Quantenfeldtheorie II

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Sommersemester 2025

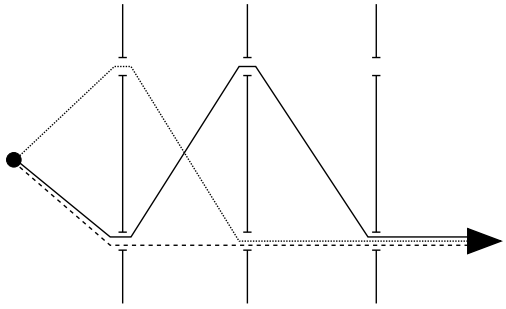
Version: 23. Juli 2025

Literatur: [1, 2, 3, 4, 5, 6].

****** 22. April 2025 (1. Vorlesung) ******

1 Pfadintegrale in der QM

- Pfadintegrale: Formalismus zur Quantisierung, alternativ zur kanonischen Quantisierung (Kommutatorrelationen, Schrödinger-Gleichung, etc.).
- Häufig einfachere und systematischere Gestaltung von analytischen Rechnungen.
- Eignet sich (im Gegensatz zum kanonischen Formalismus) zur numerischen Umsetzung ($\rightarrow$ Gitterfeldtheorie).
- Grundidee/physikalische Motivation: Doppelspaltexperiment.
  - Klassisches Teilchen geht entweder durch den einen oder den anderen Spalt.
  - QM Teilchen "geht gleichzeitig durch beide Spalte".
  - Iterieren ...



♢ n Doppelspalte $\rightarrow 2^n$ Wege

♢ bei unendlich vielen "Unendlichspalten" nimmt ein Teilchen gleichzeitig alle denkbaren Pfade

  - Am Ende resultiert der Pfadintegralformalismus: Ein QM Teilchen bewegt sich gleichzeitig auf allen denkbaren Trajektorien.
  - Originalarbeit: [7] (R. P. Feynman, 1948).

1.1 Die Übergangsamplitude

- $|x_j\rangle$: Ortseigenzustand, zugehörige Wellenfunktion $\psi(x) \propto \delta(x - x_j)$, also Teilchen am Ort x_j.
- $\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle$, $t_2 > t_1$: Übergangsamplitude, beschreibt Überlapp zweier Zustände,
  - Ortseigenzustand $|x_1\rangle$ zum Zeitpunkt t_1, der sich bis t in der Zeit entwickelt,
  - Ortseigenzustand $|x_2\rangle$ zum Zeitpunkt t_2, der sich bis t in der Zeit entwickelt

  (Übergangsamplitude unabhängig von t).

- Zeitentwicklung von Zuständen folgt aus der Schrödinger-Gleichung,

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle \;=\; H|\psi(t)\rangle \quad\to\quad |\psi(t)\rangle \;=\; e^{-iH(t-t_j)}|\psi(t_j)\rangle \tag{1}$$

($\hbar = 1$, $c = 1$ hier und im Folgenden). Damit

$$\begin{aligned}\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle \;&=\; \langle (x_2,t_2)(t)|(x_1,t_1)(t)\rangle \;=\; \langle (x_2,t_2)(t_2)|e^{-iH(t_2-t_1)}|(x_1,t_1)(t_1)\rangle \;= \\ &=\; \langle x_2|e^{-iH(t_2-t_1)}|x_1\rangle. \end{aligned}\tag{2}$$

1.1.1 Übergangsamplitude, freies Teilchen

- Hamilton-Operator: $H = p^2/2m$.
- Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned}\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle \;&=\; \langle x_2|\exp\Big(-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)\Big)|x_1\rangle \;= \\ &=\; \int dp\,\langle x_2|p\rangle \exp\Big(-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)\Big)\langle p|x_1\rangle \;= \\ &=\; \int dp\,\frac{e^{ip(x_2-x_1)}}{2\pi}\exp\Big(-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)\Big) \;= \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\int dp\,\exp\Big(-i\Big(\sqrt{\frac{t_2-t_1}{2m}}p-\sqrt{\frac{m}{2(t_2-t_1)}}(x_2-x_1)\Big)^2\Big) \\ &\quad \exp\Big(+i\Big(\sqrt{\frac{m}{2(t_2-t_1)}}(x_2-x_1)\Big)^2\Big) \;= \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\exp\Big(+i\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\Big)\int dp\,\exp\Big(-i\frac{t_2-t_1}{2m}p^2\Big), \end{aligned}\tag{3}$$

wobei $\langle x|p\rangle = e^{ipx}/\sqrt{2\pi}$ verwendet wurde (Normierung $1/\sqrt{2\pi}$, damit $\langle k|p\rangle = \int dx\,\langle k|x\rangle\langle x|p\rangle = \delta(k-p)$).

- Gauß-Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,e^{-ax^2} \;=\; \sqrt{\pi/a} \quad (\text{falls } \mathrm{Re}(a) > 0) \tag{4}$$

(wird im Folgenden auch für $\mathrm{Re}(a) = 0$ verwendet; siehe hierzu Abschnitt 1.3).

- Übergangsamplitude, Fortsetzung:

$$\ldots \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_2-t_1)}}\exp\Big(+i\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\Big) \tag{5}$$

(scheint unsinnig, da $W_{x_1\to x_2} = |\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle|^2$, die Wahrscheinlichkeit das zum Zeitpunkt t_1 bei x_1 präparierte Teilchen zum Zeitpunkt t_2 bei x_2 zu finden, unabhängig von x_1 und x_2 ist und außerdem $\int dx_2\,W_{x_1\to x_2} \neq 1$. Eine Diskussion dieser Probleme findet sich in Anhang A).

1.1.2 Übergangsamplitude, Teilchen in einem Potential

- Hamilton-Operator: $H = p^2/2m + V(x)$
- Im Allgemeinen keine geschlossene Lösung.
- Betrachte kleine Zeitdifferenzen $\epsilon = t_2 - t_1$:

$$e^{-iH\epsilon} \;=\; e^{-i(p^2/2m+V(x))\epsilon} \;=\; \underbrace{e^{-iV(x)\epsilon/2}\exp\Big(-i\frac{p^2}{2m}\epsilon\Big)e^{-iV(x)\epsilon/2}}_{=U(\epsilon)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{6}$$

wegen "Baker-Campbell-Haussdorff" $e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2+\ldots}$ ($\ldots$ steht für dritte und höhere Potenzen von A und B). Es gilt

$$\begin{aligned}\langle x_2|U(\epsilon)|x_1\rangle \;&=\; e^{-iV(x_2)\epsilon/2}\langle x_2|\exp\Big(-i\frac{p^2}{2m}\epsilon\Big)|x_1\rangle e^{-iV(x_1)\epsilon/2} \;= \\ &=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}\exp\Big(+i\frac{m(x_2-x_1)^2}{2\epsilon} - i\frac{(V(x_1)+V(x_2))\epsilon}{2}\Big).\end{aligned} \tag{7}$$

- Teile Zeitintervall $t_1 \ldots t_2$ in N kleine Stücke:
  - $t_2 - t_1 = N\epsilon$.
  - $e^{-iH(t_2-t_1)} = (e^{-iH\epsilon})^N = U(\epsilon)^N + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.
  - $e^{-iH(t_2-t_1)} = \lim_{N\to\infty} U(\epsilon)^N$.

****** 25. April 2025 (2. Vorlesung) ******

- Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned}\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle \;&=\; \langle x_2|e^{-iH(t_2-t_1)}|x_1\rangle \;=\; \lim_{N\to\infty}\langle x_2|U(\epsilon)^N|x_1\rangle \;= \\ &=\; \lim_{N\to\infty}\int dy_{N-1}\ldots\int dy_2\int dy_1\,\langle x_2|U(\epsilon)|y_{N-1}\rangle\ldots\langle y_2|U(\epsilon)|y_1\rangle\langle y_1|U(\epsilon)|x_1\rangle \;= \\ &=\; \lim_{N\to\infty}\Big(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\Big)^{N/2}\int dy_{N-1}\ldots\int dy_2\int dy_1 \\ &\quad \exp\Big(+i\frac{m}{2\epsilon}\Big((x_2-y_{N-1})^2+\ldots+(y_2-y_1)^2+(y_1-x_1)^2\Big) \\ &\quad -i\epsilon\Big(V(x_2)/2+V(y_{N-1})+\ldots+V(y_2)+V(y_1)+V(x_1)/2\Big)\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

- Exponent:

$$i\sum_{j=1}^{N}\epsilon\Big(\frac{m}{2}\Big(\frac{y_j-y_{j-1}}{\epsilon}\Big)^2 - \frac{V(y_j)+V(y_{j-1})}{2}\Big), \tag{9}$$

wobei $y_0 = x_1$ und $y_N = x_2$. Im betrachteten $\lim_{N\to\infty}$ entspricht dieser Ausdruck der klassischen Wirkung:

$$i\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2(t) - V(y(t))\right) \quad = \quad iS[y], \tag{10}$$

wobei $y(t-t_1) = y_{(t-t_1)/\epsilon}$.

- Pfadintegral:
  - Nach Definition

    $$Dy \quad = \quad \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{N/2} dy_{N-1}\ldots dy_2\, dy_1 \tag{11}$$

    gilt für die Übergangsamplitude

    $$\langle x_2, t_2|x_1, t_1\rangle \quad = \quad \int_{y(t_1)=x_1}^{y(t_2)=x_2} Dy\, e^{iS[y]}. \tag{12}$$

  - Entspricht einer Summe/Integration über alle denkbaren Trajektorien von (x_1, t_1) nach (x_2, t_2).
  - Übergangsamplitude im Pfadintegralformalismus enthält keine Operatoren.
  - Klassische Physik: Trajektorien erfüllen $\delta S = 0$.
  - QM: Summe über alle Trajektorien (auch solche mit $\delta S \neq 0$), "gewichtet" mit klassischer Wirkung.

1.2 Beispiel: Die Übergangsamplitude des HOs

- Klassische Wirkung:

$$S[x] \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2\right). \tag{13}$$

- BGl:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \quad &= \quad \frac{\delta}{\delta x(t)}\int_{t_1}^{t_2} du \left(\frac{m}{2}\left(\frac{d}{du}x(u)\right)^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2(u)\right) \quad = \\ &= \quad \int_{t_1}^{t_2} du \left(m\left(\frac{d}{du}x(u)\right)\frac{d}{du}\delta(u-t) - m\omega^2 x(u)\delta(u-t)\right) \quad = \\ &= \quad \underbrace{m\left(\frac{d}{du}x(u)\right)\delta(u-t)\Big|_{u=t_1}^{u=t_2}}_{=0 \text{ da } t_1<t<t_2} + \\ &\qquad \int_{t_1}^{t_2} du \left(-m\left(\frac{d^2}{du^2}x(u)\right)\delta(u-t) - m\omega^2 x(u)\delta(u-t)\right) \quad = \quad -m\ddot{x}(t) - m\omega^2 x(t) \end{aligned} \tag{14}$$

(nur an dieser Stelle so detailliert, ähnliche Rechnungen im Folgenden eher knapp).

- Sei $x_{\rm cl}(t)$ Lösung dieser BGl mit RBs $x_{\rm cl}(t_1) = x_1$ und $x_{\rm cl}(t_2) = x_2$. Dann kann ein beliebiger Pfad $x(t)$ gemäß $x(t) = x_{\rm cl}(t) + y(t)$ geschrieben werden mit $y(t_1) = 0$ und $y(t_2) = 0$ ($y(t)$ ist also unabhängig von den RBs). Für die Wirkung folgt

$$
\begin{aligned}
S[x] \;&= \\
&= \; S[x_{\rm cl}] + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \underbrace{\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)}\bigg|_{x=x_{\rm cl}}}_{=0 \text{ (BGl)}} y(t) + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \, \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t)\delta x(t')}\bigg|_{x=x_{\rm cl}} y(t)y(t') + \\
&\quad \ldots \;= \\
&= \; S[x_{\rm cl}] + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \, \delta(t-t')\Big(- m\frac{d^2}{dt'^2} - m\omega^2\Big) y(t)y(t') \;\; = \\
&= \; S[x_{\rm cl}] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2(t) - \frac{m\omega^2}{2} y^2(t)\right), \qquad (15)
\end{aligned}
$$

  wobei

$$
\frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t)\delta x(t')} \;=\; \delta(t-t')\Big(- m\frac{d^2}{dt'^2} - m\omega^2\Big) \qquad (16)
$$

$$
\frac{\delta^n S[x]}{\delta x(t)\delta x(t')\ldots} \;=\; 0 \quad , \quad n \geq 3 \qquad (17)
$$

  verwendet wurde.

- Übergangsamplitude:

$$
\langle x_2, t_2 | x_1, t_1\rangle \;=\; \int_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2} Dx \, e^{iS[x]} \;=\; e^{iS[x_{\rm cl}]} \int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0} Dy \, e^{iS[y]} \qquad (18)
$$

  (Abhängigkeit von den RBs vollständig im Vorfaktor $e^{iS[x_{\rm cl}]}$).

- Übergangsamplitude, Vorfaktor $e^{iS[x_{\rm cl}]}$:

  - Klassische Lösung, die RBs erfüllt:

$$
\begin{aligned}
x_{\rm cl}(t) \;&=\; A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) && (19)\\
x_{\rm cl}(t_1) \;&=\; A\sin(\omega t_1) + B\cos(\omega t_1) \;=\; x_1 && (20)\\
x_{\rm cl}(t_2) \;&=\; A\sin(\omega t_2) + B\cos(\omega t_2) \;=\; x_2. && (21)
\end{aligned}
$$

    Auflösen nach A und B, einsetzen in (19),

$$
\begin{aligned}
x_1\sin(\omega t_2) - x_2\sin(\omega t_1) \;&=\; B\underbrace{\Big(\cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2) - \cos(\omega t_2)\sin(\omega t_1)\Big)}_{=+\sin(\omega(t_2-t_1))} && (22)\\
x_1\cos(\omega t_2) - x_2\cos(\omega t_1) \;&=\; A\underbrace{\Big(\sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2) - \sin(\omega t_2)\cos(\omega t_1)\Big)}_{=-\sin(\omega(t_2-t_1))} && (23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{\rm cl}(t) \;&= \\
&= \; \frac{1}{\sin(\omega(t_2-t_1))}\Big(- \Big(x_1\cos(\omega t_2) - x_2\cos(\omega t_1)\Big)\sin(\omega t) + \\
&\quad \Big(x_1\sin(\omega t_2) - x_2\sin(\omega t_1)\Big)\cos(\omega t)\Big). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

– Einsetzen in die Wirkung:

$$S[x_{\rm cl}] \;=\; \ldots \;=\; \frac{m\omega}{2\sin(\omega(t_2-t_1))}\Big((x_1^2+x_2^2)\cos(\omega(t_2-t_1))-2x_1x_2\Big) \tag{25}$$

(längliche Rechnung, benutze z.B. Maple).

- Übergangsamplitude, Pfadintegral

$$F(t_1,t_2) \;=\; \int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0} Dy\, e^{iS[y]}: \tag{26}$$

– Klassische Wirkung, partielle Integration:

$$S[y] \;=\; \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{m}{2}\dot{y}^2-\frac{m\omega^2}{2}y^2\right) \;=\; \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\, y\Big(-\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\Big)y \tag{27}$$

(Oberflächenterm verschwindet wegen $y(t_1)=y(t_2)=0$).

– $F(t_1,t_2)$ ist Gauß-Integral (y tritt quadratisch auf), enthält allerdings einen Operator, $-(d^2/dt^2)-\omega^2$. Entferne Operator durch Entwicklung von y nach entsprechenden Eigenfunktionen:

∗ Eigenfunktionen y_j von $-(d^2/dt^2)-\omega^2$, die RBs $y_j(t_1)=y_j(t_2)=0$ erfüllen:

$$\Big(-\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\Big)y_j \;=\; \lambda_j y_j \quad\to\quad y_j \;=\; \sqrt{\frac{2}{t_2-t_1}}\sin\left(\frac{j\pi(t-t_1)}{t_2-t_1}\right) \tag{28}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_j \;=\; \frac{j^2\pi^2}{(t_2-t_1)^2}-\omega^2 \tag{29}$$

($j=1,2,\ldots$).

∗ Entwicklung von y:

$$y \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j. \tag{30}$$

∗ Einsetzen in die Wirkung:

$$S[y] \;=\; \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_j a_k \int_{t_1}^{t_2} dt\, y_j\Big(-\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\Big)y_k \;=$$

$$=\; \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_j a_k \int_{t_1}^{t_2} dt\, y_j\lambda_k y_k \;=\; \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\lambda_j, \tag{31}$$

wobei die Orthonormalität

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, y_j y_k \;=\; \delta_{jk} \tag{32}$$

verwendet wurde.

– Transformation der Integrationsvariablen:

$$Dy \;=\; \underbrace{\left|\det\left(\frac{\partial(y(t_1+\epsilon)\;\; y(t_1+2\epsilon)\;\;\ldots)}{\partial(a_1\;\; a_2\;\;\ldots)}\right)\right|}_{=J\text{ (Jacobi-Determinante)}}\prod_{j=1}^{\infty} da_j. \tag{33}$$

Da $y = \sum_j a_j y_j$, ist $\partial y(t_1 + j\epsilon)/\partial a_k$ und damit J a_j-unabhängig. Da $y = \sum_j a_j y_j$ und y_j ω-unabhängig (Gleichung (28)), ist auch $\partial y(t_1 + j\epsilon)/\partial a_k$ und damit J ω-unabhängig. Es folgt

$$F(t_1,t_2) = J\int\left(\prod_{j=1}^{\infty} da_j\right)\exp\left(i\frac{m}{2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2\lambda_k\right) =$$

$$= J\prod_{j=1}^{\infty}\left(\int da_j\,\exp\left(i\frac{m}{2}a_j^2\lambda_j\right)\right) = J\prod_{j=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi}{im\lambda_j}}. \quad (34)$$

– Bestimme $F(t_1,t_2)$ ohne J auszurechnen:

∗ Für $\omega = 0$ ist die Übergangsamplitude des HOs identisch zu der des freien Teilchens (Gleichung (5) mit $x_1 = x_2 = 0$):

$$F_{\omega=0}(t_1,t_2) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_2-t_1)}}. \quad (35)$$

∗ Berechne Verhältnis:

$$\frac{F(t_1,t_2)}{F_{\omega=0}(t_1,t_2)} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{j^2\pi^2}{(t_2-t_1)^2}-\omega^2}{\frac{j^2\pi^2}{(t_2-t_1)^2}}\right)^{-1/2} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2(t_2-t_1)^2}{j^2\pi^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(\frac{\sin(\omega(t_2-t_1))}{\omega(t_2-t_1)}\right)^{-1/2}, \quad (36)$$

wobei die ω-Unabhängigkeit von J verwendet wurde sowie die Produktentwicklung des Sinus,

$$\sin(x) = x\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2}\right). \quad (37)$$

∗ Damit

$$F(t_1,t_2) = F_{\omega=0}(t_1,t_2)\left(\frac{\sin(\omega(t_2-t_1))}{\omega(t_2-t_1)}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\sin(\omega(t_2-t_1))}}. \quad (38)$$

• Übergangsamplitude, Endergebnis:

$$\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle = e^{iS[x_{\rm cl}]}F(t_1,t_2) =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\sin(\omega(t_2-t_1))}}$$

$$\exp\left(i\frac{m\omega}{2\sin(\omega(t_2-t_1))}\Big((x_1^2+x_2^2)\cos(\omega(t_2-t_1))-2x_1x_2\Big)\right). \quad (39)$$

***** 29. April 20225 (3. Vorlesung) *****

1.3 Das Euklidische Pfadintegral

• Probleme des in Abschnitt 1.1 eingeführten Pfadintegralformalismus:

– Pfadintegral (12) wegen des oszillierenden Integranden e^{iS} mathematisch fragwürdig. Einfache Analogie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{iy} = -ie^{iy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = ???. \quad (40)$$

– Eng damit zusammenhängend: Verwendung von (4) trotz $\mathrm{Re}(a) = 0$. Für $\mathrm{Re}(a) = 0$ wurde das Gauß-Integral gemäß

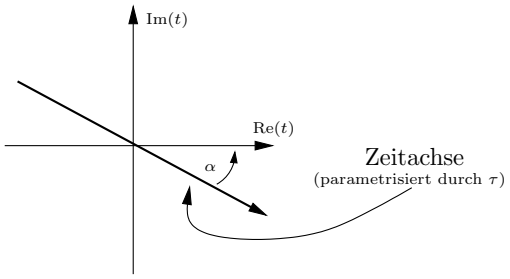
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2} \quad \equiv \quad \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-(\epsilon+a)x^2} \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0+} \sqrt{\pi/(\epsilon + a)} \quad = \quad \sqrt{\pi/a} \tag{41}$$

definiert.

– Pfadintegral (12) wegen des oszillierenden Integranden e^{iS} zur numerischen Auswertung ungeeignet (siehe Kapitel 9).

- Lösung: Übergang zu "imaginärer Zeit" (sogenannte Wick-Rotation):

  – Definiere Zeitachse als Gerade in der komplexen Ebene: $t = e^{-i\alpha}\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.



  – I.d.R. verwendeter Spezialfall: $\alpha = \pi/2$, also $t = -i\tau$. τ wird dann als Euklidische Zeit bezeichnet, da $x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = t^2 - \mathbf{x}^2 = -\tau^2 - \mathbf{x}^2 = -x_{E,\mu} x_{E,\mu}$, wobei $x_{E,\mu} = (\tau, \mathbf{x})$ (bei Übergang zu Euklidischer Zeit wird die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ zur trivialen Euklidischen Metrik).

- Euklidisches Pfadintegral:

  – Damit

$$-\partial_\tau |\psi, \tau\rangle \quad = \quad H|\psi, \tau\rangle \quad \to \quad |\psi, \tau\rangle \quad = \quad e^{-H(\tau - \tau_0)} |\psi, \tau_0\rangle \tag{42}$$

  (entspricht Gleichung (1)) und

$$\langle x_2, \tau_2 | x_1, \tau_1 \rangle \quad = \quad \langle x_2 | e^{-H(\tau_2 - \tau_1)} | x_1 \rangle \tag{43}$$

  (entspricht Gleichung (2)).

  – Analog zu Abschnitt 1.1 lässt sich die Beziehung zwischen Euklidischer Übergangsamplitude und Euklidischem Pfadintegral,

$$\langle x_2, \tau_2 | x_1, \tau_1 \rangle \quad = \quad \int_{y(\tau_1) = x_1}^{y(\tau_2) = x_2} Dy\, e^{-S_E[y]}, \tag{44}$$

  herleiten (entspricht Gleichung (12)), wobei

$$S_E[y] \quad = \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{d}{d\tau} y \right)^2 + V(y) \right) \tag{45}$$

  (Euklidische Wirkung, entspricht Gleichung (10)). Die zu Beginn dieses Abschnitts genannten Probleme treten beim Euklidischen Pfadintegral nicht auf.

- Bemerkungen:

– **Die Euklidische Übergangsamplitude beschreibt im Gegensatz zur "Minkowski-Version" nicht die physikalische Ausbreitung eines Teilchens von (x_1, τ_1) nach (x_2, τ_2). Sie ist ein abstraktes Objekt, aus dem jedoch physikalische Informationen (z.B. Differenzen von Energieeigenwerten) gewonnen werden können.**

– Klassische Pfade (Minima der Euklidischen Wirkung) besitzen starkes Gewicht im Pfadintegral (Gewichtsfaktor e^{-S_E} ist groß). Pfade weit entfernt von klassischen Pfaden werden stark unterdrückt. Dies deutet die Verbindung von klassischer Physik und QM an. Eine ähnliche Interpretation existiert auch für das "Minkowski-Pfadintegral" (12)): Beiträge von Pfaden weit entfernt von klassischen Pfaden löschen sich durch Interferenz weitestgehend aus.

– **Das mathematisch fragwürdige Minkowski-Pfadintegral (12) ist als Limes $\alpha \to 0+$ der "unproblematischen" Pfadintegrale für imaginäre Zeiten $t = e^{-i\alpha}\tau$, $0 < \alpha \leq \pi/2$ zu verstehen, also über die Wick-Rotation definiert.**

1.4 Vakuumerwartungswerte

- $|\Omega\rangle$: Vakuumzustand (= Grundzustand).
- In der QFT sind VEVs (Vakuumerwartungswerte) $\langle\Omega|\dots|\Omega\rangle$ von großem Interesse, da zahlreiche Observablen (z.B. Hadronmassen, Zerfallskonstanten, Formfaktoren) durch VEVs ausgedrückt werden können.
- VEVs wiederum können häufig durch Pfadintegrale ausgedrückt werden:
  – Beispiel: Einerseits gilt für $+\tau/2 > \tau_2 > \tau_1 > -\tau/2$

$$
\begin{aligned}
&\langle x_2, +\tau/2|x(\tau_2)x(\tau_1)|x_1, -\tau/2\rangle \quad = \\
&\quad = \quad \langle x_2|e^{-H(\tau/2-\tau_2)}xe^{-H(\tau_2-\tau_1)}xe^{-H(\tau_1+\tau/2)}|x_1\rangle \quad = \\
&\quad = \quad \int dx(\tau_2)\int dx(\tau_1)\,\langle x_2|e^{-H(\tau/2-\tau_2)}|x(\tau_2)\rangle x(\tau_2)\langle x(\tau_2)|e^{-H(\tau_2-\tau_1)}|x(\tau_1)\rangle x(\tau_1) \\
&\qquad \langle x(\tau_1)|e^{-H(\tau_1+\tau/2)}|x_1\rangle \quad = \\
&\quad = \quad \int dx(\tau_2)\int dx(\tau_1)\left(\int_{y(\tau_2)=x(\tau_2)}^{y(+\tau/2)=x_2} Dy\, e^{-S_E[y]}\right)x(\tau_2)\left(\int_{y(\tau_1)=x(\tau_1)}^{y(\tau_2)=x(\tau_2)} Dy\, e^{-S_E[y]}\right) \\
&\qquad x(\tau_1)\left(\int_{y(-\tau/2)=x_1}^{y(\tau_1)=x(\tau_1)} Dy\, e^{-S_E[y]}\right) \quad = \\
&\quad = \quad \int_{y(-\tau/2)=x_1}^{y(+\tau/2)=x_2} Dy\, y(\tau_2)y(\tau_1)e^{-S_E[y]}. \qquad (46)
\end{aligned}
$$

****** 02. Mai 2025 (4. Vorlesung) ******

Andererseits gilt

$$
\begin{aligned}
\langle x_2, +\tau/2|x(\tau_2)x(\tau_1)|x_1, -\tau/2\rangle \quad &= \quad \langle x_2|e^{-H\tau/2}x(\tau_2)x(\tau_1)e^{-H\tau/2}|x_1\rangle \quad = \\
&= \quad \sum_{j,k}\langle x_2|j\rangle e^{-E_j\tau/2}\langle j|x(\tau_2)x(\tau_1)|k\rangle e^{-E_k\tau/2}\langle k|x_1\rangle \quad =
\end{aligned}
$$

$$= e^{-E_\Omega \tau}\langle x_2|\Omega\rangle\langle\Omega|x(\tau_2)x(\tau_1)|\Omega\rangle\langle\Omega|x_1\rangle\Big(1+\mathcal{O}(e^{-\#\tau})\Big) \tag{47}$$

$$\langle x_2,+\tau/2|x_1,-\tau/2\rangle = \langle x_2|e^{-H\tau}|x_1\rangle = \sum_j \langle x_2|j\rangle e^{-E_j\tau}\langle j|x_1\rangle =$$

$$= e^{-E_\Omega \tau}\langle x_2|\Omega\rangle\langle\Omega|x_1\rangle\Big(1+\mathcal{O}(e^{-\#\tau})\Big) \tag{48}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\langle x_2,+\tau/2|x(\tau_2)x(\tau_1)|x_1,-\tau/2\rangle}{\langle x_2,+\tau/2|x_1,-\tau/2\rangle} = \langle\Omega|x(\tau_2)x(\tau_1)|\Omega\rangle, \tag{49}$$

falls $\langle x_1|\Omega\rangle \neq 0$ und $\langle x_2|\Omega\rangle \neq 0$ (die Grundzustandswellenfunktion verschwindet weder bei x_1 noch bei x_2). Damit folgt für $+\tau/2 > \tau_2 > \tau_1 > -\tau/2$, $\langle x_1|\Omega\rangle \neq 0$ und $\langle x_2|\Omega\rangle \neq 0$

$$\langle\Omega|x(\tau_2)x(\tau_1)|\Omega\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{Z}\int_{y(-\tau/2)=x_1}^{y(+\tau/2)=x_2} Dy\, y(\tau_2)y(\tau_1)e^{-S_E[y]} \tag{50}$$

$$Z = \int_{y(-\tau/2)=x_1}^{y(+\tau/2)=x_2} Dy\, e^{-S_E[y]}. \tag{51}$$

i.d.R. wählt man die RBs $x_1 = x_2 = 0$ und verwendet dafür und für den Limes $\tau\to\infty$ die abkürzende Schreibweise

$$\langle\Omega|x(\tau_2)x(\tau_1)|\Omega\rangle = \frac{1}{Z}\int Dy\, y(\tau_2)y(\tau_1)e^{-S_E[y]}. \tag{52}$$

– Die Rechnung lässt sich analog auf $j > 2$ Operatoren $x(\tau_j)\dots x(\tau_2)x(\tau_1)$ sowie zusammengesetzte Operatoren $O_j(x(\tau_j))\dots O_2(x(\tau_2))O_1(x(\tau_1))$ erweitern:

$$\langle\Omega|T\Big\{O_j(x(\tau_j))\dots O_2(x(\tau_2))O_1(x(\tau_1))\Big\}|\Omega\rangle =$$

$$= \frac{1}{Z}\int Dy\, O_j(y(\tau_j))\dots O_2(y(\tau_2))O_1(y(\tau_1))e^{-S_E[y]}, \tag{53}$$

wobei $T\{\dots\}$ die Operatoren gemäß ihrer Euklidischen Zeit aufsteigend von rechts nach links anordnet, z.B.

$$T\Big\{O_2(x(\tau_2))O_1(x(\tau_1)\Big\} = \begin{cases} O_2(x(\tau_2))O_1(x(\tau_1) & \text{falls } \tau_2 > \tau_1 \\ O_1(x(\tau_1))O_2(x(\tau_2) & \text{falls } \tau_1 > \tau_2 \end{cases}. \tag{54}$$

T wird als Zeitordnung bezeichnet.

– Eine entsprechende Beziehungen für reelle Zeit erhält man durch Wick-Rotation $t = e^{-i\alpha}\tau$ im Limes $\alpha\to 0+$:

$$\langle\Omega|T\Big\{O_j(x(t_j))\dots O_2(x(t_2))O_1(x(t_1))\Big\}|\Omega\rangle =$$

$$= \frac{1}{Z}\int Dy\, O_j(y(t_j))\dots O_2(y(t_2))O_1(y(t_1))e^{iS[y]} \tag{55}$$

((53) entspricht $\alpha = \pi/2$).

1.5 Erzeugende Funktionale

- Definition (erzeugendes Funktional):

$$Z[j] \;=\; \frac{\int Dy\, \exp\Big(-S_E[y] + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, j(\tau)y(\tau)\Big)}{\int Dy\, \exp\Big(-S_E[y]\Big)}. \tag{56}$$

- Ableitungen von $Z[j]$:

$$\frac{\delta Z[j]}{\delta j(\tau_1)}\bigg|_{j=0} \;=\; \frac{\int Dy\, y(\tau_1) \exp\Big(-S_E[y] + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, j(\tau)y(\tau)\Big)}{\int Dy\, \exp\Big(-S_E[y]\Big)}\bigg|_{j=0} \;=\; \langle\Omega|x(\tau_1)|\Omega\rangle \tag{57}$$

$$\frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(\tau_2)\delta j(\tau_1)}\bigg|_{j=0} \;=\; \ldots \;=\; \langle\Omega|T\Big\{x(\tau_2)x(\tau_1)\Big\}|\Omega\rangle \tag{58}$$

$\ldots$

$$\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(\tau_n)\ldots\delta j(\tau_2)\delta j(\tau_1)}\bigg|_{j=0} \;=\; \ldots \;=\; \langle\Omega|T\Big\{x(\tau_n)\ldots x(\tau_2)x(\tau_1)\Big\}|\Omega\rangle. \tag{59}$$

- **Ist das erzeugende Funktional $Z[j]$ bekannt, können sämtliche "n-Punkt-Funktionen" $\langle\Omega|T\{x(\tau_n)\ldots x(\tau_2)x(\tau_1)\}|\Omega\rangle$ durch simples Ableiten von $Z[j]$ gewonnen werden.**

1.5.1 Systeme mit quadratischer Wirkung

- Beispiele: HO, gekoppelte HOs (z.B. Modell für Schwingungen im Kristall), freies em Feld, String-Theorie.

- 1-dimensionale Version des Pfadintegrals in (56) ($A > 0$):

$$\int dy\, \exp\Big(-\frac{1}{2}yAy + jy\Big) \;=$$
$$=\; \int dy\, \exp\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}yAy + jy - \frac{1}{2}jA^{-1}j}_{=-\frac{1}{2}(A^{1/2}y - A^{-1/2}j)^2}\Big) \exp\Big(+\frac{1}{2}jA^{-1}j\Big) \;=\; \ldots \tag{60}$$

Jetzt Variablentransformation $y \to x = A^{1/2}y - A^{-1/2}j$,

$$\ldots \;=\; \int dx\, \frac{1}{A^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big) \exp\Big(+\frac{1}{2}jA^{-1}j\Big) \;=\; \Big(\frac{2\pi}{A}\Big)^{1/2} \exp\Big(+\frac{1}{2}jA^{-1}j\Big). \tag{61}$$

***** 06. Mai 2025 (5. Vorlesung) ******

- n-dimensionale Erweiterung (A reell, symmetrisch [damit Eigenvektoren orthogonal], positiv definit):

$$\int d^n y \, \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{y}A\mathbf{y} + \mathbf{j}\mathbf{y}\Big) \;=$$
$$= \int d^n y \, \exp\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}\mathbf{y}A\mathbf{y} + \mathbf{j}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{j}A^{-1}\mathbf{j}}_{=-\frac{1}{2}(A^{1/2}\mathbf{y} - A^{-1/2}\mathbf{j})^2}\Big) \exp\Big(+\frac{1}{2}\mathbf{j}A^{-1}\mathbf{j}\Big) \;=\; \ldots \tag{62}$$

(Wurzel und inverse Wurzel von A über Spektraldarstellung definiert, $A^{\pm 1/2} = \sum_j \mathbf{v}_j^\dagger \mathbf{v}_j \lambda^{\pm 1/2}$). Jetzt Variablentransformation $\mathbf{y} \to \mathbf{x} = A^{1/2}\mathbf{y} - A^{-1/2}\mathbf{j}$,

$$\ldots \;=\; \int d^n x \, \frac{1}{\det(A^{-1/2})} \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2\Big) \exp\Big(+\frac{1}{2}\mathbf{j}A^{-1}\mathbf{j}\Big) \;=$$
$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det(A))^{1/2}} \exp\Big(+\frac{1}{2}\mathbf{j}A^{-1}\mathbf{j}\Big). \tag{63}$$

Für das "n-dimensionale erzeugende Funktional" gilt damit

$$Z(\mathbf{j}) \;=\; \frac{\int d^n y \, \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{y}A\mathbf{y} + \mathbf{j}\mathbf{y}\Big)}{\int d^n y \, \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{y}A\mathbf{y}\Big)} \;=\; \exp\Big(+\frac{1}{2}\mathbf{j}A^{-1}\mathbf{j}\Big). \tag{64}$$

- QM, HO (ein "∞-dimensionales System"):

$$S_E[y] \;=\; \frac{1}{2}\int d\tau_1 \int d\tau_2 \, y(\tau_1) A(\tau_1, \tau_2) y(\tau_2) \tag{65}$$

$$A(\tau_1, \tau_2) \;=\; \delta(\tau_1 - \tau_2) m\Big(-\frac{d^2}{d\tau_2^2} + \omega^2\Big) \tag{66}$$

((66) erhält man nach partieller Integration und Verwendung von $y(\pm\infty) = 0$ [spezielle Wahl der RBs]). Damit

$$Z[j] \;=\; \exp\Big(+\frac{1}{2}\int d\tau_1 \int d\tau_2 \, j(\tau_1) A^{-1}(\tau_1, \tau_2) j(\tau_2)\Big). \tag{67}$$

1.5.2 Berechnung des erzeugenden Funktionals des HOs

- Das gesuchte A^{-1} ist Lösung von

$$\int d\tau_2 \, A(\tau_1, \tau_2) A^{-1}(\tau_2, \tau_3) \;=\; \delta(\tau_1 - \tau_3). \tag{68}$$

- Einsetzen von (66):

$$m\Big(-\frac{d^2}{d\tau_1^2} + \omega^2\Big) A^{-1}(\tau_1, \tau_3) \;=\; \delta(\tau_1 - \tau_3). \tag{69}$$

- Fourier-Transformation $\int d\tau_1\, e^{+i\nu\tau_1} \ldots$:

$$m\Big(\nu^2+\omega^2\Big) \underbrace{\int d\tau_1\, e^{+i\nu\tau_1} A^{-1}(\tau_1,\tau_3)}_{=\tilde{A}^{-1}(\nu,\tau_3)} \;=\; e^{+i\nu\tau_3} \tag{70}$$

(Forderung $A^{-1}(\pm\infty,\tau_3)=0$ lässt Oberflächenterme bei partieller Integration verschwinden; Forderung ist konsistent mit späterem Ergebnis für A^{-1} [Gleichung (73)]).

