**Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden**

# Chatverlauf zu Aufgabenblatt 1

15. Oktober 2026

**Frage**

Ich habe einen neuen Unterordner angelegt, `theo1`, und dort ein Übungsblatt abgelegt, Name `Aufgabenblatt_01.pdf`. Dabei handelt es sich um das erste Übungsblatt zur Vorlesung „Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden“. Kannst du dir dieses Blatt ansehen, insbesondere Aufgabe 2, und für Aufgabe 2 eine Lösung erstellen?

**Antwort (Claude)**

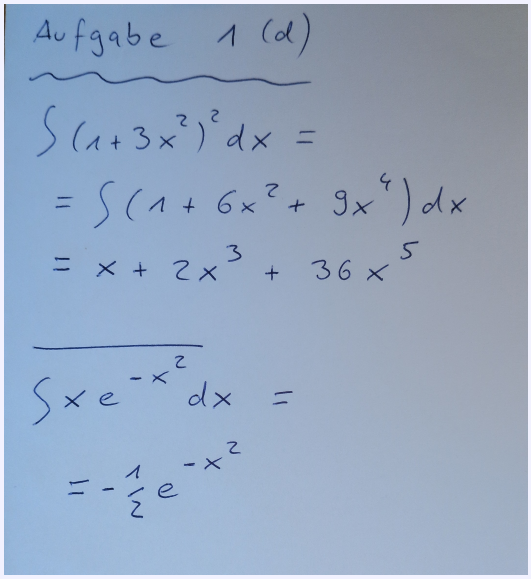
Ich habe die Lösung zu Aufgabe 2 als LaTeX geschrieben und zu einer zweiseitigen PDF kompiliert. Der Rechenweg ist jeweils mit drin. Beide Dateien liegen in `theo1/`: `Loesung_01_Aufgabe2.tex` und `Loesung_01_Aufgabe2.pdf`.
Gegeben: $\mathbf{a} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (1, 0.5, -1)$, $\mathbf{c} = (-2, 0, 5)$, $\mathbf{d} = (1, 4, -1)$.
**Ergebnisse:**

- **(a)**
  - $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2.5, 5)$
  - $|\mathbf{a}| = \sqrt{29} \approx 5.385$
  - $\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1/(3\sqrt{29})$, also $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 93.55°$. Die Vektoren stehen fast senkrecht aufeinander.
- **(b)**
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1/2$
  - $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-5, 6, -2)$. Es steht senkrecht auf $\mathbf{a}$ und auf $\mathbf{b}$; die Kontrolle ist in der Lösung angegeben.
  - $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d} = 21$. Zur Kontrolle habe ich es auch als Determinante berechnet.
- **(c)**
  - $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind linear unabhängig, weil $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.
  - $\mathbf{c}$ liegt in der Ebene von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, weil $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. Explizit gilt $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

Wenn du die Lösung im gleichen Layout wie das Aufgabenblatt haben möchtest oder die übrigen Aufgaben auch brauchst, sag Bescheid.

**Frage**

Ich habe versucht, Aufgabe 1d zu lösen. Für die ersten beiden Integrale glaube ich, eine Lösung gefunden zu haben. Ich habe ein Foto meiner Lösung im Verzeichnis abgelegt. Dateiname ist `Aufgabenblatt_01_Aufgabe_1_d.jpg`. Kannst du dir diese Lösung ansehen und mir sagen, ob sie korrekt ist?




