Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden

Wintersemester 2026/27

Präsenzübungsblatt 1

Vorlesung: Marc Wagner
Übungsleitung: Carl B. Rosenkvist
rosenkvist@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe 1: Kronecker-Delta und Levi-Civita-Symbol

Betrachten Sie die Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \qquad \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \qquad \mathbf{e}_3 = (0,0,1).$$

Jeder beliebige Vektor kann damit geschrieben werden als

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

(a) Das sogenannte Kronecker-Delta δ_{ij} kann definiert werden als

$$\delta_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(i) Verifizieren Sie die Korrektheit des Gleichheitszeichens zwischen $e_j \cdot e_i$ und der geschweiften Klammer.

(ii) Das Kronecker-Delta ist eine hilfreiche Größe, zum Beispiel in Summationen. Zeigen Sie, dass für $i \in \{1,2,3\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} a_j = a_i.$$

(b) Eine weitere hilfreiche Größe ist das sogenannte Levi-Civita-Symbol. Dieses kann definiert werden als

$$\epsilon_{ijk} \equiv \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)\,,$$

wobei i, j, k jeweils die Werte 1, 2 und 3 annehmen können.

(i) Welche Werte kann ϵ_{ijk} annehmen? Welche Systematik gibt es hier? Identifizieren Sie drei mögliche Fälle.

(ii) Drücken Sie das Vektorprodukt $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ durch ϵ_{ijk} aus, d. h. zeigen Sie, dass gilt:

$$c_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$