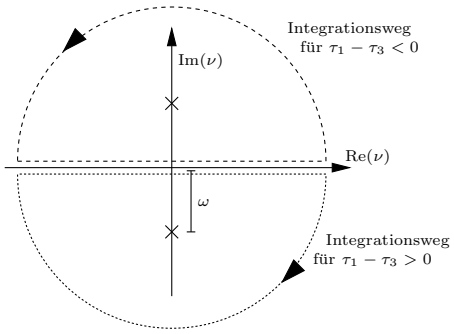
- Auflösen nach $\tilde{A}^{-1}$:

$$\tilde{A}^{-1}(\nu,\tau_3) \;=\; \frac{e^{+i\nu\tau_3}}{m(\nu^2+\omega^2)}. \tag{71}$$

- Fourier-Rücktransformation:

$$A^{-1}(\tau_1,\tau_3) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int d\nu\, e^{-i\nu\tau_1}\tilde{A}^{-1}(\nu,\tau_3) \;=\; \frac{1}{2\pi m}\int d\nu\, \frac{e^{-i\nu(\tau_1-\tau_3)}}{\nu^2+\omega^2}. \tag{72}$$

- Residuensatz (Pole bei $\nu=\pm i\omega$, bei $\tau_1-\tau_3>0$ Kontur in der unteren komplexen Halbebene schließen, bei $\tau_1-\tau_3<0$ Kontur in der oberen komplexen Halbebene schließen):



$$\begin{aligned} A^{-1}(\tau_1,\tau_3) \;&=\; \frac{1}{2\pi m}\int d\nu\, \frac{e^{-i\nu(\tau_1-\tau_3)}}{(\nu-i\omega)(\nu+i\omega)} \;= \\ &=\; \frac{1}{2\pi m}\left(\Theta(\tau_1-\tau_3)(-2\pi i)\frac{e^{-\omega(\tau_1-\tau_3)}}{-2i\omega}+\Theta(\tau_3-\tau_1)(+2\pi i)\frac{e^{-\omega(\tau_3-\tau_1)}}{+2i\omega}\right) \;= \\ &=\; \frac{e^{-\omega|\tau_1-\tau_3|}}{2m\omega}. \end{aligned} \tag{73}$$

- Erzeugendes Funktional des HOs:

$$Z[j] \;=\; \exp\left(\frac{1}{4m\omega}\int d\tau_1 \int d\tau_2\, j(\tau_1)e^{-\omega|\tau_1-\tau_2|}j(\tau_2)\right). \tag{74}$$

Erzeugendes Funktional für reelle Zeit

- Wick-Rotation $t = e^{-i\alpha}\tau$, Limes $\alpha \to 0+$.

- Verallgemeinerung des erzeugenden Funktionals (56), so dass (A) im Limes $\alpha \to 0+$ durch Funktionalableitungen Minkowski-n-Punkt-Funktionen gewonnen werden können und (B) für $\alpha = \pi/2$ das erzeugende Funktional Gleichung (56) entspricht:

$$Z[j] = \frac{\int Dy \, \exp\Big(iS[y] + i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, j(t)y(t)\Big)}{\int Dy \, \exp\Big(iS[y]\Big)} \tag{75}$$

$$S[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2 - V(y(t))\right) =$$

$$= e^{-i\alpha}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(e^{+2i\alpha}\frac{m}{2}\left(\frac{d}{d\tau}y(\tau)\right)^2 - V(y(\tau))\right) \tag{76}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, j(t)y(t) = e^{-i\alpha}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, j(\tau)y(\tau). \tag{77}$$

- Verallgemeinerung von (67) (Herleitung analog wie zwischen (56) und (67) so dass
  $\alpha \to 0+ \quad \to$ Minkowski-Version [schreibe i.d.R. t_j statt τ_j],
  $\alpha = \pi/2 \quad \to$ Gleichung (67)):

$$Z[j] = \exp\left(\frac{ie^{-i\alpha}}{2}\int d\tau_1 \int d\tau_2\, j(\tau_1)A^{-1}(\tau_1,\tau_2)j(\tau_2)\right) \tag{78}$$

$$A(\tau_1,\tau_2) = \delta(\tau_1-\tau_2)m\left(e^{+2i\alpha}\frac{d^2}{d\tau_2^2} + \omega^2\right). \tag{79}$$

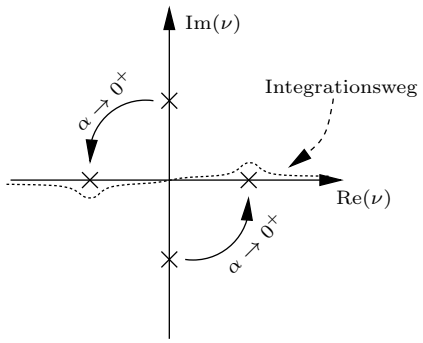
- Verallgemeinerung von (69):

$$m\left(e^{+2i\alpha}\frac{d^2}{d\tau_1^2} + \omega^2\right)A^{-1}(\tau_1,\tau_3) = \delta(\tau_1-\tau_3). \tag{80}$$

- Verallgemeinerung von (72):

$$A^{-1}(\tau_1,\tau_3) = \frac{1}{2\pi m}\int d\nu \, \frac{e^{-i\nu(\tau_1-\tau_3)}}{-e^{+2i\alpha}\nu^2 + \omega^2}. \tag{81}$$

- Verallgemeinerung von (73): Pole bei $+e^{-i\alpha}\omega$ und bei $-e^{-i\alpha}\omega$. Bei Wick-Rotation von Euklidischer zu reeller Zeit wird $-i\omega \to +\omega$ und $+i\omega \to -\omega$. Di Integration über die reelle Achse muss bei Grenzwertbildung $\alpha \to 0+$ also "unterhalb" des Pols bei $-\omega$ und "oberhalb" des Pols bei $+\omega$ verlaufen,



$$
\begin{aligned}
A^{-1}(\tau_1,\tau_3) &= -\frac{e^{-2i\alpha}}{2\pi m}\int d\nu\,\frac{e^{-i\nu(\tau_1-\tau_3)}}{(\nu+e^{-i\alpha}\omega)(\nu-e^{-i\alpha}\omega)} \quad = \\
&= -\frac{e^{-2i\alpha}}{2\pi m}\left(\Theta(\tau_1-\tau_3)(-2\pi i)\frac{e^{-ie^{-i\alpha}\omega(\tau_1-\tau_3)}}{+2e^{-i\alpha}\omega}+\Theta(\tau_3-\tau_1)(+2\pi i)\frac{e^{-ie^{-i\alpha}\omega(\tau_3-\tau_1)}}{-2e^{-i\alpha}\omega}\right) \quad = \\
&= \frac{ie^{-i\alpha}e^{-ie^{-i\alpha}\omega|\tau_1-\tau_3|}}{2m\omega}. \qquad (82)
\end{aligned}
$$

- Verallgemeinerung von (74):

$$
Z[j] = \exp\left(-\frac{e^{-2i\alpha}}{4m\omega}\int d\tau_1\int d\tau_2\, j(\tau_1)e^{-ie^{-i\alpha}\omega|\tau_1-\tau_2|}j(\tau_2)\right); \qquad (83)
$$

  die Minkowski-Version erhält man für $\alpha\to 0+$ (schreibe i.d.R. t_j statt τ_j),

$$
Z[j] = \exp\left(-\frac{1}{4m\omega}\int dt_1\int dt_2\, j(t_1)e^{-i\omega|t_1-t_2|}j(t_2)\right), \qquad (84)
$$

  Gleichung (74) erhält man für $\alpha=\pi/2$.

Physikalische Anwendung: Berechnung der Energiedifferenz von Grundzustand und erstem angeregten Zustand

- Parität ist Symmetrie des HOs, da $[H,P]=0$. Energieeigenzustände können damit nach ihrer Parität ($P=+$ oder $P=-$) klassifiziert werden.
- $|j\rangle$ und $|k\rangle$ bezeichnen in der folgenden Gleichung Energieeigenzustände des HOs mit identischer Parität. Dann gilt

$$
\langle j|x|k\rangle = -\langle j|P^\dagger xP|k\rangle = -P^2\langle j|x|k\rangle = -\langle j|x|k\rangle, \qquad (85)
$$

  woraus $\langle j|x|k\rangle=0$ folgt.

***** 09. Mai 2025 (6. Vorlesung) *****

- 2-Punkt-Funktion:

$$\langle\Omega|x(\tau)x(0)|\Omega\rangle \quad = \quad \langle\Omega|e^{+H\tau}x(0)e^{-H\tau}x(0)|\Omega\rangle \quad = \quad \sum_j \left|\langle\Omega|x|j\rangle\right|^2 e^{-(E_j-E_\Omega)\tau}. \tag{86}$$

Da $\langle\Omega|x|j\rangle = 0$, falls $|j\rangle$ die gleiche Parität wie $|\Omega\rangle$ ($P = +$) hat, kann $\sum_j$ auf Energieeigenzustände beschränkt werden, die umgekehrte Parität ($P = -$) haben. $|0\rangle$ bezeichnet damit den niedrigsten Energieeigenzustand mit $P = -$ (den ersten angeregten Zustand des HOs). Es gilt

$$\lim_{\tau\to\infty}\langle\Omega|x(\tau)x(0)|\Omega\rangle \quad = \quad \left|\langle\Omega|x|0\rangle\right|^2 e^{-(E_0-E_\Omega)\tau}. \tag{87}$$

- Die 2-Punkt-Funktion kann durch Ableiten des erzeugenden Funktionals einfach gewonnen werden (Gleichungen (58) und (74)):

$$\langle\Omega|x(\tau)x(0)|\Omega\rangle \quad = \quad \left.\frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(\tau)\delta j(0)}\right|_{j=0} \quad = \quad \frac{1}{2m\omega}e^{-\omega\tau}. \tag{88}$$

- Die Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und dem niedrigsten Energieeigenzustand umgekehrter Parität (die Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand) kann bei Vergleich von (87) und (88) abgelesen werden:
$E_0 - E_\Omega = \omega$.

- Dieses Vorgehen entspricht der Berechnung von Hadron-Massen in der QFT/QCD: Berechne die Zweipunktfunktion eines geeigneten Operators (zusammengesetzt aus Quark- und Gluon-Feldoperatoren), der analog zu $x|\Omega\rangle$ Energieeigenzustände aus einem durch Quantenzahlen ausgezeichneten Sektor anregt (für das Proton z.B. $I = 1/2$, $J = 1/2$, $P = +$). Die gesuchte Hadron-Masse kann dann aus dem exponentiellen Abfall für große Zeitseparationen τ abgelesen werden.

2 Pfadintegralquantisierung skalarer Felder

- Skalares Feld ϕ beschreibt Teilchen mit Spin 0 (elementare skalare Teilchen: Higgs-Boson; zusammengesetzte skalare Teilchen: Mesonen mit Spin 0).
- Feldtheorie entspricht mechanischem System mit unendlich vielen FHGs:
  - FHGs eines mechanischen Vielteilchensystems: $x_j(t)$.
  - Übergang zur Feldtheorie: Identifiziere $x \to \phi$ und $j \to \mathbf{x}$. Damit $x_j(t) \to \phi(\mathbf{x}, t)$.

2.1 Minkowski-Formulierung

- Übergangsamplitude:

$$\langle \phi_2(\mathbf{x}), t_2 | \phi_1(\mathbf{x}), t_1 \rangle \;=\; \langle \phi_2(\mathbf{x}) | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1(\mathbf{x}) \rangle \;=\; \int_{\phi(\mathbf{x},t_1)=\phi_1(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x},t_2)=\phi_2(\mathbf{x})} D\phi \, e^{iS[\phi]}. \tag{89}$$

  Dabei ist

$$\int D\phi \;=\; \int \prod_x d\phi(x) \quad , \quad S[\phi] \;=\; \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{90}$$

  die Wirkung des zu quantisierenden skalaren Feldes und $\phi_1(\mathbf{x})$ und $\phi_2(\mathbf{x})$ dessen RBs bei $t = t_1$ und $t = t_2$ (Herleitung von (89) wie in Kapitel 1).

- VEVs:

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \langle \Omega | T\Big\{ \phi(x_n) \ldots \phi(x_2)\phi(x_1) \Big\} | \Omega \rangle \;=$$

$$\;=\; \frac{1}{Z} \int D\phi \, \phi(x_n) \ldots \phi(x_2)\phi(x_1) e^{iS[\phi]} \tag{91}$$

$$Z \;=\; \int D\phi \, e^{iS[\phi]} \tag{92}$$

  (G_n bezeichnet man als n-Punkt-Funktionen oder Greensche Funktionen). Dabei steht $\int D\phi$ analog wie in der QM für RBs $\phi(\mathbf{x}, t = -\infty) = \phi(\mathbf{x}, t = +\infty) = 0$ (n-Punkt-Funktionen liefern physikalische Größen, z.B. Differenzen von Energieeigenwerten [entsprechen Hadron-Massen, siehe QM Beispiel in Abschnitt 1.5.2] oder S-Matrix-Elemente [siehe QFT 1, LSZ-Formel]).

- Vorteile des Pfadintegralformalismus (siehe auch Kapitel 1):
  - In offensichtlicher Weise von QM auf QFT übertragbar.
  - Häufig einfachere und systematischere Gestaltung von analytischen Rechnungen.
  - VEVs (91) können störungstheoretisch berechnet werden, Berechnung ist aber nicht auf Störungstheorie beschränkt. **Euklidische Pfadintegrale eignen sich zur numerischen Umsetzung.**

- Definition (erzeugendes Funktional):

$$Z[J] \;=\; \frac{\int D\phi\, \exp\Big(iS[\phi] + i\int d^4x\, J(x)\phi(x)\Big)}{\int D\phi\, \exp\Big(iS[\phi]\Big)} \tag{93}$$

(J wird häufig als äußeres Feld oder Quelle bezeichnet). Damit können n-Punkt-Funktionen durch Ableiten von $Z[J]$ gewonnen werden:

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\ldots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{94}$$

da

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\ldots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \;=\; (+i)^n \frac{1}{Z}\int D\phi\, \phi(x_n)\ldots\phi(x_2)\phi(x_1) e^{iS[\phi]}. \tag{95}$$

- Beispiel: Freies skalares Feld.
  - Wirkung:

$$S[\phi] \;=\; \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \;=$$
$$\;=\; \frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y\, \phi(x)\delta(x-y)\Big(-\Box^{(y)} - m^2\Big)\phi(y) \tag{96}$$

    (zugehörige BGl ist die Klein-Gordon-Gleichung $(\Box + m^2)\phi = 0$).
  - Da diese Theorie quadratisch ist, ergibt sich für das erzeugende Funktional

$$Z[J] \;=\; \exp\left(\frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y\, J(x)A^{-1}(x,y)J(y)\right) \tag{97}$$

$$A(x,y) \;=\; \delta(x-y)\Big(\Box^{(y)} + m^2\Big) \tag{98}$$

    (siehe Abschnitt 1.5).
  - A^{-1} ist Lösung von

$$\int d^4y\, \delta(x-y)\Big(\Box^{(y)} + m^2\Big)A^{-1}(y,z) \;=\; \Big(\Box + m^2\Big)A^{-1}(x,z) \;=\; \delta(x-z) \tag{99}$$

    (in diesem Kontext häufig auch Notation $\Delta_F = -iA^{-1}$, wobei Δ_F als Feynman-Propagator bezeichnet wird [warum "Propagator" wird in Kürze ersichtlich, Gleichung (102)]). Fourier-Transformation $\int d^4x\, e^{+ipx}\ldots$ liefert

$$i\Big(-p^2 + m^2\Big)\tilde{\Delta}_F(p,z) \;=\; e^{+ipz}, \tag{100}$$

    Fourier-Rücktransformation

$$\Delta_F(x,z) \;=\; \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \frac{e^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2} \;=$$
$$\;=\; \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^3p\, e^{+i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{z})}\int dp_0\, \frac{e^{-ip_0(x_0-z_0)}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \;=$$
$$\;=\; \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^3p\, e^{+i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{z})}\int dp_0\, \frac{e^{-ip_0(x_0-z_0)}}{(p_0 + \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})(p_0 - \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})}. \tag{101}$$

Anwendung des Residuensatzes, wobei Pole $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ genau auf dem Integrationsweg (der reellen Achse liegen). Eindeutige und sinnvolle Vorschrift, ob Pole innerhalb oder außerhalb des geschlossenen Integrationswegs liegen (also infinitesimal oberhalb oder unterhalb der reellen Achse) über aus dem Euklidischen kommende Wick-Rotation (siehe Abschnitt 2.2).

– 2-Punkt-Funktion:

$$G_2(x_1,x_2) \;=\; -\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\Delta_F(x_1,x_2)+\Delta_F(x_2,x_1)\Big) \;= \\ =\; \Delta_F(x_1,x_2) \tag{102}$$

($\Delta_F(x_1,x_2)=\Delta_F(x_1,x_2)$ ersichtlich aus (101)). $G_2(x_1,x_2)$ ist beim freien skalaren Feld die Greensche Funktion des "Klein-Gordon-Operators" $i\delta(x_1-x_2)(\Box^{(x_2)}+m^2)$. $\Delta_F(x_1,x_2)=G_2(x_1,x_2)=\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|\Omega\rangle$ beschreibt die Propagation eines ϕ-Teilchens vom früheren Raumzeitpunkt x_1 oder x_2 zum späteren Raumzeitpunkt x_2 oder x_1 (genauer: $\phi(x)|\Omega\rangle$ erzeugt ein Teilchen bei x [siehe z.B. [3], Ende von Abschnitt 2.3]; die QM Übergangsamplitude $\langle\mathbf{x}_2,t_2|\mathbf{x}_1,t_1\rangle$ ist damit das physikalische Äquivalent zu $\Delta_F(x_1,x_2)$ in der QFT [falls $t_1<t_2$]; das mathematische QM Äquivalent ist dagegen $\langle\Omega|T\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\}|\Omega\rangle$).

2.2 Euklidische Formulierung

- Minkowski- und Euklidische Versionen skalarer QFTs sind über die Wick-Rotation $t=e^{-i\alpha}\tau$ verbunden (Minkowski: Limes $\alpha\to 0^+$; Euklidisch: $\alpha=\pi/2$; siehe auch Abschnitt 1.3).

- Übergangsamplitude:

$$\langle\phi_2(\mathbf{x}),\tau_2|\phi_1(\mathbf{x}),\tau_1\rangle \;=\; \langle\phi_2(\mathbf{x})|e^{-ie^{-i\alpha}H(\tau_2-\tau_1)}|\phi_1(\mathbf{x})\rangle \;=\; \int_{\phi(\mathbf{x},\tau_1)=\phi_1(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x},\tau_2)=\phi_2(\mathbf{x})} D\phi\, e^{iS[\phi]} \tag{103}$$

$$S[\phi] \;=\; e^{-i\alpha}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^3x \left(e^{+2i\alpha}\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-V(\phi)\right), \tag{104}$$

wobei für $\alpha=\pi/2$ analog zur QM eine Euklidische Wirkung definiert wird,

$$-S_E[\phi] \;=\; iS[\phi]\Big|_{\alpha=\pi/2} \;=\; -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^3x \left(\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+V(\phi)\right). \tag{105}$$

- VEVs haben die gleiche Form wie im Minkowski-Formalismus (Gleichung (91)),

$$G_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) \;=\; \langle\Omega|T\Big\{\phi(x_n)\ldots\phi(x_2)\phi(x_1)\Big\}|\Omega\rangle \;= \\ =\; \frac{1}{Z}\int D\phi\,\phi(x_n)\ldots\phi(x_2)\phi(x_1)e^{iS[\phi]}, \tag{106}$$

wobei die "verallgemeinerte Wirkung" (104) zu verwenden ist, z.B. für $\alpha=\pi/2$ $e^{iS[\phi]}\to e^{-S_E[\phi]}$.

- Erzeugendes Funktional und n-Punkt-Funktionen:

$$Z[J] = \frac{\int D\phi \, \exp\Big(iS[\phi] + ie^{-i\alpha}\int d^4x\, J(x)\phi(x)\Big)}{\int D\phi \, \exp\Big(iS[\phi]\Big)} \tag{107}$$

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{(-ie^{+i\alpha})^n}_{=1 \text{ für } \alpha=\pi/2} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\ldots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}. \tag{108}$$

- Beispiel: Freies skalares Feld.
  - Wirkung:

$$S[\phi] = e^{-i\alpha}\int d^4x \left(e^{+2i\alpha}\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) =$$
$$= \frac{e^{-i\alpha}}{2}\int d^4x \int d^4y\, \phi(x)\delta(x-y)\Big(-e^{+2i\alpha}\partial^2_{\tau^{(y)}} + \triangle^{(y)} - m^2\Big)\phi(y), \tag{109}$$

    wobei $\int d^4x = \int d\tau \int d^3x$.
  - Erzeugendes Funktional:

$$Z[J] = \exp\left(\frac{ie^{-i\alpha}}{2}\int d^4x \int d^4y\, J(x)A^{-1}(x,y)J(y)\right) \tag{110}$$

$$A(x,y) = \delta(x-y)\Big(e^{+2i\alpha}\partial^2_{\tau^{(y)}} - \triangle^{(y)} + m^2\Big). \tag{111}$$

  - A^{-1} ist Lösung von

$$\int d^4y\, \delta(x-y)\Big(e^{+2i\alpha}\partial^2_{\tau^{(y)}} - \triangle^{(y)} + m^2\Big)A^{-1}(y,z) =$$
$$= \Big(e^{+2i\alpha}\partial^2_\tau - \triangle + m^2\Big)A^{-1}(x,z) = \delta(x-z) \tag{112}$$

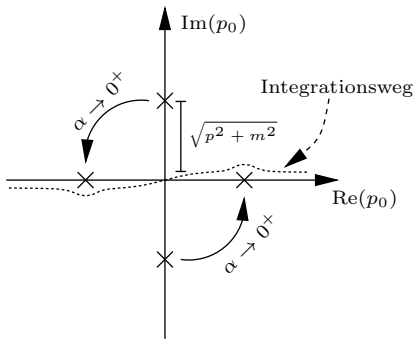
    (Notation $\Delta_F = -ie^{+i\alpha}A^{-1}$). Fourier-Transformation $\int d^4x\, e^{+ipx}\ldots$ liefert

$$-ie^{-i\alpha}\Big(e^{+2i\alpha}p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2\Big)\tilde{\Delta}_F(p,z) = e^{+ipz}, \tag{113}$$

    Fourier-Rücktransformation

$$\Delta_F(x,z) = \frac{ie^{+i\alpha}}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \frac{e^{-ip(x-z)}}{e^{+2i\alpha}p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} =$$
$$= \frac{ie^{-i\alpha}}{(2\pi)^4}\int d^3p\, e^{+i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{z})}\int dp_0\, \frac{e^{-ip_0(x_0-z_0)}}{p_0^2 - e^{-2i\alpha}(\mathbf{p}^2+m^2)} =$$
$$= \frac{ie^{-i\alpha}}{(2\pi)^4}\int d^3p\, e^{+i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{z})}\int dp_0\, \frac{e^{-ip_0(x_0-z_0)}}{(p_0 + e^{-i\alpha}\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})(p_0 - e^{-i\alpha}\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})}. \tag{114}$$

    Anwendung des Residuensatzes, Pole $\pm e^{-i\alpha}\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ für $\alpha > 0$ abseits des Integrationswegs.



Definiere reelle Zeit als Limes $\alpha \to 0+$, dann auch im "Minkowski-Grenzfall" eindeutige und sinnvolle Vorschrift, ob Pole innerhalb oder außerhalb des geschlossenen Integrationswegs liegen (Pol $+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ unterhalb der reellen Achse, Pol $-\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ oberhalb der reellen Achse). Man schreibt daher im Minkowski-Grenzfall auch (Ausgangspunkt ist die zweite Zeile von (114))

$$\ldots \quad = \quad \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3p\, e^{+i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{z})} \int dp_0\, \frac{e^{-ip_0(x_0-z_0)}}{p_0^2 - (\mathbf{p}^2+m^2) + i \underbrace{2\alpha(\mathbf{p}^2+m^2)}_{=\epsilon>0}} \quad =$$

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p\, \frac{e^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{115}$$

wobei ϵ eine infinitesimale positive Größe ist.

– 2-Punkt-Funktion:

$$G_2(x_1, x_2) \quad = \quad \Delta_F(x_1, x_2) \tag{116}$$

(die "eigenartige" Definition $\Delta_F = -ie^{+i\alpha}A^{-1}$ wurde gewählt, damit (116) α-unabhängig ist).

3 Störungsentwicklung für WW Theorien (am Beispiel von ϕ^4-Theorie)

- Pfadintegrale für WW Theorien sind nicht quadratisch, daher analytisch i.A. nicht zu lösen. Verwende Störungstheorie (analytische Näherung, im Folgenden diskutiert) oder Gitterfeldtheorie (numerische, "exakte" Lösung, siehe Kapitel 9).

3.1 Störungsentwicklung von n-Punkt-Funktionen

Umschreiben des erzeugenden Funktionals für WW Theorien

- Teile die Wirkung in einen analytisch lösbaren quadratischen Anteil $S_0[\phi]$ und einen WW Anteil $S_I[\phi]$ (enthält kubische und höhere Potenzen von ϕ) auf: $S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi]$.
- Im Folgenden ϕ^4-Theorie im Euklidischen:

$$S[\phi] \;=\; \underbrace{\frac{1}{2}\int d^4x\,\phi(x)\Big(-\Box + m^2\Big)\phi(x)}_{=S_0[\phi]} + \underbrace{\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,\phi^4(x)}_{=S_I[\phi]} \tag{117}$$

  mit $\Box = \partial_t^2 + \triangle$ (ab jetzt "vereinfachte Notation", t bezeichnet Euklidische Zeit, untere Indizes $_E$ z.B. bei der Wirkung S_E weggelassen, etc.).

- Erzeugendes Funktional:

$$\begin{aligned}
Z[J] \;&=\; \frac{1}{Z}\int D\phi\,\exp\Big(-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \int d^4x\,J(x)\phi(x)\Big) \;= \\
&=\; \frac{1}{Z}\int D\phi\,\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\Big(-\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,\phi^4(x)\Big)^j\Big)\exp\Big(-S_0[\phi] + \int d^4x\,J(x)\phi(x)\Big) \;= \\
&=\; \frac{1}{Z}\int D\phi\,\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\Big(-\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,\Big(\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)^4\Big)^j\Big) \\
&\qquad \exp\Big(-S_0[\phi] + \int d^4x\,J(x)\phi(x)\Big) \;= \\
&=\; \frac{Z_0}{Z}\exp\Big(-S_I[\delta/\delta J]\Big)Z_0[J] \;= \\
&=\; \frac{Z_0}{Z}\exp\Big(-S_I[\delta/\delta J]\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\,J(x)\Delta_F(x,y)J(y)\Big),
\end{aligned} \tag{118}$$

  wobei (110) verwendet wurde und

$$Z \;=\; \int D\phi\,\exp\Big(-S_0[\phi] - S_I[\phi]\Big) \quad,\quad Z_0 \;=\; \int D\phi\,\exp\Big(-S_0[\phi]\Big). \tag{119}$$

- n-Punkt-Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&G_n(x_1,\ldots,x_n) \;=\\
&\quad= \frac{Z_0}{Z}\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\exp\Big(-S_I[\delta/\delta J]\Big)\\
&\qquad \exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\, J(x)\Delta_F(x,y)J(y)\right)\Big|_{J=0}. \qquad (120)
\end{aligned}
$$

Störungsentwicklung

- Entwicklung des Exponentialanteils von (120) in Potenzen der Kopplungskonstante λ:

$$
\begin{aligned}
&\exp\Big(-S_I[\delta/\delta J]\Big)\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=\\
&\quad= \exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)\Big(1+\lambda W_1[J]+\lambda^2 W_2[J]+\ldots\Big), \qquad (121)
\end{aligned}
$$

wobei abkürzend hier und im Folgenden

$$
(\phi,\psi) \;=\; \int d^4x\,\phi(x)\psi(x) \quad,\quad (\Delta_F J)(x) \;=\; \int d^4y\,\Delta_F(x,y)J(y) \qquad (122)
$$

verwendet wird. Die ersten beiden "WW-Terme" lauten

$$
\begin{aligned}
W_1[J] \;&=\; -\frac{1}{4!}\exp\left(-\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)\left(\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \qquad (123)\\
W_2[J] \;&=\\
&\quad= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4!}\right)^2\exp\left(-\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)\left\{\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\}^2\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=\\
&\quad= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4!}\right)^2\exp\left(-\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)\{\ldots\}\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)\\
&\qquad \{\ldots\}\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=\\
&\quad= -\frac{1}{2\times 4!}\exp\left(-\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)\left\{\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\}\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right)W_1[J]. \qquad (124)
\end{aligned}
$$

- Ableitungen von $\exp(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J))$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J(x)}\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=\\
&\quad= \frac{1}{2}\int d^4y_1\Big(\Delta_F(x,y_1)J(y_1)+J(y_1)\Delta_F(y_1,x)\Big)\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=\\
&\quad= \left(\int d^4y_1\,\Delta_F(x,y_1)J(y_1)\right)\exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \qquad (125)
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=$$
$$= \left(\Delta_F(x,x) + \int d^4y_1 \int d^4y_2\, \Delta_F(x,y_1)\Delta_F(x,y_2)J(y_1)J(y_2)\right) \exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \tag{126}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=$$
$$= \left(3\Delta_F(x,x)\int d^4y_1\, \Delta_F(x,y_1)J(y_1) + \int d^4y_1 \ldots \int d^4y_3\, \Delta_F(x,y_1)\ldots\Delta_F(x,y_3)J(y_1)\ldots J(y_3)\right) \exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \tag{127}$$

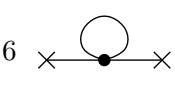
$$\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right) \;=$$
$$= \left(3\Big(\Delta_F(x,x)\Big)^2 + 6\Delta_F(x,x)\int d^4y_1 \int d^4y_2\, \Delta_F(x,y_1)\Delta_F(x,y_2)J(y_1)J(y_2) + \int d^4y_1 \ldots \int d^4y_4\, \Delta_F(x,y_1)\ldots\Delta_F(x,y_4)J(y_1)\ldots J(y_4)\right) \exp\left(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\right), \tag{128}$$

wobei $\Delta_F(x,y) = \Delta_F(y,x)$ verwendet wurde (ersichtlich aus (114)).

- Für den WW-Term W_1 folgt

$$W_1[J] \;= \;-\frac{1}{4!}\int d^4x \left(3\Big(\Delta_F(x,x)\Big)^2 + 6\Delta_F(x,x)\int d^4y_1 \int d^4y_2\, \Delta_F(x,y_1)\Delta_F(x,y_2)J(y_1)J(y_2) + \int d^4y_1 \ldots \int d^4y_4\, \Delta_F(x,y_1)\ldots\Delta_F(x,y_4)J(y_1)\ldots J(y_4)\right); \tag{129}$$

  diagrammatisch:

  - $W_1[J] = -\frac{1}{4!}\Big(3$  $+ 6$  $+$  $\Big)$.
  - Faktor $J(y_j)$ für jeden äußeren Punkt y_j.
  - $\Delta_F(y_j,y_k)$ für jede Linie von y_j nach y_k ("Bewegung eines freien ϕ-Teilchens von y_j nach y_k).
  - Integration über alle inneren Punkte (hier nur x) und alle äußeren Punkte y_j.
  - Vorfaktoren auch durch einfache kombinatorische Überlegungen erhältlich: Wieviele Möglichkeiten gibt es, die unterscheidbaren vier Beine eines WW-Punktes (Vertex) zu verteilen (äußere Punkte dabei ununterscheidbar)?

  - ∗ Vakuumdiagramm: 1 mit 2 verbinden (dann folgt zwangsläufig 3 mit 4), 1 mit 3, 1 mit 4, also Faktor 3.
  - ∗ "2-Punkt-Diagramm": 1 mit 2 zum "Bubble" verbinden (dann bilden zwangsläufig 3 und 4 die äußeren Linien), 1 mit 3, 1 mit 4, 2 mit 3, 2 mit 4, 3 mit 4, also Faktor 6.
  - ∗ "4-Punkt-Diagramm": Nur eine Möglichkeit, also Faktor 1.
- Bildhafte Schreibweise von Gleichungen zusammen mit mathematischen Übersetzungsvorschriften und kombinatorischen Regeln (wie hier exemplarisch gezeigt) werden als Feynman-Regeln bezeichnet.

****** 16. Mai 2025 (8. Vorlesung) ******

- n-Punkt-Funktionen durch Ableiten (Gleichung (120)), z.B.

$$G_2(y_1,y_2) \;=\; \frac{Z_0}{Z}\frac{\delta^2}{\delta J(y_1)\delta J(y_2)}\exp\Big(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\Big)\Big(1+\lambda W_1[J]+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big)\Big|_{J=0} \;= \\ =\;\ldots \tag{130}$$

  Die Ableitungen wirken entweder beide auf $\exp(\ldots)$ oder beide auf $(1+\lambda W_1[J]+\ldots)$, sonst gibt es wegen $J=0$ keinen Beitrag zur 2-Punkt-Funktion. Relevante Terme:

  - Z_0/Z (setze $J=0$ in (118), verwende $Z[J=0]=1$ sowie (121)):

$$\frac{Z_0}{Z} \;=\; \Big(\exp\Big(-S_I[\delta/\delta J]\Big)\exp\Big(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\Big)\Big)^{-1}\Big|_{J=0} \;= \\ =\; \Big(1+\lambda W_1[0]+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big)^{-1} \;=\; \Big(1-\lambda\frac{3}{4!}\int d^4x\,\Big(\Delta_F(x,x)\Big)^2+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big)^{-1} \;= \\ =1+\lambda\frac{3}{4!}\int d^4x\,\Big(\Delta_F(x,x)\Big)^2+\mathcal{O}(\lambda^2). \tag{131}$$

  - Ableitung auf $\exp(\ldots)$:

$$\frac{\delta^2}{\delta J(y_1)\delta J(y_2)}\exp\Big(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\Big)\Big|_{J=0}\Big(1+\lambda W_1[0]+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big) \;= \\ =\;\Delta_F(y_1,y_2)\Big(1-\lambda\frac{3}{4!}\int d^4x\,\Big(\Delta_F(x,x)\Big)^2+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big). \tag{132}$$

  - Ableitung auf $(1+\lambda W_1[J]+\ldots)$:

$$\exp\Big(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\Big)\frac{\delta^2}{\delta J(y_1)\delta J(y_2)}\Big(1+\lambda W_1[J]+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big)\Big|_{J=0} \;= \\ =\;-\lambda\frac{1}{2}\int d^4x\,\Delta_F(x,x)\Delta_F(x,y_1)\Delta_F(x,y_2)+\mathcal{O}(\lambda^2). \tag{133}$$

  - der Normierungsfaktor Z/Z_0 entfernt hier gerade das in (132) entstandene "Vakuumdiagramm". Es gilt allgemein:
    Z/Z_0 entfernt sämtliche Vakuumdiagramme (auch solche die in Produkten mit Nicht-Vakuumdiagrammen auftreten) in $Z[J]$ und damit auch in n-Punkt-Funktionen G_n bis zu beliebig hoher Ordnung in λ.
    (ohne Beweis)

$$G_2(y_1,y_2) \;=\; \frac{\times\!\!\longrightarrow\!\!\times \;-\;\lambda\tfrac{3}{4!}\;\times\!\!\circlearrowright\!\!\times \;-\;\lambda\tfrac{1}{2}\;\times\!\!\circlearrowright\!\!\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\times \;+\;\mathcal{O}(\lambda^2)}{\underbrace{1-\lambda\frac{3}{4!}\;\circlearrowright\!\bullet\!\circlearrowright \;+\;\mathcal{O}(\lambda^2)}_{=Z/Z_0}} \;=$$

$$\;=\; \times\!\!\longrightarrow\!\!\times \;-\;\lambda\frac{1}{2}\;\times\!\!\circlearrowright\!\!\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\times \;+\;\mathcal{O}(\lambda^2).$$

Endergebnis:

$$G_2(y_1,y_2) \;=\; \Delta_F(y_1,y_2) - \lambda\frac{1}{2}\int d^4x\,\Delta_F(x,x)\Delta_F(x,y_1)\Delta_F(x,y_2) + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{134}$$

"Interpretation": WW korrigiert freie Bewegung durch Aussenden und Absorbieren eines ϕ-Teilchens.

- Einsetzen des Propagators in "Impulsdarstellung" (Gleichung (114), $\alpha = \pi/2$)

$$\Delta_F(x-y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2+m^2} \tag{135}$$

liefert

$$\begin{aligned} G_2(y_1,y_2) \;&= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{-ip(y_1-y_2)}}{p^2+m^2} \\ &\quad -\lambda\frac{1}{2}\int d^4x\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{1}{k^2+m^2} \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1\,\frac{e^{-ip_1(x-y_1)}}{p_1^2+m^2}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\,\frac{e^{-ip_2(x-y_2)}}{p_2^2+m^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \;= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1\,e^{-ip_1y_1}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\,e^{-ip_2y_2} \\ &\quad \underbrace{\left((2\pi)^4\delta(p_1+p_2)\frac{1}{p_1^2+m^2} - \lambda\frac{1}{2}\int d^4k\,\delta(p_1+p_2)\frac{1}{k^2+m^2}\frac{1}{p_1^2+m^2}\frac{1}{p_2^2+m^2}\right)}_{=\tilde{G}_2(p_1,p_2)+\mathcal{O}(\lambda^2)} \\ &\quad +\mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned} \tag{136}$$

wobei $\tilde{G}_2$ die 2-Punkt-Funktion im "Impulsraum" ist. Oft verwendet man auch Feynman-Regeln im Impulsraum:

  - Diagramme wie in der Abbildung oben.
  - Jede Linie muss mit einem Impuls p_j beschriftet werden, der eine Richtung besitzt. Diese liefert dann
    $$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_j\,\frac{1}{p_j^2+m^2}. \tag{137}$$

– Jeder WW-Punkt liefert eine impulserhaltende δ-Funktion

$$-(2\pi)^4 \frac{\lambda}{4!} \delta\Big(\sum_j p_j \Big), \tag{138}$$

wobei die p_j die einlaufenden Impulse sind.