**Antwort (Claude)**

Das erste Integral hat einen Fehler, das zweite ist richtig.
**Erstes Integral:** Das Ausmultiplizieren zu $(1 + 6x^2 + 9x^4)$ stimmt. Beim letzten Term ist dir aber ein Fehler passiert. Für die Stammfunktion von $x^n$ wird durch $n + 1$ geteilt, also

$$\int 9x^4\,\mathrm{d}x = 9 \cdot \frac{x^5}{5} = \frac{9}{5}x^5, \quad \text{nicht } 36x^5.$$

Die $36 = 9 \cdot 4$ kommt vermutlich daher, dass du wie beim Ableiten mit dem Exponenten multipliziert hast. Beim Term $6x^2$ hast du es richtig gemacht: $6 \cdot x^3/3 = 2x^3$. Richtig ist also

$$\int (1 + 3x^2)^2\,\mathrm{d}x = x + 2x^3 + \frac{9}{5}x^5 + C.$$

Zur Probe kannst du ableiten: $1 + 6x^2 + 9x^4$ ✓.
**Zweites Integral:** Das ist richtig. Die Probe durch Ableiten mit der Kettenregel ergibt $-\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = xe^{-x^2}$ ✓. Es fehlt nur die Integrationskonstante:

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

**Allgemein:** Bei unbestimmten Integralen gehört immer „$+C$“ dazu. Das fehlt bei beiden Integralen.

**Frage**

Es gibt noch ein drittes Integral in Aufgabe 1d. Leider habe ich überhaupt keine Idee, wie ich das lösen kann. Ich möchte keine Lösung von dir, aber einen Tipp. Gibt es eine spezielle Rechentechnik oder einen Ansatz, wie ich dieses Integral lösen kann?

**Antwort (Claude)**

Ja: Für $\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ brauchst du die **partielle Integration** (Produktintegration):

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sie lohnt sich immer dann, wenn der Integrand ein Produkt aus zwei Faktoren ist und einer davon beim Ableiten einfacher wird.
**Tipp zur Wahl:** Überleg dir, welcher der beiden Faktoren $x$ und $\cos(x)$ beim Ableiten einfacher wird. Der andere sollte sich problemlos integrieren lassen. Bei der richtigen Wahl ist das verbleibende Integral rechts deutlich einfacher als das ursprüngliche.
Am Ende musst du noch die Grenzen 0 und $\pi$ einsetzen. Dafür hilft es, die Werte von sin und cos bei 0 und $\pi$ parat zu haben.

**Frage**

Danke für den Tipp. Ich glaube, ich habe die Lösung. Lautet sie $-2$?

**Antwort (Claude)**

Ja, $\mathbf{-2}$ ist richtig.
Der Randterm $\left[x\sin(x)\right]_0^\pi$ fällt weg, weil $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$. Übrig bleibt $-\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = -2$.
Plausibel ist das Ergebnis auch: Auf $[0, \pi/2]$ ist $x\cos(x)$ positiv, auf $[\pi/2, \pi]$ negativ. Im negativen Bereich ist $x$ größer, deshalb überwiegt der negative Beitrag.

**Frage**

Kannst du mir nochmal erklären, wann partielle Integration ein guter Ansatz ist und wann man lieber keine partielle Integration probieren sollte?

**Antwort (Claude)**

Kurz gesagt: Partielle Integration lohnt sich, wenn das neue Integral $\int u'v\,\mathrm{d}x$ einfacher ist als das alte $\int uv'\,\mathrm{d}x$. Das hängt fast nur davon ab, ob du einen Faktor hast, der beim Ableiten einfacher wird.

**Wann sie ein guter Ansatz ist**

**1. Produkt aus Polynom und „gutmütiger“ Funktion**
Beispiele sind $x\cos(x)$, $x^2e^x$ und $x\sin(2x)$.

- Das Polynom wird $u$, denn beim Ableiten sinkt der Grad.
- sin, cos und $e^x$ werden $v'$, denn sie lassen sich beliebig oft problemlos integrieren.
- Bei $x^n$ musst du $n$-mal partiell integrieren, bis das Polynom verschwunden ist.

**2. Funktionen, deren Ableitung einfacher ist als die Funktion selbst**
Beispiele sind $\ln(x)$, $\arctan(x)$ und $\arcsin(x)$.

