Einführung in die Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Wintersemester 2024/25

Literatur: [1, 2, 3, 4, 5].

****** 16. Oktober 2024 (1. Vorlesung) ******

1 Einleitung

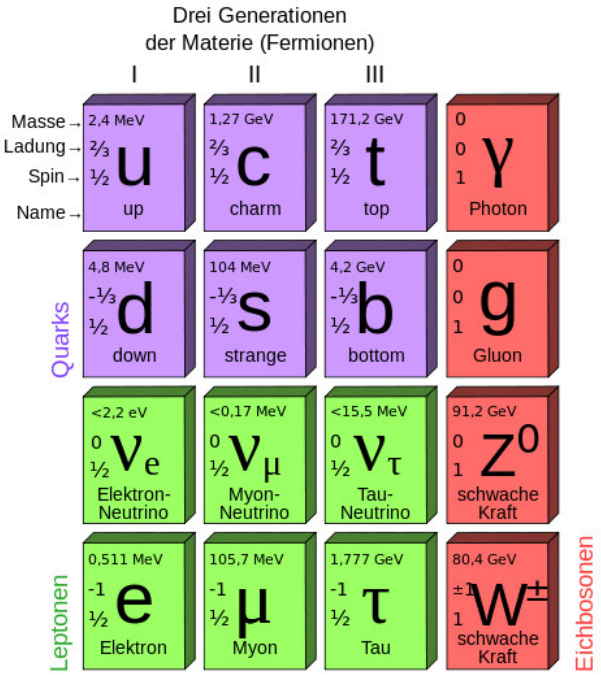
1.1 Motivation, Ziele und Inhalte der Vorlesung

- Quantenfeldtheorie (QFT):
  - Formalismus zur Beschreibung quantenmechanischer (QM) Vielteilchensysteme, insbesondere von Prozessen, bei denen Teilchen erzeugt und/oder vernichtet werden.
  - Z.B. Teilchenkollision in einem Beschleuniger:
    - Klassische Mechanik ausreichend? ... Nein! QM Effekte zur korrekten Beschreibung elementarer Teilchen essentiell.
    - QM ausreichend? ... Nein! Jedem Teilchen ist eine Wellenfunktion zugeordnet, können daher nicht erzeugt oder vernichtet werden.
    - Klassische Feldtheorie ausreichend? ... Nein! Geeignet zur Beschreibung sehr vieler gleichartiger Teilchen (z.B. Photonen im Rahmen des Elektromagnetismus), nicht geeignet zur Beschreibung einzelner oder weniger Teilchen.

    → QFT erforderlich (i.d.R. relativistisch formuliert; berücksichtigt damit bei der Teilchenerzeugung/-vernichtung die Äquivalenz von Energie und Masse $E = mc^2$ bzw. $E = (m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2)^{1/2}$).
  - Anwendungen in vielen Teilgebieten der Physik: Teilchenphysik, Festkörperphysik, Optik, ...
- Teilchenphysik:
  - Beschäftigt sich mit den fundamentalen Bausteinen der Materie und deren Wechselwirkungen (WWs).
  - Damit wesentliche Unterscheidung von z.B. Festkörperphysik (Ising-Modell, ...), Strömungslehre, ...
  - "... was die Welt im Innersten zusammenhält ..." (z.B. Goethe, "Faust").
  - Historische Entwicklung:
    - 5. Jh. v. Chr. Demokrit:
      Postuliert Atome ("unteilbare Teilchen").
    - 1808 Dalton:
      Atomtheorie der chemischen Elemente (Gesetz der multiplen Proportionen; "Bilden zwei Elemente miteinander mehrere Verbindungen, so stehen die Massenverhältnisse, mit denen die Elemente in diesen Verbindungen auftreten, zueinander im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.").
    - 1897 Thomson:
      Elektron.
    - 1919 Rutherford:
      Proton.

* 1932 Chadwick:
  Neutron.
* 1932 Anderson:
  Positron (Antimaterie; theoretisch bereits 1928 von Dirac vorhergesagt).
* 1937 Anderson, Neddermeyer:
  Myon.
* Ab $\approx$ 1950:
  Teilchenzoo ... Pionen, Kaonen, J/ψ, ...
* 1956 Cowan, Reines:
  Neutrino (theoretisch bereits 1930 von Pauli vorhergesagt).
* 1964 Gell-Mann, Zweig:
  Quarks, d.h. Substruktur von Nukleonen, etc.
* Heute:
  Hunderte von Teilchen (i.W. Hadronen = Zweier- und Dreiergruppen von Quarks, zusammengehalten von Gluonen) bekannt, alle beschrieben durch einige wenige (nach heutigem Stand des Wissens) fundamentale Teilchen und vier WWs
  $\rightarrow$ **Standardmodell der Teilchenphysik**.

- Standardmodell der Teilchenphysik:
  - Materieteilchen (Abbildung 1):



http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg

Abbildung 1: Das Standardmodell der Teilchenphysik.

* Quarks: (u, d), (c, s), (t, b) (drei Generationen) + Antiteilchen.

    - Leptonen: (ν_e, e), (ν_μ, μ), (ν_τ, τ) (drei Generationen) + Antiteilchen.
    - Antiteilchen: Gleiche Masse, gleicher Spin, entgegengesetzte Ladung ($e^- \leftrightarrow e^+$, $u \leftrightarrow \bar{u}$), ...
  - WWs über Kraftfelder; Quantisierung liefert Austauschteilchen.

Kraft	Phänomene	Reichweite	relative Stärke	Austausch-teilchen
Starke WW (QCD)	Bindet Quarks zu Nukleonen und diese zu Kernen	Sehr kurz ($\approx 10^{-15}$ m)	1	Gluonen
Elektro-magnetische WW (QED)	Elektrizität, Licht, Atomkräfte, ...	unendlich	10^{-2}	Photonen
Schwache WW	Radioaktiver Zerfall	Extrem kurz ($< 10^{-15}$ m)	10^{-15}	W- und Z-Bosonen
Gravitative WW	Erdanziehung, Planetenbewegung, Kosmologie, ...	unendlich	10^{-41}	Gravitonen

  - Higgs-Boson: Verantwortlich für die Massen der Materieteilchen.
  - Alle anderen Teilchen, z.B. Proton, Neutron, etc. sind aus obigen zusammengesetzt.

- Der "Teilchenzoo":
  - Offizielle Liste der bekannten Teilchen: Particle Data Group (`http://pdg.lbl.gov/`).
  - Klassifizierung:
    - Masse.
    - Zerfallsrate bzw. Lebensdauer.
    - Zerfallskanäle.
    - Quantenzahlen (beschreiben innere Struktur; Liste nicht vollständig):
      - Spin bzw. Gesamtdrehimpuls J (Bosonen: $J = 0, 1, 2, \ldots$; Fermionen $J = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$).
      - Elektrische Ladung.
      - Parität $P = \pm 1$.
      - Ladungskonjugation $C = \pm 1$.
      - Flavor-Quantenzahlen:
        Isospin: $I_z = +1/2$ (u), $I_z = -1/2$ (d).
        Strangeness: $S = -1$ (s), $S = +1$ ($\bar{s}$).
        Charm: $C = +1$ (c), $C = -1$ ($\bar{c}$).
        Bottomness: $B' = -1$ (b), $B' = +1$ ($\bar{b}$).
        Topness: $T = +1$ (t), $T = -1$ ($\bar{t}$).
      - Leptonenzahl $L = +1$ für e, μ, τ, ν_e, ν_μ, ν_τ.
      - Baryonenzahl $B = 1/3$ für u, d, c, s, t, b.
  - Hadronen (bilden sich auf Grund der starken WW):

    - Quarks treten nie isoliert auf, sondern immer in gebunden Zuständen (Hadronen) $\rightarrow$ Confinement.
    - Mesonen: $q\bar{q}$-Paare.
    - Baryonen: qqq oder $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$.
    - Beispiele:
        - Pion: $\pi^+ = u\bar{d}$ ($J = 0$, $P = -$, $I = 1$, $I_z = +1$).
        - Proton: $p = uud$ ($J = 1/2$, $P = +$, $I = 1/2$, $I_z = +1/2$).
        - Neutron: $n = udd$ ($J = 1/2$, $P = +$, $I = 1/2$, $I_z = -1/2$).

- Ungeklärte Fragen im Zusammenhang mit dem Standardmodell:
    - Es existieren gegenwärtig keine Experimente, die Standardmodell-Vorhersagen widersprechen, aber ...
    - Keine Quantengravitation.
    - Radikal unterschiedliche Kopplungsstärken ...?
    - Ästhetik: Viele Parameter (≥ 18) ... gibt es eine fundamentalere Theorie, die diese Parameter vorhersagt?
    - Dunkle Materie ...?
    - Baryonen Asymmetrie ...?
    - ...

