Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden

Wintersemester 2026/27

Aufgabenblatt 5

Vorlesung: Marc Wagner
Übungsleitung: Carl B. Rosenkvist
rosenkvist@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

a) Berechnen Sie jeweils Realteil und Imaginärteil der folgenden Ausdrücke:

$$(-i)^3, \qquad i^{44415}, \qquad \sqrt{4\cdot(-25)}, \qquad \log(1+i), \qquad e^{i\pi/3}, \qquad e^{i\pi/2}.$$

b) Zeichnen Sie die folgenden Punkte sowie die dazu komplex konjugierten Punkte in die komplexe Zahlenebene ein:

$$z_1 = -1-i, \quad z_2 = -3+\tfrac{1}{2}i, \quad z_3 = 3+2i, \quad z_4 = \tfrac{3}{2}i, \quad z_5 = 1, \quad z_6 = e^{3\pi i}.$$

c) Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i-1, \quad z_2 = -(1+i), \quad z_3 = e^{3+2i}, \quad z_4 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{i}{2}, \quad z_5 = -i.$$

d) Berechnen Sie die folgenden Produkte. Führen Sie die Rechnung für die ersten beiden Beispiele sowohl in der Polardarstellung als auch in der kartesischen Darstellung aus und vergleichen Sie die Ergebnisse. Berechnen Sie das dritte Beispiel in einer Darstellung Ihrer Wahl.

- $(1+i)(1+i)$
- $(1+i)(1-i)$
- $(1+i)^{13}(1-i)^7$

e) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = e^{\frac{1}{2}+\pi i}, \qquad z_2 = e^{-1-\frac{3\pi}{2}i}, \qquad z_3 = e^{3-i}.$$

f) Bestimmen Sie die Länge der Vektoren $\mathbf{x}_1 = (1,2)$ und $\mathbf{x}_2 = (-3,4)$ in der x-y-Ebene sowie den Betrag der komplexen Zahlen $z_1 = 1+2i$ und $z_2 = -3+4i$. Addieren Sie sowohl die beiden komplexen Zahlen als auch die beiden Vektoren. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen

Betrachten Sie einen zweidimensionalen ungedämpften harmonischen Oszillator mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}\omega_x^2\, x\\ \omega_y^2\, y\end{pmatrix} = \mathbf{0}, \qquad \omega_x, \omega_y > 0.$$

a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zeichnen Sie die Trajektorie in der x-y-Ebene sowohl für $\omega_x = \omega_y$ als auch für $\omega_x = 2\omega_y$.

b) Welche Anfangsbedingungen führen im Fall $\omega_x = \omega_y$ zu einer kreisförmigen Trajektorie mit Radius R?

c) Welche Bedingung müssen ω_x und ω_y erfüllen, damit die Trajektorie eine geschlossene Bahn bildet, d. h. sich nach endlicher Zeit exakt wiederholt?

Optionale Zusatzaufgabe: Informieren Sie sich über sogenannte Lissajous-Figuren, zum Beispiel unter

`https://de.wikipedia.org/wiki/Lissajous-Figur`

Aufgabe 3: Taylor-Näherung II (Fortsetzung)

Bearbeiten Sie die verbleibenden Teile von Aufgabe 2 (*Taylor-Näherung II*) des Präsenzübungsblatts 5, die in der Präsenzübung nicht abgeschlossen wurden.