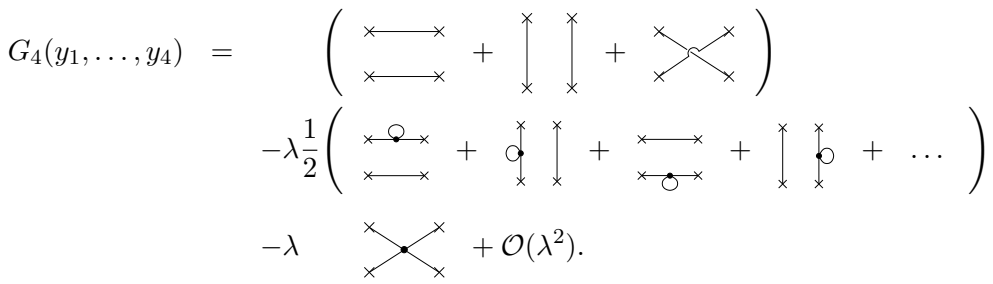
– Jeder äußere Punkt y_k liefert $e^{-ip_j y_k}$, wobei p_j der vom äußeren Punkt weglaufende Impuls ist.

– Kombinatorische Vorfaktoren analog wie im "Ortsraum".

- G_4 analog wie G_2,

$$\begin{aligned} G_4(y_1,\ldots,y_4) \;&= \\ &= \Big(\Delta_F(y_1,y_2)\Delta_F(y_3,y_4) + 2 \text{ weitere Terme}\Big) \\ &\quad -\lambda\frac{1}{2}\Big(\Delta_F(y_1,y_2)\int d^4x\, \Delta_F(x,x)\Delta_F(x,y_3)\Delta_F(x,y_4) + 5 \text{ weitere Terme}\Big) \\ &\quad -\lambda\int d^4x\, \Delta_F(x,y_1)\ldots\Delta_F(x,y_4) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \tag{139}$$

bzw. graphisch

$G_4(y_1,\ldots,y_4) \;=$ 

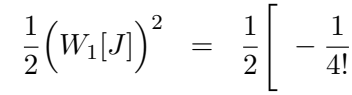
- Berechnung von WW-Term W_2 analog wie von W_1 ... nur deutlich aufwändiger:

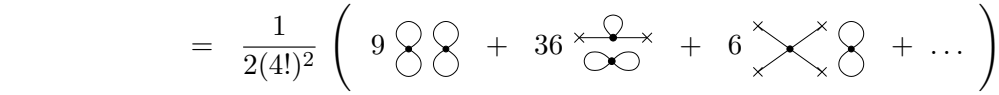
– Startpunkt sind (124) und (129):

$$\begin{aligned} W_2[J] \;&= \\ &= -\frac{1}{2\times 4!}\exp\Big(-\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\Big)\Big\{\int d^4x_2 \left(\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)^4\Big\}\exp\Big(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\Big) \\ &\quad W_1[J] \end{aligned} \tag{140}$$

$$\begin{aligned} W_1[J] \;&= \\ &= -\frac{1}{4!}\int d^4x_1 \Big(3\Big(\Delta_F(x_1,x_1)\Big)^2 \\ &\quad +6\Delta_F(x_1,x_1)\int d^4\tilde{y}_1 \int d^4\tilde{y}_2\, \Delta_F(x_1,\tilde{y}_1)\Delta_F(x_1,\tilde{y}_2)J(\tilde{y}_1)J(\tilde{y}_2) \\ &\quad +\int d^4\tilde{y}_1 \ldots \int d^4\tilde{y}_4\, \Delta_F(x_1,\tilde{y}_1)\ldots\Delta_F(x_1,\tilde{y}_4)J(\tilde{y}_1)\ldots J(\tilde{y}_4)\Big). \end{aligned} \tag{141}$$

– Alle vier $\delta/\delta J(x_2)$-Ableitungen wirken auf $\exp(\ldots)$
→ Beitrag zu $W_2[J]$ ist

$$\frac{1}{2}\Big(W_1[J]\Big)^2 \;=\; \frac{1}{2}\Big[\,-\frac{1}{4!}\Big($$  $$\Big)\Big]^2 \;=$$

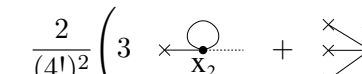
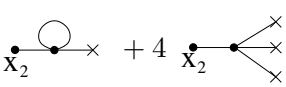
$$=\; \frac{1}{2(4!)^2}\Big($$  $$\Big)$$

((123) wurde verwendet).

– Drei der vier $\delta/\delta J(x_2)$-Ableitungen wirken auf $\exp(\ldots)$
→ Beitrag zu $W_2[J]$ ist

$$4\Big(-\frac{1}{2\times 4!}\Big)\int d^4x_2$$
$$\Big(3\Delta_F(x_2,x_2)\int d^4y_1\,\Delta_F(x_2,y_1)J(y_1)$$
$$+\int d^4y_1\,\ldots\int d^4y_3\,\Delta_F(x_2,y_1)\ldots\Delta_F(x_2,y_3)J(y_1)\ldots J(y_3)\Big)$$
$$\Big(-\frac{1}{4!}\Big)\int d^4x_1\,\Delta_F(x_1,x_2)$$
$$\Big(12\Delta_F(x_1,x_1)\int d^4\tilde{y}_1\,\Delta_F(x_1,\tilde{y}_1)J(\tilde{y}_1)$$
$$+4\int d^4\tilde{y}_1\,\ldots\int d^4\tilde{y}_3\,\Delta_F(x_1,\tilde{y}_1)\ldots\Delta_F(x_1,\tilde{y}_3)J(\tilde{y}_1)\ldots J(\tilde{y}_3)\Big) \;=$$
$$=\; \frac{1}{8}\int d^4y_1\int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4y_2$$
$$J(y_1)\Delta_F(y_1,x_1)\Delta_F(x_1,x_1)\Delta_F(x_1,x_2)\Delta_F(x_2,x_2)\Delta_F(x_2,y_2)J(y_2)$$
$$+\text{zwei weitere “Diagramme} \qquad (142)$$

bzw. graphisch

$$\frac{2}{(4!)^2}\Big($$  $$\Big)\cdot\Big($$  $$\Big) =$$

$$=\; \frac{1}{8}$$  $$+\ldots$$

– Zwei, eine und keine der vier $\delta/\delta J(x_2)$-Ableitungen wirken auf $\exp(\ldots)$
→ ... (Hausaufgabe).

– Beitrag $(1/2)(W_1[J])^2$ liefert nicht-zusammenhängende Diagramme.

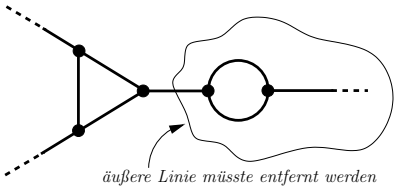
– Alle anderen Beiträge liefern ausschließlich zusammenhängende Diagramme (jede $\delta/\delta J(x_2)$-Ableitung angewandt auf $W_1[J]$ liefert $\Delta_F(x_1,x_2)$ und verbindet damit W_1-Diagramme mit $\delta^n\exp(\ldots)/\delta J(x_2)$-Diagrammen).

3.2 Erzeugendes Funktional für zusammenhängende Diagramme

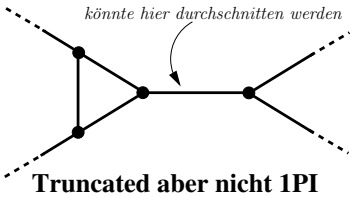
- $G_4(y_1, \ldots, y_4)$ (Gleichung (139)) enthält zwei Klassen von Diagrammen:
  - Ein zusammenhängendes Diagramm,
    $$-\lambda \int d^4x \, \Delta_F(x, y_1) \ldots \Delta_F(x, y_4). \tag{143}$$
    Solche Diagramme beschreiben "echte" 4-Teilchen-WW.
  - Nicht-zusammenhängende Diagramme, z.B.
    $$\Delta_F(y_1, y_2)\Delta_F(y_3, y_4) + 2 \text{ weitere Terme.} \tag{144}$$
    Solche Diagramme beschreiben zwei unabhängige 2-Teilchen-WWs.
- Ist man an zusammenhängenden n-Punkt-Funktionen $G_n^c(x_1, \ldots, x_n)$ interessiert, also nur an Diagrammen, die echte n-Teilchen WWs beschreiben, verwendet man an Stelle von $Z[J]$ das erzeugende Funktional
  $$W[J] \;=\; \ln\Big(Z[J]\Big). \tag{145}$$
  Durch Ableiten erhält man zusammenhängende n-Punkt-Funktionen,
  $$G_n^c(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \ldots \delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{146}$$
  (der obere Index ^{c} steht für "connected").
- Beweis bis einschließlich $\mathcal{O}(\lambda^2)$:
  - Kombination von (118) und (121)) liefert
    $$Z[J] \;=\; \frac{Z_0}{Z} \exp\bigg(+ \frac{1}{2}(J, \Delta_F J)\bigg)\bigg(1 + \lambda W_1[J] + \lambda^2 W_2[J] + \ldots\bigg) \tag{147}$$
    bzw.
    $$W[J] \;=\; \ln\left(\frac{Z_0}{Z}\right) + \frac{1}{2}(J, \Delta_F J) + \lambda W_1[J] + \lambda^2\bigg(W_2[J] - \frac{1}{2}\Big(W_1[J]\Big)^2\bigg) + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{148}$$
    $(\ln(1+\epsilon) = \epsilon - \epsilon^2/2 + \mathcal{O}(\epsilon^3))$.
  - Ableitungen von $W[J]$, anschließend $J = 0$ (Gleichung (146)):
    - $\ln(Z_0/Z)$ ist J-unabhängig, fällt damit weg.
    - $\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)$ trägt nur mit $\Delta_F(x_1, x_2)$ zu $G_2^c(x_1, x_2)$ bei, entspricht damit freier Bewegung eines ϕ-Teilchens von x_1 nach x_2, ist $\mathcal{O}(\lambda^0)$.
    - $\lambda W_1[J]$ enthält nur zusammenhängende Diagramme (Gleichung (129)), trägt zu $G_2^c(x_1, x_2)$ und $G_4^c(x_1, \ldots, x_4)$ bei, ist $\mathcal{O}(\lambda^1)$.
    - $\lambda^2(W_2[J] - \frac{1}{2}(W_1[J])^2)$ enthält nur zusammenhängende Diagramme (siehe abschließende Bemerkungen von Abschnitt 3.1), trägt zu $G_2^c(x_1, x_2)$, $G_4^c(x_1, \ldots, x_4)$ und $G_6^c(x_1, \ldots, x_6)$ bei, ist $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

3.3 Erzeugendes Funktional für Truncated und Proper Diagrams

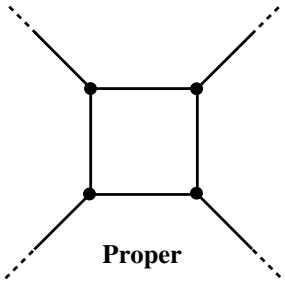
- Bisher diskutierte spezielle Diagrammtypen:
  - **Vakuumdiagramme** (keine äußeren Linien).
  - **Zusammenhängende Diagramme**.
- Weitere spezielle Diagrammtypen:
  - **Truncated Diagrams**: Zusammenhängende Diagramme, deren äußere Linien (einschließlich WWs) entfernt wurden (präzise Definition weiter unten).



Non-Truncated



Truncated aber nicht 1PI



Proper

  - **Proper Diagrams** bzw. **1PI Diagrams** (1PI = 1 Particle Irreducible): Zusammenhängende Truncated Diagrams, die nach Entfernen einer beliebigen Linie noch immer zusammenhängen.
  - **Proper Functions**: 1PI Truncated n-Punkt-Funktionen. Proper Functions bilden fundamentale Bausteine der Störungstheorie (Integrale über interne Impulse können in den zugehörigen Teildiagramme, d.h. den Bausteinen eines eventuell komplexeren Diagramms, unabhängig ausgeführt werden). Proper Functions sind daher wichtig im Hinblick auf Renormierung (jeder Baustein muss für sich "endlich gemacht" werden).
- Legendre-Transformation in der Mechanik: Übergang von der Lagrange-Funktion zur Hamilton-Funktion,

$$H(p_j, q_j) \;=\; \sum_j \dot{q}_j p_j - L(\dot{q}_j, q_j) \quad , \quad p_j \;=\; \frac{\partial L(\dot{q}_j, q_j)}{\partial \dot{q}_j}. \tag{149}$$

- Legendre-Transformation von $W[J]$ liefert ein weiteres erzeugendes Funktional:

$$\Gamma[\varphi] \;=\; \int d^4x\, J(x)\varphi(x) - W[J] \quad , \quad \varphi(x) \;=\; \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \tag{150}$$

- Aus

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \;=\; \int d^4y\, \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}\varphi(y) + J(x) - \int d^4y\, \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}}_{=\varphi(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} \;=\; J(x) \tag{151}$$

folgt

$$W[J] \;=\; \int d^4x\, J(x)\varphi(x) - \Gamma[\varphi] \quad , \quad J(x) \;=\; \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}, \tag{152}$$

d.h. die Legendre-Transformation ist umkehrbar ($\Gamma[\varphi]$ enthält also die gleiche Information wie $W[J]$) und bildet ihr eigenes Inverses.

- $\Gamma[\varphi]$ ist das erzeugende Funktional der oben angesprochenen Proper Functions $\Gamma_n(x_1,\ldots,x_n)$:

$$\Gamma_n(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \left.\frac{\delta^n\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\ldots\delta\varphi(x_n)}\right|_{\varphi=0}. \tag{153}$$

Warum Γ_n gerade die Proper Functions liefert, wird im Folgenden diskutiert.

- Interpretation von Γ_2:
  - $\delta/\delta\varphi(y)\ldots$ auf rechte Gleichung in (150):

$$\delta(x-y) \;=\; \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \;=\; \int d^4z\, \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)}\frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)} \;=\; \ldots \tag{154}$$

  - Einsetzen von (151):

$$\ldots \;=\; \int d^4z\, \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)}\frac{\delta^2\Gamma(\varphi)}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}. \tag{155}$$

  - Annahme: $\varphi(x)=0$, falls $J(x)=0$ (gilt für Theorien mit verschwindendem VEV der Felder, da

$$\varphi(x) \;=\; \left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} \;=\; G_1^c(x) \;=\; G_1(x) \;=\; \langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle, \tag{156}$$

    und damit für ϕ^4-Theorie).
  - Damit

$$\delta(x-y) \;=\; \int d^4z\, \left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)}\right|_{J=0} \left.\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\right|_{\varphi=0} \;=\; \int d^4z\, G_2^c(x,z)\Gamma_2(z,y). \tag{157}$$

    Γ_2 ist also invers zur zusammenhängenden Zweipunktfunktion G_2^c.

– LHS von (157):

$$\delta(x-y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x-y)}. \tag{158}$$

RHS von (157): $G_2^c(x,y) = G_2^c(x-y)$ und $\Gamma_2(x,y) = \Gamma_2(x-y)$ (physikalisches Argument: Translationsinvarianz; mathematisches Argument: (114) und (116) sowie (157)) und damit

$$\begin{aligned}\int d^4z\, G_2^c(x,z)\Gamma_2(z,y) \;&=\; \int d^4z\, G_2^c(x-z)\Gamma_2(z-y) \;=\\ &=\; \int d^4z\, \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x-z)}\tilde{G}_2^c(p)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik(z-y)}\tilde{\Gamma}_2(k) \;=\\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x-y)}\tilde{G}_2^c(p)\tilde{\Gamma}_2(p).\end{aligned} \tag{159}$$

Folglich ist die "Impulsraumversion" von (157)

$$1 \;=\; \tilde{G}_2^c(p)\tilde{\Gamma}_2(p). \tag{160}$$

***** 23. Mai 2025 (10. Vorlesung) ******

– Definition von $\tilde{\Sigma}(p)$:

$$\tilde{G}_2^c(p) \;=\; \frac{1}{p^2+m^2-\tilde{\Sigma}(p)} \tag{161}$$

($\tilde{\Sigma}(p)$ ist damit die durch die WW verursachte Korrektur der zusammenhängenden 2-Punkt-Funktion, also des "vollen Propagators"; zur Erinnerung: Ohne WW $\tilde{G}_2^c(p) = \tilde{\Delta}_F(p) = 1/(p^2+m^2)$). $\tilde{\Sigma}(p)$ wird als Selbstenergie bezeichnet. $\tilde{\Gamma}_2(p)$ entspricht im Wesentlichen der Selbstenergie,

$$\tilde{\Gamma}_2(p) \;=\; p^2+m^2-\tilde{\Sigma}(p). \tag{162}$$

– Reihenentwicklung von $\tilde{G}_2^c$:

$$\tilde{G}_2^c(p) \;=\; \frac{1}{p^2+m^2(1-\tilde{\Sigma}(p)/(p^2+m^2))} \;=\; \frac{1}{p^2+m^2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tilde{\Sigma}(p)\frac{1}{p^2+m^2}\right)^j. \tag{163}$$

Rücktransformation in den Ortsraum:

$$\tilde{G}_2^c(p) \;=\; \int d^4u\, e^{+ipu}G_2^c(u) \tag{164}$$

$$\frac{1}{p^2+m^2} \;=\; \int d^4u\, e^{+ipu}\Delta_F(u) \tag{165}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2+m^2}\tilde{\Sigma}(p)\frac{1}{p^2+m^2} \;&=\\ &=\; \int d^4u_1\, e^{+ipu_1}\Delta_F(u_1)\int d^4u_2\, e^{+ipu_2}\Sigma(u_2)\int d^4u_3\, e^{+ipu_3}\Delta_F(u_3) \;=\; \ldots\end{aligned} \tag{166}$$

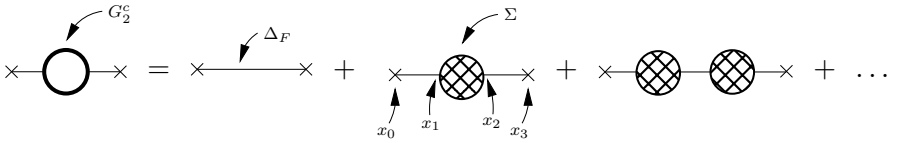
Koordinatentransformation $u_j = x_j - x_{j-1}$ (x_0 ist keine Variable sondern eine Konstante), dann Koordinatentransformation $x_3 - x_0 = u$:

$$\ldots = \int d^4x_3\, e^{+ip(x_3-x_0)} \Big(\int d^4x_1 \int d^4x_2\, \Delta_F(x_0,x_1)\Sigma(x_1,x_2)\Delta_F(x_2,x_3) \Big) =$$

$$= \int d^4u\, e^{+ipu} \underbrace{\Big(\int d^4x_1 \int d^4x_2\, \Delta_F(x_0,x_1)\Sigma(x_1,x_2)\Delta_F(x_2,x_3) \Big)}_{\text{hängt nur von } u=x_3-x_0 \text{ ab, wegen Translationsinvarianz}} \tag{167}$$

$$\frac{1}{p^2+m^2}\tilde{\Sigma}(p)\frac{1}{p^2+m^2}\tilde{\Sigma}(p)\frac{1}{p^2+m^2} = \ldots \tag{168}$$

Interpretation: Σ ist die 1PI Truncated 2-Punkt-Funktion bzw. die 2-Punkt Proper Function. Diese Interpretation hätte bei einer gewissen Erfahrung mit der Übersetzung von Ausdrücken vom Impulsraum in den Ortsraum auch direkt aus (163) gewonnen werden können.



Diagrammatische Darstellung des vollen Propagators G_2^c.

- Interpretation von Γ_3:
  - Erneutes Ableiten von (154) bzw. (155), $\delta/\delta\varphi(u)\ldots$:

$$0 =$$

$$= \Big(\int d^4z\, \frac{\delta^3 W[J]}{\delta\varphi(u)\delta J(z)\delta J(x)} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} + \int d^4z\, \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)} \frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(u)\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} \Big)\Big|_{J=\varphi=0} =$$

$$= \Big(\int d^4z \int d^4v\, \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(v)\delta J(z)\delta J(x)} \frac{\delta J(v)}{\delta\varphi(u)} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} + \int d^4z\, G_2^c(z,x)\Gamma_3(u,y,z) \Big)\Big|_{J=\varphi=0} =$$

$$= \int d^4z \int d^4v\, G_3^c(v,z,x)\Gamma_2(v,u)\Gamma_2(y,z) + \int d^4z\, G_2^c(z,x)\Gamma_3(u,y,z). \tag{169}$$

  - Auflösen nach Γ_3 mit Hilfe von (157),

$$\Gamma_3(x_1,x_2,x_3) =$$

$$= \underbrace{-\int d^4y_1 \int d^4y_2 \int d^4y_3\, G_3^c(y_1,y_2,y_3)\Gamma_2(y_1,x_1)\Gamma_2(y_2,x_2)\Gamma_2(y_3,x_3)}_{=G_3^{\text{trunc}}(x_1,x_2,x_3)}, \tag{170}$$

oder nach G_3^c,

$$G_3^c(x_1,x_2,x_3) =$$

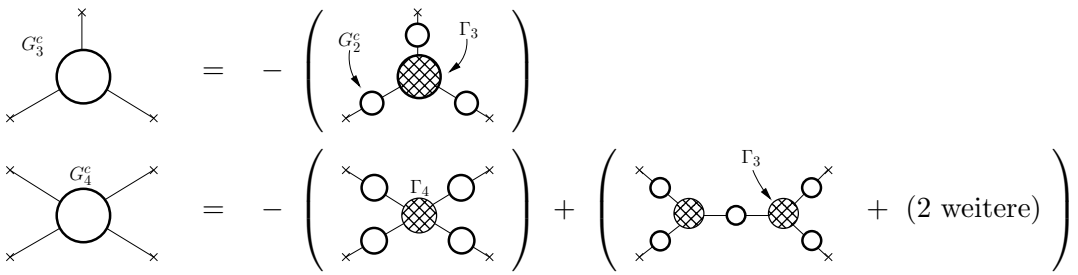
$$= -\int d^4y_1 \int d^4y_2 \int d^4y_3\, \Gamma_3(y_1,y_2,y_3)G_2^c(y_1,x_1)G_2^c(y_2,x_2)G_2^c(y_3,x_3), \tag{171}$$

zeigt, dass Γ_3 das 3-Punkt Truncated Diagram G_3^{trunc} bzw. die 3-Punkt Proper Function ist (Unterschied erst für 4-Punkt, 5-Punkt, ...).

- Interpretation von Γ_4:
  - Analoge Rechnung liefert

$$\begin{aligned}\Gamma_4(x_1,\ldots,x_4) &= \\ &= -G_4^{\text{trunc}}(x_1,\ldots,x_4) \\ &\quad +\Big(\int d^4y_1 \int d^4y_2\, G_3^{\text{trunc}}(x_1,x_2,y_1)G_2^c(y_1,y_2)G_3^{\text{trunc}}(y_2,x_3,x_4) \\ &\quad +\text{“zwei Permutationen”}\Big)\end{aligned} \tag{172}$$

  (Beweis ist Hausaufgabe).



***** 27. Mai 2025 (11. Vorlesung) ******

Interpretation von $\Gamma[\varphi]$ als effektive Wirkung

- (156) für $J = 0$:

$$\varphi(x) = \langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle. \tag{173}$$

- Rechte Gleichung in (152) für $J = 0$:

$$0 = \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}. \tag{174}$$

- Ein klassisches Feld ϕ erfüllt die Feldgleichung

$$0 = \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}. \tag{175}$$

- Der VEV von ϕ, d.h. φ, erfüllt also eine Feldgleichung gleicher Struktur, wobei an Stelle der klassischen Wirkung S das erzeugende Funktional Γ tritt. Γ wird daher als effektive Wirkung bezeichnet (wichtig z.B. beim Studium von Theorien mit dynamischer Symmetriebrechnung, also von Theorien mit nicht-verschwindenden VEVs der Felder).

4 Parallelen zur statistischen Physik, QFT bei endlicher Temperatur

4.1 Parallelen zur statistischen Physik

- Statistische Physik: Thermischer Erwartungswert einer Observable O (einer zu einem Zeitpunkt messbaren bzw. definierten Größe) bei Temperatur $\beta = 1/k_B T$,

$$\Big\langle O \Big\rangle_{\text{th}} \;=\; \frac{1}{Z}\sum_s O(s) e^{-\beta E(s)} \quad , \quad Z \;=\; \sum_s e^{-\beta E(s)}, \tag{176}$$

  wobei $\sum_s$ eine Summe über alle klassischen Zustände oder über alle QM/QFT Energieeigenzustände beschreibt und $E(s)$ die Energie des Zustands s ist.

- Pfadintegralformalismus in der QFT, Euklidische Formulierung: VEV einer Observable O,

$$\langle \Omega | T\Big\{ O(\phi) \Big\} | \Omega \rangle \;=\; \frac{1}{Z}\int D\phi\, O(\phi) e^{-S[\phi]} \quad , \quad Z \;=\; \int D\phi\, e^{-S[\phi]}. \tag{177}$$

- Die mathematische Struktur beider Ausdrücke ist identisch. Euklidische QFT kann also auch als statistisches System interpretiert werden. Die Felder, z.B. $\phi(x)$, entsprechen dann einer unendlichen kontinuierlichen Menge von "Spins", Ableitungen, z.B. $\phi(x)\partial_\mu\phi(x) = \phi(x)(\phi(x+\epsilon e_\mu) - \phi(x))/\epsilon$, entsprechen NN-WWs. $\langle \Omega | T\{O(\phi)\} | \Omega \rangle$ hat aber nicht die Bedeutung eines QFT thermischen Erwartungswerts (siehe hierzu Abschnitt 4.2), sondern bei obiger Interpretation die eines thermischen Erwartungswerts eines "4D Spin-Systems".

4.2 QFT bei endlicher Temperatur

- QFT thermische Erwartungswerten können ebenfalls durch Pfadintegrale ausgedrückt werden.

- Starte mit (176):

$$\Big\langle O \Big\rangle_{\text{th}} \;=\; \frac{1}{Z}\sum_s O(s) e^{-\beta E(s)} \;=\; \frac{\text{Tr}(O e^{-\beta H})}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \;=\; \dots \tag{178}$$

- "Summiere" über alle "Ortseigenzustände" $|\phi(\mathbf{x}, 0)\rangle$ (alle zeitunabhängigen Feldkonfigurationen, bzw. Feldkonfigurationen bei $t = 0$):

$$\begin{aligned} \dots \;&=\; \frac{\int D\phi(\mathbf{x},0)\, \langle \phi(\mathbf{x},0) | O(\phi(\mathbf{x},0)) e^{-\beta H} | \phi(\mathbf{x},0) \rangle}{\int D\phi(\mathbf{x},0)\, \langle \phi(\mathbf{x},0) | e^{-\beta H} | \phi(\mathbf{x},0) \rangle} \;= \\ &=\; \frac{\int D\phi(\mathbf{x},0)\, O(\phi(\mathbf{x},0)) \langle \phi(\mathbf{x},0) | e^{-\beta H} | \phi(\mathbf{x},0) \rangle}{\int D\phi(\mathbf{x},0)\, \langle \phi(\mathbf{x},0) | e^{-\beta H} | \phi(\mathbf{x},0) \rangle} \;=\; \dots \end{aligned} \tag{179}$$

- Verwende die QFT Übergangsamplitude (Euklidische Formulierung) (103):

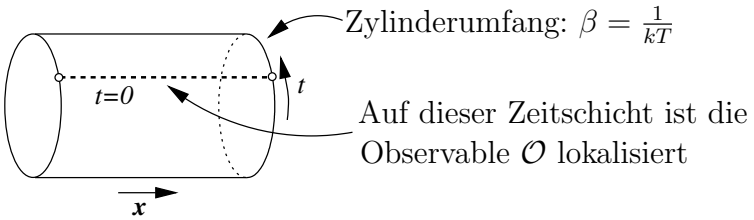
$$\ldots = \frac{\int D\phi(\mathbf{x},0)\, O(\phi(\mathbf{x},0)) \int_{\tilde{\phi}(\mathbf{x},0)=\phi(\mathbf{x},0)}^{\tilde{\phi}(\mathbf{x},\beta)=\phi(\mathbf{x},0)} D\tilde{\phi}\, e^{-S[\tilde{\phi}]}}{\int D\phi(\mathbf{x},0) \int_{\tilde{\phi}(\mathbf{x},0)=\phi(\mathbf{x},0)}^{\tilde{\phi}(\mathbf{x},\beta)=\phi(\mathbf{x},0)} D\tilde{\phi}\, e^{-S[\tilde{\phi}]}} =$$

$$= \frac{1}{Z}\int D\phi\, O(\phi(\mathbf{x},0)) e^{-S[\phi]}, \tag{180}$$

  wobei $\int D\phi$ eine Integration über alle zeitperiodischen Feldkonfigurationen beschreibt (Ausdehnung der periodischen Zeit ist β) und

$$Z = \int D\phi\, e^{-S[\phi]}. \tag{181}$$

- Bildlich: QFT bei endlicher Temperatur entspricht QFT auf einem 4D Raumzeitzylinder (drei unendlich ausgedehnte räumliche Richtungen, eine periodische zeitliche Richtung, Ausdehnung β).



5 Pfadintegralquantisierung fermionischer Felder

- Kanonische Quantisierung: Antikommutatoren

$$\{\psi_A(\mathbf{x},t),\psi_B^\dagger(\mathbf{y},t)\} = \delta_{AB}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{182}$$
$$\{\psi_A(\mathbf{x},t),\psi_B(\mathbf{y},t)\} = \{\psi_A^\dagger(\mathbf{x},t),\psi_B^\dagger(\mathbf{y},t)\} = 0 \tag{183}$$

  (A, B sind Spin-Indizes, kanonisch konjugierte Impulse $\pi(x) = i\psi^\dagger(x)$) realisieren das Pauli-Prinzip. Z.B.

$$\langle\Omega|\ldots\psi_A(\mathbf{x},t)\psi_A(\mathbf{x},t)\ldots|\Omega\rangle = 0 \quad \text{(keine Summe über } A\text{)}. \tag{184}$$

- Versuche Pfadintegralformalismus für fermionische Felder zu finden, der weitestgehend analog zu dem für skalare Felder ist, z.B.

$$\langle\Omega|\ldots\psi_A(\mathbf{x},t)\psi_A(\mathbf{x},t)\ldots|\Omega\rangle = \frac{1}{Z}\int D\psi\, D\bar\psi\, \ldots\psi_A(\mathbf{x},t)\psi_A(\mathbf{x},t)\ldots e^{-S[\psi,\bar\psi]}. \tag{185}$$

  Damit dieser Ausdruck konsistent mit dem kanonischen Formalismus verschwindet, muss auf der rechten Seite $\psi_A(\mathbf{x},t)\psi_A(\mathbf{x},t) = 0$ gelten, unabhängig von den Details der Wirkung $S[\psi,\bar\psi]$. Für gewöhnliche Funktionen $\psi_A(\mathbf{x},t)$ ist das i.A. nicht erfüllt. Verwende daher sogenannte Grassmann-Variablen für fermionische Feldvariablen im Pfadintegralformalismus (wesentliche Eigenschaft einer Grassmann-Variable ψ: $\psi^2 = 0$).

5.1 Eigenschaften/Rechenregeln von/für Grassmann-Variablen

- θ bzw. θ_j bezeichnen im Folgenden Grassmann-Variablen.
- Wesentliche Eigenschaft (Definition):

$$\{\theta_j,\theta_k\} = 0. \tag{186}$$

  Daraus folgt $\theta\theta + \theta\theta = 0$ und damit $\theta^2 = 0$.

- Allgemeine Form von Funktionen von θ bzw. θ_j:

$$f(\theta) = a_0 + \theta a_1 \tag{187}$$
$$f(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \\ = a_0 + \sum_{j_1}\theta_{j_1}a_{1,j_1} + \sum_{j_1<j_2}\theta_{j_1}\theta_{j_2}a_{2,j_1j_2} + \ldots + \sum_{j_1<\ldots<j_n}\theta_{j_1}\ldots\theta_{j_n}a_{n,j_1\ldots j_n} \tag{188}$$

  (motiviert aus Potenzreihenentwicklung "normaler Funktionen"; da $\theta^2 = 0$ bzw. $\theta_j^2 = 0$ existieren nur konstante und lineare Terme).

- Differentiation (Definition):

$$\frac{d}{d\theta}1 \;=\; 0 \quad , \quad \frac{d}{d\theta}\theta \;=\; 1, \tag{189}$$

also ähnlich zur "normalen Differentiation". Es folgt z.B.

$$\frac{d}{d\theta}f(\theta) \;=\; a_1 \tag{190}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\theta_1\theta_2\ldots\theta_n \;=\; +\theta_2\ldots\theta_n \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\theta_2}\theta_1\theta_2\ldots\theta_n \;=\; -\theta_1\theta_3\ldots\theta_n \quad ,$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta_n}\theta_1\theta_2\ldots\theta_n \;=\; (-1)^{n-1}\theta_1\ldots\theta_{n-1}. \tag{191}$$

Aus

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\theta_1\theta_2 \;=\; -1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\theta_1\theta_2 \;=\; +1 \tag{192}$$

folgt

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_j},\frac{\partial}{\partial\theta_k}\right\} \;=\; 0, \tag{193}$$

aus

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\theta_2\theta_1 \;=\; -\theta_2 \quad , \quad \theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}\theta_1 \;=\; +\theta_2 \tag{194}$$

folgt

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_j},\theta_k\right\} \;=\; 0 \quad \text{falls } j\neq k, \tag{195}$$

d.h. Ableitungen nach Grassmann-Variablen besitzen auch die Grassmann-Eigenschaft.

- Integration (Definition):

$$\int d\theta \;=\; 0 \quad , \quad \int d\theta\,\theta \;=\; 1. \tag{196}$$

Integration also identisch zur Differentiation. Auf den ersten Blick eigenartig, dennoch in gewissen Aspekten ähnlich zu "normalen Rechenregeln":

  - Wenn θ_j eine Grassmann-Variable ist, sollte auch $d\theta_j$ eine Grassmann-Variable sein. Aus

$$\left(\int d\theta\right)^2 \;=\; \int d\theta_1\,d\theta_2 \;=\; -\int d\theta_2\,d\theta_1 \;=\; -\left(\int d\theta\right)^2 \tag{197}$$

folgt

$$\int d\theta \;=\; 0. \tag{198}$$

– Betrachte $\int d\theta$ als $\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta$ und fordere Invarianz unter Translation,

$$\int d\theta\, f(\theta) \;=\; \int d\theta\, f(\theta + b). \tag{199}$$

Dann folgt

$$\int d\theta \left(a_0 + \theta a_1\right) \;=\; \int d\theta \left(a_0 + \theta a_1 + b a_1\right) \tag{200}$$

und damit

$$\int d\theta\, b a_1 \;=\; 0 \tag{201}$$

bzw.

$$\int d\theta \;=\; 0. \tag{202}$$

***** 30. Mai 2025 (12. Vorlesung) *****

- Variablenwechsel bei Integration:
  – Eine Integrationsvariable: $\theta \to \tilde{\theta} = \theta b + c$. Wären θ und $\tilde{\theta}$ gewöhnliche Variablen, würde

$$\int d\tilde{\theta} \;=\; \int d\theta\, \frac{d\tilde{\theta}}{d\theta} \;=\; \int d\theta\, b \tag{203}$$

gelten. Für Grassmann-Variablen gilt dagegen

$$\int d\tilde{\theta}\, f(\tilde{\theta}) \;=\; a_1 \tag{204}$$

$$\int d\theta\, f(\tilde{\theta}) \;=\; \int d\theta \left(a_0 + \theta b a_1 + c a_1\right) \;=\; b a_1, \tag{205}$$

woraus

$$\int d\tilde{\theta} \;=\; \int d\theta\, \frac{1}{b} \tag{206}$$

folgt. Die "Jacobi-Determinante" von Grassmann-Variablen ist also gerade invers zu der von gewöhnlichen Zahlen.

  – Mehrere Integrationsvariablen: $\theta_j \to \tilde{\theta}_j = \theta_k b_{jk} + c_j$. Dann gilt

$$\int d\tilde{\theta}_n \ldots d\tilde{\theta}_1 \;=\; \int d\theta_n \ldots d\theta_1 \left(\det\left(\frac{\partial(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_n)}{\partial(\theta_1, \ldots, \theta_n)}\right)\right)^{-1} \;=$$

$$= \int d\theta_n \ldots d\theta_1\, \frac{1}{\det(b_{jk})}. \tag{207}$$

Beweis analog zum 1D-Fall,

$$\int d\tilde{\theta}_n \ldots d\tilde{\theta}_1\, f(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_n) \;=\; a_{n,12\ldots n} \tag{208}$$

$$\int d\theta_n \ldots d\theta_1\, f(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_n) \;=$$

$$= \int d\theta_n \ldots d\theta_1 \left(\ldots + \theta_{j_1} b_{1 j_1} \theta_{j_2} b_{2 j_2} \ldots \theta_{j_n} b_{n j_n} a_{n,12\ldots n}\right) \;=$$

$$= \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} b_{1 j_1} b_{2 j_2} \ldots b_{n j_n} a_{n,12\ldots n} \;=\; \det(b_{jk}) a_{n,12\ldots n}, \tag{209}$$

woraus (207) folgt.

5.2 Gauß-Integrale mit Grassmann-Variablen

- Pfadintegralausdrücke erfordern i.d.R. die Berechnung von Gauß-Integralen (siehe z.B. Abschnitt 1.5). Für die Behandlung von Fermionen im Pfadintegralformalismus sind also Gauß-Integrale mit Grassmann-Variablen zu lösen.

- $\psi_j = a_j + ib_j$ bezeichnen im Folgenden "komplexe Grassmann-Variablen", d.h. a_j und b_j sind "reelle Grassmann-Variablen" im Sinn von Abschnitt 5.1.

- Ziel: Berechne

$$\begin{aligned}\int \Big(\prod_j d\psi_j\, d\bar{\psi}_j\Big) e^{-\psi_k^* A_{kl}\psi_l} &= \int \Big(\prod_j da_j\, db_j\Big) e^{-\psi_k^* A_{kl}\psi_l} = \\ &= \int \Big(\prod_j da_j\, db_j\Big) e^{-(a-ib)_k A_{kl}(a+ib)_l},\end{aligned} \tag{210}$$

  wobei A eine hermitesche Matrix ist und die Definition $d\psi_j\, d\bar{\psi}_j = da_j\, db_j$ verwendet wurde.