- Mögliche Auswege/Erweiterungen des Standardmodells:
    - Große Vereinheitlichte Theorie (größere Symmetriegruppen bei hohen Energien, die vier fundamentalen Kräfte verschmelzen zu einer einzigen Kraft).
    - Supersymmetrie (Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, jedes Boson erhält einen fermionischen Partner gleicher Masse).
    - Stringtheorie (alle Elementarteilchen besitzen die selbe Stringsubstruktur, Art der Oszillation bestimmt das beobachtete "Elementarteilchen").
    - ...

1.2 Einheiten in der Teilchenphysik

- Energie E:
    - $[E] = \mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{V\,C}$.
    - Typische Energien einzelner Teilchen: Winzige Bruchteile von J.
    - Verwende in der Teilchenphysik daher eV:
        - $1\,\mathrm{eV}$: Energiezuwachs/-verlust einer Elementarladung e nach Durchlaufen einer Potentialdifferenz von $1\,\mathrm{V}$.
        - $1\,\mathrm{eV} = 1.602\ldots \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.
        - $1\,\mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV}$.
        - $1\,\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV}$.

- Masse m, Impuls $\mathbf{p}$:
  - $[m] = \mathrm{kg}$, $[\mathbf{p}] = \mathrm{kg\,m}/s$ (spiegelt sich in der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung wider, $E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2$).
  - Verwende in der Teilchenphysik für Massen MeV/c^2, für Impulse MeV/c.
  - Natürliche Einheiten: Definiere $c = 1$ ($c = 2.997\ldots\times10^{-8}\,\mathrm{m/s}$ hat lediglich historische Gründe); damit $[m] = [\mathbf{p}] = \mathrm{MeV}$.
- Zeit t:
  - $[t] = \mathrm{s}$.
  - Plancksches Wirkungsquantum $\hbar = 6.582\ldots\times10^{-16}\,\mathrm{eV\,s}$; stellt Verbindung zwischen Energie und Zeit her.
  - Verwende in der Teilchenphysik für Zeiten $\hbar/\mathrm{MeV}$.
  - Natürliche Einheiten: Definiere $\hbar = 1$; damit $[t] = 1/\mathrm{MeV}$.
- Länge L:
  - $[L] = \mathrm{m}$.
  - Lichtgeschwindigkeit c stellt Verbindung zwischen Zeit und Länge her.
  - Verwende in der Teilchenphysik für Längen $\hbar c/\mathrm{MeV}$.
  - Natürliche Einheiten: $[L] = 1/\mathrm{MeV}$.
- Temperatur T:
  - $[T] = \mathrm{K}$.
  - Boltzmann-Konstante $k_\mathrm{B} = 8.617\ldots\times10^{-5}\,\mathrm{eV\,K}$; stellt Verbindung zwischen Energie und Temperatur her.
  - Verwende in der Teilchenphysik für Temperaturen $\mathrm{MeV}/k_\mathrm{B}$.
  - Natürliche Einheiten: Definiere $k_\mathrm{B} = 1$; damit $[T] = \mathrm{MeV}$.
- In natürlichen Einheiten wird jede dimensionsbehaftete Größe in Potenzen von MeV angegeben.
- Gebräuchlich ist auch die Verwendung von fm an Stelle von MeV:
  - $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$.
  - Umrechnung zwischen fm und MeV mittels $\hbar c = 197.326\ldots\,\mathrm{MeV\,fm}$.
  - Damit: $[L] = [t] = \mathrm{fm}$, $[E] = [m] = [\mathbf{p}] = [T] = 1/\mathrm{fm}$, ...

****** 18. Oktober 2014 (2. Vorlesung) ******

2 Teilchen in der klassischen Mechanik und QM

2.1 Teilchen in der klassischen Mechanik

- Masse m, Position $\mathbf{r}$.
- Bewegung im i.d.R. zeitunabhängigen Potential $V(\mathbf{r})$.
- Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ ist Lösung der Newtonschen BGl

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) \quad = \quad -\nabla V(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Eindeutige Lösung erfordert Angabe von Anfangsbedingungen (ABs) von z.B. $\mathbf{r}(t=0)$ und $\dot{\mathbf{r}}(t=0)$.

2.1.1 Lagrange-Formalismus

- Lagrange-Funktion:

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \quad = \quad T - V \quad = \quad \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \tag{2}$$

(T: kinetische Energie).

- Wirkung:

$$S[\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}] \quad = \quad \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}). \tag{3}$$

- Hamiltonsches Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung):
  - Die physikalische Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ mit Randbedingungen $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f$ minimiert S, also $\delta S = 0$ bei Variation der Trajektorie um $\delta\mathbf{r}(t)$.
  - Variationsrechnung führt auf Euler-Lagrange-Gleichungen

    $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \tag{4}$$

    Diese sind identisch zur Newtonschen BGl.
- Vorteil: Der Lagrange-Formalismus ist (im Gegensatz zu den Newtonschen BGls) leicht auf die Feldtheorie übertragbar, da er in offensichtlicherer Weise die Symmetrien einer Theorie wiederspiegelt.

2.1.2 Hamilton-Formalismus

- Legendre-Transformation von $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ bzgl. $\dot{\mathbf{r}}$:
  - Kanonisch konjugierte Impulse:
    $$\mathbf{p}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad = \quad \frac{\partial L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{r}}}. \tag{5}$$
  - Auflösen von (5) nach $\dot{\mathbf{r}}$
    $\rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.
  - Hamilton-Funktion:
    $$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \quad = \quad \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r})) \quad = \quad T + V. \tag{6}$$
    (in H darf kein $\dot{\mathbf{r}}$ auftreten). H entspricht der Gesamtenergie.
- Hamiltonsche BGls:
  $$\dot{\mathbf{r}} \quad = \quad +\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad , \quad \dot{\mathbf{p}} \quad = \quad -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \tag{7}$$
  Diese sind identisch zu den Euler-Lagrange-Gleichungen.
- Vorteil: Hamilton-Formalismus ermöglicht den direkten Übergang zur QM.

2.2 Teilchen in der QM (kanonische Quantisierung)

- Vorgehensweise:
  - Ersetze klassische Observablen durch hermitesche Operatoren:
    - Ort: $\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$.
    - Impuls: $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}$.
    - Energie: $E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rightarrow \hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ (Hamilton-Operator).
  - Operatoren sind i.A. nicht vertauschbar, d.h. erfüllen spezielle Kommutatorrelationen.
  - Fordere für kanonisch konjugierte Variablen A und p_A die Kommutatorrelation $[\hat{A}, \hat{p}_A] = \hat{A}\hat{p}_A - \hat{p}_A\hat{A} = i$, z.B. $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}$.
  - Ersetze klassischen Zustand $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ durch QM Zustand $|\psi\rangle$.
- Eine sehr gängige Darstellung von Orts- und Impulsoperator, die die geforderten Kommutatorrelationen $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i$, $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$ erfüllt, ist die Ortsdarstellung,
  $$\hat{r}_j \quad = \quad r_j \quad , \quad \hat{p}_j \quad = \quad -i\frac{\partial}{\partial r_j}. \tag{8}$$
- Eine andere mögliche Darstellung ist die Impulsdarstellung,
  $$\hat{r}_j \quad = \quad +i\frac{\partial}{\partial p_j} \quad , \quad \hat{p}_j \quad = \quad p_j. \tag{9}$$

- Wichtiges Hilfsmittel: Eigenwerte λ_j und Eigenzustände $|\lambda_j\rangle$ eines Operators $\hat{O}$. Diese erfüllen

$$\hat{O}|\lambda_j\rangle \quad = \quad \lambda_j|\lambda_j\rangle. \tag{10}$$

Für $\hat{O} = \hat{H}$ (Hamilton-Operator) und bei Verwendung der Ortsdarstellung (8) ist dies die bekannte stationäre Schrödinger-Gleichung (SG),

$$\left(-\frac{\triangle}{2m} + V(\mathbf{r})\right)\psi_j(\mathbf{r}) \quad = \quad E_j\psi_j(\mathbf{r}). \tag{11}$$

- Messung einer Observablen O im Zustand $|\psi\rangle$:
  (a) Wahrscheinlichkeit für Messergebnis λ_j ist $|\langle\psi|\lambda_j\rangle|^2$.
  (b) Erwartungswert: $\langle O\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$ (folgt aus (a)).
  (c) Streuung (Varianz) der Messergebnisse: $\Delta O^2 = \langle\psi|(\hat{O} - \langle O\rangle)^2|\psi\rangle$ (folgt aus (a)).
- Falls $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$:
  - Es existiert keine Basis, deren Zustände sowohl Eigenzustände von $\hat{A}$ als auch von $\hat{B}$ sind.
  - Es existiert eine Unschärferelation bezüglich $\hat{A}$ und $\hat{B}$:

$$\Delta A \Delta B \quad \geq \quad \frac{1}{2}\Big|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle\Big|. \tag{12}$$

    Bekanntes Beispiel ist $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$.