- Den Trick „mal 1“ schreiben: $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$ mit $u = \ln(x)$ und $v' = 1$.
- Die Ableitung $1/x$ bzw. $1/(1+x^2)$ ist algebraisch und meist leicht weiter zu integrieren.
- Das funktioniert auch mit Polynom davor, zum Beispiel $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. Dann ist ausnahmsweise $\ln(x)$ das $u$, nicht das Polynom.

**3. „Zyklische“ Fälle**
Beispiele sind $e^x\sin(x)$ und $e^x\cos(x)$.

- Nach zweimaliger partieller Integration taucht das Ausgangsintegral wieder auf.

- Dann löst du die Gleichung nach dem Integral auf.

**Faustregel für die Wahl von** $u$ (das, was abgeleitet wird), in dieser Reihenfolge:
**L**ogarithmus → **I**nverse trig. Funktionen (arctan, …) → **A**lgebraisch (Polynome) → **T**rigonometrisch → **E**xponential.
Was weiter links steht, wird bevorzugt als $u$ genommen. Merkwort: LIATE.

**Wann du sie lieber nicht probierst**

**1. Die innere Ableitung steht schon da → Substitution**
Ein Beispiel ist dein $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Das $x$ ist bis auf einen Faktor die Ableitung von $-x^2$. Das spricht klar für Substitution. Mit partieller Integration ($u = x$, $v' = e^{-x^2}$) kämst du nicht weiter, denn $e^{-x^2}$ hat keine elementare Stammfunktion. Erkennungszeichen: $f(g(x)) \cdot g'(x)$.
**2. Das neue Integral wird komplizierter**
Ein Beispiel ist $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ mit der falschen Wahl $u = e^x$ und $v' = x$. Dann entsteht $\int (x^2/2)\,e^x\,\mathrm{d}x$, also wird es schlimmer. Daran merkst du, dass du $u$ und $v'$ vertauschen solltest.
**3. Vereinfachen geht direkt**

- Polynome multiplizierst du einfach aus, wie bei deinem ersten Integral $\int (1+3x^2)^2\,\mathrm{d}x$.
- Brüche von Polynomen (rationale Funktionen) zerlegst du per Partialbruchzerlegung.
- Trigonometrische Produkte wie $\sin(x)\cos(x)$ oder $\sin^2(x)$ vereinfachst du oft mit Additionstheoremen.

**4.** $v'$ **lässt sich gar nicht integrieren**
Wenn du für den Faktor, den du integrieren müsstest, keine Stammfunktion findest, ist die Aufteilung falsch oder der Ansatz ungeeignet.

**Praktisches Vorgehen**

1. Erst prüfen: Lässt sich der Integrand vereinfachen? Steht eine innere Ableitung da (→ Substitution)?
2. Wenn ein Produkt bleibt, wähle $u$ nach LIATE. Kontrolliere, ob $v'$ integrierbar ist.
3. Schreib das neue Integral hin. Ist es einfacher, bist du richtig. Ist es schwerer, vertausch $u$ und $v'$ oder nimm einen anderen Ansatz.

**Frage**

Ich möchte partielle Integration noch etwas üben. Kannst du eine Übungsaufgabe stellen von ähnlichem Schwierigkeitsgrad wie das Integral, das wir eben gemeinsam gelöst haben?

**Antwort (Claude)**

Hier ist eine Übungsaufgabe:

$$\int_0^1 x\,e^x\,\mathrm{d}x$$

Wie beim letzten Mal ist das ein Produkt aus $x$ und einer Funktion, die sich leicht integrieren lässt. Diesmal ist es eine Exponentialfunktion statt cos. Achte beim Einsetzen der Grenzen darauf, dass der Randterm hier nicht wegfällt.
Wenn du ein Ergebnis hast, schick es mir, dann prüfe ich es. Als Nächstes kann ich dir auch eine etwas schwierigere Aufgabe stellen, etwa mit zweimaliger partieller Integration.

**Frage**

Okay, danke. Ich probiere die Aufgabe später zu lösen. Ich hätte gern noch eine andere Aufgabe. Kannst du mir zwei Integrale vorgeben, wobei sich eines für partielle Integration eignet und eines nicht? Ich möchte testen, ob ich verstanden habe, wann partielle Integration ein guter Kandidat für die Lösung ist.

