Einführung in die Quantenfeldtheorie
SoSe 2025 – Prof. Marc Wagner
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 [*Symmetrische Trotter-Zerlegung*]

Zeige, dass Gl. (6) im Vorlesungsskript gilt. Verwende dazu die sogenannte Baker-Campbell-Haussdorf Formel

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{A+B+[A,B]/2+\cdots}, \tag{1}$$

wobei A und B (quantenmechanische) Operatoren sind. Innerhalb der Rechnung kann $A = -\mathrm{i}V(x)$ und $B = -\mathrm{i}p^2/2m$ definiert werden, sodass

$$\mathrm{e}^{\epsilon(A+B)} = \mathrm{e}^{\epsilon A/2}\mathrm{e}^{\epsilon B}\mathrm{e}^{\epsilon A/2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{2}$$

zu zeigen ist.

Hinweis: Es ist sinnvoll, mit der rechten Seite von Gl. (6) zu starten und die BCH-Formel zweimal anzuwenden.

Aufgabe 2 [*Zustandssumme des harmonischen Oszillators*]

In dieser Aufgabe wird die Zustandssumme Z des harmonischen Oszillators sowohl im klassischen als auch im quantenmechanischen Fall berechnet.

(i) Berechne Z für ein klassisches harmonisches Oszillatorsystem unter Verwendung des Phasenraumintegrals, d.h. berechne

$$Z = \frac{1}{2\pi}\int dx\, dp\, e^{-\beta H}. \tag{3}$$

(ii) Im quantenmechanischen Fall ist die Zustandssumme gemäß

$$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H} = \sum_{\psi}\langle\psi|e^{-\beta H}|\psi\rangle \tag{4}$$

unter Verwendung einer orthonormalen, vollständigen Basis von Zuständen (hier mit nicht spezifizierten Quantenzahlen ψ) definiert. Berechne Z nun für einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mithilfe der Eigenzustände des Hamiltonoperators.

(iii) Wiederhole die Berechnung unter Verwendung von Orts-Eigenzuständen. Berechne die für die Zustandssumme benötigten Matrixelemente $\langle x|\exp(-\beta H)|x\rangle$ im gleichen Stil, wie die Übergangsamplitude in Kapitel 1.2 des Skriptes berechnet wurde. Beachte hierbei, dass sich diese Matrixelemente wie ein Euklidisches Pfadintegral, wie bspw. Gl. (44) im Skript, berechnen lassen. Du solltest für die Matrixelemente

$$\langle x|\exp(-\beta H)|x\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\sinh(\omega\beta)}}\exp\left\{\frac{m\omega}{\sinh(\omega\beta)}x^2\left(\cosh(\omega\beta)-1\right)\right\} \tag{5}$$

erhalten. Vergleiche dein Ergebnis mit dem vorherigen.

Bemerkung: Der zu verwendende klassische Pfad, siehe Kapitel 1.2, ist als Minimum der Euklidischen Wirkung zu berechnen. Dieser unterscheidet sich von der Lösung der Bewegungsgleichung der Minkowski-Wirkung, da sich das Vorzeichen des Potentialterms unterscheidet.

(iv) Berechne die freie Energie $F = -\frac{1}{\beta}\log Z$ in allen drei Fällen und vergleiche sie für $\beta \ll 1$. Kannst du das beobachtete Verhalten erklären?

Produced with the ExerciseHandler