- 1-dimensionale Version:

$$\int da\, db\, e^{-(a-ib)A(a+ib)} = \int da\, db \Big(1 - 2iaAb\Big) = 2iA, \tag{211}$$

  wobei die Exponentialfunktion über ihre Potenzreihenentwicklung definiert ist und diese wegen der Grassmann-Variablen nach der 1. Ordnung endet.

- n-dimensionale Erweiterung, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$\int \Big(\prod_j da_j\, db_j\Big) e^{-(a-ib)_k A_{kl}(a+ib)_l} = \prod_j \int da_j\, db_j \Big(1 - 2ia_j\lambda_j b_j\Big) = (2i)^n \prod_j \lambda_j. \tag{212}$$

- Analog zum QM bzw. bosonischen Fall kann eine hermetische Matrix A durch eine unitäre Koordinatentransformation U diagonalisiert werden,

$$(a-ib)_j A_{jk} (a+ib)_k = \underbrace{((\mathbf{a}-i\mathbf{b})U^\dagger)_j}_{=(\tilde{a}-i\tilde{b})_j} \underbrace{(UAU^\dagger)_{jk}}_{\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)_{jk}} \underbrace{(U(\mathbf{a}+i\mathbf{b}))_k}_{=(\tilde{a}+i\tilde{b})_k}, \tag{213}$$

  wobei λ_j die Eigenwerte von A sind. Unitäre Koordinatentransformationen ändern das Integrationsmaß nicht (Gleichung (207)), also

$$\begin{aligned}\int \Big(\prod_j d\psi_j\, d\bar{\psi}_j\Big) e^{-\psi_k^* A_{kl}\psi_l} &= \int \Big(\prod_j d\tilde{a}_j\, d\tilde{b}_j\Big) e^{-(\tilde{a}-i\tilde{b})_k \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)_{kl}(\tilde{a}+i\tilde{b})_l} = \\ &= (2i)^n \prod_j \lambda_j = (2i)^n \det(A).\end{aligned} \tag{214}$$

- Zum Vergleich die analoge bosonische Version für reelle ϕ_j:

$$\int \Big(\prod_j d\phi_j\Big) e^{-\phi_k A_{kl}\phi_l} \;=\; \frac{\pi^{n/2}}{(\det(A))^{1/2}} \tag{215}$$

(Gleichung (63)). Die Wurzel entsteht, weil ϕ_j (reell) nur halb so vielen FHGs entspricht wie ψ_j (komplex). Der wesentliche Unterschied liegt darin, dass bei Bosonen die Determinante im Nenner, bei Fermionen im Zähler auftritt.

- (214) kann wie im bosonischen Fall um Quellen η und η^* (werden im Folgenden als unabhängige Grassmann-Variablen betrachtet) erweitert werden:

$$\int \Big(\prod_j d\psi_j\, d\bar\psi_j\Big) e^{-\psi_k^* A_{kl}\psi_l + \eta_k^*\psi_k + \psi_k^*\eta_k} \;=\; (2i)^n \det(A) e^{+\eta_j^*(A^{-1})_{jk}\eta_k}. \tag{216}$$

5.3 Pfadintegralquantisierung fermionischer Felder

- Nicht WW fermionisches Feld (Euklidischer Formalismus),

$$S[\psi,\bar\psi] \;=\; \int d^4x\, \bar\psi(x)\Big(\gamma_\mu\partial_\mu + m\Big)\psi(x), \tag{217}$$

Übergang von endlich vielen FHGs auf eine kontinuierliche unendliche Anzahl von FHGs:

$$\begin{aligned} Z[\eta,\bar\eta] \;&=\; \frac{1}{Z}\int D\psi\, D\bar\psi\, \exp\Big(-S[\psi,\bar\psi] + \int d^4x\,\Big(\bar\eta(x)\psi(x) + \bar\psi(x)\eta(x)\Big)\Big) \;= \\ &=\; \exp\Big(+\int d^4x \int d^4y\, \bar\eta(x) A^{-1}(x,y)\eta(y)\Big), \end{aligned} \tag{218}$$

wobei

$$\int D\psi\, D\bar\psi \;=\; \int \prod_{x,A} da_A(x)\, db_A(x) \tag{219}$$

und A^{-1} Lösung von

$$\int d^4y\, \delta(x-y)\Big(\gamma_\mu\partial_\mu^{(y)} + m\Big) A^{-1}(y,z) \;=\; \delta(x,z) \tag{220}$$

ist. n-Punkt-Funktionen erhält man wie gewohnt durch geeignetes Ableiten, z.B.

$$\langle\Omega|T\Big\{\psi(x)\bar\psi(y)\Big\}|\Omega\rangle \;=\; \Big(+\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\Big)\Big(-\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\Big) Z[\eta,\bar\eta]\Big|_{\eta=\bar\eta=0} \;=\; A^{-1}(x,y). \tag{221}$$

***** 03. Juni 2025 (13. Vorlesung) ******

Wie beim skalaren Feld definiert man einen freien Propagator $S_F(x,y) = A^{-1}(x,y)$, der im Impulsraum einfach zu bestimmen ist,

$$S_F(x,y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x-y)} \underbrace{\frac{+i\gamma_\mu p_\mu + m}{p^2+m^2}}_{=\tilde{S}_F(p)}. \tag{222}$$

Das zu Beginn dieses Kapitels angesprochene Pauli-Prinzip spiegelt sich auch in der Grassmann-Eigenschaft der Ableitungen nach η bzw. $\bar{\eta}$ (Gleichung (193)) wieder,

$$\langle\Omega|T\Big\{\ldots\psi_A(x)\psi_A(x)\ldots\Big\}|\Omega\rangle \;=\; \ldots\underbrace{\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_A(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_A(x)}}_{=0}\ldots Z[\eta,\bar{\eta}]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \;=\; 0. \tag{223}$$

- WW Theorien können mit Hilfe von Störungstheorie behandelt werden, wie in Kapitel 3 erläutert. Enthält eine WW Theorie z.B. ein Skalarfeld ϕ und ein fermionisches Feld ψ mit WW Anteil der Wirkung $S_I[\phi,\psi,\bar{\psi}]$, dann gilt

$$Z[J,\eta,\bar{\eta}] \;=\; \frac{Z_0}{Z}\exp\Big(-S_I[\delta/\delta J, +\delta/\delta\bar{\eta}, -\delta/\delta\eta]\Big)Z_0[J,\eta,\bar{\eta}] \tag{224}$$

$$Z_0[J,\eta,\bar{\eta}] \;=\; \underbrace{\exp\Big(+\frac{1}{2}(J,\Delta_F J)\Big)\exp\Big(+(\bar{\eta},S_F\eta)\Big)}_{\text{freie erzeugende Funktionale für }\phi\text{ und }\psi}. \tag{225}$$

6 Pfadintegralquantisierung von Eichfeldern

6.1 Wesentliche Elemente Abelscher und nicht-Abelscher Eichtheorien

- Abelscher Fall, U(1)-Eichtheorie, Maxwell-Theorie, em Feld (zusammen mit Fermionen QED):
  - Euklidische Wirkung:
    $$S[A] \;=\; \frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{226}$$
  - Eichtransformation: $g(x) = e^{i\Lambda(x)} \in \mathrm{U}(1)$ (unabhängige U(1)-Transformationen an jedem Raumzeitpunkt),
    $$A_\mu(x) \;\to\; A^g_\mu(x) \;=\; g(x)\Big(A_\mu(x) + \frac{i}{e}\partial_\mu\Big)g^{-1}(x) \;=\; A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x). \tag{227}$$
- Nicht-Abelscher Fall, SU(N)-Eichtheorie, Yang-Mills-Theorie, chromo-elektrisches/-magnetisches Feld (zusammen mit Fermionen QCD):
  - Eichfelder A^a_μ tragen einen zusätzlichen Farbindex, $a = 1, \ldots, N^2 - 1$.
  - Neben der Komponentenschreibweise A^a_μ existiert auch eine Matrixschreibweise $A_\mu = A^a_\mu T^a$ ("inverse Beziehung": $A^a_\mu = 2\mathrm{Tr}(A_\mu T^a)$, da $\mathrm{Tr}(T^aT^b) = \delta^{ab}/2$ [das ist zumindest die übliche Normierung]), wobei die Matrizen T^a als Erzeugende (Englisch "Generators") bezeichnet werden. I.d.R. (für Eichfelder in der fundamentalen Darstellung) sind die T^a $N \times N$-Matrizen, für SU(2) die Pauli-Matrizen $T^a = \sigma^a/2$, für SU(3) die Gell-Mann-Matrizen $T^a = \lambda^a/2$. Die Erzeugenden erfüllen die Algebra $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, wobei die total antisymmetrischen f^{abc} als Strukturkonstanten bezeichnet werden. Für SU(2) $f^{abc} = \epsilon^{abc}$.
  - Euklidische Wirkung:
    $$S[A] \;=\; \frac{1}{4}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} \quad , \quad F^a_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{228}$$
    bzw.
    $$S[A] \;=\; \frac{1}{2}\int d^4x\, \mathrm{Tr}\Big(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big) \quad , \quad F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \tag{229}$$
  - Eichtransformation: $g(x) = e^{i\Lambda^a(x)T^a} \in \mathrm{SU}(N)$ (unabhängige SU(N)-Transformationen an jedem Raumzeitpunkt),
    $$A_\mu(x) \;\to\; A^g_\mu(x) \;=\; g(x)\Big(A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu\Big)g^{-1}(x) \tag{230}$$
    bzw.
    $$A^a_\mu(x) \;\to\; A^{a,g}_\mu(x) \;=\; A^a_\mu(x) + f^{abc}A^b_\mu(x)\Lambda^c(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\Lambda^a(x) + \mathcal{O}(\Lambda^2). \tag{231}$$

6.2 Schwierigkeiten bei der Quantisierung von Eichtheorien

Kanonischer Formalismus

- Maxwell-Theorie, kanonisch konjugierte Impulse der Felder A_μ:

$$\pi_\mu(\mathbf{x}) \;=\; \frac{\delta L}{\delta \partial_0 A_\mu(\mathbf{x})} \;=\; F_{0\mu}(\mathbf{x}). \tag{232}$$

- Da $F_{00} = 0$, existiert kein kanonisch konjugierter Impuls zu A_0 (Ursache liegt in den unphysikalischen FHGs, d.h. jede physikalische Situation entspricht einer unendlichen Menge unterschiedlicher aber eichäquivalenter Eichfeldkonfigurationen A_μ).

- Ausweg: Eichfixierung, Bedingungen, die jede physikalische Situation zulassen, aber die Menge der sie beschreibenden Eichfeldkonfigurationen A_μ einschränken bzw. im Idealfall auf ein Element reduzieren.

- Details: Literatur, z.B. [1, 3], Vorlesung Quantenfeldtheorie I.

****** 06. Juni 2025 (14. Vorlesung) ******

Pfadintegralformalismus

- Yang-Mills-Theorie, erzeugendes Funktional:

$$Z[J] \;=\; \frac{1}{Z}\int DA\, \exp\Big(- S[A] + \int d^4x\, J^a_\mu(x) A^a_\mu(x)\Big), \tag{233}$$

wobei

$$\int DA \;=\; \int \prod_{x,\mu,a} dA^a_\mu(x). \tag{234}$$

- Freier (d.h. quadratischer) Anteil der Wirkung und korrespondierendes freies erzeugendes Funktional:

$$\begin{aligned} S_0[A] \;&=\; \frac{1}{4}\int d^4x \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right) \;= \\ &=\; \frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y\, A^a_\mu(x)\delta^{ab}\delta(x-y)\Big(- \delta_{\mu\nu}\Box^{(y)} + \partial^{(y)}_\mu \partial^{(y)}_\nu\Big) A^b_\nu(y). \end{aligned} \tag{235}$$

Bei ähnlicher Notation wie im Fall skalarer Felder (Kapitel 2 und 3)

$$A^{ab}_{\mu\nu}(x,y) \;=\; \delta^{ab}\delta(x-y)\Big(- \delta_{\mu\nu}\Box^{(y)} + \partial_\mu \partial^{(y)}_\nu\Big) \tag{236}$$

$$Z_0[J] \;=\; \exp\Big(+ \int d^4x \int d^4y\, J^a_\mu(x)(A^{-1})^{ab}_{\mu\nu}(x,y) J^b_\nu(y)\Big). \tag{237}$$

- Problem: A^{-1} existiert nicht, da

$$\int d^4y\, A^{ab}_{\mu\nu}(x,y)\partial_\nu w^b(y) \;=\; \underbrace{\Big(-\Box\partial_\mu - \partial_\mu\Box\Big)}_{=0} w^a(x) \;=\; 0, \tag{238}$$

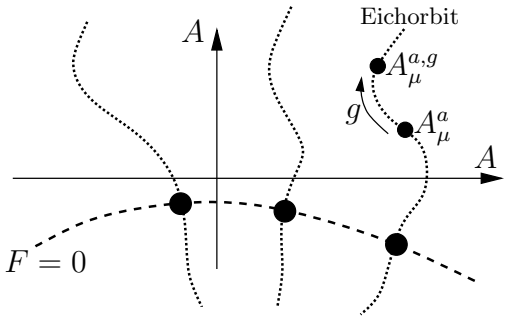
  also A Nullmoden $\partial_\mu w^a$ hat und damit nicht invertierbar ist. Auch hier deutet sich an, dass die Ursache des Problems in den mit Eichtransformationen verknüpften unphysikalischen FHGs liegt: $A^a_\mu = \partial_\mu w^a$ ist eichäquivalent zu $A^a_\mu = 0$.

- Ausweg: Schränke Pfadintegral durch Eichfixierung ein, d.h. behalte Integration über physikalisch unterschiedliche Eichfeldkonfigurationen, integriere nicht über eichäquivalente Eichfeldkonfigurationen.

6.3 Eichfixierung, Faddeev-Popov-Methode, Geistfelder

- Zu A^a_μ gehöriger Eichorbit: Menge aller zu A^a_μ eichäquivalenten Eichfeldkonfigurationen.

- Prinzipielles Vorgehen: Beschränke das Pfadintegral auf eine Hyperfläche im Funktionenraum der A^a_μ, die jeden Eichorbit genau ein Mal schneidet (Eichfixierung). Definiere diese Hyperfläche durch eine Eichbedingung $F^a(A) = 0$ (z.B. Lorentz-Eichung, $F^a(A) = \partial_\mu A^a_\mu(x)$); F^a bildet eine Eichfeldkonfiguration A^a_μ [Indizes: Farbe a, Lorenz μ, Raumzeit x] auf eine Funktion F^a [Indizes: Farbe a, Raumzeit x] ab)[1].



- Definition (Faddeev-Popov-Determinante):

$$1 \;=\; \Delta_{\mathrm{FP}}[A] \int Dg\, \delta[F(A^g)], \tag{239}$$

  wobei

$$\int Dg \;=\; \int \prod_x dg(x) \tag{240}$$

[1] Im nicht-Abelschen Fall bereitet es Probleme, Eichbedingungen anzugeben, die Hyperflächen entsprechen, welchen jeden Eichorbit genau ein Mal schneiden. Es gibt i.d.R. mehrere Schnittpunkte mit einem Eichorbit, sogenannte Gribov-Kopien. Gribov-Kopien sind im Rahmen der Störungstheorie jedoch unproblematisch und werden daher im Folgenden ignoriert. Eine weiterführende Diskussion findet sich z.B. in [4].

und $dg(x)$ ein Haarsches Integrationsmaß ist, d.h. für beliebige $h \in \mathrm{SU}(N)$, beliebige f und die Transformation $g'(x) = g(x)h$

$$\int dg(x) f(g(x)) \quad = \quad \int dg'(x) f(g(x)) \tag{241}$$

gilt (in Worten: Es wird in fairer Weise über die Gruppe integriert; z.B. ist $\int dg = \int_0^{2\pi} d\Lambda$ ein Haarsches Maß für U(1), wobei $g = e^{i\Lambda}$).

- Δ_{FP} ist eichinvariant, d.h. $\Delta_{\mathrm{FP}}[A] = \Delta_{\mathrm{FP}}[A^g]$. Beweis:

  $$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{FP}}^{-1}[A] \quad &= \quad \int D(g'g)\, \delta[F(A^{g'g})] \quad = \quad \int D(g'g)\, \delta[F((A^g)^{g'})] \quad = \\ &= \quad \int Dg'\, \delta[F((A^g)^{g'})] \quad = \quad \Delta_{\mathrm{FP}}^{-1}[A^g],\end{aligned} \tag{242}$$

  wobei (241) verwendet wurde.

- Δ_{FP} entspricht für Eichfeldkonfigurationen A, die die Eichbedingung erfüllen, d.h. für die $F^a(A) = 0$ gilt, einer Determinante:

  $$\Delta_{\mathrm{FP}}^{-1}[A] \quad = \quad \int Dg\, \delta[F(A^g)] \quad = \quad \ldots; \tag{243}$$

  wegen $F^a(A) = 0$ kann $\int Dg$ auf die Umgebung von $g = 1$ bzw. $\Lambda^a = 0$ beschränkt werden; in dieser Umgebung ist ein Haarsches Maß $\int dg = \int d\Lambda^1 \ldots d\Lambda^{N^2-1}$; damit

  $$\ldots \quad = \quad \int D\Lambda\, \delta[F(A^g)] \quad = \int DF \left| \det\left(\frac{\delta F^a}{\delta \Lambda^b}\right)\right|^{-1} \delta[F] \quad = \quad \left| \det\left(\frac{\delta F^a}{\delta \Lambda^b}\Big|_{\Lambda=0}\right)\right|^{-1}$$
  (gilt für Eicheldkonfigurationen A, die $F^a(A) = 0$ erfüllen) (244)

  wobei

  $$\int D\Lambda \quad = \quad \int \prod_{x,a} d\Lambda^a(x). \tag{245}$$

  In der Literatur wird der Betrag der Determinante kommentarlos weggelassen. Ich sehe kein Argument, warum das an dieser Stelle für beliebige Eichbedingungen F^a zulässig sein sollte. Erst im mit $1/Z$ normierten Pfadintegral bzw. im erzeugenden Funktional hebt sich ein eventuelles Vorzeichen der Determinante weg (das Vorzeichen ist unter der Annahme, dass genau ein Schnittpunkt von $F^a = 0$ mit jedem Eichorbit existiert, für jede Eichfeldkonfiguration gleich, also unabhängig von A^a_μ).

****** 10. Juni 2025 (15. Vorlesung) ******

- Umschreiben des Pfadintegrals durch Einfügen einer "1":

  $$\begin{aligned}\int DA\, e^{-S[A]} \quad &= \quad \int DA\, \Delta_{\mathrm{FP}}[A] \int Dg\, \delta[F(A^g)] e^{-S[A]} \quad = \\ &= \quad \int Dg \int DA^g\, \Delta_{\mathrm{FP}}[A^g] \delta[F(A^g)] e^{-S[A^g]} \quad = \quad \int Dg \int DA\, \Delta_{\mathrm{FP}}[A] \delta[F(A)] e^{-S[A]},\end{aligned} \tag{246}$$

  wobei $\int DA = \int DA^g$, $\Delta_{\mathrm{FP}}[A] = \Delta_{\mathrm{FP}}[A^g]$ und $S[A] = S[A^g]$ verwendet wurde.

– $\int DA = \int DA^g$, da Eichtransformationen A^a_μ lediglich verschieben und dann unitär rotieren (siehe (230)), und solche Operationen ein Integrationsmaß nicht verändern (Beweis benötigt ein paar Zeilen).

– $\Delta_{\rm FP}[A] = \Delta_{\rm FP}[A^g]$ wurde weiter oben gezeigt.

– Die Wirkung einer Eichtheorie wird eichinvariant konstruiert, daher $S[A] = S[A^g]$.

$\int Dg$, das "Volumen des Eichorbits", ist unabhängig von A^a_μ und damit lediglich eine Konstante. Das eigentliche Pfadintegral ist wegen des δ-Funktionals auf diejenigen Eichfeldkonfigurationen beschränkt, die die Eichbedingung erfüllen d.h. $\Delta_{\rm FP}$ kann gemäß (244) durch die Determinante $|\det(\delta F^a/\delta\Lambda^b|_{\Lambda=0})|$ ersetzt werden.

- Erzeugendes Funktional:

$$Z[J] = \frac{1}{Z}\int DA\,\delta[F(A)]\tilde{\Delta}_{\rm FP}[A]\exp\Big(-S[A]+\int d^4x\,J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)\Big) \tag{247}$$

$$Z = \int DA\,\delta[F(A)]\tilde{\Delta}_{\rm FP}[A]\exp\Big(-S[A]\Big); \tag{248}$$

$\int Dg$ tritt aufgrund der Normierung mit $1/Z$ im erzeugenden Funktional nicht auf. Aus dem gleichen Grund kann der Betrag der Determinante weggelassen werden, also $\Delta_{\rm FP} \to \tilde{\Delta}_{\rm FP} = \det(\delta F^a/\delta\Lambda^b|_{\Lambda=0})$ (siehe Anmerkung unterhalb von (245)).

- Bringe $Z[J]$ in die Form

$$Z[J] = \frac{1}{Z}\int DA\,\exp\Big(-S_{\rm eff}[A]+\int d^4x\,J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)\Big), \tag{249}$$

d.h. konstruiere eine effektive Wirkung $S_{\rm eff}$, die die Eichfixierung $\delta[F(A)]$ und die Faddeev-Popov-Determinante $\tilde{\Delta}_{\rm FP}[A]$ enthält:

– Ersetze $F^a(A) \to F^a(A) - B^a(x)$, wobei $B^a(x)$ ein beliebiges "Feld" mit Farbindex ist (Verallgemeinerung der Eichbedingung):

$$Z[J] = \frac{1}{Z}\int DA\,\delta[F(A)-B]\tilde{\Delta}_{\rm FP}[A]\exp\Big(-S[A]+\int d^4x\,J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)\Big). \tag{250}$$

– Faddeev-Popov-Determinante $\tilde{\Delta}_{\rm FP}[A]$:

∗ Eine Determinante kann als Gauß-Integral über Grassmann-Variablen geschrieben werden (Gleichung (214)).

∗ Damit

$$\tilde{\Delta}_{\rm FP}[A] = \int Dc\,D\bar{c}\,\exp\Big(-\int d^4x\int d^4y\,(c^a)^*(x)M^{ab}(x,y)c^b(y)\Big), \tag{251}$$

wobei

$$\int Dc\,D\bar{c} = \int\prod_{x,a} d{\rm Re}(c^a)(x)\,d{\rm Im}(c^a)(x) \tag{252}$$

$$M^{ab}(x,y) = \left.\frac{\delta(F^a(x)-B^a(x))}{\delta\Lambda^b(y)}\right|_{\Lambda=0} = \left.\frac{\delta F^a(x)}{\delta\Lambda^b(y)}\right|_{\Lambda=0}. \tag{253}$$

* Einsetzen ins Pfadintegral bzw. ins erzeugende Funktional:

$$
\begin{aligned}
Z[J,\alpha,\alpha^*] \;=\; & \\
&= \frac{1}{Z}\int DA \int Dc\, D\bar{c}\,\delta[F(A)-B]\exp\Big(-S[A] \\
&\quad -\int d^4x \int d^4y\,(c^a)^*(x)M^{ab}(x,y)c^b(y) \\
&\quad +\int d^4x\,\Big(J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)+(\alpha^a)^*(x)c^a(x)+(c^a)^*(x)\alpha^a(x)\Big)\Big). \qquad (254)
\end{aligned}
$$

  Das erzeugende Funktional wurde dabei um Quellen α^a und $(\alpha^a)*$ für das komplexe Feld c^a erweitert (notwendig wegen möglicher Kopplung des neuen Feldes c^a an A^a_μ [M^{ab} hängt i.A. von A^a_μ ab] und Behandlung dieser WW mit Hilfe von Störungstheorie).

* Die dem Feld c^a entsprechenden Teilchen erfüllen wegen der Grassmann-Eigenschaft das Pauli-Prinzip, besitzen aber keinen Spin. Sie treten in Observablen bzw. Feynman-Diagrammen nur in Form innerer Linien auf und werden daher als Geister bezeichnet.

– Eichfixierung $\delta[F(A)-B]$:

* "Mittelung" über die sich in B^a unterscheidenden Eichungen:

$$
\begin{aligned}
Z[J,\alpha,\alpha^*] \;=\; & \\
&= \frac{1}{Z}\int DB\,\exp\Big(-\frac{1}{2\xi}\int d^4x\,B^aB^a\Big)\int DA\int Dc\,D\bar{c}\,\delta[F(A)-B] \\
&\quad \exp\Big(-S[A]-\int d^4x\int d^4y\,(c^a)^*(x)M^{ab}(x,y)c^b(y) \\
&\quad +\int d^4x\,\Big(J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)+(\alpha^a)^*(x)c^a(x)+(c^a)^*(x)\alpha^a(x)\Big)\Big) \;= \\
&= \frac{1}{Z}\int DA\int Dc\,D\bar{c}\exp\Big(-S[A]-\frac{1}{2\xi}\int d^4x\,F^a(A)F^a(A) \\
&\quad -\int d^4x\int d^4y\,(c^a)^*(x)M^{ab}(x,y)c^b(y) \\
&\quad +\int d^4x\,\Big(J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)+(\alpha^a)^*(x)c^a(x)+(c^a)^*(x)\alpha^a(x)\Big)\Big) \qquad (255)
\end{aligned}
$$

  ($1/Z$ enthält dabei ebenfalls $\int DB\ldots$), wobei

$$
\int DB \;=\; \int\prod_{x,a} dB^a(x). \qquad (256)
$$

  ξ ist ein noch zu wählender Parameter.

– Damit

$$
\begin{aligned}
Z[J,\alpha,\alpha^*] \;&=\; \frac{1}{Z}\int DA\int Dc\,D\bar{c}\exp\Big(-S_{\text{eff}}[A,c,c^*] \\
&\quad +\int d^4x\,\Big(J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)+(\alpha^a)^*(x)c^a(x)+(c^a)^*(x)\alpha^a(x)\Big)\Big) \qquad (257)
\end{aligned}
$$

$$
Z \;=\; \int DA\int Dc\,D\bar{c}\exp\Big(-S_{\text{eff}}[A,c,c^*]\Big) \qquad (258)
$$

$$
S_{\text{eff}}[A,c,c^*] \;=
$$

$$= S[A] + \underbrace{\frac{1}{2\xi}\int d^4x\, F^a(A)F^a(A)}_{S_{\text{gauge fixing[A]}}} + \underbrace{\int d^4x \int d^4y\, (c^a)^*(x)M^{ab}(x,y)c^b(y)}_{S_{\text{ghost}}[A,c,c^*]}. \quad (259)$$

6.3.1 Häufig verwendete Eichbedingungen

- Lorentz-Eichung bzw. kovariante Eichung: $F^a(A) = \partial_\mu A^a_\mu = 0$.
- Coulomb-Eichung: $F^a(A) = \partial_j A^a_j = 0$.
- Axiale Eichung: $F^a(A) = n_\mu A^a_\mu = 0$ (n_μ raumartig, häufig $n_\mu = (0,0,0,1)$).
- Temporale Eichung: $F^a(A) = A^a_0 = 0$.

6.3.2 Lorentz-Eichung

- Infinitesimale Eichtransformation (Gleichung (231)):

$$A^a_\mu(x) \;\to\; A^{a,g}_\mu(x) \;=\; A^a_\mu(x) + \left(f^{abc}A^b_\mu(x) + \frac{1}{g}\delta^{ac}\partial_\mu\right)\Lambda^c(x). \quad (260)$$

  Die infinitesimale Version reicht aus, da die Faddeev-Popov-Determinante nur bei $\Lambda = 0$ ins Pfadintegral eingeht (siehe z.B. (253)).

- Eichbedingung:

$$F^a(A^g) \;=\; \partial_\mu A^{a,g}_\mu(x) \;=\; \partial_\mu A^a_\mu(x) + \left(f^{abc}\Big((\partial_\mu A^b_\mu(x)) + A^b_\mu(x)\partial_\mu\Big) + \frac{1}{g}\delta^{ac}\Box\right)\Lambda^c(x). \quad (261)$$

- Operator M^{ab} ("Faddeev-Popov-Determinante"):

$$M^{ab}(x,y) \;=\; \left.\frac{\delta F^a(x)}{\delta\Lambda^b(y)}\right|_{\Lambda=0} \;=$$
$$= \delta(x-y)\left(-f^{abc}\Big((\partial^{(y)}_\mu A^c_\mu(y)) + A^c_\mu(y)\partial^{(y)}_\mu\Big) + \frac{1}{g}\delta^{ab}\Box^{(y)}\right). \quad (262)$$

****** 13. Juni 2025 (16. Vorlesung) ******

- Effektive Wirkung, freier (d.h. quadratischer) Anteil:

$$S_{\text{eff},0}[A,c,c^*] \;=$$
$$= \frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y\, A^a_\mu(x)\delta^{ab}\delta(x-y)\left(-\delta_{\mu\nu}\Box^{(y)} + \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^{(y)}_\mu\partial^{(y)}_\nu\right)A^b_\nu(y)$$
$$+ \int d^4x \int d^4y\, (c^a)^*(x)\delta^{ab}\delta(x-y)\Box^{(y)}c^b(y), \quad (263)$$

  wobei das Geistfeld gemäß $c \to \sqrt{g}c$ reskaliert wurde.

- Effektive Wirkung, WW Anteil:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff},I}[A,c,c^*] &= \\ &= \int d^4x \left(g f^{abc} (\partial_\mu A^a_\nu) A^b_\mu A^c_\nu + \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^d_\mu A^e_\nu \right. \\ &\quad \left. - g f^{abc} (c^a)^* \Big((\partial_\mu c^b) A^c_\mu + c^b \partial_\mu A^c_\mu \Big) \right). \end{aligned} \tag{264}$$

Maxwell-Theorie in Lorentz-Eichung

- Kein Farbindex, entspricht $f^{abc} = 0$. Damit $S_I = 0$, d.h. es gibt keine Kopplung zwischen Photonfeld und Geistfeld. Das Geistfeld trägt lediglich in Form einer Konstante zum Pfadintegral bei, die sich im erzeugenden Funktional bzw. in Observablen aufgrund der Normierung mit $1/Z$ weghebt.

- Der Photonpropagator ergibt sich wie gehabt durch Inversion des Operators im quadratischen Anteil der Wirkung:

$$\begin{aligned} &\int d^4y\, \delta(x-y) \Big(-\delta_{\mu\nu} \Box^{(y)} + \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) \partial^{(y)}_\mu \partial^{(y)}_\nu \Big) D_{F,\nu\rho}(y,z) \quad = \\ &= \quad \Big(-\delta_{\mu\nu} \Box + \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) \partial_\mu \partial_\nu \Big) D_{F,\nu\rho}(x,z) \quad = \quad \delta_{\mu\rho} \delta(x-z). \end{aligned} \tag{265}$$

  Fourier-Transformation liefert

$$\Big(\delta_{\mu\nu} p^2 - \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) p_\mu p_\nu \Big) \tilde{D}_{F,\nu\rho}(p,z) \quad = \quad e^{+ipz}. \tag{266}$$

  Diese Gleichung kann für endliche ξ nach $\tilde{D}_{F,\mu\nu}$ aufgelöst werden:

$$\tilde{D}_{F,\mu\nu}(p,y) \quad = \quad e^{+ipy} \frac{1}{p^2} \Big(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \Big) \tag{267}$$

  ($\xi = \infty$ entspricht dem in Abschnitt 6.2 diskutierten Problemfall ohne Eichfixierung: der Photonpropagator divergiert für $\xi = \infty$). Damit

$$D_{F,\mu\nu}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2} \Big(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \Big). \tag{268}$$

- Eine häufige Wahl ist $\xi = 1$ (Feynman-Eichung):

$$D_{F,\mu\nu}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{-ip(x-y)} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{p^2}. \tag{269}$$

Yang-Mills-Theorie in Lorentz-Eichung

- Es existiert eine Kopplung zwischen Gluonfeld und Geistfeld. Das Geistfeld kann also nicht unabhängig vom Gluonfeld betrachtet werden. Geister erscheinen in Form innerer Linien in Feynman-Diagrammen.

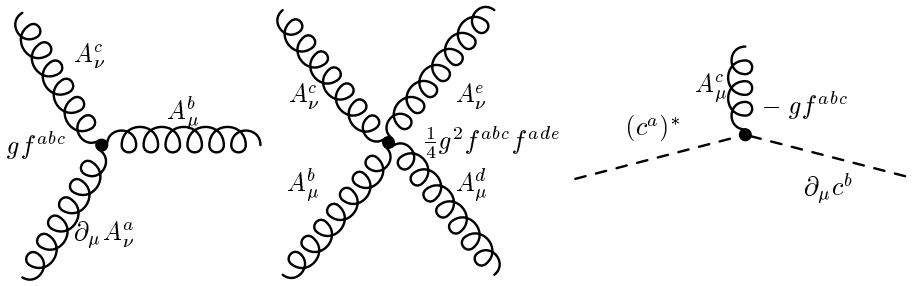
- Gluonpropagator analog zum Photonpropagator:

$$D^{ab}_{F,\mu\nu}(x,y) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x-y)}\delta^{ab}\frac{1}{p^2}\Big(\delta_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Big). \tag{270}$$

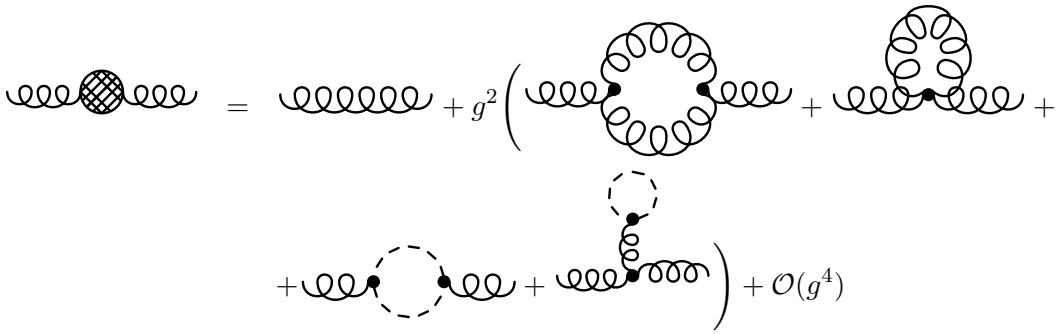
- Geistpropagator:

$$G^{ab}_F(x,y) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x-y)}\Big(-\delta^{ab}\frac{1}{p^2}\Big). \tag{271}$$

- Störungstheorie für den WW-Anteil der Wirkung $S_{\text{eff},I}$ analog zu Kapitel 3. Die Vertices sind direkt aus (264) ablesbar.



z.B. Gluon-Propagator:



7 Quantenchromodynamik (QCD)

7.1 Felder und Wirkung

- QCD ist eine SU(3)-Eichtheorie.
- Quarkfelder $\psi_A^{a,(f)}$:
  - Farbindex $a = 1, \ldots, 3$ (fundamentale Darstellung).
  - Dirac-Index bzw. Spinindex $A = 1, \ldots, 4$ (Quarks sind Spin-1/2-Teilchen).
  - Flavor-Index $(f) = 1, \ldots, N_f$ (in der Natur $N_f = 6$, u-, d-, s-, c-, b- und t-Quarks).
- Gluonfeld A_μ^a:
  - Farbindex $a = 1, \ldots, 8$ (adjungierte Darstellung).
  - Lorentz-Index $\mu = 0, \ldots, 3$ (Gluonen sind Spin-1-Teilchen).
- Wirkung, Quarkanteil:

$$\begin{aligned} S_{\text{quark}}[\psi, \bar{\psi}, A] &= \int d^4x \sum_f \bar{\psi}^{(f)} \Big(\gamma_\mu D_\mu + m^{(f)} \Big) \psi^{(f)} = \\ &= \int d^4x \sum_f \bar{\psi}_A^{a,(f)} \Big(\gamma_{\mu,AB} \Big(\delta^{ab} \partial_\mu - ig A_\mu^c \lambda^{c,ab}/2 \Big) + \delta^{ab} \delta_{AB} m^{(f)} \Big) \psi_B^{b,(f)}, \end{aligned} \tag{272}$$

  wobei $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ und $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a/2$.

- Wirkung, Gluonanteil:

$$S_{\text{gluon}}[A] = \frac{1}{4} \int d^4x \, F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad , \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \tag{273}$$

  bzw.

$$S_{\text{gluon}}[A] = \frac{1}{2} \int d^4x \, \text{Tr} \Big(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Big) \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \tag{274}$$

  wobei analog zum Gluonfeld $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \lambda^a/2$.

- Vollständige QCD-Wirkung:

$$S_{\text{QCD}}[\psi, \bar{\psi}, A] = S_{\text{quark}}[\psi, \bar{\psi}, A] + S_{\text{gluon}}[A]. \tag{275}$$

***** 17. Juni 2025 (17. Vorlesung) *****

7.2 Symmetrien

7.2.1 Lokale Symmetrien

- SU(3)-Eichsymmetrie bzw. SU(3)-Farbsymmetrie bzw. SU(3)-Color-Symmetrie, $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{color}}$:

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi^g(x) \quad = \quad g(x)\psi(x) \tag{276}$$

$$A_\mu(x) \quad \to \quad A^g_\mu(x) \quad = \quad g(x)\left(A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)g^{-1}(x). \tag{277}$$

  Daraus folgt

$$D_\mu\psi(x) \quad \to \quad (D_\mu\psi)^g(x) \quad = \quad g(x)D_\mu\psi(x), \tag{278}$$

  d.h. kovariante Ableitungen von Quarkfeldern transformieren unter $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{color}}$ genau wie Quarkfelder. Die lokale SU(3)-Farbsymmetrie ist die "fundamentale Symmetrie" der QCD. Durch Forderung dieser Symmetrie kann die QCD-Wirkung im Wesentlichen konstruiert werden.

7.2.2 Globale Symmetrien

- Klassische Physik: Jede (kontinuierliche) Symmetrie, z.B. Translationssymmetrie, liefert einen erhaltenen Strom, $\partial_\mu j^\mu = 0$, und eine zugehörige Erhaltungsgröße, $Q = \int d^3x\, j^0$, z.B. Impuls (Noether-Theorem).

