung:

$$x \;=\; e^{-\alpha t}\Big(Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}\Big) \quad , \quad \omega \;=\; \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \;\in\; \mathbb{R}. \tag{107}$$

- Vollständige reelle Lösung (Konstruktion wie in Abschnitt 4.2):

$$x \;=\; e^{-\alpha t}\Big(A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)\Big). \tag{108}$$



- Oszillationen mit Frequenz $\omega < \omega_0$ innerhalb einer exponentiell abfallenden Einhüllenden.
- A', B' über ABs.

4.3.3 Kritische Dämpfung ($\alpha = \omega_0$)

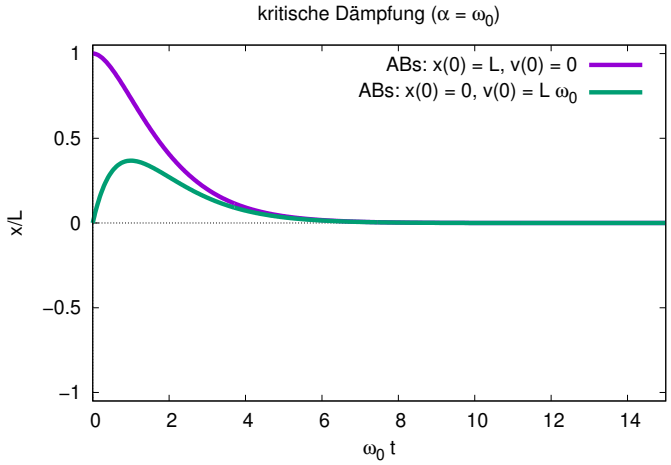
- Problem: Exponentialansatz liefert nur eine Lösung, $e^{\lambda t}$, $\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$, keine zwei unabhängigen Lösungen.
- Betrachte starke Dämpfung für sehr kleine $\Delta\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$:

$$\begin{aligned} x \;&=\; Ae^{-\alpha t}e^{+\Delta\alpha t} + Be^{-\alpha t}e^{-\Delta\alpha t} \;= \\ &=\; Ae^{-\alpha t}\Big(1 + \Delta\alpha t + \mathcal{O}(\Delta\alpha^2)\Big) + Be^{-\alpha t}\Big(1 - \Delta\alpha t + \mathcal{O}(\Delta\alpha^2)\Big) \;= \\ &=\; \underbrace{(A+B)}_{=A'} e^{-\alpha t} + \underbrace{(A-B)\Delta\alpha}_{=B'} e^{-\alpha t} t + \mathcal{O}(\Delta\alpha^2). \end{aligned}$$

- Vollständige Lösung über $\Delta\alpha \to 0$:

$$x \;=\; A'e^{-\alpha t} + B'e^{-\alpha t} t \tag{109}$$

(kann durch Einsetzen in Newtonsche BGl einfach verifiziert werden).



- Keine Oszillationen.
- x geht exponentiell gegen 0.
- Für große t dominiert $B'e^{-\alpha t}t$.
- Eventuell ein Nulldurchgang.
- A', B' über ABs.
- Technische Bedeutung/Anwendung: x geht sehr schnell gegen 0, schneller als bei starker Dämpfung.