Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden

Wintersemester 2026/27

Aufgabenblatt 1

Vorlesung: Marc Wagner
Übungsleitung: Carl B. Rosenkvist
rosenkvist@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe 1: Mathetest

(a) **Bruchrechnung:** Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und kürzen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}, \qquad \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}}{\frac{7}{3}}.$$

(b) **Polynomgleichungen:** Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

$$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4}, \qquad 2x^2-8x=10.$$

(c) **Differentialrechnung:** Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x)=\frac{(1+x^2)^3}{x}, \qquad f_2(x)=x^2\cos(x), \qquad f_3(x)=2e^{-x^2}.$$

(d) **Integralrechnung:** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int (1+3x^2)^2 \, \mathrm{d}x\,, \qquad \int x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^\pi x\cos(x) \, \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2: Rechnen mit Vektoren

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0.5\\-1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}, \qquad |\mathbf{a}|, \qquad \angle(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

(b) Berechnen Sie das Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \qquad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}.$$

(c) Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear unabhängig? Liegt $\mathbf{c}$ in der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene?

Aufgabe 3: Vektoridentitäten

Das Kronecker-Delta und das Levi-Civita-Symbol sind definiert durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

und

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) \text{ ist eine gerade Permutation von } (1,2,3), \\ -1, & (i,j,k) \text{ ist eine ungerade Permutation von } (1,2,3), \\ 0, & \text{falls mindestens zwei Indizes übereinstimmen.} \end{cases}$$

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren gilt in Komponentenschreibweise

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

(a) Überzeugen Sie sich, dass die folgenden Identitäten gelten:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl},$$

sowie

$$\sum_{p=1}^{3} \delta_{ip} a_p = a_i.$$

Hinweis: Hier ist kein mathematischer Beweis erforderlich. Es ist stattdessen sinnvoll, die Identitäten anhand einiger Beispiele zu verstehen.

(b) Zeigen Sie, dass für die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ gilt (*BAC–CAB*-Regel):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Hinweis: Verwenden Sie die obige Levi-Civita-Schreibweise für das Kreuzprodukt sowie die Identitäten aus (a).

(c) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die BAC–CAB-Regel.

Aufgabe 4: Ebenengleichung

Die Punkte $\mathbf{x}$ einer Ebene seien durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei eine Gerade $\mathbf{y}$ gegeben durch

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von Ebene und Gerade.

(b) Die Ebene kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Bringen Sie die Ebene auf die sogenannte Normalenform

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

wobei $\mathbf{n}$ der auf 1 normierte Normalenvektor der Ebene und der Stützvektor $\mathbf{p}$ ein beliebiger Vektor der Ebene ist.

Skizzieren Sie die Ebene sowie $\mathbf{n}$ und $\mathbf{p}$.