- QM/QFT: Jede Symmetrie, z.B. Translationssymmetrie, liefert eine Quantenzahl, z.B. Impuls, nach der die Eigenzustände des Hamilton-Operators klassifiziert werden können. Vertauschen die Generatoren zweier Symmetrien, können die zugehörigen Quantenzahlen gleichzeitig verwendet werden.

- Für $m^{(1)} = m^{(2)} = \ldots = m^{(N_f)} = 0$ chirale Symmetrie bzw. Flavor-Symmetrie, $\mathrm{SU}(N_f)_V \times \mathrm{SU}(N_f)_A \times \mathrm{U}(1)_V \times \mathrm{U}(1)_A$:

  - $\mathrm{SU}(N_f)_V$:

$$\psi \quad \to \quad \psi' \quad = \quad e^{i\omega^a T^a}\psi, \tag{279}$$

    wobei die T^a die Erzeugenden von $\mathrm{SU}(N_f)$ sind und $e^{i\omega^a T^a}$ im Flavor-Raum wirkt.
    - Realisiert, wenn $m^{(1)} = m^{(2)} = \ldots = m^{(N_f)}$.
    - In der Natur unterscheiden sich die Quarkmassen, d.h. $m^{(u)} \neq m^{(d)} \neq m^{(s)} \neq \ldots$
    - $m^{(u)} \approx m^{(d)}$ ist jedoch in guter Näherung erfüllt, daher approximative $\mathrm{SU}(2)_V$-Symmetrie bzw. SU(2)-Isospin-Symmetrie,

$$e^{i\omega^a T^a} \quad \to \quad \begin{pmatrix} V & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad V \in \mathrm{SU}(2). \tag{280}$$

      Im "Particle-Data-Booklet" [8] werden Hadronen unter anderem nach ihrem Isospin klassifiziert, z.B. $N_f = 2$-QCD, $J^{\mathcal{P}} = 0^-$:

· $I = 1$, $I_z = -1, 0, +1$ (Triplet):
$\pi^- \equiv \bar{u}d$,
$\pi^0 \equiv \bar{u}u - \bar{d}d$,
$\pi^+ \equiv \bar{d}u$
$(m(\pi^-) \approx m(\pi^0) \approx m(\pi^+) \approx 135\,\text{MeV})$.

· $I = 0$, $I_z = 0$ (Singlet):
$\eta \equiv \bar{u}u + \bar{d}d$
$(m(\eta) \gg m(\pi^-) \approx m(\pi^0) \approx m(\pi^+)$.

∗ $m^{(u)} \approx m^{(d)} \approx m^{(s)}$ ist in grober Näherung erfüllt. Die approximative $\text{SU}(3)_V$-Symmetrie wird z.B. in Quarkmodellen verwendet (obiges Triplet wird dann zu einem Octet).

– $\text{SU}(N_f)_A$:

$$\psi \quad \to \quad \psi' \quad = \quad e^{i\omega^a T^a \gamma_5}\psi, \tag{281}$$

wobei die T^a die Erzeugenden von $\text{SU}(N_f)$ sind und $e^{i\omega^a T^a \gamma_5}$ im kombinierten Flavor-Spin-Raum wirkt.

∗ Realisiert, wenn $m^{(1)} = m^{(2)} = \ldots = m^{(N_f)} = 0$.[2]

∗ In der Natur verschwinden die Quarkmassen nicht, d.h. $m^{(f)} \neq 0$.

∗ $m^{(u)} \approx m^{(d)} \approx 0$ ist jedoch in guter Näherung erfüllt, daher approximative $\text{SU}(2)_A$-Symmetrie.

∗ Bei niedrigen Temperaturen spontan gebrochen (chirale Symmetriebrechung).

∗ Jede spontan gebrochene Symmetrie liefert ein masseloses Goldstone-Boson (Goldstone-Theorem). Da die nicht-verschwindenden Quarkmassen die $\text{SU}(2)_A$-Symmetrie bereits schwach explizit brechen, existieren keine masselosen Goldstone-Bosonen, dafür aber leichte "Möchtegern-Goldstone-Bosonen" ($\pi^-, \pi^0, \pi+$, mit Abstand die leichtesten QCD-Anregungen).

****** 20. Juni 2025 (18. Vorlesung) ******

– $\text{U}(1)_V$:

$$\psi \quad \to \quad \psi' \quad = \quad e^{i\omega}\psi, \tag{282}$$

wobei $e^{i\omega}$ eine komplexe Zahl ist.

∗ Zugeordnete Quantenzahl "Baryon Number" B (eine historische Bezeichnung, heute würde man es wohl "Quark Number" nennen). Im Wesentlichen die Differenz zwischen Quarkanzahl und Antiquarkanzahl, $B = (n_q - n_{\bar{q}})/3$.

∗ Symmetrie liegt auch separat für die einzelnen Quarkflavors vor, vertauscht dann aber nicht mit dem Isospin. Wird separat daher i.d.R. nur für schwere Quarkflavors verwendet, z.B. Erhaltung der c- oder b-Quarkanzahl (entsprechende Quantenzahlen: "Strangeness" S, "Charm" C, "Bottomness" B', "Topness" T).

[2] In der chiralen Darstellung setzt sich ein vierkomponentiger Dirac Spinor aus einem zweikomponentigen linkshändigen und einem zweikomponentigen rechtshändigen Spinor zusammen, d.h. $\psi = (\phi_L, \phi_R)$, außerdem $\gamma_5 = \text{diag}(+1, -1)$. Die $\text{SU}(N_f)_A$-Symmetrie entspricht also einer entgegengesetzten Rotation links- und rechtshändiger Spinoranteile bzw. in Kombination mit $\text{SU}(N_f)_V$ unabhängiger Rotationen links- und rechtshändiger Spinoranteile. Da im Massenterm der Wirkung links- und rechtshändige Spinoranteile mischen, d.h. $m^{(f)}\bar{\psi}\psi = m^{(f)}(\phi_L^\dagger \phi_R - \phi_R^\dagger \phi_L)$, bricht $m^{(f)} \neq 0$ die chirale Symmetrie bzw. präziser formuliert die $\text{SU}(N_f)_A$-Symmetrie.

– $\mathrm{U}(1)_A$:

$$\psi \quad \to \quad \psi' \quad = \quad e^{i\omega\gamma_5}\psi, \tag{283}$$

wobei $e^{i\omega\gamma_5}$ im Spin-Raum wirkt.

* Klassisch realisiert, wenn $m^{(1)} = m^{(2)} = \ldots = m^{(N_f)} = 0$.
* Auf Quantenebene gebrochen ($U(1)$-Anomalie, das Integrationsmaß im Pfadintegral ist nicht invariant unter der Symmetrie). Erklärt den großen Massenunterschied zwischen $\eta \equiv \bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s$ und $\eta' \equiv \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s$.

- Translationssymmetrie liefert Impulserhaltung.
- Rotationssymmetrie liefert Drehimpulserhaltung/Spin (Quantenzahl J).
- Diskrete Symmetrien:
  – Parität (Raumspiegelung): Quantenzahl $P = \pm$.
  – Ladungskonjugation (Vertauschen von Quarks und Antiquarks): Quantenzahl $C = \pm$.
  – Zeitumkehr.
- Beispiele zur Klassifizierung von Hadronen im "Particle-Data-Booklet" [8]:
  – Pion $\pi^{\pm}$: $I(J^P) = 1(0^-)$.
  – Pion π^0: $I(J^{PC}) = 1(0^{-+})$.
  – Proton p, Neutron n: $I(J^P) = 1/2(1/2^+)$.
- Eine kurze Diskussion von Helizität und deren Zusammenhang mit Chiralität im Fall masseloser Spin-1/2-Teilchen findet sich in Anhang B.

7.3 Das statische Quark-Antiquark-Potential in führender Ordnung

- Im Folgenden soll mit geringem Aufwand und ausschließlich auf bisher vermitteltem Wissen aufbauend die Berechnung einer wichtigen QCD-Observable, des statischen Quark-Antiquark-Potentials, in führender Ordnung skizziert werden. In der Literatur wird i.d.R. eleganter vorgegangen (siehe z.B. [9] und Referenzen darin).
- QM, HO: Berechnung der Energiedifferenz $E_0 - E_\Omega$ ($|\Omega\rangle$: Grundzustand, $|0\rangle$ niedrigster Zustand negativer Parität) aus dem exponentiellen Abfall einer geeigneten Korrelationsfunktion,

$$\langle\Omega|x(t)x(0)|\Omega\rangle \quad = \quad \sum_j \left|\langle\Omega|x|j\rangle\right|^2 e^{-(E_j - E_\Omega)t} \tag{284}$$

$$\lim_{t\to\infty}\langle\Omega|x(t)x(0)|\Omega\rangle \quad = \quad \left|\langle\Omega|x|0\rangle\right|^2 e^{-(E_0 - E_\Omega)t} \tag{285}$$

(Abschnitt 1.5.2, Gleichung (87)).

- Analoges Vorgehen zur Berechnung des statischen Quark-Antiquark-Potentials in der QCD:

  - Statisch bedeutet "unendlich schwere Quarks an fester Position, können weder erzeugt noch vernichtet werden".
  - Statisches Potential $V_{Q\bar{Q}}(r)$: Energiedifferenz zwischen dem QCD-Vakuum und dem niedrigsten QCD-Zustand, der genau ein statisches Quark-Antiquark-Paar im Abstand r enthält sowie (in nicht im Detail bekannter Weise) leichte Quarks und Gluonen.

- Testzustand $|\Phi\rangle$:

  - QM, HO: Parität ist eine Quantenzahl des HOs; es wurde in Abschnitt 1.5.2 gezeigt, dass $|\Phi\rangle = x|\Omega\rangle$ negative Parität besitzt; $\sum_j$ konnte bzw. kann damit auf Zustände $|j\rangle$ mit negativer Parität beschränkt werden.
  - QCD, $V_{Q\bar{Q}}(r)$: Die Anzahl der unendlich schweren Quarks/Antiquarks an jedem einzelnen Raumpunkt ist eine Quantenzahl (mit anderen Worten: Ein Zustand, der ein unendlich schweres Quark bei $\mathbf{x}$ enthält, ist orthogonal zu allen Zuständen, die keine unendlich schweren Quarks bei $\mathbf{x}$ enthalten); damit ist

    $$|\Phi\rangle \quad = \quad \bar{Q}(\underbrace{0,0,-r/2}_{\equiv -r/2})\gamma_5 \Lambda Q(\underbrace{0,0,+r/2}_{\equiv +r/2})|\Omega\rangle \tag{286}$$

    ein geeigneter Testzustand (γ_5 legt die Spineinstellung fest, orientiert sich an den pseudoskalaren Meson-Grundzuständen; das statische Potential ist ohnehin spinunabhängig, die Wahl von γ_5 in diesem Zusammenhang also von untergeordneter Bedeutung; die 3×3-Matrix Λ legt die Farbeinstellung fest, wird erst später spezifiziert).

****** 24. Juni 2025 (19. Vorlesung) ******

- Korrelationsfunktion

$$C(t) \quad = \quad \langle \Phi(t)|\Phi(0)\rangle \quad = \quad -\langle \Omega|\bar{Q}(+r/2,t)\gamma_5\Lambda^\dagger Q(-r/2,t)\bar{Q}(-r/2,0)\gamma_5\Lambda Q(+r/2,0)|\Omega\rangle \tag{287}$$

  (hier und im Folgenden stets $t > 0$):

  - Zusammenhang zwischen Korrelationsfunktion und statischem Potential:

    $$\lim_{t\to\infty} C(t) \quad = \quad \lim_{t\to\infty} \langle \Phi(t)|\Phi(0)\rangle \quad = \quad \lim_{t\to\infty} \sum_j \underbrace{\Big|\langle \Phi|j\rangle\Big|^2}_{C_j} e^{-(E_j - E_\Omega)t} \quad = \quad C_0 e^{-V_{Q\bar{Q}}(r)t}, \tag{288}$$

    beziehungsweise

    $$V_{Q\bar{Q}}(r) \quad = \quad -\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}. \tag{289}$$

  - Umschreiben von $C(t)$ in ein Pfadintegral (Startpunkt dabei ist die rechte Seite von (287)):

    $$C(t) \quad = \quad \Big\langle \mathrm{Tr}\Big(\gamma_5\Lambda^\dagger Q(-r/2,t)\bar{Q}(-r/2,0)\gamma_5\Lambda Q(+r/2,0)\bar{Q}(+r/2,t)\Big)\Big\rangle, \tag{290}$$

    wobei $\langle \ldots \rangle$ für den entsprechenden Pfadintegralerwartungswert steht.

– Berechnung der Reihenentwicklung des Pfadintegrals in g^2 mit Hilfe von Störungstheorie gemäß

$$C(t) \;=\; \langle\Phi(t)|\Phi(0)\rangle \;=\; T_0(t) + g^2 T_2(t) + \mathcal{O}(g^4) \tag{291}$$

($T_0(t)$ und $T_2(t)$ werden im Folgenden berechnet; ungerade Potenzen in g treten nicht auf, wie man sich anhand der Vertices bzw. Feynman-Regeln überlegen kann).

- Quarkpropagator (Fortsetzung von (222)):

$$\begin{aligned} S_F(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ip(x-y)}\frac{+i\gamma_\mu p_\mu + m}{p^2+m^2} \;= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}e^{-E|x_0-y_0|}\frac{\pm\gamma_0 E + i\gamma_j p_j + m}{2E}, \end{aligned} \tag{292}$$

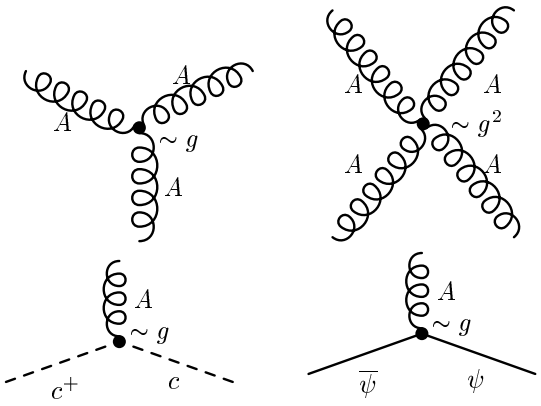
wobei $E=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$ und $\pm = +$ für $x_0-y_0>0$ und $\pm = -$ für $x_0-y_0<0$.

- Freier statischer Quarkpropagator[3]: Limes $m\to\infty$ liefert

$$S_F(x,y) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}e^{-m|x_0-y_0|}\frac{1\pm\gamma_0}{2} \;=\; \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})e^{-m|x_0-y_0|}\frac{1\pm\gamma_0}{2} \tag{293}$$

(hier wurde angenommen, dass $m\to\infty$ die im Integral auftretenden ebenfalls unendlichen $|\mathbf{p}|$ dominiert).

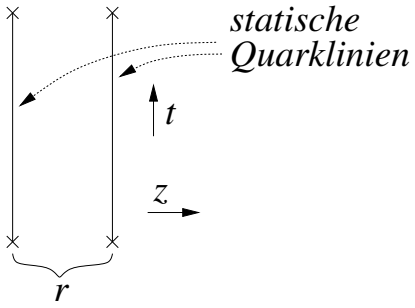
- Feynman-Regeln der QCD (Lorentz-Eichung, $\xi=1$):
  - Propagatoren: Quarkpropagator (Gleichung (222), statischer Fall Gleichung (293)), Gluon-Propagator (Gleichung (270)), Geist-Propagator (Gleichung (271)).
  - Vertices direkt aus der QCD-Wirkung (275) ablesbar: 3-Gluon, 4-Gluon, Gluon-Geist-Antigeist bereits in Abschnitt 6.3.2 diskutiert, zusätzlich Gluon-Quark-Antiquark.



  - Raumzeitintegrale über Vertexpositionen wie gehabt.
  - Kombinatorik analog zu den in der Vorlesung und den Übungen besprochenen Beispielen.

[3] In der Literatur wird üblicher Weise wird nicht der freie sondern der volle statische Propagator verwendet, der analytisch berechnet werden kann (siehe z.B. [6]).

- Ordnung g^0:
  - Feynman-Diagramm:



  - Beitrag zur Korrelationsfunktion:

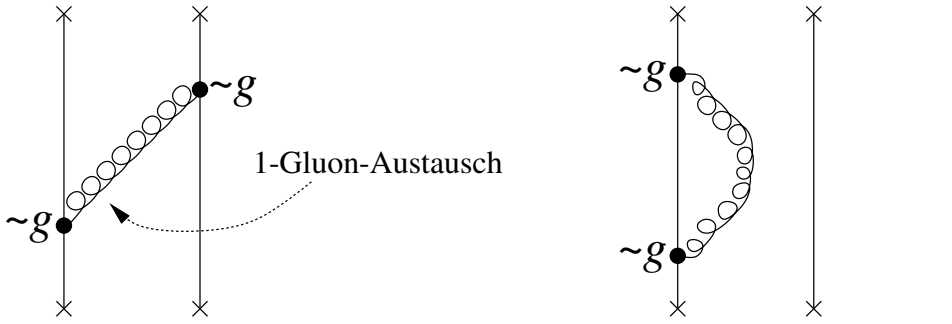
$$T_0(t) = \left\langle \mathrm{Tr}\Big(\gamma_5\Lambda^\dagger \underbrace{Q(-r/2,t)\bar{Q}(-r/2,0)}_{\to S_F(-r/2,t;-r/2,0)}\gamma_5\Lambda \underbrace{Q(+r/2,0)\bar{Q}(+r/2,t)}_{\to S_F(+r/2,0;-r/2,t)}\Big)\right\rangle \quad \to$$

$$\to \quad (\delta(0))^2 e^{-2mt} \underbrace{\mathrm{Tr}\left(\gamma_5\frac{1+\gamma_0}{2}\gamma_5\frac{1-\gamma_0}{2}\right)}_{=2} \mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger\Lambda\Big) \quad =$$

$$= \quad 2(\delta(0))^2 e^{-2mt}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger\Lambda\Big), \tag{294}$$

    wobei das erste Gleichheitszeichen nur nach der Ersetzung der $Q\bar{Q}$ durch Quarkpropagatoren gilt.

- Ordnung g^2:
  - Relevanter WW-Term aus (272): $-ig\bar{\psi}^a\gamma_\mu A^c_\mu(\lambda^{c,ab}/2)\psi^b$.
  - Feynman-Diagramme:



$\overline{\mathrm{Q}}$Q-WW, r-abhängig keine $\overline{\mathrm{Q}}$Q-WW, da r-unabhängig

  - Es wird nur der 1-Gluon-Austausch zwischen dem Quark und dem Antiquark berechnet. Ein Gluon, das vom Quark (oder äquivalent vom Antiquark) ausgesendet und wieder absorbiert wird, trägt nicht zur Quark-Antiquark-WW bei, liefert also einen r-unabhängigen und damit uninteressanten Beitrag.
  - Beitrag zur Korrelationsfunktion (im Folgenden bereits $\lim_{t\to\infty}$, damit kann $\int dx_0$ und $\int dy_0$ als $\int_0^t dx_0$ und $\int_0^t dy_0$ betrachtet werden):

$$T_2(t) + \text{“}r\text{-unabhängige Terme”} \quad = \quad -\int d^4x \int d^4y$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\Big(\gamma_5\Lambda^\dagger S_F(-r/2,t;x)\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}S_F(x;-r/2,0)\\
&\quad\gamma_5\Lambda S_F(+r/2,0;y)\gamma_\nu\frac{\lambda^b}{2}S_F(y;+r/2,t)\Big)D^{ab}_{F,\mu\nu}(x,y) \quad =\\
&= -e^{-2mt}\underbrace{\mathrm{Tr}\Big(\gamma_5\frac{1+\gamma_0}{2}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_0}{2}\gamma_5\frac{1-\gamma_0}{2}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_0}{2}\Big)}_{=-2}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger\frac{\lambda^a}{2}\Lambda\frac{\lambda^a}{2}\Big)\\
&\quad\int d^4x\int d^4y\,\Big(\delta(\mathbf{x}-r/2)\Big)^2\Big(\delta(\mathbf{y}+r/2)\Big)^2\underbrace{\frac{1}{2\pi^4}\int d^4p\,e^{-ip(x-y)}\frac{1}{p^2}}_{=1/4\pi^2(x-y)^2} \quad =\\
&= \frac{1}{2\pi^2}(\delta(0))^2e^{-2mt}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger\frac{\lambda^a}{2}\Lambda\frac{\lambda^a}{2}\Big)\underbrace{\int dx_0\int dy_0\,\frac{1}{(x_0-y_0)^2+r^2}}_{=\pi t/r} \quad =\\
&= \frac{1}{2\pi}(\delta(0))^2e^{-2mt}\mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger\frac{\lambda^a}{2}\Lambda\frac{\lambda^a}{2}\Big)\frac{t}{r}. \qquad (295)
\end{aligned}
$$

- Im Limes $t\to\infty$ gilt

$$
\begin{aligned}
\dot C(t) &= \dot T_0(t)+g^2\dot T_2(t)+\mathcal{O}(g^4) \quad =\\
&= -2m\Big(T_0(t)+g^2T_2(t)\Big)+\frac{g^2T_2(t)}{t}+\mathcal{O}(g^4)+\text{“}r\text{-unabhängige Terme”}. \qquad (296)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt mit (289)

$$
\begin{aligned}
V_{Q\bar Q}(r) &= -\lim_{t\to\infty}\Big(-2m+\frac{g^2T_2(t)}{tT_0(t)}\Big)+\mathcal{O}(g^4)+\text{“}r\text{-unabhängige Terme”} \quad =\\
&= 2m-\frac{g^2\mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger(\lambda^a/2)\Lambda(\lambda^a/2)\Big)}{4\pi r\mathrm{Tr}(\Lambda^\dagger\Lambda)}+\mathcal{O}(g^4)+\text{“}r\text{-unabhängige Terme”}. \qquad (297)
\end{aligned}
$$

***** 27. Juni 2025 (20. Vorlesung) *****

- Der Limes $t\to\infty$ ist zur Vereinfachung von (297) (erste Zeile zur zweiten Zeile) nicht nötig (keine t-Abhängigkeit). Er wurde jedoch weiter oben bereits zwei Mal verwendet: (i) direkt vor (295); (ii) bei der Definition des Testzustands (286), da dort räumliche Paralleltransporter für eine eichinvariante Definition notwendig sind, aber ignoriert wurden; diese räumlichen Paralleltransporter liefern jedoch im Limes $t\to\infty$ keine Beiträge, so dass das gewählte vereinfachte Vorgehen korrekte Ergebnisse für das statische Potential liefert.

- Spezielle Wahl der Farbausrichtung:

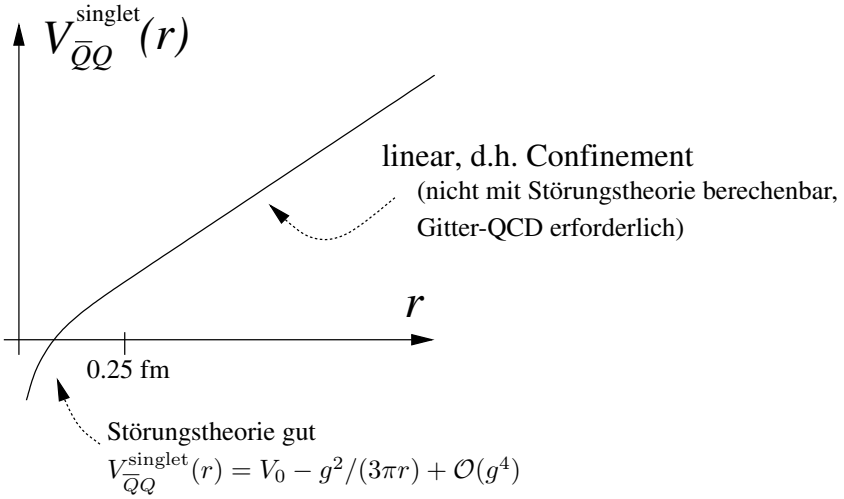
  – Color-Singlet, d.h. $\Lambda=1$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger\Lambda\Big) &= 3 \qquad (298)\\
\mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger(\lambda^a/2)\Lambda(\lambda^a/2)\Big) &= 4. \qquad (299)
\end{aligned}
$$

Damit

$$V_{Q\bar{Q}}^{\text{singlet}}(r) \quad = \quad V_0 - \frac{g^2}{3\pi r} + \mathcal{O}(g^4) \tag{300}$$

(V_0 ist eine irrelevante r-unabhängige Konstante). Störungstheorie für $V_{Q\bar{Q}}(r)$ ist nur für $Q\bar{Q}$-Separationen $\lesssim 0.2\,\text{fm}$ eine vernünftige Näherung (Kopplungskonstante g ist nur bei kleinen Abständen klein; hat mit Renormierung [siehe Kapitel 8] und der sogenannten "laufenden Kopplungskonstante" bzw. "running coupling" zu tun; mehr Details z.B. in [9]). Das resultierende attraktive Singlet-Potential ist ein Hinweis auf Mesonbildung.



– Color-Octet, d.h. $\Lambda = \lambda^a/2$:

$$\text{Tr}\Big(\Lambda^\dagger \Lambda\Big) \quad = \quad \frac{1}{2} \tag{301}$$

$$\text{Tr}\Big(\Lambda^\dagger (\lambda^a/2)\Lambda(\lambda^a/2)\Big) \quad = \quad -\frac{1}{12}. \tag{302}$$

Damit

$$V_{Q\bar{Q}}^{\text{octet}}(r) \quad = \quad V_0 + \frac{g^2}{24\pi r} + \mathcal{O}(g^4). \tag{303}$$

Das resultierende repulsive Octet-Potential ist relevant im Kontext schwerer hybrider Mesonen (= ein schweres Quark-Antiquark-Paar und Gluonen, die zu den Quantenzahlen beitragen).

- Zahlreiche Beispiele und Rechentechniken und -tricks zur störungstheoretischen Berechnung von Observablen in der QED, QCD oder schwachen WW finden sich z.B in [10].

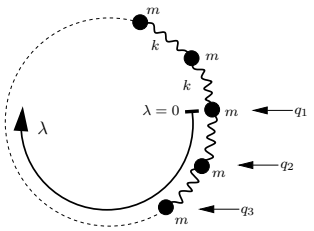
8 Renormierung

8.1 Einführendes Beispiel: Federkette in der klassischen Mechanik

- Ziel: Beschreibung der Bewegung eines makroskopischen geschlossenen "Gummibandes".
- Theoretisches Modell: Federkette, N Massenpunkte (Masse jeweils m, Koordinaten $\mathbf{q}_j$) verbunden durch Federn (Federkonstante jeweils k),

$$L = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{m}{2} (\dot{\mathbf{q}}_j(t))^2 - \frac{k}{2} \Big(\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_{j-1}(t) \Big)^2 \right) \tag{304}$$

($\mathbf{q}_0 \equiv \mathbf{q}_N$), d.h. Theorie besitzt zwei Parameter, m und k.



- Übergang ins Kontinuum, d.h. unendlich viele Massenpunkte, $N \to \infty$, $\Delta\lambda = 1/N \to 0$:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=1}^{N} \Delta\lambda \left(\frac{m}{2\Delta\lambda} (\dot{\mathbf{q}}_j(t))^2 - \frac{k\Delta\lambda}{2} \left(\frac{\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_{j-1}(t)}{\Delta\lambda} \right)^2 \right) \quad \to \\ &\to \int_0^1 d\lambda \left(\frac{m}{2\Delta\lambda} (\dot{\mathbf{q}}(\lambda,t))^2 - \frac{k\Delta\lambda}{2} \Big(\underbrace{\frac{d\mathbf{q}(\lambda,t)}{d\lambda}}_{=\mathbf{q}'(\lambda,t)} \Big)^2 \right). \end{aligned} \tag{305}$$

- BGl:

$$\ddot{\mathbf{q}}(\lambda,t) - \frac{k\Delta\lambda^2}{m} \mathbf{q}''(\lambda,t) = 0, \tag{306}$$

d.h. die bekannte "Standard-Wellengleichung".

- Lösung:

$$\mathbf{q}(\lambda,t) = \mathbf{F}_+(\lambda + vt) + \mathbf{F}_-(\lambda - vt) \tag{307}$$

mit der "Wellenausbreitungsgeschwindigkeit" $v = \sqrt{k/m}\Delta\lambda$, wobei $\mathbf{F}_+$ und $\mathbf{F}_-$ beliebige periodische Funktionen sind, die $\mathbf{F}_+(u+1) = \mathbf{F}_+(u)$ und $\mathbf{F}_-(u+1) = \mathbf{F}_-(u)$ erfüllen.

***** 01. Juli 2025 (21. Vorlesung) ******

- Jetzt Test des theoretischen Modells, d.h. Vergleich mit Experimenten:

- Der Experimentalphysiker misst in seinen "Gummibandstudien" verschiedene Observablen, z.B.
  - die Masse des Gummibandes M_{exp},
  - die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Anregungen v_{exp}.

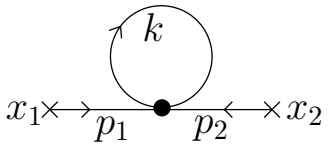
  Sowohl M_{exp} als auch v_{exp} sind endliche Größen.
- Der Theoretiker berechnet die gleichen Observablen im Rahmen seines oben diskutierten Modells:
  - Masse des Gummibandes:
    $$M \;=\; \sum_{j=1}^{N} m \;=\; \sum_{j=1}^{N} \Delta\lambda \frac{m}{\Delta\lambda} \;\to\; \int_0^1 d\lambda \, \frac{m}{\Delta\lambda} \;=\; \frac{m}{\Delta\lambda}. \tag{308}$$
  - Ausbreitungsgeschwindigkeit von Anregungen:
    $$v \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta\lambda. \tag{309}$$

    Für endliche Werte der Parameter m und k des Modells folgt wegen $\Delta\lambda \to 0$ $M \to \infty$ und $v \to 0$, in scheinbar offensichtlichem Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen.

- Ist das Modell schlecht? ... Muss es verworfen werden? ... Nein.
- Lösung: Renormierung der "nackten Parameter" ("bare parameters") m und k:
  - Wähle m so, dass $m/\Delta\lambda = M_{\text{exp}}$, d.h. schicke den nackten Parameter m in Abhängigkeit vom "Regulator" $\Delta\lambda$ in geeigneter Weise gegen Null,
    $$m \;=\; M_{\text{exp}} \Delta\lambda \;\to\; 0. \tag{310}$$
  - Wähle k so, dass $\sqrt{k/m}\Delta\lambda = v_{\text{exp}}$, d.h. schicke den nackten Parameter k in Abhängigkeit vom "Regulator" $\Delta\lambda$ in geeigneter Weise gegen Unendlich,
    $$k \;=\; m(v_{\text{exp}})^2/\Delta\lambda^2 \;=\; M_{\text{exp}}(v_{\text{exp}})^2/\Delta\lambda \;\to\; \infty. \tag{311}$$
  - Die Lagrange-Funktion des Modells kann durch endliche physikalische Parameter ausgedrückt werden:
    $$L \;= \int_0^1 d\lambda \left(\frac{M_{\text{exp}}}{2} (\dot{\mathbf{q}}(\lambda, t))^2 - \frac{M_{\text{exp}} (v_{\text{exp}})^2}{2} (\mathbf{q}'(\lambda, t))^2 \right). \tag{312}$$
- Renormierung in der QFT: Grundprinzip genau wie beim simplen mechanischen Beispiel.
  - Setzt man die in der Wirkung auftretenden nackten Parameter (z.B. m und λ bei der ϕ^4-Theorie) auf endliche Werte, erhält man als Ergebnisse für Observablen i.d.R. Unendlich.
  - Erster Schritt: Regularisierung, d.h. Einführen eines neuen unphysikalischen Parameters (bei der Federkette $\Delta\lambda$), der "Nullen" oder "Unendlichkeiten" in den nackten Parametern und in den Observablen parametrisiert und damit sinnvolles Rechnen mit solchen Grenzwerten ermöglicht.
  - Zweiter Schritt: Renormierung, d.h. schicke die nackten Parameter (bei der Federkette m und k) in Abhängigkeit vom Regulator in geeigneter Weise i.d.R. gegen Null, so dass alle berechneten Observablen endliche Werte annehmen und damit die Theorie sinnvoll ist.

8.2 Divergenzen in ϕ^4-Theorie

- Wirkung (Euklidische Version): Siehe (117).
- Feynman-Regeln im Impulsraum: Siehe Abschnitt 3.1.
- $\mathcal{O}(\lambda)$-Beitrag zur 2-Punkt-Funktion $G_2(x_1, x_2)$ (siehe auch (136)): Graphisch



bzw.

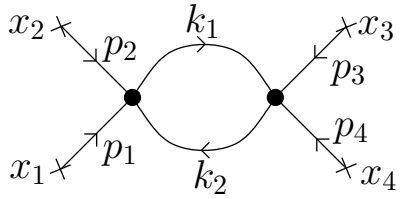
$$\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1\, e^{-ip_1x_1}\frac{1}{p_1^2+m^2}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\, e^{-ip_2x_2}\frac{1}{p_2^2+m^2}}_{\text{äußere Punkte und Linien (werden im Folgenden meist weggelassen)}}$$

$$\left(-\lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\int d^4k\,\frac{1}{k^2+m^2}\right) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -\lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\int d^4k\,\frac{1}{k^2+m^2} \quad\sim\quad \lim_{\Lambda\to\infty}\int^{\Lambda} dk\,k^3\frac{1}{k^2} \quad\sim\quad \lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda^2, \tag{313}$$

wobei $\sim$ die sogenannte UV-Divergenz (Divergenz für große "Impulse") anzeigt, hier quadratische Divergenz.

- $\mathcal{O}(\lambda^2)$-Beitrag zur 4-Punkt-Funktion $G_4(x_1, \ldots, x_4)$: Graphisch



bzw.

$$+\lambda^2\frac{1}{2}\int d^4k_1\int d^4k_2\,\delta(p_1+p_2-k_1+k_2)\delta(p_3+p_4+k_1-k_2)\frac{1}{k_1^2+m^2}\frac{1}{k_2^2+m^2} \quad =$$

$$= \quad +\lambda^2\frac{1}{2}\delta(p_1+\ldots+p_4)\int d^4k_1\,\frac{1}{k_1^2+m^2}\frac{1}{(k_1+p_3+p_4)^2+m^2} \quad\sim$$

$$\sim \quad \lim_{\Lambda\to\infty}\int^{\Lambda} dk_1\,k_1^3\frac{1}{k_1^4} \quad\sim\quad \lim_{\Lambda\to\infty}\ln(\Lambda), \tag{314}$$

also logarithmische Divergenz.

- Mit diesen und ähnlichen weiteren Divergenzen muss in kontrollierter Weise umgegangen werden (verstehen, beseitigen). Ansonsten wäre ϕ^4-Theorie nicht sinnvoll bzw. physikalisch nicht aussagekräftig.

- Welche Diagramme liefern Divergenzen und wie stark sind diese Divergenzen?
  - Allgemeine Betrachtungen für ϕ^r-Theorie in d Raumzeitdimensionen.
  - Anzahl der inneren Linien: I.
  - Anzahl der äußeren Linien: E.
  - Anzahl der Vertices: n (betrachtet wird also ein Diagramm der Ordnung λ^n).
  - Jede innere Linie liefert $1/p^2$ sowie $\int d^d p$ (in d Raumzeitdimensionen), also $d-2$ Potenzen von p.
  - Jeder Vertex liefert eine impulserhaltende δ-Funktion, also $-d$ Potenzen von p.
  - Für ein **zusammenhängendes Diagramm mit äußeren Linien** (also kein Vakuumdiagramm) verbleibt nach Integration über die Impulse der inneren Linien eine impulserhaltende δ-Funktion $\delta(p_1 + \ldots + p_E)$, wobei die p_j die Impulse der äußeren Linien sind.
  - Damit folgt für den Grad der Divergenz D eines solchen Diagramms

    $$D = (d-2)I - d(n-1). \tag{315}$$

  - I, E und n erfüllen $n = (E+2I)/r$ bzw. $I = (nr-E)/2$. Damit kann (315) umgeschrieben werden,

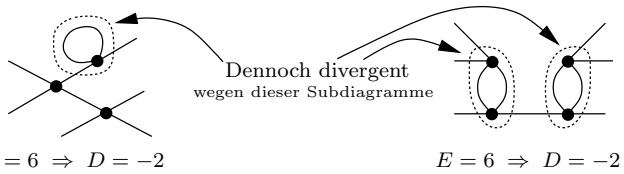
    $$D = (d-2)(nr-E)/2 - d(n-1) = \Big((d/2-1)r - d\Big)n - (d/2-1)E + d. \tag{316}$$

    Für den häufig betrachteten Fall $r = 4$ und $d = 4$ gilt damit

    $$D = 4 - E. \tag{317}$$

    Diese Gleichung ist konsistent mit den expliziten Beispielrechnungen (313) und (314). Sie deutet außerdem an, dass Diagramme mit mehr als vier äußeren Beinen endlich sind (stimmt nicht ganz, siehe weiter unten).
  - Wenn der Vorfaktor von n in (316) positiv ist, bedeutet das, dass Ordnung für Ordnung in λ immer mehr divergente Diagramme existieren (für jede Anzahl von äußeren Linien E gibt es ab einer hinreichend hohen Ordnung in λ divergente Diagramme). Da die volle Theorie einer unendlichen Reihe in λ entspricht, ist es aussichtslos, alle Divergenzen zu "entfernen". Solche Theorien nennt man *nicht-renormierbar*. Ein Beispiel für eine nicht-renormierbare Theorie ist ϕ^6-Theorie in $d = 4$ Raumzeitdimensionen.
  - Wenn der Vorfaktor von n in (316) negativ ist, treten Divergenzen nur in niedrigen Ordnungen in λ auf, es gibt also nur eine endliche Zahl divergenter Diagramme. Solche Theorien nennt man *super-renormierbar*. Ein Beispiel für eine super-renormierbare Theorie ist ϕ^3-Theorie in $d = 4$ Raumzeitdimensionen.
  - Wenn der Vorfaktor von n in (316) verschwindet, treten Divergenzen zwar in jeder Ordnung in λ auf, aber nur für Diagramme mit wenigen äußeren Linien (im Gegensatz zu nicht-renormierbaren Theorien verschlechtert sich die Situation nicht mit zunehmender Ordnung in λ). In einem solchen Fall besteht die Hoffnung, dass die Divergenzen Ordnung für Ordnung "entfernt" werden können. Ist dies möglich, nennt man die Theorie *renormierbar*. Beispiele für renormierbare Theorien sind ϕ^4-Theorie in $d = 4$ Raumzeitdimensionen sowie QED und QCD.

