Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden

Wintersemester 2026/27

Präsenzübungsblatt 4

Vorlesung: Marc Wagner
Übungsleitung: Carl B. Rosenkvist
rosenkvist@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe 1: Taylor-Näherung

a) Berechnen Sie die Taylor-Näherung der folgenden Funktionen bis zur dritten Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$2^x, \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x), \quad \sinh(x), \quad \cosh(x), \quad \tanh(x), \quad (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

b) Betrachten Sie eine Kreisbewegung in der x-y-Ebene,

$$\mathbf{r}(t) = \big(R\cos(\omega t),\, R\sin(\omega t)\big),$$

mit $R > 0$ und $\omega > 0$. Entwickeln Sie $\mathbf{r}(t)$ für kleine Zeiten t in ein Taylorpolynom bis mindestens zur Ordnung 5. Skizzieren Sie, wie die Näherung die tatsächliche Trajektorie immer besser annähert, je mehr Terme hinzugefügt werden.

Hinweis: Benutze zum Beispiel das frei verfügbare Programm `gnuplot`*, um saubere und aussagekräftige Skizzen anzufertigen, und/oder bitte eine KI deiner Wahl um Hilfe (gib der KI dabei nicht die komplette Aufgabenstellung, sondern lediglich das berechnete Ergebnis, das tatsächlich geplottet werden soll).*

Aufgabe 2: Fallschirmspringer

Diese Aufgabe ist etwas länger. Alle Teile, die in der Präsenzübung nicht abgeschlossen werden, sind als Hausaufgabe zu bearbeiten (siehe Aufgabenblatt 4).

Ein Fallschirmspringer der Masse m öffnet zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $z = 0$ seinen Fallschirm und fällt anschließend vertikal nach unten. Die z-Achse zeigt nach oben, und die Erdbeschleunigung g kann als Konstante betrachtet werden. Der Fallschirm verursacht eine der Erdanziehung entgegenwirkende Reibungskraft, deren Betrag proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist,

$$|\mathbf{F}_\mathrm{R}| = \beta v^2, \qquad \beta > 0 \qquad \text{(quadratische Reibung)}.$$

Beim Öffnen des Fallschirms hat der Springer die Geschwindigkeit v_0.

a) Bestimmen Sie $v(t)$, indem Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung mithilfe der Methode der Trennung der Variablen lösen.

Hinweis: Das Ergebnis sollte die Form

$$v(t) = A\tanh\big(B\,(C-t)\big)$$

mit Konstanten $A, B > 0$ und C haben. Es gilt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a - x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \tanh^{-1}\Big(\frac{x}{\sqrt{a}}\Big) + \text{const.},$$

wobei $\tanh^{-1}$ die Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus ist. Überprüfen Sie, dass Ihre Lösung die richtige Dimension hat, z. B. dass das Argument des tanh dimensionslos ist.

b) Zeigen Sie, dass der Springer für große Zeiten t die konstante Fallgeschwindigkeit $-\sqrt{mg/\beta}$ erreicht.

c) Zeigen Sie, dass der Fallschirmsprung für $\beta \to 0$ in einen freien Fall übergeht. Dazu kann es nützlich sein, die Geschwindigkeit mithilfe des Additionstheorems

$$\tanh(\alpha - \gamma) = \frac{\tanh(\alpha) - \tanh(\gamma)}{1 - \tanh(\alpha)\tanh(\gamma)}$$

umzuschreiben.

Hinweis: Benutzen Sie $\tanh(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ für kleine x.