- Ortseigenzustände:
  - $\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{q}\rangle = \mathbf{q}|\mathbf{q}\rangle$.
  - $|\mathbf{q}\rangle$ beschreibt ein Teilchen am Ort $\mathbf{q}$.
  - Orthogonalität: $\langle\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2\rangle = \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$.
  - Vollständigkeit: $\int d^3q\,|\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{q}| = 1$.
  - Schrödingersche Wellenfunktion in der Ortsdarstellung: $\psi(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\psi\rangle$.
- Impulseigenzustände:
  - $\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{k}\rangle = \mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle$.
  - $|\mathbf{k}\rangle$ beschreibt Teilchen mit Impuls $\mathbf{k}$.
  - Orthogonalität und Vollständigkeit analog zu Ortseigenzuständen.

2.2.1 Zeitentwicklung

- Schrödinger-Bild:
  - Zustände $|\psi(t)\rangle$ zeitabhängig, Operatoren $\hat{O}$ zeitunabhängig.
  - Zeitentwicklung von Zuständen durch die SG bestimmt:

    $$i\partial_t|\psi(t)\rangle \quad = \quad \hat{H}|\psi(t)\rangle; \tag{13}$$

    Lösung ist

    $$|\psi(t)\rangle \quad = \quad e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|\psi_0\rangle \tag{14}$$

    bei Anfangsbedingung $|\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle$.

***** 23. Oktober 2024 (3. Vorlesung) ******

  - (13) in Ortsdarstellung liefert die Kontinuitätsgleichung

    $$\partial_t\rho(\mathbf{r},t) + \nabla\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad = \quad 0 \tag{15}$$

    mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit

    $$\rho \quad = \quad \psi^*\psi \tag{16}$$

    und dem Wahrscheinlichkeitsstrom

    $$\mathbf{j} \quad = \quad -\frac{i}{2m}\Big(\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\Big). \tag{17}$$

    Die Existenz einer Kontinuitätsgleichung ist essentiell, um $\psi^*\psi$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretieren zu können.

- Heisenberg-Bild (wird in der QFT häufig verwendet):
  - Zustände $|\psi_H\rangle$ zeitunabhängig, Operatoren $\hat{O}_H(t)$ zeitabhängig.
  - Zeitabhängiger Erwartungswert verdeutlicht Übergang zwischen Schrödinger- und Heisenberg-Bild:

    $$\langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle \quad = \quad \underbrace{\langle\psi(t_0)|}_{=\langle\psi_H|}\underbrace{e^{+i\hat{H}(t-t_0)}\hat{O}e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{=\hat{O}_H(t)}\underbrace{|\psi(t_0)\rangle}_{=|\psi_H\rangle}. \tag{18}$$

  - $\hat{O}_H(t)$ erfüllt die Heisenbergsche BGl:

    $$\frac{d}{dt}\hat{O}_H(t) \quad = \quad i[\hat{H},\hat{O}_H(t)]. \tag{19}$$

  - Beispiel: Für $\hat{O}_H = \hat{\mathbf{r}}$

    $$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}} \quad = \quad +\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{\mathbf{p}}} \tag{20}$$

    und für $\hat{O}_H = \hat{\mathbf{p}}$

    $$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{p}} \quad = \quad -\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{\mathbf{r}}}, \tag{21}$$

    was den Hamiltonschen BGls (7) aus der klassischen Mechanik entspricht.

2.2.2 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren am Beispiel des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators

- Hamilton-Operator:

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{q}^2}{2}. \tag{22}$$

- Definiere

$$\hat{a} \;=\; \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\hat{p}. \tag{23}$$

  Es folgt

$$\hat{a}^\dagger \;=\; \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{q} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\hat{p} \tag{24}$$

  sowie

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] \;=\; 1 \quad , \quad \hat{H} \;=\; \Big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\Big)\omega \quad , \quad [\hat{H},\hat{a}^\dagger] \;=\; +\omega\hat{a}^\dagger \quad , \quad [\hat{H},\hat{a}] \;=\; -\omega\hat{a}. \tag{25}$$

- Interpretation von $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:
  - Sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$, d.h.

$$\hat{H}|n\rangle \;=\; E_n|n\rangle. \tag{26}$$

  - Aus

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger|n\rangle \;=\; \Big(\hat{a}^\dagger\hat{H} + [\hat{H},\hat{a}^\dagger]\Big)|n\rangle \;=\; \Big(E_n + \omega\Big)\hat{a}^\dagger|n\rangle \tag{27}$$

    folgt, dass $\hat{a}^\dagger$ ein Energiequant der Größe ω erzeugt.
  - Aus

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle \;=\; \Big(\hat{a}\hat{H} + [\hat{H},\hat{a}]\Big)|n\rangle \;=\; \Big(E_n - \omega\Big)\hat{a}|n\rangle; \tag{28}$$

    folgt, dass $\hat{a}$ ein Energiequant der Größe ω vernichtet.
  - Probleme: (1) Unendlich große negative Energien ...? (2) Außerdem gilt $E_n = \langle n|H|n\rangle = |a|\psi\rangle|^2\omega + \omega/2 \geq \omega/2$.
  - Ausweg: Betrachte

$$\Big|\hat{a}|n\rangle\Big|^2 \;=\; \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \;=\; \langle n|\Big(\frac{\hat{H}}{\omega} - \frac{1}{2}\Big)|n\rangle \;=\; \frac{E_n}{\omega} - \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Für $E_n = \omega/2$ folgt $|\hat{a}|n\rangle|^2 = 0$ und damit $\hat{a}|n\rangle = 0$. Definiere den Grundzustand $|0\rangle$ als Zustand mit $E_0 = \omega/2$ (damit $\hat{a}|0\rangle = 0$, unendlich große negative Energien sind ausgeschlossen). Konstruiere alle weiteren Zustände durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren,

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle \quad = \quad |1\rangle \quad , \quad E_1 \quad = \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)\omega \tag{30}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad = \quad |n\rangle \quad , \quad E_n \quad = \quad \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \tag{31}$$

(Normierung $1/\sqrt{n!}$ ergibt sich durch Überlegungen analog zu (29)). Dabei ergibt sich

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle \quad = \quad \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad , \quad \hat{a}|n\rangle \quad = \quad \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{32}$$

sowie

$$\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=\hat{N}}|n\rangle \quad = \quad n|n\rangle \tag{33}$$

($\hat{N}$ bezeichnet man als Besetzungszahloperator).

Im Folgenden werden Dächer auf Operatoren stets weggelassen.

3 Relativistische Wellen-/Feldgleichungen

3.1 Spezielle Relativitätstheorie

- Ziel: Relativistische Formulierung von QFTs (solche QFTs beschreiben z.B. das Standardmodell, QED, QCD). Daher im Folgenden eine kurze Wiederholung der speziellen Relativitätstheorie.

3.1.1 "Herleitung", Lorentz- und Poincare-Transformationen

- Raumzeitvektor $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$.
- Betrachte den "Abstand" zweier Raumzeitvektoren x^μ und y^μ,

$$s^2 \quad = \quad (\underbrace{x^0 - y^0}_{=s^0})^2 - (\underbrace{x^1 - y^1}_{=s^1})^2 - (\underbrace{x^2 - y^2}_{=s^2})^2 - (\underbrace{x^3 - y^3}_{=s^3})^2. \tag{34}$$

- Sind x^μ und y^μ über ein Lichtsignal verbunden, gilt $s^2 = 0$.
- Experimente:
  - Licht breitet sich in allen Inertialsystemen mit der gleichen Geschwindigkeit aus; damit gilt für zwei Inertialsysteme Σ und Σ' $\quad s^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad s'^2 = 0$.
  - $s^2 = s'^2$.
- Notation: Unterscheide zwischen oberen und unteren Indizes.
  - Kontravarianter Vektor: x^μ.
  - Kovarianter Vektor: $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x})$.
  - Übergang zwischen kontra- und kovarianten Vektoren/Indizes mit Hilfe des metrischen Tensors/der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$, z.B. $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ bzw. $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$, wobei $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.
  - Damit $s^2 = s^\mu \eta_{\mu\nu} s^\nu = s^\mu s_\mu$.
- Welche Koordinatentransformationen verbinden Inertialsysteme?
  - Homogenität von Raum- und Zeit bedingt inhomogene lineare Transformationen, $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$.
  - $s'^2 = s^2$ führt auf

    $$s'^\mu \eta_{\mu\nu} s'^\nu \quad = \quad \Lambda^\mu{}_\alpha s^\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta s^\beta \quad = \quad s^\alpha \eta_{\alpha\beta} s^\beta. \tag{35}$$

    Da s^μ beliebig sein kann, folgt

    $$\underbrace{\Lambda^\mu{}_\alpha}_{=(\Lambda^T)_\alpha{}^\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \quad = \quad \eta_{\alpha\beta} \quad \rightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda \quad = \quad \eta \quad \text{(Matrixform)} \tag{36}$$

    ("Λ ist also eine Art orthogonale Transformation."). Transformationen Λ, die (36) erfüllen, werden als Lorentz-Transformationen bezeichnet.