– Bei der Herleitung von (316) wurde von dem "gutartigen" Fall ausgegangen, dass sich unabhängig von der Struktur eines Diagramms die "schlechten" positiven Potenzen von p im Zähler und die "guten" negativen Potenzen von p im Nenner gegenseitig auslöschen. Dies ist nicht immer der Fall, wie die beiden Beispiele



zeigen. Der Grad der Divergenz D ist zwar negativ, wegen divergenten Subdiagrammen divergieren die Diagramme dennoch (D wird deswegen auch meist als oberflächlicher Grad der Divergenz oder Superficial Degree of Divergence bezeichnet).

– Weinbergs Theorem: Ein Diagramm ist endlich, wenn sein Grad der Divergenz D und die Grade der Divergenz aller Subdiagramme negativ ist (ohne Beweis).

****** 04. Juli 2025 (22. Vorlesung) ******

8.3 Regularisierung von ϕ^4-Theorie in $d = 4$ Raumzeitdimensionen

- Um störende Unendlichkeiten zu entfernen, ist es zunächst erforderlich, mit ihnen rechnen zu können. Dazu dient die Regularisierung.
- Einfaches Beispiel: **Cutoff-Regularisierung**.
  – Ersetze alle Impulsintegrale gemäß
  $$\int d^4p \quad \to \int_{|p|<\Lambda} d^4p. \tag{318}$$
  Λ ist also der maximale Impuls.
  – Am Ende einer Rechnung wird der Limes $\Lambda \to \infty$ genommen. Physikalische Ergebnisse sind damit unabhängig vom eingeführten Cutoff Λ.
  – In vielen Fällen verursacht Cutoff-Regularisierung neue Probleme, z.B. weil sie die Eichsymmetrie bricht.
- Elegante Methode: **Dimensionale Regularisierung**, lege die Anzahl der Raumzeitdimensionen d nicht fest, sondern rechne für beliebige d, insbesondere
  $$\int d^4p \quad \to \int d^dp, \tag{319}$$
  wobei $d \in \mathbb{R}$. Betrachte am Ende einer Rechnung den Limes $d \to 4$.
- Wirkung in d Raumzeitdimensionen:
  $$S[\phi] \quad = \quad \int d^dx \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\mu^{4-d}\lambda}{4!}\phi^4 \right). \tag{320}$$

- S muss dimensionslos sein, also $[S] = 1$.
- ∂_μ hat Einheit Länge^{-1}, also $[\partial_\mu] = 1/L$.
- Folglich gilt $[\phi] = 1/L^{d/2-1}$.
- Folglich gilt $[m] = 1/L$ (sinnvoll und erwartet, da Massen in Einheiten inverser Länge ausgedrückt werden können und umgekehrt).
- Die Kopplungskonstante λ soll dimensionslos bleiben. Damit muss als Vorfaktor im ϕ^4-Term ein neuer dimensionsbehafteter Parameter eingeführt werden, der die Einheit L^{d-4} besitzt. Verwende dafür μ^{4-d}, wobei μ die Einheit Masse = Länge^{-1} besitzt.

- Betrachte nun den divergenten Beitrag (313) zur 2-Punkt-Funktion $G_2(x_1, x_2)$ in d Raumzeitdimensionen,

$$-\mu^{4-d}\lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\int d^dk\,\frac{1}{k^2+m^2}. \tag{321}$$

Einschub: Integration in d Raumzeitdimensionen

- Ziel: Löse

$$\int d^dk\,\frac{1}{(k^2+2kq+m^2)^\alpha} \quad = \quad \ldots, \tag{322}$$

wobei zunächst $d \geq 3$ und ganzzahlig.

- Umschreiben auf Kugelkoordinaten: $k_\mu = (k_0, \mathbf{r}) \to (k_0, r, \phi, \theta_1, \ldots, \theta_{d-3})$,

$$\int d^dk \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} dr\, r^{d-2} \int_0^{2\pi} d\phi \prod_{j=1}^{d-3} \int_0^{\pi} d\theta_j\, \sin^j(\theta_j). \tag{323}$$

- Lege die 0-Achse in Richtung q_μ, damit $q_\mu \to (q, \vec{0})$ sowie

$$\ldots \quad = \quad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} dr\,\frac{r^{d-2}}{(k_0^2+r^2+2k_0q+m^2)^\alpha} \prod_{j=1}^{d-3} \int_0^{\pi} d\theta_j\, \sin^j(\theta_j) \quad = \quad \ldots \tag{324}$$

- Im Folgenden hilfreich: Verschiedene Darstellungen der Eulerschen Betafunktion,

$$\begin{aligned} B(x,y) \quad &= \quad \int_0^1 dt\, t^{x-1}(1-t)^{y-1} \quad = \quad 2\int_0^{\pi/2} dt\, \sin^{2y-1}(t)\cos^{2x-1}(t) \quad = \\ &= \quad 2\int_0^{+\infty} dt\,\frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}} \quad = \quad \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \end{aligned} \tag{325}$$

gültig für $\mathrm{Re}(x) > 0$ und $\mathrm{Re}(y) > 0$. Γ bezeichnet die Gammafunktion,

– für $x \in \mathbb{R}_+$

$$\Gamma(x) \quad = \quad \int_0^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t}, \tag{326}$$

– eindeutig fortsetzbar auf die komplexe Zahlenebene,

– Polstellen bei $x = 0, -1, -2, \ldots$,

– für $n \in \mathbb{N}_+ \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$.

- Verwende (325) mit $2y - 1 = j$ und $2x - 1 = 0$:

$$\int_0^\pi d\theta\, \sin^j(\theta) \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((j+1)/2)}{\Gamma((j+2)/2)}, \tag{327}$$

wobei $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ verwendet wurde. Damit

$$\ldots \quad = \quad \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \int_0^{+\infty} dr\, \frac{r^{d-2}}{(k_0^2 + r^2 + 2k_0 q + m^2)^\alpha} \quad = \quad \ldots \tag{328}$$

Ab jetzt kann d beliebige reelle Werte annehmen.

- Variablentransformation $p = k_0 + q$. Damit $k_0^2 + 2k_0 q = p^2 - q^2$ sowie

$$\ldots \quad = \quad \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_0^{+\infty} dr\, \frac{r^{d-2}}{(p^2 + r^2 + m^2 - q^2)^\alpha} \quad = \quad \ldots \tag{329}$$

- Marginales Umschreiben von (325):

$$\int_0^{+\infty} dt\, \frac{t^{2x-1}}{(A^2 + t^2)^{x+y}} \quad = \quad \frac{1}{A^{2y}} \int_0^{+\infty} dt\, \frac{t^{2x-1}}{(1 + t^2)^{x+y}} \quad = \quad \frac{1}{2A^{2y}} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{330}$$

Verwende diese Beziehung mit $2x - 1 = d - 2$, $x + y = \alpha$ und $A^2 = p^2 + m^2 - q^2$, um das r-Integral in (329) zu ersetzen:

$$\ldots \quad = \quad \frac{\pi^{(d-1)/2}\Gamma(\alpha - (d-1)/2)}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \frac{1}{(p^2 + m^2 - q^2)^{\alpha - (d-1)/2}} \quad = \quad \ldots \tag{331}$$

Verwende (330) mit $2x - 1 = 0$, $x + y = \alpha - (d-1)/2$ und $A^2 = m^2 - q^2$, um das p-Integral in 331 zu ersetzen:

$$\ldots \quad = \quad \frac{\pi^{d/2}\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)(m^2 - q^2)^{\alpha - d/2}}. \tag{332}$$

Endergebnis:

$$\int d^d k\, \frac{1}{(k^2 + 2kq + m^2)^\alpha} \quad = \quad \frac{\pi^{d/2}\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)(m^2 - q^2)^{\alpha - d/2}}. \tag{333}$$

- Fortsetzung von (321): Verwende (333) mit $\alpha = 1$ und $q = 0$,

$$-\mu^{4-d}\lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\int d^dk\,\frac{1}{k^2+m^2} \quad = \quad -\mu^{4-d}\lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\frac{\pi^{d/2}\Gamma(1-d/2)}{m^{2-d}} \quad = \quad \ldots \tag{334}$$

  Die Divergenz für $d = 4$ steckt jetzt in $\Gamma(1 - d/2)$ (die Gammafunktion hat, wie oben angegeben, Pole bei 0 und den negativen ganzen Zahlen).

- Das Verhalten der Gammafunktion in der Nähe ihrer Pole ist

$$\Gamma(-n+\epsilon) \quad = \quad \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\epsilon}+\psi_1(n+1)+\mathcal{O}(\epsilon)\right), \tag{335}$$

  wobei

$$\psi_1(n+1) \quad = \quad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\gamma \tag{336}$$

$$\gamma \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right) \quad = \quad 0.577\,215\ldots \tag{337}$$

  (γ wird als Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet). Ein Beweis findet sich z.B. in [1].

- Setze $d = 4 - \epsilon$. Damit

$$\Gamma(1-d/2) \quad = \quad \Gamma(-1+\epsilon/2) \quad = \quad -\frac{2}{\epsilon}-1+\gamma+\mathcal{O}(\epsilon) \tag{338}$$

  sowie

$$\begin{aligned}
\ldots \quad &= \quad -\mu^\epsilon\lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\frac{\pi^{2-\epsilon/2}}{m^{\epsilon-2}}\left(-\frac{2}{\epsilon}-1+\gamma+\mathcal{O}(\epsilon)\right) \quad = \\
&= \quad \lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\pi^2m^2 \quad \underbrace{\left(\frac{\mu^2}{\pi m^2}\right)^{\epsilon/2}}_{=1+\frac{\epsilon}{2}\ln\left(\frac{\mu^2}{\pi m^2}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)} \quad \left(\frac{2}{\epsilon}+1-\gamma+\mathcal{O}(\epsilon)\right) \quad = \\
&= \quad \lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\pi^2m^2\left(\frac{2}{\epsilon}+1-\gamma+\ln\left(\frac{\mu^2}{\pi m^2}\right)+\mathcal{O}(\epsilon)\right) \quad = \\
&= \quad \lambda\frac{1}{2}\delta(p_1+p_2)\frac{2\pi^2m^2}{\epsilon}+\text{finite}
\end{aligned} \tag{339}$$

  (es wurde $x^\epsilon = (e^{\ln x})^\epsilon = e^{\epsilon\ln x} = 1 + \epsilon\ln x + \mathcal{O}(\epsilon)$ verwendet).

- Analoge Behandlung des divergenten Beitrags (314) zur 4-Punkt-Funktion $G_4(x_1,\ldots,x_4)$ in d Raumzeitdimensionen liefert

$$\begin{aligned}
&+(\mu^{4-d}\lambda)^2\frac{1}{2}\delta(p_1+\ldots+p_4)\int d^dk\,\frac{1}{k^2+m^2}\,\frac{1}{(k+p_3+p_4)^2+m^2} \quad = \quad \ldots \quad = \\
&\quad = \quad \lambda^2\frac{1}{2}\mu^\epsilon\delta(p_1+\ldots+p_4)\pi^2
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \underbrace{\int_0^1 dz\, \ln\left(\frac{\pi((p_3+p_4)^2 z(1-z)+m^2)}{\mu^2}\right)}_{\equiv F((p_3+p_4)^2,m,\mu)} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \quad =$$

$$= \quad \lambda^2 \frac{1}{2}\delta(p_1+\ldots+p_4)\frac{2\pi^2\mu^\epsilon}{\epsilon} + \text{finite} \tag{340}$$

($\rightarrow$ Hausaufgabe; hier kann $\mu^\epsilon = 1 + \epsilon\ln(\mu) + \mathcal{O}(\epsilon)$ nicht verwendet werden, weil μ nicht einheitenlos ist).

****** 08. Juli 2025 (23. Vorlesung) ******

- Die in Abschnitt 3.3 eingeführten Proper Functions $\Gamma_n(x_1,\ldots,x_n)$ enthalten die eben studierten Unendlichkeiten in elementarer Art und Weise (wie bereits in Abschnitt 3.3 angedeutet ist es ausreichend, im Zug der Renormierung alle Proper Functions endlich zu machen, da diese die fundamentalen Bausteine der Störungstheorie bilden).
  - Γ_2 bzw. $\tilde{\Gamma}_2$:
    - Gleichung (136):

$$G_2(x_1,x_2) \quad = \quad G_2^c(x_1,x_2) \quad =$$

$$= \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dp\, e^{-ip(x_1-x_2)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{p^2+m^2}\left(1 - \frac{1}{(2\pi)^d(p^2+m^2)}\mu^{4-d}\lambda\frac{1}{2}\int d^dk\,\frac{1}{k^2+m^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)\right)}_{=\tilde{G}_2^c(p) \quad \text{(Gleichung (159))}}. \tag{341}$$

    - Gleichung (160):

$$\tilde{\Gamma}_2(p) \quad = \quad \frac{1}{\tilde{G}_2^c(p)} \quad =$$

$$= \quad \left(p^2+m^2\right)\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^d(p^2+m^2)}\mu^{4-d}\lambda\frac{1}{2}\int d^dk\,\frac{1}{k^2+m^2} + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \quad =$$

$$= \quad \left(p^2+m^2\right)\left(1 - \frac{1}{(2\pi)^{(4-\epsilon)}(p^2+m^2)}\frac{\lambda\pi^2m^2}{2}\right.$$

$$\left.\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{\pi m^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \quad =$$

$$= \quad p^2 + m^2\left(1 - \frac{\lambda(1+\epsilon\ln(2\pi)+\mathcal{O}(\epsilon^2))}{32\pi^2}\right.$$

$$\left.\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{\pi m^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \quad =$$

$$= \quad p^2 + m^2\left(1 - \frac{\lambda}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} + \underbrace{1 - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)}_{\text{finite}} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \quad =$$

$$= \quad p^2 + m^2\left(1 - \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} + \text{finite} + \mathcal{O}(\lambda^2)\right). \tag{342}$$

  - Γ_4 bzw. $\tilde{\Gamma}_4$:

∗ Mit Hilfe einiger Gleichungen aus Kapitel 3 folgt

$$\begin{aligned}\Gamma_4(x_1,\ldots,x_4) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dp_1\, e^{-ip_1x_1}\ldots\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dp_4\, e^{-ip_4x_4}\delta(p_1+\ldots+p_4) \\ &\quad\Big(\mu^{d-4}\lambda(2\pi)^d-(\mu^{d-4}\lambda)^2\frac{1}{2}\Big(\int d^dk\,\frac{1}{k^2+m^2}\frac{1}{(k+p_3+p_4)^2+m^2} \\ &\quad+\Big((p_3+p_4)\to(p_2+p_4)\Big)+\Big((p_3+p_4)\to(p_1+p_4)\Big)\Big)+\mathcal{O}(\lambda^3)\Big) \qquad (343)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\tilde\Gamma_4(p_1,\ldots,p_4) &= \\ &= (2\pi)^4\mu^\epsilon\delta(p_1+\ldots+p_4)\lambda\Big(1-\frac{\lambda}{32\pi^2}\Big(\frac{6}{\epsilon}-3\gamma-F((p_3+p_4)^2,m,\mu) \\ &\quad -F((p_2+p_4)^2,m,\mu)-F((p_1+p_4)^2,m,\mu)+\mathcal{O}(\epsilon)\Big)+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big) \;= \\ &= (2\pi)^4\mu^\epsilon\delta(p_1+\ldots+p_4)\lambda\Big(1-\frac{3\lambda}{16\pi^2\epsilon}+\text{finite}+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big). \qquad (344)\end{aligned}$$

Test durch Betrachtung der Dimensionen:

- $[\phi]=L^{1-d/2}$.
- $[G_n^c]=[\phi]^n=L^{n(1-d/2)}$.
- $[\Gamma_n]=[G_n^c]/([G_2^c]\times[\int d^dx])^n=L^{-n(1+d/2)}$.
- $[\tilde\Gamma_n]=[\Gamma_n]\times[\int d^dx]^n=L^{n(d/2-1)}$.
- Jetzt Vergleich: $[\tilde\Gamma_4]=$ [Gleichung (344)] $=L^{-\epsilon+d}=L^{2d-4}$ ... also konsistent mit vorheriger Zeile.

8.4 Renormierung von ϕ^4-Theorie in $d=4$ Raumzeitdimensionen

- Renormierung: Setze die Proper Functions auf endliche Werte; richte die Parameter m und λ so ein (d.h. "schicke sie geeignet gegen Unendlich oder Null", abhängig von der betrachteten Theorie), dass die Proper Functions genau diese endlichen Werte annehmen.
- $\tilde\Gamma_2$:
  - Setze
    $$\tilde\Gamma_2(p) \;=\; p^2+m_R^2, \qquad (345)$$
    wobei m_R endlich ist (angenommen Euklidische ϕ^4-Theorie würde unsere Welt beschreiben, dann wäre m_R die Masse eines ϕ-Teilchens, die ein Experimentalphysiker messen würde). m_R nennt man renormierte Masse (renormalized mass), m nackte Masse (bare mass).
  - Einsetzen von (342) in (345),
    $$p^2+m^2\Big(1-\frac{\lambda}{32\pi^2}\Big(\frac{2}{\epsilon}+1-\gamma+\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)\Big)+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big) \;=\; p^2+m_R^2, \qquad (346)$$
    woraus
    $$m^2 \;=\; m_R^2\Big(1+\frac{\lambda}{32\pi^2}\Big(\frac{2}{\epsilon}+1-\gamma+\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m_R^2}\Big)\Big)+\mathcal{O}(\lambda^2)\Big) \qquad (347)$$

folgt. Die nackte Masse m ist also unendlich, liefert aber $\tilde{\Gamma}_2(p) = p^2 + m_R^2 + \mathcal{O}(\lambda^2)$ und damit eine endliche "physikalische" Masse $m^2_{\text{phys}} = m_R^2 + \mathcal{O}(\lambda^2)$ (bis zur betrachteten Ordnung der Störungstheorie).

– In der Literatur (z.B. [1]) wird beim Renormieren häufig nur der unendliche Anteil in (346) betrachtet, also

$$p^2 + m^2\left(1 - \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \quad \equiv \quad p^2 + m_R^2 \tag{348}$$

identifiziert, woraus

$$m^2 \quad = \quad m_R^2\left(1 + \frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \tag{349}$$

folgt. Die nackte Masse m ist also ebenfalls unendlich und liefert eine endliche Proper 2-Punkt-Funktion,

$$\tilde{\Gamma}_2(p) \quad = \quad p^2 + \underbrace{m_R^2\left(1 - \frac{\lambda}{32\pi^2}\left(1 - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_R^2}\right)\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\right)}_{=m^2_{\text{phys}}}. \tag{350}$$

Die "physikalische" Masse m_{phys} ist aber in weniger offensichtlicher Weise mit der renormierten Masse m_R verbunden.

– (346) und (348) nennt man Renormierungsbedingungen. Renormierungsbedingungen müssen Unendlichkeiten in physikalischen Größen beseitigen, sind aber davon abgesehen, nicht eindeutig, wie die beiden Beispiele (346) und (348) zeigen.

- $\tilde{\Gamma}_4$:

  – Setze

  $$\tilde{\Gamma}_4(p_1, \ldots, p_4)\Big|_{p_1=\ldots=p_4=0} \quad = \quad (2\pi)^4\mu^\epsilon\delta(p_1 + \ldots p_4)\lambda_R\Big|_{p_1=\ldots=p_4=0} \tag{351}$$

  (μ^ϵ sorgt für die richtige Dimension; siehe Dimensionsbetrachtungen unterhalb von (344)), wobei λ_R endlich ist (angenommen, Euklidische ϕ^4-Theorie würde unsere Welt beschreiben, dann wäre λ_R proportional zur WW von ϕ-Teilchen mit ein- bzw. auslaufenden Impulsen $p_1 = \ldots = p_4 = 0$, die von einem Experimentalphysiker in einem Streuexperiment gemessen werden könnte). λ_R nennt man renormierte Kopplung (renormalized coupling), λ nackte Kopplung (bare coupling).

  – Identifiziere (344) und (351),

  $$\lambda\left(1 - \frac{3\lambda}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - F(0, m, \mu)\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \quad = \quad \lambda_R, \tag{352}$$

  woraus

  $$\lambda \quad = \lambda_R\left(1 + \frac{3\lambda_R}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - F(0, m, \mu)\right) + \mathcal{O}(\lambda_R^2)\right) \tag{353}$$

  folgt. Die nackte Kopplung λ ist also unendlich, liefert aber eine endliche impulsabhängige physikalische Kopplung

  $$\lambda_{\text{phys}}(p_1, \ldots, p_4) \quad = \quad \frac{\tilde{\Gamma}_4(p_1, \ldots, p_4)}{(2\pi)^4\mu^\epsilon\delta(p_1, \ldots, p_4)} \quad =$$

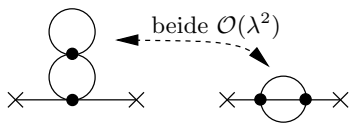
$$
\begin{aligned}
&= \lambda\Bigg(1 - \frac{\lambda}{32\pi^2}\Bigg(\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma - F((p_3+p_4)^2, m, \mu) - F((p_2+p_4)^2, m, \mu) \\
&\quad -F((p_1+p_4)^2, m, \mu)\Bigg) + \mathcal{O}(\lambda^2)\Bigg) \quad = \\
&= \lambda_R\Bigg(1 + \frac{\lambda_R}{32\pi^2}\Bigg(F((p_3+p_4)^2, m, \mu) + F((p_2+p_4)^2, m, \mu) \\
&\quad +F((p_1+p_4)^2, m, \mu) - 3F(0, m, \mu)\Bigg) + \mathcal{O}(\lambda_R^2)\Bigg). \qquad (354)
\end{aligned}
$$

****** 11. Juni 2025 (24. Vorlesung) ******

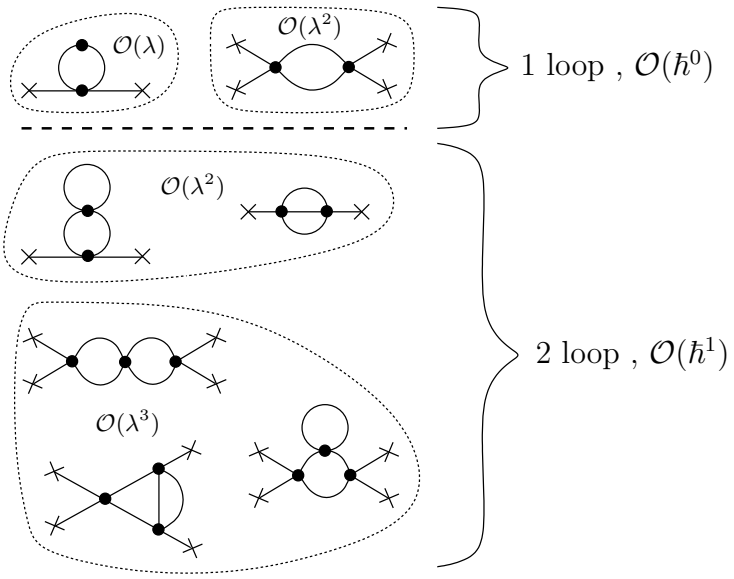
- Neben (352) sind auch hier andere Renormierungsbedingungen denkbar, z.B. könnte man sich wie in (348) auf den unendlichen Anteil beschränken, oder die Renormierungsbedingung bei anderen Impulsen $p_j \neq 0$ formulieren. λ_R hätte dann eine andere physikalische Bedeutung, die Unendlichkeiten hätte man aber ebenfalls entfernt.
- Da die nackte Kopplung λ unendlich ist (Gleichung (353)), ist Störungstheorie in λ nicht sinnvoll. Stattdessen sollten Störungsreihen in der renormierten Kopplung λ_R oder in der physikalischen Kopplung $\lambda_{\text{phys}}(p_1, \ldots, p_4)$ bei festen Impulsen $p_1, \ldots, p_4$ gebildet werden. Voraussetzung ist natürlich $\lambda_R \ll 1$ bzw. $\lambda_{\text{phys}}(p_1, \ldots, p_4) \ll 1$. Eine Ausnahme bildet die niedrigste Ordnung der Störungstheorie, für die $\lambda = \lambda_R = \lambda_{\text{phys}}$ gilt. In diesem Fall kann die "Störungsreihe" auch im nackten λ gebildet werden.
- Die Impulsabhängigkeit der physikalischen Kopplung (354) deutet an, dass Störungstheorie nur in gewissen Impulsbereichen sinnvoll einsetzbar ist (in Bereichen, in denen $\lambda_{\text{phys}}(p_1, \ldots, p_4) \ll 1$), in anderen Impulsbereichen dagegen nicht (in Bereichen, in denen $\lambda_{\text{phys}}(p_1, \ldots, p_4) \gtrsim 1$). Ein Beispiel ist QCD: Die QCD-Kopplungskonstante ist klein bei großen Impulsen ($\rightarrow$ asymptotische Freiheit, Störungstheorie funktioniert sehr gut), aber groß bei kleinen Impulsen ($\rightarrow$ Störungstheorie ist nicht in der Lage, niederenergetische QCD-Anregungen [Hadronen] zu beschreiben).

8.4.1 λ-Ordnungen versus Loop-Ordnungen, Renormierung in höheren Ordnungen

- Ist die gezeigte Renormierung systematisch (d.h. Ordnung für Ordnung) in λ?
  - Nein, Unendlichkeit in $\tilde{\Gamma}_2$ entspricht $\mathcal{O}(\lambda)$, Unendlichkeit in $\tilde{\Gamma}_4$ entspricht $\mathcal{O}(\lambda^2)$.
  - Systematische Renormierung bis $\mathcal{O}(\lambda)$: Nur Massenrenormierung erforderlich, die nackte Kopplungskonstante λ entspricht der physikalischen λ_{phys} und ist endlich.
  - Systematische Renormierung bis $\mathcal{O}(\lambda^2)$: Zwei weitere Diagramme müssten mit einbezogen werden.



- Die gezeigte Renormierung ist systematisch (d.h. Ordnung für Ordnung) in der Anzahl der Loops und damit in $\hbar$, also eine systematische Entwicklung um die klassische Theorie.



– "Wiedereinführen" von $\hbar$:

$$S[\phi] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\hbar} S[\phi]. \tag{355}$$

Damit verändert sich (118) gemäß

$$\begin{aligned} Z[J] \quad &= \quad \frac{1}{Z} \int D\phi \, \exp\Big(-\frac{1}{\hbar} S_0[\phi] - \frac{1}{\hbar} S_I[\phi] + \int d^4x \, J(x)\phi(x) \Big) \quad = \\ &= \quad \frac{Z_0}{Z} \exp\Big(-\frac{1}{\hbar} S_I[\delta/\delta J] \Big) \exp\left(\frac{\hbar}{2} \int d^4x \int d^4y \, J(x) \Delta_F(x,y) J(y) \right). \end{aligned} \tag{356}$$

Jeder Vertex liefert also $1/\hbar$, jeder Propagator $\hbar$. Ein Proper Diagramm (ein Diagramm, dessen äußere Linien entfernt wurden) ist damit proportional zu $\hbar^{I-n}$.

– Kombinatorik: Für die Anzahl der Loops L gilt

$$L \quad = \quad \frac{4n - E - 2(n-1)}{2} \quad = \quad n - E/2 + 1 \tag{357}$$

(zunächst $4n$ offene Beine bei n Vertices, E werden für äußere Linien benötigt, $2(n-1)$ um die Vertices zu verbinden, jeweils zwei der übrigen offenen Beine bilden einen Loop). Einsetzen von $n = (E + 2I)/4$ (Abschnitt 8.2) liefert

$$L - 1 \quad = \quad I - n. \tag{358}$$

Ein Proper Diagramm ist damit proportional zu $\hbar^{L-1}$.

- 2-Loop-Renormierung: Unendlichkeiten können nicht mehr vollständig durch die nackten Parameter m und λ kompensiert werden. Eine sogenannte **Wellenfunktionsrenormierung** ist erforderlich, $\phi_R = Z_\phi^{-1/2} \phi$, wobei Z_ϕ einen äquivalenten Stellenwert wie m und λ hat. Wellenfunktionsrenormierung entspricht im Wesentlichen einem zusätzlichen Parameter vor dem kinetischen Term $(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi)$. Im Gegensatz zur QFT ist ein solcher zusätzlicher Parameter in der klassischen Feldtheorie überflüssig (eine BGl kann mit einem geeigneten Faktor multipliziert werden, so dass der zusätzliche Parameter vor dem kinetischen Term wieder verschwindet; nach einer Redefinition von m und λ tritt der zusätzliche Parameter überhaupt nicht mehr auf).

9 QFT auf dem Gitter

- Pfadintegrale in der QM bzw. QFT sind definiert als Grenzwerte endlich dimensionaler bzw. abzählbar unendlich dimensionaler Integrale, z.B.

$$\int D\phi \quad = \quad \lim_{a\to 0} \int \prod_{x\in a\mathbb{Z}^4} d\phi(x), \tag{359}$$

  wobei die Raumzeit mit einem hyperkubischen Gitter diskretisiert wird, d.h. $x \in a\mathbb{Z}^4$ an Stelle von $x \in \mathbb{R}^4$ (dabei ist a der Gitterabstand).

- Gitterregularisierung: Führe sämtliche Rechnungen mit endlichem Gitterabstand a aus, bilde erst am Ende den Limes $a \to 0$ ("Kontinuumslimes"), um "Kontinuumsergebnisse" zu erhalten.

- Mögliche Gitterdiskretisierungen von Integration und Differentiation:

  – Integration:

$$\int d^4x\, F(x) \quad \to \quad \sum_x a^4 F(x). \tag{360}$$

  – Differentiation:

    * Vorwärts-Gitterableitung:

$$\partial_\mu F(x) \quad \to \quad \Delta^f_\mu F(x) \quad = \quad \frac{F(x+a\hat{\mu}) - F(x)}{a}, \tag{361}$$

      wobei $\hat{\mu}$ der Einheitsvektor in μ-Richtung ist.

    * Rückwärts-Gitterableitung:

$$\partial_\mu F(x) \quad \to \quad \Delta^b_\mu F(x) \quad = \quad \frac{F(x) - F(x-a\hat{\mu})}{a}. \tag{362}$$

    * Im Limes $a \to 0$ sind Vorwärts- und Rückwärts-Gitterableitung identisch. Dieses Beispiel zeigt, dass Gitterdiskretisierungen nicht eindeutig sind.

    * Partielle Integration:

$$\sum_x a^4 (\Delta^f_\mu F(x)) G(x) \quad = \quad \sum_x a^4 \frac{F(x+a\hat{\mu})G(x) - F(x)G(x)}{a} \quad =$$
$$= \quad \sum_x a^4 \frac{F(x)G(x-a\hat{\mu}) - F(x)G(x)}{a} \quad = \quad -\sum_x a^4 F(x)(\Delta^b_\mu G(x)) \tag{363}$$

      (es wurde angenommen, wie auch meistens im Kontinuum, dass die Raumzeit periodisch ist bzw. die "Felder" F und G im Unendlichen verschwinden).

    * d'Alembert-Operator:

$$\Box F(x) \quad \to \quad \Delta^f_\mu \Delta^b_\mu F(x) \quad = \quad \sum_\mu \frac{F(x+a\hat{\mu}) - 2F(x) + F(x-a\hat{\mu})}{a^2}. \tag{364}$$

      Damit

$$\sum_x a^4 (\Delta^f_\mu F(x))(\Delta^f_\mu G(x)) \quad = \quad \sum_x a^4 (\Delta^b_\mu F(x))(\Delta^b_\mu G(x)) \quad =$$
$$= \quad -\sum_x a^4 F(x)(\Box G(x)) \quad = \quad -\sum_x a^4 (\Box F(x)) G(x). \tag{365}$$

- Fourier-Transformation:
  - Endliches Raumzeitvolumen, periodische RBs, d.h. $\phi(x + L_\mu a\hat{\mu}) = \phi(x)$ (L_μ ist die Anzahl der Gitterpunkte in μ-Richtung; x kann also auf $0 \leq x_\mu < L_\mu a$ beschränkt werden).
  - Anzahl aller Gitterpunkte: $V = L_0 L_1 L_2 L_3$, wobei i.d.R. $T \equiv L_0$ und $L \equiv L_1 = L_2 = L_3$ und damit $V = L^3 T$.
  - Fourier-Transformation:

$$\tilde{F}(p) = \sum_x \underbrace{a^4}_{\sim d^4x} e^{+ipx} F(x) \quad , \quad p_\mu = \frac{2\pi}{aL_\mu} n_\mu \quad , \quad n_\mu = 0, 1, \ldots, L_\mu - 1 \tag{366}$$

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_p \underbrace{\Big(\prod_\mu \frac{2\pi}{aL_\mu} \Big)}_{\sim d^4p} e^{-ipx} \tilde{F}(p) = \frac{1}{V} \sum_p \frac{1}{a^4} e^{-ipx} \tilde{F}(p). \tag{367}$$

  - Limes $L_\mu \to \infty$: Impulsdiskretisierung wird feiner, Wertebereich bleibt gleich, $0 \leq p_\mu < 2\pi/a$,

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{|p_\mu| < \pi/a} d^4p \, e^{-ipx} \tilde{F}(p). \tag{368}$$

  - Limes $a \to 0$ liefert die bekannten Ausdrücke für die Fourier-Transformation im Kontinuum und für unendlich ausgedehnte Raumzeit.

****** 15. Juli 2025 (25. Vorlesung) ******

9.1 Gitteregularisierung skalarer Feldtheorien (am Beispiel des freien reellen Skalarfelds)

- Freies reelles Skalarfeld, Euklidische Formulierung:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^4x \, \phi(x) \Big(-\Box + m^2 \Big) \phi(x) \quad \to \\ &\to \frac{1}{2} \sum_x a^4 \phi(x) \Big(-\Box + m^2 \Big) \phi(x) = \frac{1}{2} \sum_x a^4 \sum_y a^4 \phi(x) \frac{\delta_{x,y}}{a^4} \Big(-\Box^{(y)} + m^2 \Big) \phi(y). \end{aligned} \tag{369}$$

- Propagator (diskretisierte aber unendlich ausgedehnte Raumzeit):
  - Analog zur "Kontinuums-QFT" (siehe Kapitel 2) als Inverses der Matrix des quadratischen Anteils von S definiert,

$$\sum_y a^4 \frac{\delta_{x,y}}{a^4} \Big(-\Box^{(y)} + m^2 \Big) \Delta_F(y, z) = \Big(-\Box + m^2 \Big) \Delta_F(x, z) = \frac{\delta_{x,z}}{a^4}. \tag{370}$$

– Fourier-Transformation $\sum_x a^4 e^{+ipx} \ldots$:

$$\begin{aligned}
\sum_x a^4 e^{+ipx}\Big(-\Box + m^2\Big)\Delta_F(x,z) &= \sum_x a^4\Big(\Big(-\Box + m^2\Big)e^{+ipx}\Big)\Delta_F(x,z) = \\
&= \Big(-\sum_\mu \frac{e^{+ipa\hat{\mu}} - 2 + e^{-ipa\hat{\mu}}}{a^2} + m^2\Big)\sum_x a^4 e^{+ipx}\Delta_F(x,z) = \\
&= \Big(\sum_\mu \frac{2(1-\cos(p_\mu a))}{a^2} + m^2\Big)\tilde{\Delta}_F(p,z) = \\
&= \Big(\sum_\mu \Big(\frac{2\sin(p_\mu a/2)}{a}\Big)^2 + m^2\Big)\tilde{\Delta}_F(p,z) = e^{+ipz}, \qquad (371)
\end{aligned}$$

wobei $2\sin^2(x/2) = 1 - \cos(x)$ verwendet wurde.

– Auflösen nach $\tilde{\Delta}_F(p,z)$:

$$\tilde{\Delta}_F(p,z) = \frac{e^{+ipz}}{\sum_\mu \Big(\frac{2\sin(p_\mu a/2)}{a}\Big)^2 + m^2}. \qquad (372)$$

– Fourier-Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{|p_\mu|<\pi/a} d^4p\, e^{-ipx}\tilde{\Delta}_F(p,z) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{|p_\mu|<\pi/a} d^4p\, e^{-ip(x-y)} \underbrace{\frac{1}{\sum_\mu \Big(\frac{2\sin(p_\mu a/2)}{a}\Big)^2 + m^2}}_{\equiv\tilde{\Delta}_F(p)}. \qquad (373)
\end{aligned}$$

– Im Limes $a \to 0$ gilt $2\sin(p_\mu a/2)/a \to p_\mu$ und damit $\Delta_F(p) \to 1/(p^2+m^2)$. Man erhält also im Limes $a \to 0$ das bekannte Kontinuumsergebnis.

– Der Gitterpropagator $\Delta_F(x,y)$ ist eine Matrix, deren Einträge für endliche a ebenfalls alle endlich sind. Divergenzen verursachende Impulsintegrale werden durch den Gitterabstand a bzw. den "Cutoff" π/a regularisiert.

- Pfadintegral:

$$\int D\phi \;\to\; \int \prod_x d\phi(x) \qquad (374)$$

(ein endlich dimensionales Integral, wenn das Raumzeitvolumen endlich ist [i.d.R. periodisch]; eignet sich bei Verwendung der Euklidischen Formulierung meist gut zur numerischen Umsetzung).

