Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden

Wintersemester 2026/27

Aufgabenblatt 2

Vorlesung: Marc Wagner
Übungsleitung: Carl B. Rosenkvist
rosenkvist@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe 1: Vektorrelationen und Differentiationsregeln

Wir betrachten vier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Beweise die folgende Relation:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Nun betrachten wir zwei vektorielle, zeitabhängige Funktionen $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{v}(t)$.
Zeige, dass die folgenden Differentiationsregeln gelten:

(b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t)\right] = \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t).$$

(c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)\right] = \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t).$$

(d)

$$\mathbf{r}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}(t)|.$$

Aufgabe 2: Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Trajektorie eines Teilchens im Raum wird durch den

$$\mathbf{r}(t) = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^3 - 2\frac{t}{t_0} \\ \sqrt{3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \\ 2\sqrt{3}\frac{t}{t_0} + 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei α und t_0 Konstanten mit Einheit Länge bzw. Zeit sind.

(a) Berechne die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, deren Betrag $|\mathbf{v}(t)|$ sowie die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ und deren Betrag $|\mathbf{a}(t)|$. Vereinfache so weit wie möglich.

(b) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Geschwindigkeit des Teilchens $v = 13\alpha/t_0$?

(c) Betrachte den Fall $t_0 = 1\,\mathrm{s}$. Wie muss α gewählt werden, damit die Beschleunigung des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$ den Wert $a = 6\,\mathrm{m/s^2}$ annimmt? Wie groß ist die Beschleunigung des Teilchens zu diesem Zeitpunkt in Richtung

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 3: Kräfte

Skizzieren Sie die folgenden Situationen und geben Sie hierbei die jeweils auftretenden Kräfte an:

(a) **Fadenpendel:** Eine Masse m ist an einem Faden der Länge l befestigt, um den Winkel α aus der Ruhelage ausgelenkt und befindet sich in Ruhe. Wie sehen die Kräfte für $\alpha = 0°, 45°$ und $90°$ aus?

(b) Ein Massenpunkt (Masse m) gleitet eine schiefe Ebene hinunter. Berücksichtige dabei nicht nur die konstante Gravitationskraft sondern auch Reibungskräfte.

(c) **Flaschenzug:** Ein Gewicht hängt an einem Seil, welches reibungslos über eine an der Decke des Raums angebrachte Rolle geführt wird. Um das Gewicht anzuheben, muss eine Kraft am offenen Ende des Seils angelegt werden. Wie lässt sich die aufzuwendende Kraft verringern, wenn eine weitere Rolle zur Verfügung steht?