- Klassifikation von Größen gemäß ihres Transformationsverhaltens unter Lorentz-Transformationen:
  - $x' = x \quad \rightarrow \quad$ Skalar.
  - $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} x^{\alpha} \quad \rightarrow \quad$ (kontravarianter) Vektor.
  - $x'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} x^{\alpha\beta} \quad \rightarrow \quad$ (kontravarianter) Tensor (2-ter Stufe).
  - $x'^{\mu\nu\rho} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Lambda^{\rho}{}_{\gamma} x^{\alpha\beta\gamma} \quad \rightarrow \quad$ (kontravarianter) Tensor 3-ter Stufe.
  - ...
- Ableitungen transformieren kovariant:
  - $\partial_{\mu} = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial_t, \nabla)$.
  - Es folgt $\partial^{\mu} = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$.
  - D'Alembert-Operator: $\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \partial_t^2 - \triangle$.
- Spezielle Lorentz-Transformationen:
  - **(1) Rotationen:**

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \tag{37}$$

    wobei R eine Rotationsmatrix ist, also $R^T R = 1$ und $\det(R) = 1$. Damit $t' = t$ und $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$.
  - **(2) Boost in x-Richtung (analog in y- oder z-Richtung):**

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta & 0 & 0 \\ \pm\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta \;=\; v \quad , \quad \gamma \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{38}$$

    wobei sich die beiden Inertialsysteme relativ zueinander in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegen. Damit $(t', x', y', z') = (\gamma(t \pm \beta x), \gamma(x \pm \beta t), y, z)$.
  - **(3) Zeitumkehr:**

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

  - **(4) Parität (Raumspiegelung):**

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

  - Jede Lorentz-Transformation lässt sich als Kombination von **(1)**, **(2)**, **(3)** und **(4)** schreiben.

  - Klassifikation:
    * ${\Lambda^0}_0 > 0$
      $\rightarrow$ orthochrone Lorentz-Transformationen (Zeitrichtung wird nicht umgekehrt).
    * ${\Lambda^0}_0 \det(\Lambda) > 0$
      $\rightarrow$ orientierungstreue Lorentz-Transformationen (Raum wird nicht gespiegelt).
    * ${\Lambda^0}_0 > 0$, $\det(\Lambda) = 1$
      $\rightarrow$ eigentliche Lorentz-Transformationen (orthochron und orientierungstreu).

- Inhomogene Lorentz-Transformationen (Poincare-Transformationen): Lorentz-Transformationen + Translation, d.h.

$$x'_\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{41}$$

- Standardmodellphysik in allen Inertialsystemen gleich, die durch eigentliche inhomogene Lorentz-Transformationen verbunden sind.

3.1.2 Energie und Impuls relativistischer Teilchen

- Weltlinie eines Teilchens in einem beliebigen Inertialsystem Σ: $x^\mu(t) = (t, \mathbf{x}(t))$.
- Im Ruhesystem Σ' des Teilchens: $dx'^\mu = (d\tau, 0)$.
- $(dx)^2 = (dx')^2$ gilt, obwohl Σ' im Allgemeinen kein Inertialsystem ist, da für eine infintesimale Zeitspanne die Geschwindigkeit des Teilchens in Σ konstant ist. Damit kann das Teilchen zum Zeitpunkt t als in einem Intertialsystem ruhend betrachtet werden, das sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$ relativ zu Σ bewegt.
- Es folgt $d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2 = dt^2(1 - \mathbf{v}^2)$.
- Eigenzeit:

$$\tau = \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \tag{42}$$

  (Zeit die im Ruhesystem Σ' des Teilchens vergangen ist, während der Zeitspanne $t_i \ldots t_f$ im Inertialsystem Σ).

- Vierergeschwindigkeit:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}}_{=\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

- Vierimpuls: $p^\mu = m u^\mu$.
  - $p^0 = m u^0 = m\gamma = m + m\mathbf{v}^2/2 + \mathcal{O}((\mathbf{v}^2)^2)$; legt Interpretation als Gesamtenergie nahe, also $p^0 = E$.

– $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\mathbf{v} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^3)$; entspricht also für kleine Geschwindigkeiten dem nichtrelativistischen Impuls $m\mathbf{v}$.

- Lorentz-Invariante p^2:
  - Im Inertialsystem Σ: $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$.
  - Im Ruhesystem Σ': $p'^2 = m^2$.
  - Auf Grund von $p^2 = p'^2 \qquad E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$ (relativistische Energie-Impuls-Beziehung).

3.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

- Ziel: Aufstellen einer relativistischen Version der SG.
- (Nicht-relativistische) SG:
  - Starte mit der nicht-relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$.
  - Korrespondenzprinzip $E \to i\partial_t$, $\mathbf{p} \to -i\nabla$ und Anwenden der resultierenden Operatoren auf eine Wellenfunktion ψ liefert

$$i\partial_t\psi(\mathbf{r},t) \quad = \quad \Big(-\frac{1}{2m}\triangle + V(\mathbf{r})\Big)\psi(\mathbf{r},t). \tag{44}$$

- Analoges Vorgehen im relativistischen Fall:
  - Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$.
  - Korrespondenzprinzip:

$$i\partial_t\phi(\mathbf{r},t) \quad = \quad \sqrt{m^2 - \triangle}\,\phi(\mathbf{r},t); \tag{45}$$

    Probleme verursachen die Ableitungen $\triangle$ unter der Wurzel. Entwicklung führt zu unendlich hohen Ableitungen. Gleichung daher ungeeignet.

- Weiterer Versuch:
  - Starte mit $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$.
  - Korrespondenzprinzip liefert die sogenannte Klein-Gordon-Gleichung (KGG):

$$-\partial_t^2\phi(\mathbf{r},t) \quad = \quad \Big(m^2 - \triangle\Big)\phi(\mathbf{r},t) \tag{46}$$

    bzw.

$$\Big(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\Big)\phi(x) \quad = \quad 0; \tag{47}$$

    diese Gleichung ist forminvariant unter Lorentz-Transformationen von Σ nach Σ':
    - $\partial^\mu\partial_\mu = \partial'^\mu\partial'_\mu$.
    - $\phi(x) = \phi'(x')$ (das Transformationsverhalten eines Skalarfelds).
    - Damit

$$\Big(\partial'^\mu\partial'_\mu + m^2\Big)\phi'(x') \quad = \quad 0. \tag{48}$$

****** 30. Oktober 2024 (5. Vorlesung) ******

- Lösung der KGG:
  - Ansatz: Ebene Welle, $\phi(x) = e^{-ikx}$,

    $$\Big(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\Big)\phi(x) \;=\; \Big(-k^\mu k_\mu + m^2\Big)\phi(x) \;=\; 0, \tag{49}$$

    also $-k^\mu k_\mu + m^2 = 0$ bzw. $-(k^0)^2 + \mathbf{k}^2 + m^2 = 0$ bzw. $k^0 = \pm\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}$.
  - Korrespondenzprinzip: k^0 entspricht der Energie, $\mathbf{k}$ dem Impuls; $k^0 = \pm\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}$. Die KGG erlaubt damit negative Energien ...? (1. Problem der KGG)
  - Allgemeine Lösung der KGG durch lineare Superposition:

    $$\begin{aligned}\phi(x) \;&=\; \int d^3k\,\Big(N_+(\mathbf{k})e^{-i(+E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})} + N_-(\mathbf{k})e^{-i(-E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})}\Big) \;= \\ &=\; \int d^3k\,\Big(N_+(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})} + N_-(-\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})}\Big) \;=\; \dots\end{aligned} \tag{50}$$

    mit $E(\mathbf{k}) = \sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}$. Die Definition/Konvention

    $$N_+(\mathbf{k}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}a(\mathbf{k}) \quad,\quad N_-(\mathbf{k}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}b^*(\mathbf{k}) \tag{51}$$

    führt auf (Fortsetzung von (50))

    $$\dots \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b^*(\mathbf{k})e^{+ikx)}\Big) \tag{52}$$

    (hier $k^\mu = (E(\mathbf{k}), \mathbf{k})$).
  - Reelles ϕ: $b(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})$.
  - Komplexes ϕ: $a(\mathbf{k})$ und $b(\mathbf{k})$ unabhängig.
- Es existiert eine Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho + \nabla\mathbf{j} = 0$ bzw. $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit

  $$j^\mu \;=\; (\rho, \mathbf{j}) \quad,\quad \rho \;=\; +i\Big(\phi^*(\partial_t\phi) - (\partial_t\phi^*)\phi\Big) \quad,\quad \mathbf{j} \;=\; -i\Big(\phi^*(\nabla\phi) - (\nabla\phi^*)\phi\Big). \tag{53}$$

  $\mathbf{j}$ hat dieselbe Form wie der nicht-relativistische Wahrscheinlichkeitsstrom (17). Die Interpretation von ρ als Wahrscheinlichkeitsdichte scheidet jedoch aus, da ρ negativ sein kann (ϕ muss lediglich die KGG erfüllen, eine Differentialgleichung (DGl) 2. Ordnung. Dies erlaubt die beliebige Vorgabe von ABs $\phi(\mathbf{x}, t = t_i)$ und $\dot\phi(\mathbf{x}, t = t_i)$, z.B. so, dass ρ negativ ist) ...? (2. Problem der KGG)
- Zusammenfassung: Die KGG führt zu Problemen,
  (1) negative Energien,
  (2) keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion (Ursache: KGG ist DGl 2. Ordnung),
  (3) Teilchenerzeugung/-vernichtung nicht beschreibbar (siehe Abschnitt 1.1).
- Ausblick: ϕ beschreibt nicht die Wellenfunktion eines einzelnen Teilchens sondern im Rahmen der QFT ein Feld, dessen angeregte Quanten skalaren Teilchen (z.B. das Higgs-Boson) entsprechen.