**Antwort (Claude)**

Hier sind zwei Integrale:

$$\textbf{(A)} \quad \int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \textbf{(B)} \quad \int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Eines davon eignet sich gut für partielle Integration, das andere löst man besser anders. Deine Aufgabe:

1. Entscheide, welches Integral sich für partielle Integration eignet, und begründe kurz, warum.
2. Überleg dir für das andere, welcher Ansatz stattdessen besser passt.
3. Wenn du magst, rechne beide aus.

Schick mir deine Einschätzung, dann sage ich dir, ob sie stimmt.

**Frage**

Ich denke, (B) ist für partielle Integration geeignet, weil ich $x$ leicht integrieren und $\ln x$ leicht ableiten kann. Allerdings bin ich nun doch etwas unsicher, denn auch beim Integral (A) kann ich $x$ leicht integrieren und $\cos(x^2)$, auch wenn das eine kompliziertere Funktion ist, kann man doch leicht ableiten. Ableiten sollte immer möglich sein. Kannst du mir sagen, ob meine Vermutung bei (B) richtig ist und eventuell auch, warum für (A) partielle Integration doch nicht geeignet ist?

**Antwort (Claude)**

Deine Vermutung zu (B) ist richtig, und deine Begründung passt. Mit $u = \ln(x)$ und $v' = x$ wird $\ln(x)$ durch das Ableiten zu $1/x$, also zu etwas Algebraischem. Das neue Integral $\int (1/x)\cdot(x^2/2)\,\mathrm{d}x$ ist dann ein einfaches Polynom.

### Warum (A) trotzdem nicht passt

Dein Einwand ist berechtigt: Ableiten kann man immer. Entscheidend ist aber nicht, ob man ableiten kann, sondern ob das neue Integral einfacher wird. Rechnen wir deine Aufteilung für (A) einmal durch:

- $u = \cos(x^2)$, also $u' = -2x\sin(x^2)$ (Kettenregel)
- $v' = x$, also $v = x^2/2$

Das neue Integral ist dann

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = \int (-2x\sin(x^2))\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = -\int x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Das ist schlimmer als vorher. Aus $x$ ist $x^3$ geworden, und $\cos(x^2)$ ist nur zu $\sin(x^2)$ geworden, also genauso kompliziert. Durch die Kettenregel kommt beim Ableiten ein zusätzlicher Faktor $x$ dazu, und das Integrieren von $x$ erhöht die Potenz noch einmal.

Die andere Aufteilung geht auch nicht: Mit $u = x$ und $v' = \cos(x^2)$ bräuchtest du eine Stammfunktion von $\cos(x^2)$. Die gibt es nicht in elementarer Form.

**Der Unterschied zu (B)**

- Bei (B) **verschwindet** die schwierige Funktion $\ln(x)$ beim Ableiten und wird zu $1/x$.
- Bei (A) **bleibt** die schwierige Funktion beim Ableiten erhalten ($\cos(x^2) \to \sin(x^2)$), und zusätzlich entsteht ein Faktor $x$.

Das ist ein guter Test: Wird der Faktor, den ich ableite, dadurch wirklich einfacher, oder ändert er nur seine Form?

**Was bei (A) stattdessen hilft**

Schau dir an, wie $x$ und $x^2$ zusammenhängen. Das ist dieselbe Situation wie bei deinem $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ aus Aufgabe 1d.

**Frage**

Prima, danke für deine Hilfe. Ich denke, ich habe es jetzt verstanden.

**Antwort (Claude)**

Gerne, freut mich! Die Übungsaufgabe $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$ steht noch aus. Wenn du sie gerechnet hast, schick mir gern dein Ergebnis, dann schaue ich es mir an. Viel Erfolg mit dem Übungsblatt!

**Frage**

Kannst du bitte den gesamten Chat als pdf ausgeben?