- Erzeugendes Funktional:

$$Z[J] = \frac{1}{Z}\int \prod_x d\phi(x)\, \exp\Big(-S[\phi] + \sum_x a^4 J(x)\phi(x)\Big) \qquad (375)$$

mit

$$Z \;=\; \int \prod_x d\phi(x)\, \exp\Big(-S[\phi]\Big). \tag{376}$$

(375) ist ein endlich dimensionales Gauß-Integral, das sich, wie in Abschnitt 1.5.1 gezeigt, lösen lässt:

$$Z[J] \;=\; \exp\left(\frac{1}{2}\sum_x a^4 \sum_y a^4 J(x)\Delta_F(x,y)J(y)\right) \tag{377}$$

(entspricht im Limes $a \to 0$ dem bekannten Kontinuumsausdruck (110)).

- Erweiterung um WW Terme geradlinig, z.B. ϕ^4-WW.

9.2 Die Transfermatrix

- Ziele dieses Abschnitts:
  - Die Verbindung zwischen dem bekannten Operator-Formalismus der QM bzw. QFT und einem Gitterpfadintegral deutlich machen.
  - Wie kann man Energieeigenwerte aus Gitter-2-Punkt-Funktionen bestimmen?

  Die wesentlichen Gleichungen/Aussagen dieses Unterkapitels sind magneta eingefärbt.

- Definition: $\phi_\tau = \{\phi(\mathbf{x},t)\,|\,t=\tau\}$, d.h. eine Feldkonfiguration zu fester Zeit $t=\tau$ bzw. eine "Zeitschicht"von Feldvariablen.

- Zerlege die Gitterwirkung in Terme, die nicht mehr als zwei benachbarte Zeitschichten enthalten (hier am Beispiel von ϕ^4-Theorie):

$$S[\phi] \;=\; \sum_t aL[\phi_{t+a},\phi_t] \tag{378}$$

$$L[\phi_{t+a},\phi_t] \;=\; \sum_{\mathbf{x}} a^3 \frac{1}{2}\left(\frac{\phi(\mathbf{x},t+a)-\phi(\mathbf{x},t)}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\Big(L_1[\phi_{t+a}] + L_1[\phi_t]\Big) \tag{379}$$

$$L_1[\phi_t] \;=\; \sum_{\mathbf{x}} a^3 \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\phi(\mathbf{x}+a\hat{j},t)-\phi(\mathbf{x},t)}{a}\right)^2 + \frac{m^2}{2}\Big(\phi(\mathbf{x},t)\Big)^2 + \frac{\lambda}{4!}\Big(\phi(\mathbf{x},t)\Big)^4\right). \tag{380}$$

- Definition der Transfermatrix T,

$$T[\phi_{t+a},\phi_t] \;=\; \exp\Big(-aL[\phi_{t+a},\phi_t]\Big), \tag{381}$$

bzw. des zugeordneten Operators $\hat{T}$,

$$\langle\phi_{t+a}|\hat{T}|\phi_t\rangle \;=\; T[\phi_{t+a},\phi_t]\,: \tag{382}$$

– "Zeilen- und Spaltenindizes" der Transfermatrix T sind Feldkonfigurationen zu fester Zeit. Die Matrix hat also eine unendliche "kontinuierliche" Menge von Zeilen und Spalten.

– $|\phi_t\rangle$ sind "Ortseigenzustände", d.h. QFT-Zustände, deren Feldauslenkungen fixiert sind.

– $\hat{T}$ kann durch Feldoperatoren $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ und kanonisch konjugierte Impulse $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \\ &= \exp\Big(-\frac{a}{2}L_1[\hat{\phi}(\mathbf{x})]\Big)\int\Big(\prod_{\mathbf{x}}d\Delta(\mathbf{x})\Big)\exp\Big(-a\sum_{\mathbf{x}}a^3\frac{(\Delta(\mathbf{x}))^2}{2a^2}\Big) \\ &\quad \exp\Big(-i\sum_{\mathbf{x}}a^3\hat{\pi}(\mathbf{x})\Delta(\mathbf{x})\Big)\exp\Big(-\frac{a}{2}L_1[\hat{\phi}(\mathbf{x})]\Big). \qquad (383)\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\langle\phi_{t+a}|\hat{T}|\phi_t\rangle &= \\ &= \int\Big(\prod_{\mathbf{x}}d\Delta(\mathbf{x})\Big)\exp\Big(-a\sum_{\mathbf{x}}a^3\frac{(\Delta(\mathbf{x}))^2}{2a^2}\Big) \\ &\quad \underbrace{\langle\phi_{t+a}|\exp\Big(-i\sum_{\mathbf{x}}a^3\hat{\pi}(\mathbf{x})\Delta(\mathbf{x})\Big)|\phi_t\rangle}_{=\langle\phi(\mathbf{x},t+a)|\phi(\mathbf{x},t)+\Delta(\mathbf{x})\rangle}\exp\Big(-\frac{a}{2}\Big(L_1[\phi_{t+a}]+L_1[\phi_t]\Big)\Big) \quad = \\ &= \int\Big(\prod_{\mathbf{x}}d\Delta(\mathbf{x})\Big)\exp\Big(-a\sum_{\mathbf{x}}a^3\frac{(\Delta(\mathbf{x}))^2}{2a^2}\Big) \\ &\quad \Big(\prod_{\mathbf{x}}\delta(\phi(\mathbf{x},t+a)-(\phi(\mathbf{x},t)+\Delta(\mathbf{x})))\Big)\exp\Big(-\frac{a}{2}\Big(L_1[\phi_{t+a}]+L_1[\phi_t]\Big)\Big) \quad = \\ &= \exp\Big(-a\sum_{\mathbf{x}}a^3\frac{1}{2}\Big(\frac{\phi(\mathbf{x},t+a)-\phi(\mathbf{x},t)}{a}\Big)^2\Big) \\ &\quad \exp\Big(-\frac{a}{2}\Big(L_1[\phi_{t+a}]+L_1[\phi_t]\Big)\Big) \quad = \\ &= \exp\Big(-aL[\phi_{t+a},\phi_t]\Big) \quad = \quad T[\phi_{t+a},\phi_t], \qquad (384)\end{aligned}$$

wobei

$$\exp\Big(-i\sum_{\mathbf{x}}a^3\hat{\pi}(\mathbf{x})\Delta(\mathbf{x})\Big)|\phi_t\rangle \quad = \quad |\phi(\mathbf{x},t)+\Delta(\mathbf{x})\rangle \qquad (385)$$

verwendet wurde (QM Entsprechung: $e^{-i\hat{p}\Delta}|x\rangle = |x+\Delta\rangle$).

– Ausführen des Gauß-Integrals in (383) liefert

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \\ &= \exp\Big(-\frac{a}{2}L_1[\hat{\phi}(\mathbf{x})]\Big)\Big(\frac{2\pi}{a^2}\Big)^{L^3/2}\exp\Big(-a\sum_{\mathbf{x}}a^3\frac{1}{2}(\hat{\pi}(\mathbf{x}))^2\Big) \\ &\quad \exp\Big(-\frac{a}{2}L_1[\hat{\phi}(\mathbf{x})]\Big) \quad =\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{a^2}\right)^{L^3/2} \exp\Bigg(- a\Bigg(\underbrace{\sum_{\mathbf{x}} a^3 \frac{1}{2}(\hat{\pi}(\mathbf{x}))^2 + L_1[\hat{\phi}(\mathbf{x})]}_{=\hat{H}} + \mathcal{O}(a)\Bigg)\Bigg). \tag{386}$$

$\hat{H}$ ist dabei der Hamilton-Operator einer räumlich diskretisierten ϕ^4-Theorie. Der der Transfermatrix zugeordnete Operator $\hat{T}$ ist also proportional zum Euklidischen Zeitentwicklungsoperator $e^{-a\hat{H}}$ um die Zeitdifferenz a bis auf $\mathcal{O}(a)$-Korrekturen. Diese Korrekturen bzw. "Diskretisierungsfehler" haben ihren Ursprung in der im Gitterpfadintegral verwendeten Zeitdiskretisierung.

- Für das Gitterpfadintegral gilt

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_x d\phi(x)\, \exp\Big(- S[\phi]\Big) = \frac{1}{Z}\int \prod_x d\phi(x)\, \exp\Big(- \sum_t a L[\phi_{t+a}, \phi_t]\Big) = \\ &= \int \prod_x d\phi(x) \prod_t T[\phi_{t+a}, \phi_t] = \\ &= \int \prod_x d\phi(x)\, \ldots \langle \phi_{t=3a}|\hat{T}|\phi_{t=2a}\rangle\langle\phi_{t=2a}|\hat{T}|\phi_{t=a}\rangle\langle\phi_{t=a}|\hat{T}|\phi_{t=0}\rangle = \mathrm{Tr}\Big(\hat{T}^T\Big). \end{aligned} \tag{387}$$

- Für Gitter-2-Punkt-Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \Big\langle O_2(t) O_1(0)\Big\rangle &= \frac{1}{Z}\int \prod_x d\phi(x)\, O_2(t) O_1(0) \exp\Big(- S[\phi]\Big) = \\ &= \frac{\mathrm{Tr}(\hat{T}^{T-t/a}\hat{O}_2\hat{T}^{t/a}\hat{O}_1)}{\mathrm{Tr}(\hat{T}^T)} = \frac{\sum_{j,k}\langle j|\hat{O}_2|k\rangle\langle k|\hat{O}_1|j\rangle \lambda_j^{T-t/a}\lambda_k^{t/a}}{\sum_j \lambda_j^T}, \end{aligned} \tag{388}$$

wobei O_1 und O_2 Funktionen der zeitunabhängigen Feldvariablen $\phi(\mathbf{x})$ sind und $|j\rangle$ die Eigenzustände und λ_j die (reellen) Eigenwerte der (hermiteschen) Transfermatrix $\hat{T}$ bezeichnen, also $\hat{T}|j\rangle = \lambda_j|j\rangle$.

  - Für ein in Zeitrichtung unendlich ausgedehntes Gitter (Limes $T \to \infty$) dominiert der größte Eigenwert von $\hat{T}$, λ_Ω:

$$\Big\langle O_2(t) O_1(0)\Big\rangle = \sum_k \langle\Omega|\hat{O}_2|k\rangle\langle k|\hat{O}_1|\Omega\rangle \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_\Omega}\right)^{t/a}. \tag{389}$$

Verwendung von (386) liefert

$$\begin{aligned} \Big\langle O_2(t) O_1(0)\Big\rangle &= \sum_k \langle\Omega|\hat{O}_2|k\rangle\langle k|\hat{O}_1|\Omega\rangle \Big(\exp\Big(- (E_k - E_\Omega + \mathcal{O}(a))a\Big)\Big)^{t/a} = \\ &= \sum_k \langle\Omega|\hat{O}_2|k\rangle\langle k|\hat{O}_1|\Omega\rangle \exp\Big(- (E_k - E_\Omega + \mathcal{O}(a))t\Big) \end{aligned} \tag{390}$$

(die E_k sind die Eigenwerte von $\hat{H}$, dem oben eingeführten Hamilton-Operator einer räumlich diskretisierten ϕ^4-Theorie). Aus dem exponentiellen Abfall einer Gitter-2-Punkt-Funktion für große Zeitseparationen t kann also wie im Kontinuum die Energiedifferenz von Eigenzuständen des Hamilton-Operators zum Grundzustand (bis auf kontrollierbare $\mathcal{O}(a)$ Diskretisierungsfehler) bestimmt werden.

– Hat das Gitter eine endliche Zeitausdehnung, wie z.B. in numerischen Rechnungen, können mit ähnlichen Überlegungen Energiedifferenzen extrahiert werden. Dabei ist jedoch die allgemeine kompliziertere Spektralzerlegung (388) zu verwenden.

****** 18. Juli 2025 (26. Vorlesung) ******

9.3 Numerische Berechnung von Gitterpfadintegralen

- Störungtheorie ist im Rahmen der Gitterregularisierung möglich, i.d.R. jedoch aufwändiger als im Kontinuum (Kapitel 3).

  → Gitterstörungtheorie wird teilweise zur Ergänzung von Ergebnissen aus numerisch berechneten Gitterpfadintegralen eingesetzt, z.B. zur approximativen Berechnung von Renormierungsfaktoren.

  → Gitterstörungtheorie wird in dieser Vorlesung nicht diskutiert.

- Vorteile der Gitterregularisierung gegenüber Kontinuumsstörungstheorie oder Modellrechnungen:

  – Euklidische Pfadintegrale auf endlichen Gittern (endlicher Gitterabstand a, endliches Raumzeitvolumen V) eigenen sich in vielen Fällen zur numerischen Auswertung. Gitterrechnungen sind damit nicht auf kleine Kopplungskonstanten beschränkt und daher z.B. für QCD in beliebigen Impulsbereichen einsetzbar (ermöglicht damit die Berechnung von Hadronmassen, Zerfallskonstanten, etc.).

  – Sämtliche systematischen Fehler (Fehler aufgrund von endlichem a und V) können untersucht werden (numerische Rechnungen bei mehreren Werten von a und V) und mit Hilfe kontrollierter Extrapolationen entfernt werden (asymptotisches Verhalten von Observablen bezüglich a und V kann analytisch bestimmt werden). Ende erhält man "fehlerfreie"[4] Kontinuumsergebnisse.

- Nachteil numerischer Gitterrechnungen: Man erhält als Ergebnisse keine Gleichungen, sondern lediglich Zahlenwerte (eine numerische Gitterrechnung ist eine Art auf dem Computer simuliertes Experiment).

9.3.1 Monte-Carlo-Simulation von Pfadintegralen

- Betrachte im Folgenden eindimensionale QM auf einem periodischen Zeitgitter (Anzahl der Gitterpunkte T, Gitterabstand a, $x(t+Ta) \equiv x(t)$):

$$S[x] = \sum_t a\left(\frac{m}{2}\left(\frac{x(t+a)-x(t)}{a}\right)^2 + V(x(t))\right) \tag{391}$$

$$\Big\langle O_2(x(t_2))O_1(x(t_1))\Big\rangle = \frac{1}{Z}\int \prod_t dx_t\, O_2(x(t_2))O_1(x(t_1))e^{-S[x]}, \tag{392}$$

[4] "Fehlerfrei" ist hier im Sinn von "unbiased" zu verstehen, also frei von systematischen Fehlern, und bezieht sich nicht auf die üblicher Weise bei Gitterergebnissen vorhandenen statistischen Fehler, deren Ursache in der Verwendung von Monte-Carlo-Techniken liegt.

wobei $t, t_1, t_2 \in \{0, a, 2a, \ldots, (T-1)a\}$ und $\langle \ldots \rangle$ den Pfadintegralerwartungswert von ... bezeichnet.

- Ist eine naive numerischen Auswertung des endlich dimensionalen Integrals (392) möglich?
  - Z.B. $T = 100$ Gitterpunkte.
  - Diskretisierung der $x(0)$-, $x(a)$-, $x(2a)$-, ... $x((T-1)a)$-Achsen mit jeweils 100 Abtastpunkten (numerische Auswertung des Integrals mit Hilfe von "Treppenstufen" oder ähnlicher Verfahren).
  - Damit 100^{100} Auswertungen des Integranden erforderlich ... von keinem Computer zu schaffen.
  - Situation verschlechtert sich drastisch beim Übergang zu QFT: Wegen vierdimensionaler Raumzeit sind für ein $L^3 \times T = 100^4$-Gitter bereits $100^{(100^4)}$ Auswertungen des Integranden erforderlich.
- Ausweg: Numerische Auswertung bzw. Abschätzung von (392) mit stochastischen Methoden, sogenannten Monte-Carlo-Simulationen. Ergebnis kommt mit statistischem Fehler, ist aber unbiased.
- Monte-Carlo-Algorithmus: Verfahren, das Pfade $x_j(t)$ (in der QM) bzw. Feldkonfigurationen (z.B. $\phi_j(x)$ in der QFT) gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung e^{-S}/Z generiert. Für Erwartungswerte, z.B. für Gitter-2-Punkt-Funktionen, gilt dann

$$\Big\langle O_2(x(t_2))O_1(x(t_1))\Big\rangle \quad = \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} O_2(x_j(t_2))O_1(x_j(t_1)) \tag{393}$$

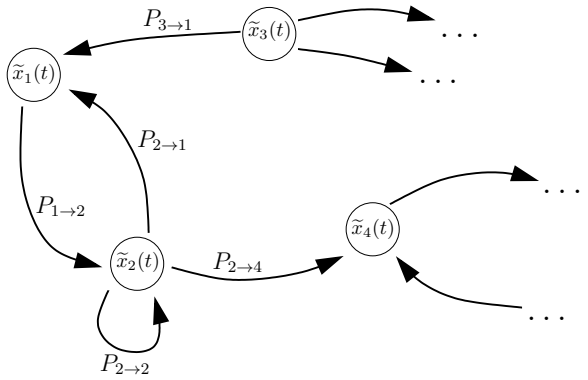
  bzw. für tatsächliche numerische Rechnungen mit einer endlichen Menge von N Pfaden

$$\Big\langle O_2(x(t_2))O_1(x(t_1))\Big\rangle \quad = \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} O_2(x_j(t_2))O_1(x_j(t_1)) \pm \text{statistischer Fehler}, \tag{394}$$

  wobei der statistische Fehler mit aus der Experimentalphysik bekannten Standardtechniken bestimmt werden kann. I.d.R. genügt eine kleine Menge ($N \approx 100 \ldots 100\,000$) von Pfaden bzw. Feldkonfigurationen, die eine repräsentative Menge bilden.
- Monte-Carlo-Simulationen basieren auf Markov-Ketten:
  - Eine Markov-Kette besteht aus sogenannten Zuständen, die den möglichen Pfaden entsprechen, also mit $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$, $\tilde{x}_3(t)$, etc. indiziert werden, sowie Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{j\to k}$ für einen Übergang von Zustand $\tilde{x}_j(t)$ zu Zustand $\tilde{x}_k(t)$, für die

$$\sum_k p_{j\to k} \quad = \quad 1 \tag{395}$$

    gelten muss.



- Springe von Zustand zu Zustand gemäß der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{j\to k}$.
- Konstruiere $p_{j\to k}$ so, dass nach hinreichend langer Laufzeit unabhängig vom Anfangszustand

$$p(\tilde{x}_j(t)) \quad = \quad \frac{e^{-S[\tilde{x}_j(t)]}}{Z} \tag{396}$$

gilt, wobei $p(\tilde{x}_j(t))$ die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass sich die Markov-Kette im Zustand $\tilde{x}_j(t)$ befindet. Dafür muss für $p_{j\to k}$

$$\sum_j p(\tilde{x}_j(t))p_{j\to k} \quad = \quad p(\tilde{x}_k(t)) \tag{397}$$

bzw. nach Einsetzen von (396)

$$\sum_j e^{-S[\tilde{x}_j(t)]}p_{j\to k} \quad = \quad e^{-S[\tilde{x}_k(t)]} \tag{398}$$

gelten.

- Häufig ist es einfacher, Monte-Carlo-Algorithmen zu konstruieren, die an Stelle von (397) die stärkere Forderung der "Detailed Balance" erfüllen:

$$p(\tilde{x}_j(t))p_{j\to k} \quad = \quad p(\tilde{x}_k(t))p_{k\to j}. \tag{399}$$

Beweis, dass (399) Gleichung (397) bedingt: Summiere (399) über j,

$$\sum_j p(\tilde{x}_j(t))p_{j\to k} \quad = \quad \sum_j p(\tilde{x}_k(t))p_{k\to j} \quad = \quad p(\tilde{x}_k(t)) \underbrace{\sum_j p_{k\to j}}_{=1} \quad = \quad p(\tilde{x}_k(t)). \tag{400}$$

- Metropolis-Algorithmus:
  - Ein einfacher vielseitig einsetzbarer Monte-Carlo-Algorithmus. Häufig jedoch sehr langsam, d.h. eine repräsentative Menge von Pfaden $x_j(t)$ mit dem Metropolis-Algorithmus zu generieren benötigt deutlich mehr Rechenzeit, als mit anderen spezielleren Monte-Carlo-Algorithmen.
  - n-ter Metropolis Schritt:
    - Schlage zufällig vom aktuellen Pfad $x_n(t) = \tilde{x}_j(t)$ ausgehend einen neuen Pfad $\tilde{x}_k(t)$ mit Wahrscheinlichkeit $W_{j\to k}$ vor. Hierbei muss (unabhängig von n) $W_{j\to k} = W_{k\to j}$ erfüllt sein (i.d.R. einfach zu erfüllen).
      Beispiel: Wähle zufällig einen Gitterpunkt τ und verändere den Wert des Pfads an

diesem Gitterpunkt von $x(\tau)$ zu $x(\tau)+\delta$, wobei δ zufällig im Intervall $[-\Delta x, +\Delta x]$ gewählt wird.

* Akzeptiere den neuen Pfad mit Wahrscheinlichkeit $\min(1, \exp(-(S[\tilde{x}_k(t)]-S[\tilde{x}_j(t)])))$, d.h. setze $x_{n+1}(t) = \tilde{x}_k(t)$, andernfalls behalte den alten Pfad, d.h. setze $x_{n+1}(t) = \tilde{x}_j(t)$.
* Nachweis, dass (399) erfüllt ist: Einsetzen der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten führt auf

$$\frac{e^{-S[\tilde{x}_j(t)]}}{Z} W_{j\to k} \min\Big(1, \exp\Big(-\Big(S[\tilde{x}_k(t)] - S[\tilde{x}_j(t)]\Big)\Big)\Big) =$$

$$= \frac{e^{-S[\tilde{x}_k(t)]}}{Z} W_{k\to j} \min\Big(1, \exp\Big(-\Big(S[\tilde{x}_j(t)] - S[\tilde{x}_k(t)]\Big)\Big)\Big); \tag{401}$$

Verwenden von $W_{j\to k} = W_{k\to j}$ liefert

$$\min\Big(\exp\Big(-S[\tilde{x}_j(t)]\Big), \exp\Big(-S[\tilde{x}_k(t)]\Big)\Big) =$$

$$= \min\Big(\exp\Big(-S[\tilde{x}_k(t)]\Big), \exp\Big(-S[\tilde{x}_j(t)]\Big)\Big) \tag{402}$$

und zeigt damit, dass Detailed Balance erfüllt ist, d.h. der Metropolis-Algorithmus Pfade gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung $e^{-S[x]}/Z$ generiert.

– Damit der Metropolis-Algorithmus möglichst schnell eine repräsentative Menge von Pfaden $x_j(t)$ generiert muss Folgendes gelten:

(A) Der neu vorgeschlagene Pfad $\tilde{x}_k(t)$ sollte sich möglichst stark von $\tilde{x}_j(t)$ unterscheiden ($\to$ schnelle Bewegung durch den Raum aller Pfade).

(B) Der neu vorgeschlagene Pfad $\tilde{x}_k(t)$ darf nicht zu oft abgelehnt werden, sonst ebenfalls langsame Bewegung durch den Raum aller Pfade. Impliziert allerdings ähnliche Wirkung von $\tilde{x}_j(t)$ und $\tilde{x}_k(t)$ und damit häufig starke Ähnlichkeit von $\tilde{x}_j(t)$ und $\tilde{x}_k(t)$.

Mit dem Vorschlagen der neuen Pfade $\tilde{x}_k(t)$ sollte ein Kompromiss zwischen (A) und (B) realisiert werden, z.B. durch geeignete Wahl des Parameters Δx.

****** 22. Juli 2025 (27. Vorlesung) ******

9.3.2 Anharmonischer Oszillator, numerische Berechnung von Differenzen von Energieeigenwerten

- Betrachte den anharmonischen Oszillator

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \lambda x^4. \tag{403}$$

- Ziel: Bestimme $E_0 - E_\Omega$ mit Hilfe einer numerischen Gitterrechnung, wobei E_0 die Energie des niedrigsten Energieeigenzustands mit $P = -$ bezeichnet (Grundzustand $|\Omega\rangle$ hat $P = +$).

- **Schritt 1**:
Drücke alle dimensionsbehafteten Größen in Einheiten des Gitterabstands a aus, d.h. $\hat{a} = a/a = 1$, $\hat{x} = x/a$, $\hat{t} = t/a$.

Dabei handelt es sich um ein übliches Vorgehen bei Gitterrechnungen bzw. in der Numerik (der Computer muss so lediglich dimensionslose Größen/Zahlen verarbeiten und nicht mit Einheiten rechnen). Falls gewünscht, können am Ende dimensionsbehaftete Größen in einer speziellen physikalischen Einheit, z.B. Sekunden, ausgedrückt werden, indem man den Gitterabstand entsprechend setzt.

- **Schritt 2**:
  Generiere Pfade $\hat{x}_j(\hat{t})$ mittels einer Monte-Carlo-Simulation, hier Metropolis-Algorithmus:
  - Verwende exemplarisch zwei Parametersätze:
    * $T = 64$, $\hat{m} = ma = 0.125$, $\hat{\omega} = \omega a = 0.125$, $\hat{\lambda} = \lambda a^5 = 0.0$;
    * $T = 64$, $\hat{m} = ma = 0.125$, $\hat{\omega} = \omega a = 0.125$, $\hat{\lambda} = \lambda a^5 = 0.05 \times \hat{\omega}^5$

    (Richtlinie für die Wahl sinnvoller Parameter: Die inverse zu extrahierende Energiedifferenz $1/(\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega) \approx 1/\hat{\omega} = 8.0$ [hat Einheit Länge] sollte sowohl kleiner als das Gitter sein $[1/(\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega) \approx 8.0 \ll T = 64]$ als auch größer als der Gitterabstand $[1/(\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega) = 8.0 \gg \hat{a} = 1]$).
  - Starte mit "kaltem" Pfad ($\rightarrow$ ein Pfad mit kleiner Wirkung), $\hat{x}(\hat{t}) = 0$.
    (Alternativ: Starte mit zufälligem "heißen" Pfad ($\rightarrow$ ein Pfad mit großer Wirkung), $\hat{x}(\hat{t}) \in [-5.0, +5.0]$. Vergleich von Ergebnissen mit kaltem und heißem Start [diese müssen im Rahmen der statistischen Fehler übereinstimmen] kann als Test verwendet werden.)
  - 1 000 Thermalisierungs-Sweeps (jeder Gitterpunkt wird einmal verändert), um das System ins Gleichgewicht zu bringen.
  - 1 000 000 weitere Sweeps ($\Delta\hat{x}/a = 6.0$, liefert für beide Parametersätze etwa eine Akzeptanzrate von 50%, was ein guter Erfahrungswert für eine schnelle Bewegung durch den Raum aller Pfade ist).
  - Jeder 10-te Pfad wird zur Observablenberechnung verwendet, hinreichend starkes Binning während der Analyse, um Autokorrelationen zu entfernen.
  - Abbildung 1 zeigt die Thermalisierung während der Monte-Carlo-Simulation bei kaltem Start. Das System scheint nach wenigen Schritten im Gleichgewicht zu sein, die 1 000 Thermalisierungs-Sweeps sind also sehr vorsichtig gewählt.

- **Schritt 3**:
  Berechne die Gitter-2-Punkt-Funktion

$$C(\hat{t}) \quad = \quad \Big\langle \hat{x}(\hat{t})\hat{x}(0) \Big\rangle \tag{404}$$

  via (394). Abbildung 2 zeigt die numerischen Ergebnisse.

- **Schritt 4**:
  - Plotte die sogenannte effektive Masse,

$$\hat{m}_{\text{effective}}(\hat{t}) \quad = \quad \ln\left(\frac{C(\hat{t})}{C(\hat{t}+1)}\right) \tag{405}$$

    (siehe Abbildung 3). Aufgrund von $\lim_{t\to\infty} C(\hat{t}) = Ae^{-(\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega)\hat{t}}$ (Gleichung (390)) gilt $\lim_{t\to\infty} \hat{m}_{\text{effective}}(\hat{t}) = \hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega$ ($\mathcal{O}(a)$-Fehler vernachlässigt, ebenso wie die endliche periodische Ausdehnung der Zeit).

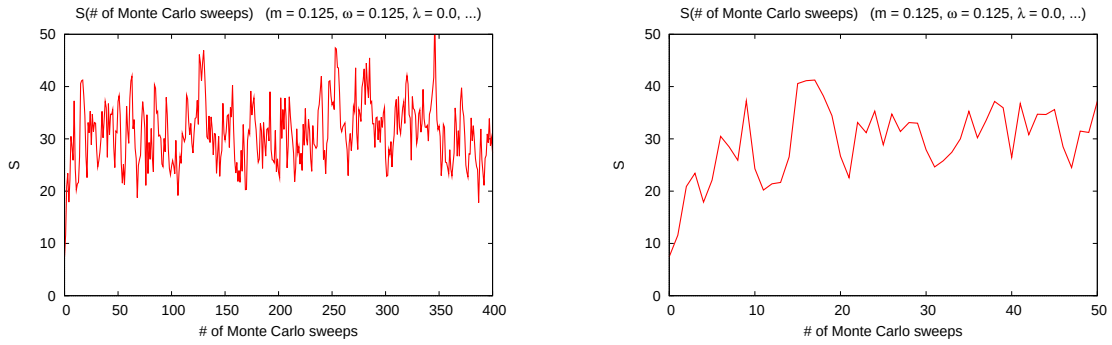


Abbildung 1: S als Funktion der Anzahl der Monte-Carlo-Sweeps ($\hat{\lambda} = 0.0$).

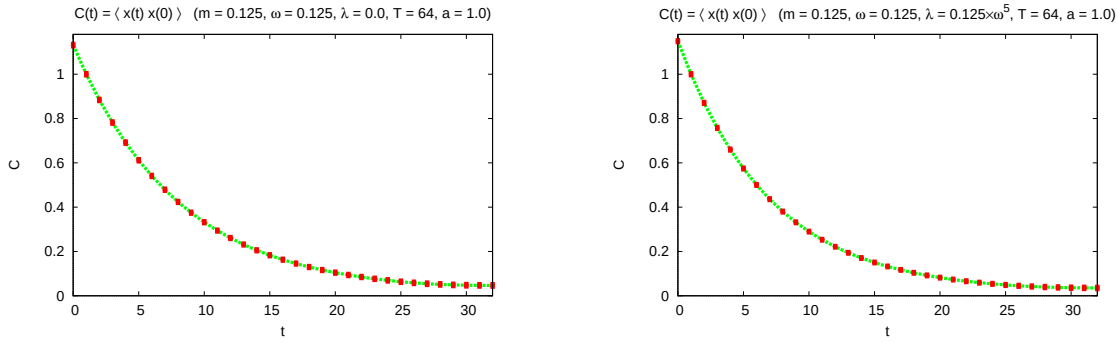


Abbildung 2: C als Funktion von $\hat{t}$ für $\hat{\lambda} = 0.0$ (links) und $\hat{\lambda} = 0.05 \times \hat{\omega}^5$ (rechts).

  - In der Praxis: Fitte eine Konstante für hinreichen große Zeitseparationen $\hat{t}$ an die effektive Masse, der resultierende Wert der Konstanten entspricht $\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega$.
  - Numerische Ergebnisse:
    * $\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega = 0.1222 \pm 0.0019$ für $\hat{\lambda} = 0$ (analytisches Ergebnis $\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega = 0.125$),
    * $\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega = 0.1372 \pm 0.0020$ für $\hat{\lambda} = 0.05 \times \hat{\omega}^5$ (numerisch exaktes Ergebnis aus der SG $\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega = 0.140\ldots$ [11]).

    Die Abweichungen vom analytischen Ergebnis bzw. numerisch exakten Ergebnis liegen im Rahmen der Fehler. Systematische Fehlerquellen (endliches a und T; siehe Schritt 5) wurden hier nicht untersucht, haben aber vermutlich ebenfalls nicht-vernachlässigbaren Einfluss.

- **Schritt 5**:
  Extrapoliere mit Hilfe numerischer Ergebnisse für $\hat{E}_0 - \hat{E}_\Omega$ für verschiedene Werte von a (d.h. verschieden feine Gitter) und Ta (d.h. verschieden große periodische Zeitausdehnungen) ins Kontinuum und zu unendlicher Zeitausdehnung, d.h. zu $a = 0$ und $Ta = \infty$, um

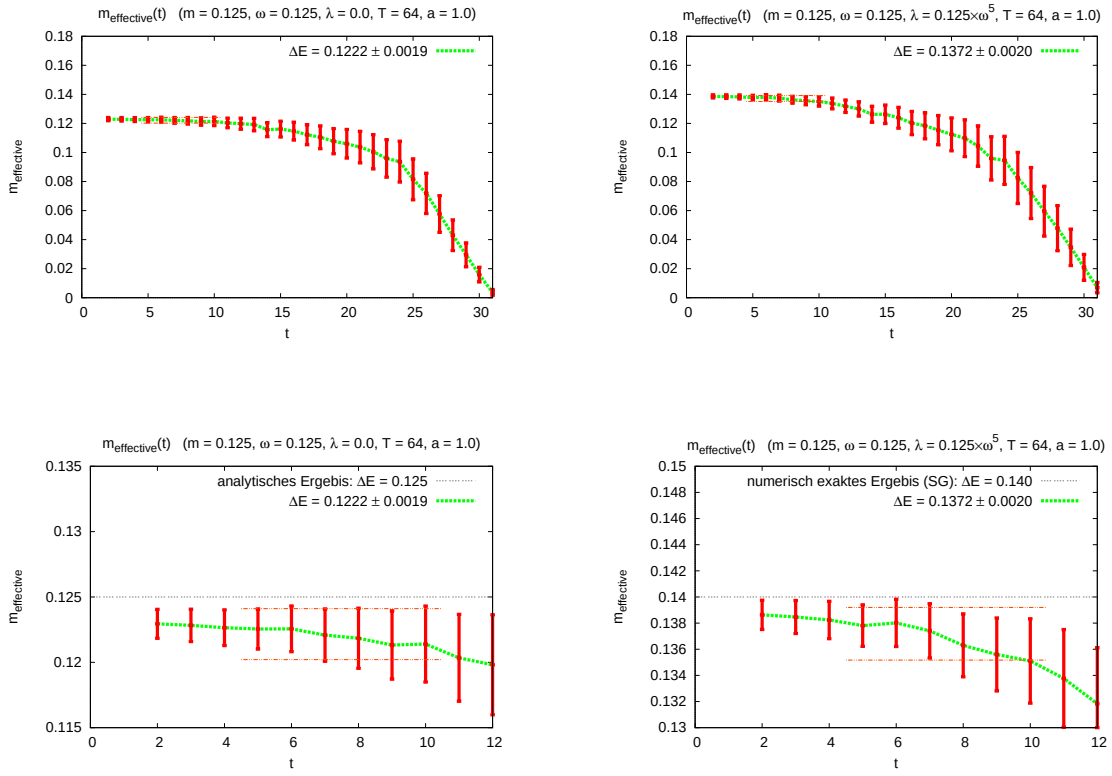


Abbildung 3: $\hat{m}_{\text{effective}}$ als Funktion von $\hat{t}$ für $\hat{\lambda} = 0.0$ (links) und $\hat{\lambda} = 0.05 \times \hat{\omega}^5$ (rechts).

Ergebnisse frei von systematischen Fehlern zu erhalten. Hier nicht gemacht.

9.4 Gitterregularisierung von Eichtheorien

9.4.1 Maxwell-Feld

- Grundlage der Konstruktion von Eichtheorien im Kontinuum ist das Eichprinzip:
  - Starte z.B. mit einem freien komplexen Skalarfeld ϕ:

$$S[\phi] \quad = \quad \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi^\dagger \phi \right). \tag{406}$$

  - Fordere Invarianz der Wirkung S unter lokalen U(1)-Transformationen

$$\phi(x) \quad \rightarrow \quad \phi'(x) \quad = \quad g(x)\phi(x) \tag{407}$$

    mit $g(x) = e^{i\Lambda(x)} \in \mathrm{U}(1)$:
    - Der Massenterm $(m^2/2)\phi^\dagger\phi$ ist offensichtlich invariant.
    - Der kinetische Term $(1/2)(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi)$ ist nicht invariant. Ursache ist das "unschöne" Transformationsverhalten $\partial_\mu\phi(x) \rightarrow \partial_\mu\phi'(x) = g(x)\partial_\mu\phi(x) + (\partial_\mu g(x))\phi(x)$.

* Ein ableitungsähnliches Objekt mit einem "dankbaren" Transformationsverhalten ist die kovariante Ableitung $D_\mu\phi(x) \to D'_\mu\phi'(x) = g(x)D_\mu\phi(x)$, wobei $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$ mit dem neu-eingeführten Eichfeld A_μ, dem das Transformationsverhalten

$$A_\mu(x) \;\to\; A'_\mu(x) \;=\; g(x)\left(A_\mu(x) + \frac{i}{e}\partial_\mu\right)g^\dagger(x) \;=\; A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) \quad (408)$$

zugewiesen wird. Ein invarianter kinetischer Term ist damit $(1/2)(D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)$.

– Das Eichfeld selbst benötigt ebenfalls einen kinetischen Term. Die einfachste invariante Konstruktion ist $(1/4)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

– Resultierende Gesamtwirkung (komplexes Skalarfeld, U(1)-Eichfeld):

$$S[\phi, A] \;=\; \int d^4x \left(\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) + \frac{m^2}{2}\phi^\dagger\phi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right). \quad (409)$$

• Analoges Vorgehen auf dem Gitter:

– Starte z.B. mit einem freien komplexen Skalarfeld, Gitterwirkung analog zu (369),

$$S[\phi] \;=\; \sum_x a^4\left(\frac{1}{2}\sum_\mu(\Delta^f_\mu\phi(x))^\dagger(\Delta^f_\mu\phi(x)) + \frac{m^2}{2}\phi^\dagger(x)\phi(x)\right). \quad (410)$$

– Fordere Invarianz der Wirkung S unter lokalen U(1)-Transformationen analog zu (407):

* Der Massenterm $(m^2/2)\phi^\dagger(x)\phi(x)$ ist wie im Kontinuum invariant.

* Der kinetische Term

$$\frac{1}{2}\sum_\mu(\Delta^f_\mu\phi(x))^\dagger(\Delta^f_\mu\phi(x)) \;=$$

$$= \;\frac{1}{2}\sum_\mu\left(\frac{\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a}\right)^\dagger\left(\frac{\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a}\right) \quad (411)$$

ist nicht invariant. Dies liegt daran, dass Gitterableitungen finiten Differenzen entsprechen, in die z.B. Feldvariablen $\phi(x + a\hat{\mu})$ und $\phi(x)$ eingehen, die sich unabhängig mit $g(x + a\hat{\mu})$ beziehungsweise $g(x)$ transformieren. Im kinetischen Term verleiben nicht-invariante Terme $\propto \phi(x + a\hat{\mu})\phi(x)$.