3.3 Die Dirac-Gleichung

- Ziel: Aufstellen einer relativistischen Version der SG, die eine DGl 1. Ordnung ist (in der Hoffnung, zumindest das Problem mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion zu lösen), also

$$i\partial_t\psi(x) \;=\; H\psi(x), \tag{54}$$

wobei H linear in den räumlichen Ableitungen ∂_j ist.

- Ansatz:

$$i\partial_0\psi(x) \;=\; \Big(\sum_j \alpha_j(-i\partial_j) + \beta m\Big)\psi(x). \tag{55}$$

- Beistimmung der Koeffizienten α_j, β:
  - Ableiten mit $i\partial_0$ und Einsetzen des Ansatzes (55):

$$\begin{aligned}
-\partial_0^2\psi(x) \;&=\; \Big(\sum_j \alpha_j(-i\partial_j) + \beta m\Big) i\partial_0\psi(x) \;= \\
&= \Big(\sum_j \alpha_j(-i\partial_j) + \beta m\Big)\Big(\sum_k \alpha_k(-i\partial_k) + \beta m\Big)\psi(x) \;= \\
&= \Big(-\sum_j \alpha_j^2\partial_j^2 + \beta^2 m^2\Big)\psi(x) \\
&\quad -\Big(\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}\Big(\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j\Big)\partial_j\partial_k + im\sum_j\Big(\alpha_j\beta + \beta\alpha_j\Big)\partial_j\Big)\psi(x).
\end{aligned} \tag{56}$$

  - Korrespondenzprinzip $i\partial_0 \to E$ und $-i\partial_j \to p^j$ führt auf

$$\begin{aligned}
E^2\psi(x) \;&=\; \Big(\sum_j \alpha_j^2 (p^j)^2 + \beta^2 m^2\Big)\psi(x) \\
&\quad +\Big(\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}\Big(\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j\Big)p^j p^k + m\sum_j\Big(\alpha_j\beta + \beta\alpha_j\Big)p^j\Big)\psi(x).
\end{aligned} \tag{57}$$

    Diese Gleichung sollte der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung entsprechen. Daher

$$\alpha_j^2 \;=\; \beta^2 \;=\; 1 \quad,\quad \alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j \;=\; 0 \quad \text{für } j\neq k \quad,\quad \alpha_j\beta + \beta\alpha_j \;=\; 0. \tag{58}$$

    Diese Bedingungen können nicht von vertauschbaren Zahlen erfüllt werden. Verwende daher Matrizen α_j und β.
  - Zusätzliche Bedingung: H hermitesch, also $H = H^\dagger$, erfordert $\alpha_j = \alpha_j^\dagger$ und $\beta = \beta^\dagger$.
  - Weitere Eigenschaften:
    - Auf Grund von $\alpha_j^2 = \beta^2 = 1$ sind die Eigenwerte von α_j, β ± 1.
    - $\mathrm{Tr}(\alpha_j) = \mathrm{Tr}(\alpha_j\beta^2) = \mathrm{Tr}(\underbrace{\beta\alpha_j}_{=-\alpha_j\beta}\beta) = -\mathrm{Tr}(\alpha_j)$, also $\mathrm{Tr}(\alpha_j) = 0$.

  - $*$ Analog $\mathrm{Tr}(\beta) = 0$.
  - $*$ Tr = Summe der Eigenwerte, daher gerade Dimension von α_j, β.
- Mit 2×2-Matrizen sind obige Bedingungen nicht zu erfüllen, aber mit 4×4-Matrizen

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_j \\ +\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{59}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Die Wahl (59) ("Standarddarstellung") ist nicht eindeutig.

- Die Gleichung (55) mit den Matrizen (59) wird als Dirac-Gleichung (DG) bezeichnet. ψ hat vier Komponenten, ist aber kein Vierervektor, sondern ein "(Dirac-)Spinor" (anderes spezielles Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen).

****** 01. November 2024 (6. Vorlesung) ******

- Kovariante Form der DG:
  - Definition:

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \gamma^j = \beta\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

  - Eigenschaften der γ-Matrizen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \quad , \quad \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger \quad , \quad \gamma^j = -(\gamma^j)^\dagger. \tag{62}$$

  - Multiplikation von (55) mit β führt auf

$$i\beta\partial_0\psi(x) = \Big(\sum_j \beta\alpha_j(-i\partial_j) + m\Big)\psi(x) \tag{63}$$

bzw.

$$\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Big)\psi(x) = 0 \tag{64}$$

(die γ-Matrizen Verändern sich nicht bei Lorentz-Transformation, auch wenn sie einen Viererindex tragen; mehr dazu in Abschnitt 3.3.5).

- Lösung der DG:
  - Die DG enthält die KGG, d.h. ein Spinor ψ der die DG erfüllt, muss auch die KGG erfüllen (die DG wurde so konstruiert; siehe (56) und (58)).
  - Benutze daher den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{k}) \\ \chi(\mathbf{k}) \end{pmatrix} e^{\mp i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})} \quad , \quad E(\mathbf{k}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} \tag{65}$$

(für Vorzeichen $e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})}$ entspricht das positive $E(\mathbf{k})$ dem Betrag der negativen Energie und $\mathbf{k}$ entspricht dem negativen Impuls, d.h. Impuls $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$ [Korrespondenzprinzip]).

– Einsetzen des Ansatzes in die DG (64) führt auf

$$(E(\mathbf{k}) \mp m)\varphi(\mathbf{k}) - \vec{\sigma}\mathbf{k}\chi(\mathbf{k}) = 0 \tag{66}$$

$$(E(\mathbf{k}) \pm m)\chi(\mathbf{k}) - \vec{\sigma}\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}) = 0. \tag{67}$$

– Obere Vorzeichen, $\psi \propto e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})}$, d.h. positive Energie:

∗ Umstellen von (67):

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k}) + m}\varphi(\mathbf{k}). \tag{68}$$

∗ Einsetzen in (66):

$$\underbrace{\left(E(\mathbf{k}) - m - \frac{(\vec{\sigma}\mathbf{k})^2}{E(\mathbf{k}) + m}\right)}_{=0}\varphi(\mathbf{k}) = 0, \tag{69}$$

wobei $(\vec{\sigma}\mathbf{k})^2 = \mathbf{k}^2 = E(\mathbf{k})^2 - m^2 = (E(\mathbf{k}) + m)(E(\mathbf{k}) - m)$ verwendet wurde, d.h. jedes beliebige φ ist möglich, also zwei linear unabhängige Lösungen $\varphi_1 = N(1, 0)$ und $\varphi_2 = N(0, 1)$ (Hinweis auf "Spin up" und "Spin down"; mehr dazu in Abschnitt 3.3.2).

∗ Spinoren mit positiver Energie:

$$\psi^+_{1,2}(x) = u_{1,2}(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})} \tag{70}$$

$$u_1(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{k}) \\ \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\varphi_1(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{+k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{+k^1+ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$u_2(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varphi_2(\mathbf{k}) \\ \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\varphi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{+k^1-ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{-k^3}{E(\mathbf{k})+m} \end{pmatrix}. \tag{72}$$

– Untere Vorzeichen, $\psi \propto e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})}$, d.h. negative Energie:

∗ Umstellen von (66):

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k}) + m}\chi(\mathbf{k}). \tag{73}$$

∗ Einsetzen in (67):

$$\underbrace{\left(E(\mathbf{k}) - m - \frac{(\vec{\sigma}\mathbf{k})^2}{E(\mathbf{k}) + m}\right)}_{=0}\chi(\mathbf{k}) = 0, \tag{74}$$

d.h. jedes beliebige χ ist möglich, also zwei linear unabhängige Lösungen $\chi_1 = N(0, 1)$ und $\chi_2 = N(1, 0)$.

∗ Spinoren mit negativer Energie:

$$\psi^-_{1,2}(x) = v_{1,2}(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})} \tag{75}$$

$$v_1(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\chi_1(\mathbf{k}) \\ \chi_1(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{+k^1-ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{-k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$v_2(\mathbf{k}) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\chi_2(\mathbf{k}) \\ \chi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \;=\; N \begin{pmatrix} \frac{+k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{+k^1+ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{77}$$

- Normierung $N = \sqrt{E(\mathbf{k})+m}$ (Konvention). Damit $u_r^\dagger(\mathbf{k})u_s(\mathbf{k}) = 2E(\mathbf{k})\delta_{rs}$ und $v_r^\dagger(\mathbf{k})v_s(\mathbf{k}) = 2E(\mathbf{k})\delta_{rs}$.
- Für kleine Impulse $|\mathbf{k}| \ll E(\mathbf{k})$ (nicht- bzw. schwach relativistischer Bereich) dominieren für positive Energien die oberen beiden Komponenten, für negative Energien die unteren beiden Komponenten.
- Allgemeine Lösung der DG durch lineare Superposition:

$$\psi(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{r=1,2} \Big(b_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + d_r^*(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{+ikx} \Big) \tag{78}$$

(hier $k^\mu = (E(\mathbf{k}), \mathbf{k})$).

- Es existiert eine Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \nabla \mathbf{j} = 0$ bzw. $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ (adjungierter Spinor). Da $\rho = j^0 = \psi^\dagger\psi \geq 0$ ist eine Interpretation von ρ als Wahrscheinlichkeitsdichte denkbar, d.h. die DG ist diesbezüglich der KG überlegen.

- Ausblick: ψ beschreibt nicht die Wellenfunktion eines einzelnen Teilchens sondern im Rahmen der QFT ein Feld, dessen angeregte Quanten fermionischen Spin-1/2-Teilchen (z.B. Elektronen, Quarks) entsprechen.

3.3.1 Lösungen mit negativer Energie

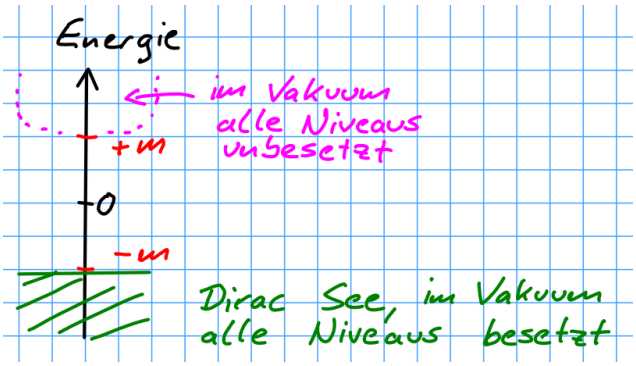
- Teilchen mit beliebig großen negativen Energien $-E(\mathbf{k}) = -\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}$ können nicht existieren (Energiegewinn durch "Abrutschen" zu immer negativeren Energien).

- Ignorieren/Wegwerfen der Lösungen mit negativer Energie? ... Fragwürdig! Schlechte Theorie!

Ausweg (1): Dirac-See.

- Pauli-Prinzip: Zwei gleichartige Fermionen (z.B. Elektronen) können nicht im selben Zustand sein.

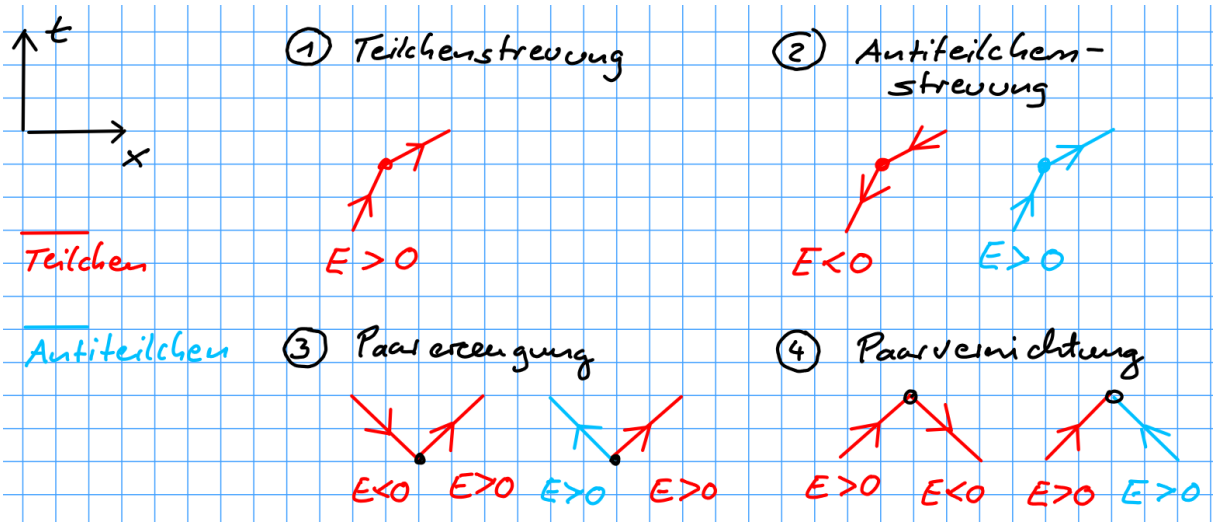
- Vakuum: Alle negativen Energieniveaus sind besetzt, alle positiven unbesetzt.



- Einzelnes Elektron mit Impuls $\mathbf{k}$: Energieniveau $E(\mathbf{k}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ ist zusätzlich besetzt.
- Elektron-Positron-Paarerzeugung: Ein Elektron mit negativer Energie wird auf ein positives Energieniveau gehoben (dafür minimal notwendige Energie: $2m$); das entstandene Loch entspricht einer fehlenden Ladung und verhält sich daher wie ein Positron.
  $\rightarrow$ **Vorhersage von Antiteilchen.**
- Betrachtungsweise in der Festkörpertheorie erfolgreich, scheitert jedoch für Bosonen.

Ausweg (2): Feynman-Stückelberg-Interpretation.

- Literatur: [6], Kapitel 3.1.
- Wesentliche Idee: Teilchen mit negativer Energie laufen rückwärts in der Zeit, entsprechen Antiteilchen, die vorwärts in der Zeit laufen und positive Energie haben:
  - Teilchen mit negativer Energie:
    $\psi_{1,2}(x) = v_{1,2}(\mathbf{k}) e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})}$.
  - Umkehren der Zeitrichtung durch $t \rightarrow -t$:
    $\psi_{1,2}(x) = v_{1,2}(\mathbf{k}) e^{+i(E(\mathbf{k})(-t) - \mathbf{kx})} = v_{1,2}(\mathbf{k}) e^{-i(E(\mathbf{k})t + \mathbf{kx})}$;
    Energie damit positiv.
- Damit können vier scheinbar unterschiedliche Prozesse (Teilchen-Streuung, Antiteilchen-Streuung, Paarerzeugung und Paarvernichtung) als ein Phänomen verstanden werden.



- Vorteil gegenüber dem Dirac-See: Auch auf Bosonen anwendbar, z.B. Pionen π^+, π^-.
- Problem negativer Energien also nicht nur für die DG, sondern auch für die KGG gelöst.

3.3.2 Spin

- Die DG beschreibt ein freies Teilchen, also ein rotationsinvariantes System. Bei solchen Systemen ist der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J}$ (Summe aus Bahndrehimpulsen und Spins) erhalten.
- Die Verwendung der Pauli-Matrizen als Bausteine der γ-Matrizen und die Existenz von jeweils zwei Lösungen mit gleichem Impuls sowohl für Teilchen/Antiteilchen legt nahe, dass die DG Teilchen mit Spin beschreibt.
- Erwartung: Der Bahndrehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist keine Erhaltungsgröße,

$$[\mathbf{L}, H] \quad = \quad [\mathbf{r} \times \mathbf{p}, \vec{\alpha}\mathbf{p} + \beta m] \quad = \quad [\mathbf{r}, \vec{\alpha}\mathbf{p}] \times \mathbf{p} \quad = \quad i\vec{\alpha} \times \mathbf{p}. \tag{79}$$

  Erwartung damit bestätigt.

- Gesucht: Spinoperator $\mathbf{S}$. Dieser muss

$$[\mathbf{J}, H] \quad = \quad 0 \quad , \quad \mathbf{J} \quad = \quad \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{80}$$

  erfüllen.

****** 6. November 2024 (7. Vorlesung) ******

- Drehimpulse und Spins erfüllen die Drehimpulsalgebra, z.B. $[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl}S_l$. Diese wird auch von den Pauli-Matrizen erfüllt, $[\sigma_j/2, \sigma_k/2] = i\epsilon_{jkl}\sigma_l/2$.