* Ein ableitungsähnliches Konstrukt mit dem "dankbaren" Kontinuumstransformationsverhalten ist die kovariante Gitterableitung

$$D^f_\mu\phi(x) \;=\; \frac{U(x; x + a\hat{\mu})\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a}, \quad (412)$$

wobei der neu eingeführten Größe U das Transformationsverhalten

$$U(x; y) \;\to\; U'(x; y) \;=\; g(x)U(x; y)g^\dagger(y) \quad (413)$$

zugewiesen wird. Folglich gilt $D^f_\mu\phi(x) \to D'^f_\mu\phi'(x) = g(x)D^f_\mu\phi(x)$. Ein invarianter kinetischer Term ist damit $(1/2)(D^f_\mu\phi)^\dagger(D^f_\mu\phi)$.

* Im Kontinuum lässt sich eine solche Größe $U(x; y)$ leicht mit Hilfe des Eichfelds A_μ definieren,

$$U(x; y) \;=\; \exp\left(-ie\int_x^y dz_\mu\, A_\mu(z)\right), \quad (414)$$

wobei die Integration auf einem beliebigen Pfad von x nach y erfolgen kann.

* Beweis, dass $U(x;y)$ das Transformationsverhalten (413) aufweist:

$$\begin{aligned} U(x;y) \;\;\to\;\; & \exp\Big(- ie \int_x^y dz_\mu \, A'_\mu(z) \Big) \;\; = \\ = \;\; & \exp\Big(- ie \int_x^y dz_\mu \, \Big(A_\mu(z) + \frac{1}{e} \partial_\mu^{(z)} \Lambda(z) \Big) \Big) \;\; = \\ = \;\; & \exp\Big(- ie \Big(\int_x^y dz_\mu \, A_\mu(z) + \frac{1}{e} \int_0^1 d\lambda \, \underbrace{\frac{dz_\mu(\lambda)}{d\lambda} \partial_\mu^{(z)} \Lambda(z(\lambda))}_{=(d/d\lambda)\Lambda(z(\lambda))} \Big) \Big) \;\; = \\ = \;\; & \exp\Big(- ie \int_x^y dz_\mu \, A_\mu(z) + i \underbrace{\Lambda(z(0))}_{=\Lambda(x)} - i \underbrace{\Lambda(z(1))}_{=\Lambda(y)} \Big) \;\; = \;\; g(x) U(x;y) g(y). \end{aligned} \tag{415}$$

* Kontinuumslimes der kovarianten Gitterableitung (412), wobei der Integrationspfad von x nach y in $U(x;y)$ der direkten d.h. geraden Verbindungsline zwischen x und y entspricht:

$$\begin{aligned} U(x;x+a\hat{\mu}) \;\; = \;\; & \exp\Big(- ie \int_x^{x+a\hat{\mu}} dz_\nu \, A_\nu(z) \Big) \;\; = \\ = \;\; & \exp\Big(- ie \int_0^a d\lambda \, \Big(A_\mu(x) + \mathcal{O}(a) \Big) \Big) \;\; = \\ = \;\; & \exp\Big(- iea A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2) \Big) \;\; = \;\; 1 - iea A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \tag{416}$$

$$\begin{aligned} \lim_{a\to 0} D_\mu^f \phi(x) \;\; = \;\; & \lim_{a\to 0} \frac{U(x;x+a\hat{\mu}) \phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a} \;\; = \\ = \;\; & \lim_{a\to 0} \Big(\frac{\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a} - ie A_\mu(x) \phi(x+a\hat{\mu}) \Big) \;\; = \\ = \;\; & \Big(\partial_\mu - ie A_\mu(x) \Big) \phi(x) \;\; = \;\; D_\mu \phi(x). \end{aligned} \tag{417}$$

  Die kovarianten Gitterableitung (412) ist also die diskrete Entsprechung der bekannten kovarianten Ableitung $D_\mu \phi(x)$.

* Auf dem Gitter treten an Stelle des Eichfelds A_μ die Verbindungen $U(x,y) \in \mathrm{U}(1)$ zwischen allen direkt benachbarten Gitterplätzen. Man bezeichnet sie als **Links** (die übliche Bezeichnung in der Gittereichtheorie), Paralleltransporter oder "Connections" (die letzten beiden Bezeichnungen findet man eher bei Betrachtungen von Eichtheorien im Kontinuum, bei denen Objekte $U(x;y)$ gemäß (414) ebenfalls häufig auftreten).

* Eine Diskretisierung des Eichfelds A_μ analog zum Skalarfeld, d.h. Feldvariablen $A_\mu(x)$ an jedem Gitterpunkt x, scheitert, da die Eichsymmetrie verloren geht. Verlust der Eichsymmetrie liefert i.d.R. numerisch unsinnige Ergebnisse (erfolglose Versuche in dieser Richtung finden sich z.B. in [12]).

– Resultierende Gitterwirkung (komplexes Skalarfeld mit Kopplung an U(1)-Eichfeld, momentan noch ohne kinetischen Term):

$$S_\phi[\phi, U] \;\; = \;\; \sum_x a^4 \Big(\frac{1}{2} (D_\mu^f \phi(x))^\dagger (D_\mu^f \phi(x)) + \frac{m^2}{2} \phi^\dagger(x) \phi(x) \Big) \;\; =$$

$$= \sum_x a^4 \Big(\frac{1}{2} \Big(\frac{U(x; x+a\hat{\mu})\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a} \Big)^\dagger \Big(\frac{U(x; x+a\hat{\mu})\phi(x+a\hat{\mu}) - \phi(x)}{a} \Big) + \frac{m^2}{2} \phi^\dagger(x)\phi(x) \Big). \quad (418)$$

– Das Eichfeld selbst benötigt ebenfalls einen kinetischen Term. Die einfachste nichttriviale invariante Konstruktion von Links sind sogenannte Plaketten,

$$P_{\mu\nu}(x) = U(x, x+a\hat{\mu})U(x+a\hat{\mu}; x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}; x+a\hat{\nu})U(x+a\hat{\nu}; x). \quad (419)$$

Durch Verwendung von (414) und geeignete Entwicklung kann man

$$P_{\mu\nu}(x) = 1 - iea^2 \Big(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \Big) + \mathcal{O}(a^4) = 1 - iea^2 F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4) \quad (420)$$

$$\mathrm{Re}\Big(P_{\mu\nu}(x) \Big) = 1 - \frac{e^2 a^4}{2} \Big(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \Big)^2 + \mathcal{O}(a^6) = 1 - \frac{e^2 a^4}{2} \Big(F_{\mu\nu}(x) \Big)^2 + \mathcal{O}(a^6). \quad (421)$$

zeigen. Die Gitterwirkung des U(1)-Eichfelds

$$S_{\mathrm{gauge}}[U] = \frac{1}{e^2} \sum_P \Big(1 - \frac{1}{2} \Big(P_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}^\dagger \Big) \Big) \quad (422)$$

geht damit im Kotinuumslimes in die bekannte Kontinuumswirkung über,

$$\lim_{a\to 0} S_{\mathrm{gauge}}[U] = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2e^2} \sum_{x,\mu,\nu} \Big(\frac{e^2 a^4}{2} \Big(F_{\mu\nu}(x) \Big)^2 + \mathcal{O}(a^6) \Big) = \frac{1}{4} \int d^4x \, F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x). \quad (423)$$

– Resultierende Gittergesamtwirkung (komplexes Skalarfeld, U(1)-Eichfeld):

$$S[\phi, U] = S_\phi[\phi, U] + S_{\mathrm{gauge}}[U]. \quad (424)$$

- Gitterpfadintegral:

$$\int DA \, e^{-S[\phi,A]} \to \int DU \, e^{-S[\phi,U]}, \quad (425)$$

wobei

$$\int DU = \int \prod_{x,\mu} dU(x; x+a\hat{\mu}); \quad (426)$$

die Integration über die einzelnen Links hat in fairer Weise, d.h. mit einem Haarschen Maß zu erfolgen (siehe Abschnitt 6.3). Im vorliegenden U(1)-Fall gilt

$$\int dU(x; x+a\hat{\mu}) = \int_0^{2\pi} d\Lambda(x; x+a\hat{\mu}) \quad (427)$$

mit $U(x; x+a\hat{\mu}) = e^{i\Lambda(x;x+a\hat{\mu})}$.

- Die Gitterausdrücke zu berechnender Observablen (Ausdrücke in ϕ, U und/oder $P_{\mu\nu}$) erhält man durch Einsetzen geeigneter Entwicklungen (z.B. (420) oder (421)) in entsprechende Kontinuumsausdrücke (Ausdrücke in ϕ, A_μ und/oder $F_{\mu\nu}$).

****** 25. Juli 2025 (28. Vorlesung) ******

9.4.2 SU(N) Yang-Mills-Feld

- Analoges Vorgehen wie beim Maxwell-Feld.
- Starte mit der Wirkung (410), wobei $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N)$.
- Fordere Invarianz von S unter lokalen SU(N)-Transformationen, d.h. unter

$$\phi(x) \quad \to \quad \phi'(x) \quad = \quad g(x)\phi(x) \tag{428}$$

mit $g(x) = e^{i\Lambda^a(x)T^a} \in \mathrm{SU}(N)$, wobei die $N \times N$-Matrizen T^a die Erzeugenden der SU(N) sind.

  - Dies erfordert eine kovariante Gitterableitung, die die gleiche Form hat, wie (412), sowie ein Transformationsverhalten identisch zu (413).
  - Der Paralleltransporter im Kontinuum ist dabei

$$U(x;y) \quad = \quad P\Big\{ \exp\Big(- ig \int_x^y dz_\mu \, A_\mu(z) \Big) \Big\}, \tag{429}$$

wobei $P\{\ldots\}$ für Pfadordnung steht. Pfadordnung bedeutet, dass die endliche Exponentialfunktion in (429) als ein Produkt unendlich vieler infinitesimaler Exponentialfunktionen zu verstehen ist, deren Reihenfolge dem Durchlaufsinn des Integrationswegs von x nach y entspricht, also

$$U(x;y) \quad = \quad U(x;z_1)U(z_1;z_2)U(z_2;z_3)\ldots U(\ldots;y), \tag{430}$$

$z_{j+1} - z_j$ infinitesimal klein ist und

$$U(z_j;z_{j+1}) \quad = \quad \exp\Big(- ig(z_{j+1} - z_j)_\mu \, A_\mu(z_j) \Big). \tag{431}$$

- Die Wirkung des Eichfelds setzt sich ebenfalls aus Plaketten

$$P_{\mu\nu}(x) \quad = \\ = \quad \mathrm{Tr}\Big(U(x, x+a\hat{\mu})U(x+a\hat{\mu}; x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}; x+a\hat{\nu})U(x+a\hat{\nu}; x) \Big) \tag{432}$$

zusammen und lautet

$$S_{\mathrm{gauge}}[U] \quad = \quad \frac{2N}{g^2} \sum_P \Big(1 - \frac{1}{2N} \Big(P_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}^\dagger \Big) \Big). \tag{433}$$

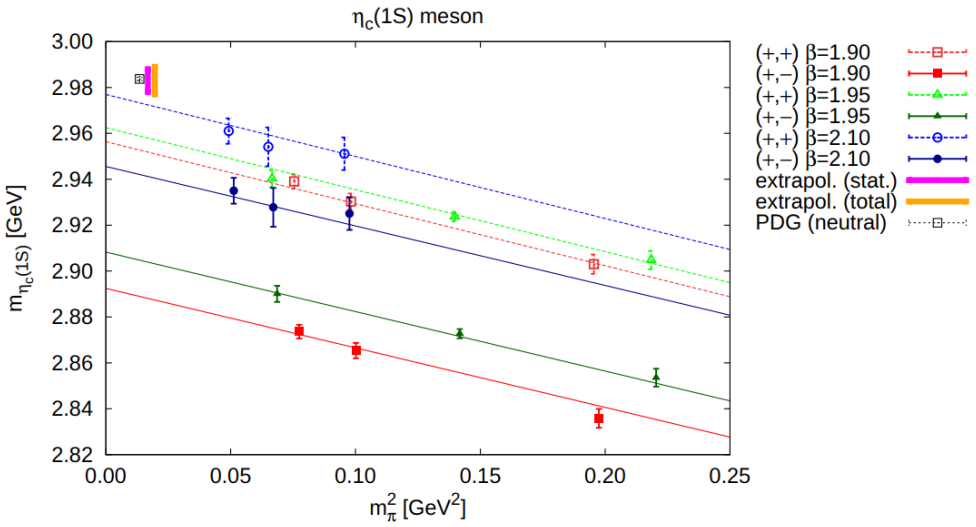
diese geht im Kontinuumslimes in die bekannte Kontinuumswirkung über.

- Alles Weitere wie im U(1)-Fall.

9.5 Exemplarische Gitterresultate

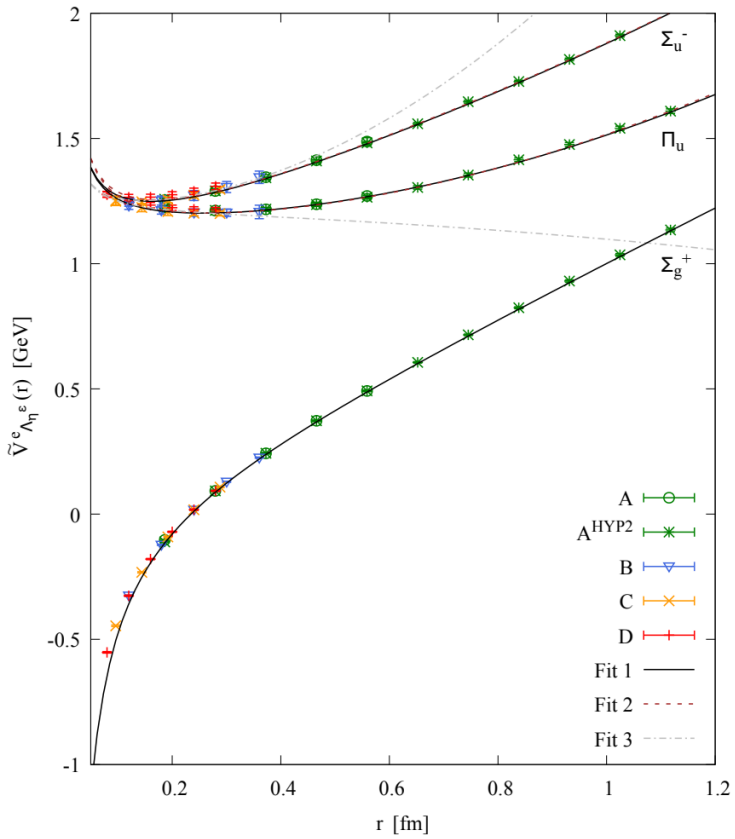
- Die im Folgenden gezeigten Ergebnisse wurden im Rahmen von Bachelor-, Master- und Doktorarbeiten im Bereich der Gitterfeldtheorie hier an der Goethe-Universität Frankfurt erzielt.

- D-, D_s- und Charmonium-Massen ($\bar{c}u$-, $\bar{c}s$- und $\bar{c}c$-Mesonen): Die Abbildung zeigt, dass es im Rahmen der Gitter-QCD möglich ist, systematische Fehler systematisch zu untersuchen und durch kontrollierte Extrapolationen i.W. zu entfernen ["Kontinuumslimes" $a \to 0$, Extrapolation in der leichten u- und d-Quarkmasse zum physikalischen Wert].
(siehe [13], Ergebnisse erzielt im Rahmen der Doktorarbeit von Martin Kalinowski).



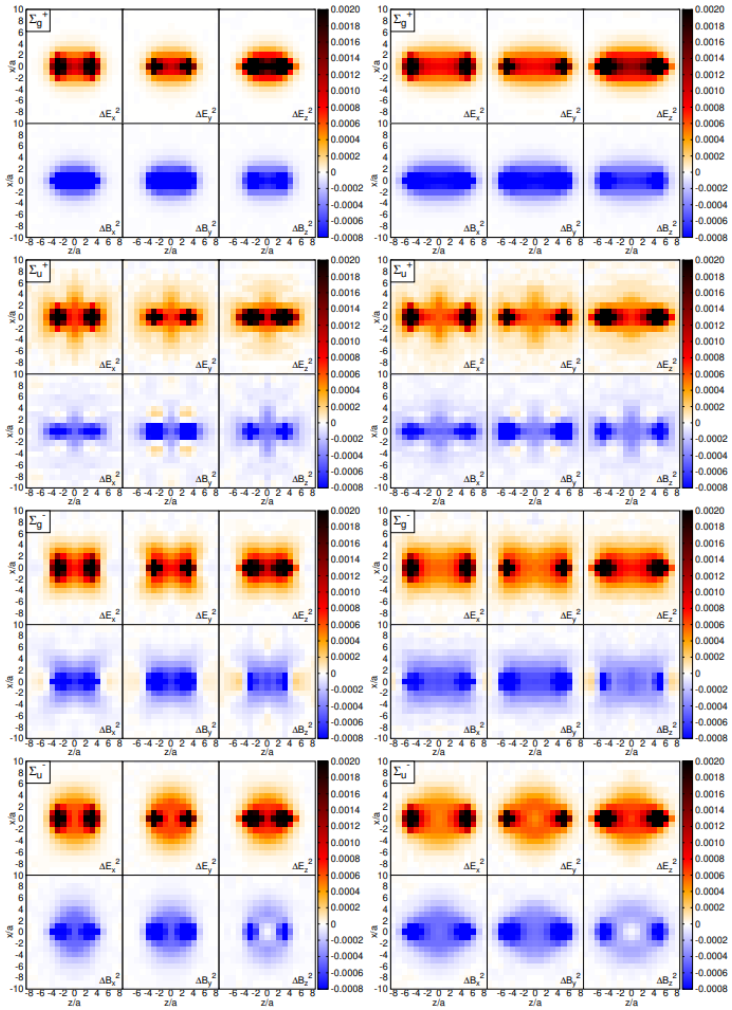
Chiral and continuum extrapolation for the $\eta_c(1S)$ meson ($J^{PC} = 0^{-+}$). PDG value of the mass: 2.9836(6) GeV. Our lattice QCD result: 2.983(5) GeV (only statistical error, magenta), 2.983(6) GeV (total error, orange).

- Statisches Potential (= Potential eines unendlich schweren Quark-Antiquark-Paars) sowie entsprechende hybride statische Potentiale (hybrid = Gluonen befinden sich nicht im Grundzustand, sondern tragen zu Gesamtspin und/oder Parität bei).
  (siehe [14] sowie Doktorarbeit von Carolin Schlosser).



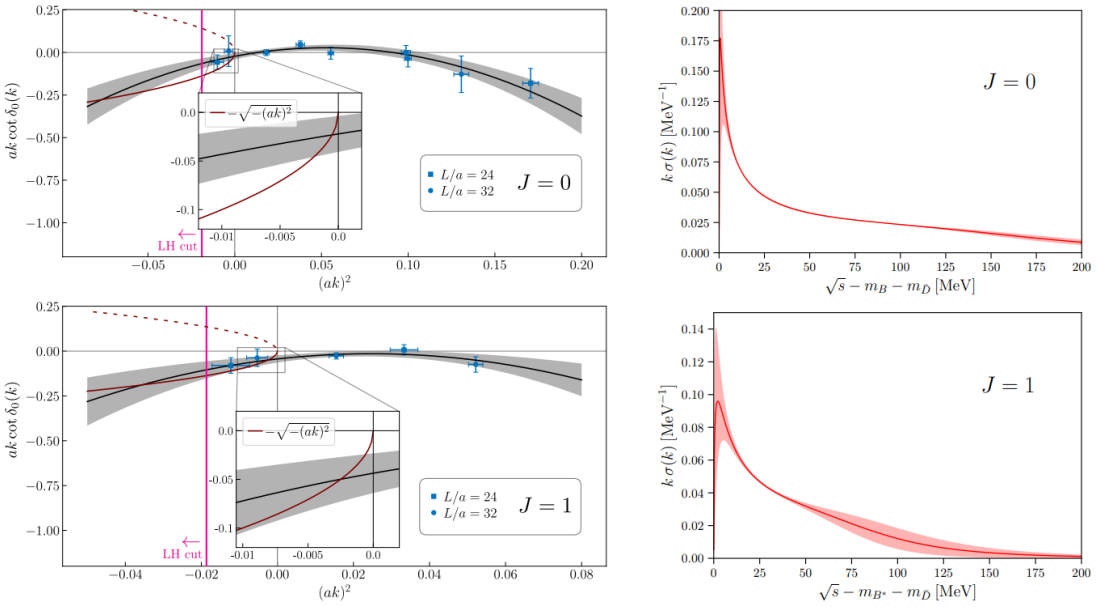
Lattice data points $\tilde{V}^{e}_{\Lambda^{\epsilon}_{\eta}}(r)$ in GeV and corresponding parametrizations (8), (12), (13) and (14) as functions of the quark-antiquark separation r in fm. The colors green, blue, yellow and red indicate different lattice spacings $a = 0.093\,\text{fm}$, $a = 0.060\,\text{fm}$, $a = 0.048\,\text{fm}$ and $a = 0.040\,\text{fm}$.

- Innere Struktur von schweren (hybriden) Mesonen: Chromoelektrische und chromomagnetische Energiedichten des Gluonfelds für schwere (hybride) Mesonen.
  (siehe [15] sowie Bachelor- und Masterarbeit von Lasse Müller).



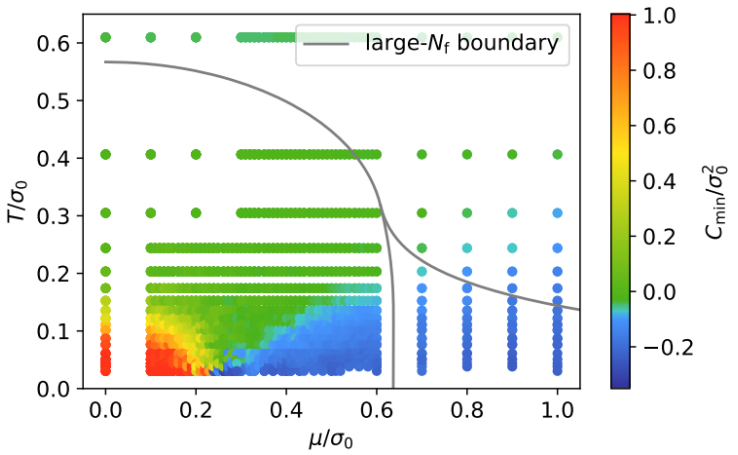
Flux densities $\Delta F^2_{j,\Lambda^\epsilon_\eta}(r;\mathbf{x}=(x,0,z))$, $j=x,y,z$ in the separation plane for gauge group SU(3) and sectors $\Lambda^\epsilon_\eta = \Sigma^+_g, \Sigma^+_u, \Sigma^-_g, \Sigma^-_u$. **(left)** $Q\bar{Q}$ separation $r = 6\,a$. **(right)** $Q\bar{Q}$ separation $r = 10\,a$.

- Streuphasen bzw. Wirkungsquerschnitte für $\bar{b}\bar{c}ud$-Tetraquarks mit $I(J^P) = 0(0^+)$ und $I(J^P) = 0(1^+)$ (Streuphasen erlauben die Berechnung von Streuamplituden und Wirkungsquerschnitten sowie Massen und Lebensdauern von instabilen Hadronen).
  (siehe [16] sowie Doktorarbeit von Martin Pflaumer).



Left: Our results for the functions $ak\cot\delta_0(k)$ for S-wave B-$\bar{D}$ scattering (top) and S-wave B^*-$\bar{D}$ scattering (bottom), where k is the scattering momentum, $\delta_0(k)$ is the scattering phase shift, and $a = 0.11887(80)$ fm is the lattice spacing. The data points were obtained directly from the lattice energy levels, and the curves correspond to ERE fits through order k^4. Also shown are the functions $-\sqrt{-(ak)^2}$ (solid red parabolas) whose intersections with $ak\cot\delta_0(k)$ just below threshold correspond to the shallow $\bar{b}\bar{c}ud$ bound states we predict, and $+\sqrt{-(ak)^2}$ (dashed red parabolas) whose intersections with $ak\cot\delta_0(k)$ would correspond to virtual $\bar{b}\bar{c}ud$ bound states. The vertical magenta lines show the positions of two-pion-exchange left-hand branch points. *Right:* Our results for the product of scattering momentum and $B^{(*)}$-$\bar{D}$ scattering cross section, which is proportional to the scattering rate, as a function of center-of-momentum energy.

- Phasendiagramm des Gross-Neveu-Modells (ein einfaches der QCD ähnliches Modell): "Wie verhält sich QCD-Materie in Abhängigkeit von Temperatur und Dichte?" (Hadronen oder Quark-Gluon-Plasma, chirale Symmerie gebrochen oder nicht, Existenz exotischer z.B. inhomogener Phasen).
  (siehe [17] sowie Bachelor-, Master- und Doktorarbeit von Laurin Pannullo).



$C_{\min}/\sigma_0^2$ in the μ-T plane for $N_f = 2$. The red region corresponds to a homogeneously broken phase, the green region to a symmetric phase and the blue region to an inhomogenous phase. The grey lines represent the $N_f \to \infty$ phase boundaries.

10 Ausblick

- Wesentlicher Inhalt dieser Vorlesung:
  - Pfadintegralformalismus (QM und QFT).
  - Störungstheorie.
  - Gitterfeldtheorie.
  - Renormierung.
  - QCD.
- Weitere, aus Zeitgründen nicht diskutierte aber in der QFT wesentliche Aspekte:
  - Spontane Symmetriebrechung.
  - Topologie, topologische Objekte.
- Zahlreiche Richtungen, das erworbene Wissen zu vertiefen bzw. zu erweitern:
  - Phänomenologie, Modellrechnungen:
    - (Häufig radikale) Vereinfachung von fundamentalen Theorien (Standardmodell, QCD, ...) ... führt i.d.R. schnell zu Aussagen/Ergebnissen ... diese sind jedoch mit unbekannten systematischen Fehlern behaftet.
    - Effektive Feldtheorien, z.B. chirale Störungstheorie, ...
    - "QM mit Quarks" als grobe Näherung von QCD.
  - Erweiterungen des Standardmodells:
    - Supersymmetrie.
    - Technicolor.
    - Extradimensionen.
    - ...
  - Kombination von QFT und Gravitation:
    - Zahlreiche existierende konzeptionelle Probleme.
    - QFT in gekrümmter Raumzeit.
    - Quantisierung der Gravitation, z.B. Loop-Quanten-Gravitationstheorie, ...
  - String-Theorie ("Theory of Everything").
    - Einzige nicht offensichtlich falsche/unvollständige Theorie, d.h. ein Kandidat für DIE fundamentale Theorie.
    - Rechnungen im Vergleich zur QFT ausgesprochen aufwändig.
  - Aus der String-Theorie motivierte effektive Theorien:
    - Supergravitation.
    - AdS-CFT-Korrespondenz:
      - Eine auf zahlreichen Symmetrien basierende Dualität zwischen einer stark gekoppelten Super-Yang-Mills-Theorie und einer schwach gekoppelten Gravitationstheorie in einer speziellen gekrümmten Raumzeit.
      - Zahlreiche weniger symmetrische Varianten, mit unklarer Gültigkeit und Aussagekraft.
    - ...

Literatur

[1] L. H. Ryder, "Quantum field theory," Cambridge University Press.

[2] M. Srednicki, "Quantum field theory," Cambridge University Press.

[3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An introduction to quantum field theory," Perseus Books.

[4] C. Itzykson and J.-B. Zuber, "Quantum field theory," Dover Books on Physics.

[5] I. Montvay and G. Münster, "Quantum fields on a lattice," Cambridge University Press.

[6] H. J. Rothe, "Lattice gauge theories: an introduction," World Scientific Lecture Notes in Physics.

[7] R. P. Feynman, "Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics," Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).

[8] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition.

[9] K. Jansen *et al.* [ETM Collaboration], "$\Lambda_{\overline{\rm MS}}$ from the static potential for QCD with $n_f = 2$ dynamical quark flavors," JHEP **1201**, 025 (2012) [arXiv:1110.6859 [hep-ph]].

[10] P. Schmüser, "Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker," Springer (1988).

[11] M. Wagner, "Numerische Methoden der Physik (Aufgabenblatt 04, Aufgabe 07)," Vorlesung, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Wintersemester 2011/12. Springer (1988).

[12] K. E. Cahill, "Noncompact lattice simulations of SU(2) gauge theory," Phys. Lett. B **304**, 307 (1993) [hep-lat/9301010].

[13] K. Cichy, M. Kalinowski and M. Wagner, "Continuum limit of the D meson, D_s meson and charmonium spectrum from $N_f = 2 + 1 + 1$ twisted mass lattice QCD," Phys. Rev. D **94**, no. 9, 094503 (2016) [arXiv:1603.06467 [hep-lat]].

[14] C. Schlosser and M. Wagner, "Hybrid static potentials in SU(3) lattice gauge theory at small quark-antiquark separations," Phys. Rev. D **105**, no. 5, 054503 (2022) [arXiv:2111.00741 [hep-lat]].

[15] L. Müller, O. Philipsen, C. Reisinger and M. Wagner, "Hybrid static potential flux tubes from SU(2) and SU(3) lattice gauge theory," Phys. Rev. D **100**, no. 5, 054503 (2019) [arXiv:1907.01482 [hep-lat]].

[16] C. Alexandrou, J. Finkenrath, T. Leontiou, S. Meinel, M. Pflaumer and M. Wagner, "Shallow Bound States and Hints for Broad Resonances with Quark Content $\bar{b}\bar{c}ud$ in B-$\bar{D}$ and B^*-$\bar{D}$ Scattering from Lattice QCD," Phys. Rev. Lett. **132**, no. 15, 151902 (2024) [arXiv:2312.02925 [hep-lat]].

[17] J. Lenz, L. Pannullo, M. Wagner, B. Wellegehausen and A. Wipf, "Inhomogeneous phases in the Gross-Neveu model in $1 + 1$ dimensions at finite number of flavors," Phys. Rev. D **101**, no. 9, 094512 (2020) [arXiv:2004.00295 [hep-lat]].

A QM Übergangsamplitude, Probleme

- Gleichung (5) (QM Übergangsamplitude, freies Teilchen):

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \;=\; \sqrt{\frac{m}{2\pi i (t_2 - t_1)}} \exp\left(+ i \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)} \right). \tag{434}$$

  Scheint unsinnig, da $W_{x_1 \to x_2} = |\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle|^2$, die Wahrscheinlichkeit das zum Zeitpunkt t_1 bei x_1 präparierte Teilchen zum Zeitpunkt t_2 bei x_2 zu finden, unabhängig von x_1 und x_2 ist und außerdem $\int dx_2 \, W_{x_1 \to x_2} \neq 1$.

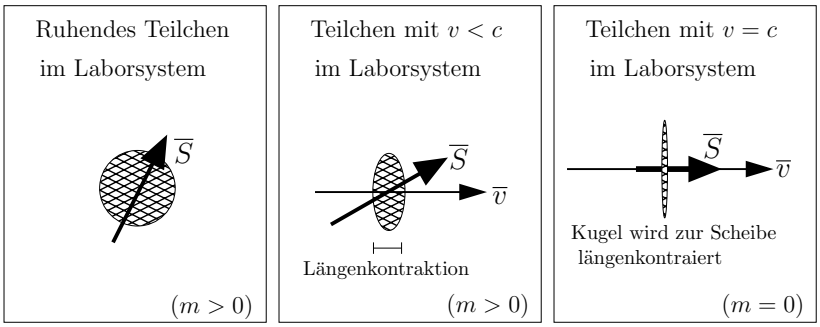
- Ersetze $|x_1\rangle$ durch $|\psi\rangle$, ein bei $x = 0$ zentriertes Gaußsches Wellenpaket mit Breite σ:

$$\begin{aligned}
\langle x_2, t_2 | \psi, t_1 \rangle \;&=\; \int dp \, \langle x_2 | e^{-iH(t_2 - t_1)} | p \rangle \langle p | \psi \rangle \;= \\
&= \int dp \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx_2} e^{-i(p^2/2m)(t_2 - t_1)} \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi^{1/4}} e^{-p^2\sigma^2/2} \;= \\
&= \left(\frac{\sigma}{2\pi^{3/2}} \right)^{1/2} \int dp \, \exp\left(- \left(\frac{\sigma^2 m + i(t_2 - t_1)}{2m} p^2 - i x_2 p - \frac{m x_2^2}{2(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))} \right) \right) \\
&\quad \exp\left(- \frac{m x_2^2}{2(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))} \right) \;= \\
&= \left(\frac{\sigma m}{\sqrt{\pi}(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))} \right)^{1/2} \exp\left(- \frac{m x_2^2}{2(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))} \right).
\end{aligned} \tag{435}$$

  - Für $x_1 = 0$ und im Limes $\sigma \to 0$ ist (435) mit (434) im Exponentialanteil identisch, nicht jedoch im Vorfaktor. Dies liegt an der Tatsache, dass der Ortseigenzustand $|x_1\rangle = \delta(x - x_1)$ nicht normiert ist. Wählt man an Stelle des normierten Gaußschen Wellenpakets $|\psi\rangle = (\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/2\sigma^2}$ ein nicht-normiertes in dem Sinn, dass $\lim_{\sigma \to 0} |\psi\rangle = \delta(x)$, also $|\psi\rangle = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-x^2/2\sigma^2}$, erhält (435) einen zusätzlichen Faktor $(2\sqrt{\pi}\sigma)^{-1/2}$ und (435) und (434) stimmen im Limes $\sigma \to 0$ überein (guter Test).
  - $\int dx_2 \, \tilde{W}_{0 \to x_2} = 1$ mit $\tilde{W}_{0 \to x_2} = |\langle x_2, t_2 | \psi, t_1 \rangle|^2$ erfüllt, falls σ behalten wird, also nicht $= 0$ gesetzt wird (Problem $\int dx_2 \, W_{x_1 \to x_2} \neq 1$ eng verknüpft mit der Verwendung von (4) für $\mathrm{Re}(a) = 0$; Problem tritt nicht auf, bei Rechnung mit Gaußschem Wellenpaket, da dann $\mathrm{Re}(a) > 0$; zeigt also die Gefahr bei Verwendung von Minkowski-Pfadintegralen ohne "ϵ-Regulator").
  - $\tilde{W}_{0 \to x_2}$ hängt für $\sigma > 0$ von x_2 ab, nicht mehr jedoch für $\sigma = 0$ (Interpretation: Ein perfekter Ortseigenzustand delokalisiert instantan).

B Helizität und Chiralität

- Helizität: $h = \mathbf{S}\hat{\mathbf{p}}$, also die Projektion des Spins eines Teilchens auf seine Bewegungsrichtung.
  - Massive Teilchen:
    - Helizität analog zu S_z (wähle z-Achse in Bewegungsrichtung). Damit $h = -S, -S+1, \ldots, +S-1, +S$.
  - Masselose Teilchen:
    - $h = \pm S$.
    - Anschauliches Bild: Masselose Teilchen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit, in Bewegungsrichtung werden sie folglich "unendlich stark längenkontrahiert", Rotation ist damit nur in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung möglich, reduziert die möglichen Zustände im Vergleich zum massiven Fall auf $\pm S$.
    - Spinrotation relativ zur Bewegungsrichtung entweder links oder rechts orientiert.



- Chiralität (bezieht sich auf Spin-1/2-Teilchen):
  - Projektoren auf links- und rechtshändige Spinoranteile:

$$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} \quad , \quad P_R = \frac{1+\gamma^5}{2} \tag{436}$$

(erfüllen die Projektoreigenschaften $P_L + P_R = 1$ und $P_L P_R = P_R P_L = 0$). In der chiralen Darstellung,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \tag{437}$$

$\psi_L = P_L\psi = (\phi_L, 0)$ und $\psi_R = P_R\psi = (0, \phi_R)$.

  - Lösungen der masselosen Dirac-Gleichung können chiral (d.h. entweder links- oder rechtshändig) gewählt werden. Ist ψ eine Lösung, d.h. $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$, so ist auch $\psi_{L/R} = P_{L/R}\psi$ eine Lösung:

$$\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Big)\psi_{L/R} = \Big(-iP_{R/L}\gamma^\mu\partial_\mu - P_{L/R}\underbrace{m}_{=0}\Big)\psi = -iP_{R/L}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0. \tag{438}$$

Analoge Überlegungen ergeben, dass Lösungen für $m \neq 0$ keine definierte Chiralität besitzen.

- Masselose Spin-1/2-Teilchen, Beziehung zwischen Helizität und Chiralität:
  - **Für masselose Spin-1/2-Teilchen ist Helizität und Chiralität äquivalent.**
  - Für masselose Spinoren reduziert sich die Dirac-Gleichung auf die Weyl-Gleichung, z.B. für linkshändige Spinoren

    $$\Big(i\partial_0 - i\sigma_j\partial_j\Big)\phi_L \quad = \quad 0. \tag{439}$$

  - Lösung mit positiver Energie (= Teilchen, nicht Antiteilchen), bei der die Bewegung entlang der z-Achse stattfindet, über Ansatz $\phi_L = \tilde{\phi}_L \exp(-i|k| + ikz)$:

    $$\Big(|k| + \sigma_3 k\Big)\tilde{\phi}_L \quad = \quad 0. \tag{440}$$

    $k > 0$ (Bewegung in positive z-Richtung) erfordert $\tilde{\phi}_L = (0, 1)$, damit $s_z = -1/2$ und folglich $h = -1/2$.
    $k < 0$ (Bewegung in negative z-Richtung) erfordert $\tilde{\phi}_L = (1, 0)$, damit $s_z = +1/2$ und folglich $h = -1/2$.
  - Analog findet man für rechtshändige Spinoren und Teilchen (nicht Antiteilchen) $h = +1/2$.