- Versuch:

$$\mathbf{S} \;=\; \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \quad , \quad \vec{\Sigma} \;=\; \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \;=\; -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha} \;=\; -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\vec{\gamma}. \tag{81}$$

  Es folgt

$$[S_j, H] \;=\; \frac{1}{2}[\Sigma_j, \vec{\alpha}\mathbf{p} + \beta m] \;=\; \frac{1}{2}[\Sigma_j, \alpha_k]p^k \;=\; i\epsilon_{jkl}p^k\alpha_l \;=\; -i(\vec{\alpha}\times\mathbf{p})_j, \tag{82}$$

  wobei $[\Sigma_j, \alpha_k] = 2i\epsilon_{jkl}\alpha_l$ und $[\Sigma_j, \beta] = 0$ verwendet wurde. (80) ist erfüllt, $\mathbf{S}$ scheint damit der Spinoperator zu sein.

- Eigenwerte s_j von S_j sind $\pm 1/2$ (Eigenwerte der Pauli-Matrizen sind ± 1). Eigenwerte $s(s+1)$ von

$$\mathbf{S}^2 \;=\; \frac{1}{4}\vec{\Sigma}^2 \;=\; \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{83}$$

  sind $3/4$, damit $s = 1/2$. Die DG beschreibt also Fermionen mit Spin $1/2$.

- Spineinstellung der Lösungen der DG:
  - (82) zeigt, dass die Spinkomponente parallel zum Impuls erhalten ist. Wähle daher o.B.d.A. $\mathbf{p} = (0, 0, p^3)$ und betrachte S_3.
  - Teilchen (siehe (70)):

$$S_3\psi_1^+(x) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{+k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})} \;=\; +\frac{1}{2}\psi_1^+(x) \tag{84}$$

$$S_3\psi_2^+(x) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-k^3}{E(\mathbf{k})+m} \end{pmatrix} e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{kx})} \;=\; -\frac{1}{2}\psi_2^+(x). \tag{85}$$

  - Antiteilchen (siehe (75)) analog,

$$S_3\psi_1^-(x) \;=\; -\frac{1}{2}\psi_1^-(x) \quad , \quad S_3\psi_2^-(x) \;=\; +\frac{1}{2}\psi_2^-(x). \tag{86}$$

3.3.3 Lorentz-Kovarianz der DG, Transformationsverhalten von Spinoren unter Lorentz-Transformationen

- Als relativistische Gleichung muss die DG forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein, d.h. in jedem Inertialsystem gleich aussehen. Die beiden Gleichungen

$$\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Big)\psi(x) \;=\; 0 \quad , \quad \Big(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m\Big)\psi'(x') \;=\; 0 \tag{87}$$

  müssen also die gleiche Information beinhalten, d.h. durch Lorentz-Transformation ineinander überführbar sein. Dies legt das Transformationsverhalten von Spinoren unter Lorentz-Transformationen fest.

- $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$.
- Spinoren müssen auf Grund der Linearität der DG linear transformieren, d.h. $\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$.
- Gesucht: Die im Spin-Raum wirkende 4×4-Matrix $S(\Lambda)$.
  - Rechte Gleichung in (87):
    $$0 \;=\; \Big(i\gamma^\nu \partial'_\nu - m\Big)\psi'(x') \;=\; \Big(i\gamma^\nu \partial'_\nu - m\Big)S(\Lambda)\psi(x). \tag{88}$$
  - Linke Gleichung in (87):
    $$0 \;=\; \Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\Big)\psi(x) \;=\; \Big(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m\Big)\psi(x), \tag{89}$$
    wobei $\partial_\mu = (\partial x'^\nu/\partial x^\mu)\partial'_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$ verwendet wurde. Multipliziere mit $S(\Lambda)$ (um "Rechte Gleichung" und "Linke Gleichung" vergleichen zu können),
    $$\begin{aligned} 0 \;&=\; S(\Lambda)\Big(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m\Big)S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi(x) \;= \\ &=\; \Big(iS(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m\Big)S(\Lambda)\psi(x). \end{aligned} \tag{90}$$
  - Vergleich von (88) und (90) ergibt die Bestimmungsgleichung für $S(\Lambda)$,
    $$\gamma^\nu \;=\; S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu. \tag{91}$$
  - Für infinitestimale Lorentz-Transformationen, $\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$ mit $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$, ergibt sich
    $$S(\Lambda) \;=\; 1 - \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} \;=\; \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]; \tag{92}$$
    endliche Lorentz-Transformationen können aus infinitesimalen zusammengesetzt werden,
    $$S(\Lambda) \;=\; \exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \tag{93}$$
    ($\lim_{N\to\infty}(1 + x/N)^N = e^x$).
- Analoges Vorgehen zeigt, dass sich die Lösungen der KGG unter Lorentz-Transformation nicht verändern, also sogenannte Lorentz-Skalare sind:
  - Die beiden Gleichungen
    $$\Big(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\Big)\phi(x) \;=\; 0 \quad , \quad \Big(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2\Big)\phi'(x') \;=\; 0 \tag{94}$$
    müssen die gleiche Information beinhalten, d.h. durch Lorentz-Transformation ineinander überführbar sein.
  - Rechte Gleichung in (94):
    $$0 \;=\; \Big(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2\Big)\phi'(x') \;=\; \Big(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\Big)\phi'(x'). \tag{95}$$
  - Vergleich der linken Gleichung in (94) und (95) ergibt $\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x)$.

3.3.4 Transformationsverhalten von Spinoren unter Parität und Ladungskonjugation

Parität P:

- Parität entspricht der speziellen Lorentz-Transformation (40).
- Die entsprechende Spinortransformationsmatrix $S(\Lambda)$ muss (91) erfüllen:

$$\nu = 0 \quad \to_P \quad \gamma^0 \;=\; +S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \tag{96}$$
$$\nu = j \quad \to_P \quad \gamma^j \;=\; -S(\Lambda)\gamma^j S^{-1}(\Lambda); \tag{97}$$

  dies führt auf $S(\Lambda) = e^{i\alpha}\gamma^0$, wobei $e^{i\alpha}$ eine beliebige Phase ist (häufig, wie auch im Folgenden, wird $e^{i\alpha} = 1$ gewählt).

- Damit transformieren sich Spinoren unter Parität gemäß

$$\psi(x) \quad \to_P \quad \psi'(x') \;=\; \gamma^0\psi(x). \tag{98}$$

****** 8. November 2024 (8. Vorlesung) ******

Ladungskonjugation C:

- Als Ladungskonjugation bezeichnet man den Übergang zwischen Teilchen und Antiteilchen.
- Die Spinoren für Teilchen (70) und Antiteilchen (75) gehen (bis auf irrelevante Phasenfaktoren) durch Komplexkonjugation und Anwenden der Matrix $e^{i\alpha}\gamma^2$ ineinander über (häufig, wie auch im Folgenden, wird $e^{i\alpha} = i$ gewählt),

$$u_1(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})} \quad \to_C \quad i\gamma^2\Big(u_1(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})}\Big)^* \;=\; +v_1(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})} \tag{99}$$
$$u_2(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})} \quad \to_C \quad i\gamma^2\Big(u_2(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})}\Big)^* \;=\; -v_2(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kx})} \tag{100}$$

  bzw. allgemein

$$\psi(x) \quad \to_C \quad \psi'(x) \;=\; i\gamma^2\psi^*(x). \tag{101}$$

- Bestätigung der Transformation (101) als Ladungskonjugation durch Betrachten der DG für ein Teilchen im elektromagnetischen (em) Feld:
  - Einführen des em Felds durch minimale Substitution (wie in der nicht-relativistischen QM): $p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$ bzw. $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$ ergibt

$$\Big(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\Big)\psi(x) \;=\; 0. \tag{102}$$

– Erwartung: Erfüllt ein Spinor ψ die DG (102) erfüllt der ladungskonjugierte Spinor $i\gamma^2\psi^*$ ebenfalls (102) mit $e \to -e$,

$$\begin{aligned}
&\Big(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\Big)i\gamma^2\psi^*(x) \quad = \\
&\quad = \quad -\gamma^2\gamma^2\Big(\Big(-i(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\Big)(-i)(\gamma^2)^*\psi(x)\Big)^* \quad = \\
&\quad = \quad -i\gamma^2\Big(\Big(-i\underbrace{(-\gamma^2(\gamma^\mu)^*\gamma^2)}_{=-\gamma^\mu}(\partial_\mu - ieA_\mu) - \underbrace{(-\gamma^2\gamma^2)}_{=1}m\Big)\psi(x)\Big)^* \quad = \\
&\quad = \quad -i\gamma^2\Big(\underbrace{\Big(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\Big)\psi(x)}_{=0}\Big)^* \quad = \quad 0, \qquad (103)
\end{aligned}$$

wobei $(\gamma^{0,1,3})^* = +\gamma^{0,1,3}$ und $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$ verwendet wurde. Erwartung damit bestätigt.

3.3.5 Bilineare Kovarianten

- Zwei Spin-1/2-Teilchen lassen sich durch geeignete Linearkombination zu Gesamtspin $S = 0$ und $S = 1$ koppeln (Clebsch-Gordan-Kopplung):
  - $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} \quad \to \quad S = 0$ (Singlet).
  - $|\uparrow\uparrow\rangle$, $(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$, $|\downarrow\downarrow\rangle \quad \to \quad S = 1$ (Triplet).
- Der Singlet-Zustand ist rotationsinvariant.
- Die drei Triplet-Zustände transformieren (nach erneuter geeigneter Linearkombination) unter Rotationen wie die drei Komponenten des Ortsvektors (x, y, z) (Analogie: Die Kugelflächenfunktionen $Y_{1,m}$, die Bahndrehimpuls $L = 1$ entsprechen, sind in kartesischen Koordinaten proportional zu $x + iy$, z, $x - iy$).
- Ziel/Fragestellung dieses Abschnitts: Welche Linearkombinationen zweier Spinoren $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ transformieren wie Skalare ("entsprechen Gesamtspin $S = 0$"), welche wie Vektoren ("entsprechen Gesamtspin $S = 1$").
- Starte mit der infinitesimalen eigentlichen Lorentz-Transformation eines Spinors (92). Es folgt

$$S(\Lambda) \quad = \quad 1 + \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \qquad (104)$$

$$S^\dagger(\Lambda) \quad = \quad 1 + \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\nu^\dagger, \gamma_\mu^\dagger] \quad = \quad 1 - \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\mu^\dagger, \gamma_\nu^\dagger] \qquad (105)$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \quad = \quad 1 - \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0, \gamma^0\gamma_\nu^\dagger\gamma^0] \quad = \quad 1 - \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad = \quad S^{-1}(\Lambda). \qquad (106)$$

- Adjungierter Spinor: $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$. Dieser transformiert unter Lorentz-Transformation gemäß

$$\begin{aligned}
\bar\psi \quad \to \quad \bar\psi' \quad = \quad \psi'^\dagger\gamma^0 \quad = \quad (S(\Lambda)\psi)^\dagger\gamma^0 \quad = \quad \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \quad = \quad \underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{=\bar\psi}\underbrace{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0}_{=S^{-1}(\Lambda)} \quad = \\
= \quad \bar\psi S^{-1}(\Lambda). \qquad (107)
\end{aligned}$$

- Damit ist $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}$ offensichtlich ein Lorentz-Skalar, d.h.

$$\bar{\psi}^{(1)}(x)\psi^{(2)}(x) \quad \to \quad \bar{\psi}^{(1)\prime}(x')\psi^{(2)\prime}(x') \quad = \quad \bar{\psi}^{(1)}(x)\psi^{(2)}(x) \tag{108}$$

  (im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird das Raumzeitargument der Spinoren weggelassen).

- Definition von γ^5:

$$\gamma^5 \quad = \quad i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{109}$$

  Es folgen die Beziehungen $(\gamma^5)^2 = 1$, $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, $\gamma^5 = (\gamma^5)^\dagger$.

- Damit ist $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)}$ ebenfalls Lorentz-invariant, denn

$$\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)} \quad \to \quad \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^5\psi^{(2)\prime} \quad = \quad \bar{\psi}^{(1)}S^{-1}(\Lambda)\underbrace{\gamma^5 S(\Lambda)}_{=S(\Lambda)\gamma^5}\psi^{(2)} \quad = \quad \bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)}. \tag{110}$$

- Beachte das unterschiedliche Transformationsverhalten von $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}$ und $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)}$ unter Parität:
  - $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\psi^{(2)\prime} = \bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\gamma^0\psi^{(2)} = +\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}$ ("Skalar").
  - $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^5\psi^{(2)\prime} = \bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi^{(2)} = -\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)}$ ("Pseudoskalar").

- (91) ist äquivalent zu

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) \quad = \quad \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \tag{111}$$

  Damit folgt

$$\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\mu\psi^{(2)} \quad \to \quad \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^\mu\psi^{(2)\prime} \quad = \quad \bar{\psi}^{(1)}\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)}_{=\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}\psi^{(2)} \quad = \quad \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\nu\psi^{(2)}, \tag{112}$$

  d.h. $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\mu\psi^{(2)}$ transformiert unter Lorentz-Transformation wie ein Vierervektor. Unter Parität
  $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^0\psi^{(2)\prime} = +\bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\psi^{(2)}$
  $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^j\psi^{(2)\prime} = -\bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\psi^{(2)}$ ("Vektor").

- Mit analogen Überlegungen erhält man
  - $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\mu\gamma^5\psi^{(2)} \to \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^\mu\gamma^5\psi^{(2)\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\nu\gamma^5\psi^{(2)}$
    $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\gamma^5\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^0\gamma^5\psi^{(2)\prime} = -\bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\gamma^5\psi^{(2)}$
    $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\gamma^5\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\gamma^j\gamma^5\psi^{(2)\prime} = +\bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\gamma^5\psi^{(2)}$ ("Pseudovektor").
  - $\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{\mu\nu}\psi^{(2)} \to \bar{\psi}^{(1)\prime}\sigma^{\mu\nu}\psi^{(2)\prime} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta}\psi^{(2)}$
    $\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{0j}\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\sigma^{0j}\psi^{(2)\prime} = -\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{0j}\psi^{(2)}$
    $\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{jk}\psi^{(2)} \to_P \bar{\psi}^{(1)\prime}\sigma^{jk}\psi^{(2)\prime} = +\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{jk}\psi^{(2)}$ ("antisymmetrischer Tensor";
    $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ [siehe (92)]).

- Die sechzehn Matrizen 1, γ^5, γ^μ, $\gamma^\mu\gamma^5$ und $\sigma^{\mu\nu}$ sind linear unabhängig und bilden eine häufig gewählte Basis der 4×4-Matrizen im Spin-Raum. Jede beliebige Bilinearkombination von $\bar\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ lässt sich damit als Linearkombination der oben diskutierten sechzehn bilinearen Kovarianten schreiben. Damit lässt sich einfach das Transformationverhalten unter Lorentz-Transformation und Parität ablesen und z.B. der Gesamtspin angeben (wie in der Einleitung dieses Abschnitts angedeutet).

****** 14. November 2012 (9. Vorlesung) ******

- An Stelle eines adjungierten (d.h. komplex konjugierten) Spinors $\bar\psi$ (später in der QFT ein "Antiteilchen") kann auch $i\psi^T\gamma^2\gamma^0$ (später in der QFT ein "Teilchen") verwendet werden (der ladungskonjugierte adjungierte Spinor, d.h. $\bar\psi \to_C i\psi^T\gamma^2\gamma^0$; siehe (101)), da dieser das gleiche Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformation besitzt:

$$i\psi^T\gamma^2\gamma^0 \quad\to\quad i\psi'^T\gamma^2\gamma^0 \quad=\quad i\psi^T\gamma^2\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \tag{113}$$

(Rechnung analog zu (104) bis (107) liefert erst $-\gamma^0\gamma^2 S^T(\Lambda)\gamma^2\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$ und dann (113)). Beachte jedoch das unterschiedliche Transformationsverhalten von $\bar\psi$ und $i\psi^T\gamma^2\gamma^0$ unter Parität:

  - $\bar\psi \to_P \bar\psi' = \bar\psi\gamma^0$.
  - $i\psi^T\gamma^2\gamma^0 \to_P i\psi'^T\gamma^2\gamma^0 = -(i\psi^T\gamma^2\gamma^0)\gamma^0$.

- Beispiele:
  - Betrachte im Folgenden Quarks, Notation u, d an Stelle von $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$.
  - $\bar d\gamma^5 u$ ist ein Pseudoskalar, hat also $S=0$ und $P=-$; kann die Wellenfunktion des Pions π^+ beschreiben [7].
  - $\underbrace{(1+\gamma^0)u}_{S=1/2,\ P=+}\ \underbrace{(u^T\gamma^2\gamma^0\gamma^5 d)}_{S=0,\ P=+}$ hat also $S=1/2$ und $P=+$; kann die Wellenfunktion des Protons beschreiben [**?**].

3.4 Die Weyl-Gleichung

- Betrachte die DG im Spezialfall $m=0$:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) \quad=\quad 0 \tag{114}$$

ist mit $\psi(x) = (\varphi(x), \chi(x))$ äquivalent zu

$$+i\partial_0\varphi(x) + i\sigma_j\partial_j\chi(x) \quad=\quad 0 \tag{115}$$
$$-i\partial_0\chi(x) - i\sigma_j\partial_j\varphi(x) \quad=\quad 0. \tag{116}$$

Linearkombination $\phi_R(x) = \varphi(x)+\chi(x)$ und $\phi_L(x) = \varphi(x)-\chi(x)$ entkoppelt die masselose DG in zwei unabhängige Gleichungen,

$$\Big(i\partial_0 + i\sigma_j\partial_j\Big)\phi_R(x) \quad=\quad 0 \tag{117}$$
$$\Big(i\partial_0 - i\sigma_j\partial_j\Big)\phi_L(x) \quad=\quad 0, \tag{118}$$

die jeweils als Weyl-Gleichung (WG) bezeichnet werden. Die zugehörigen zweikomponentigen Spinoren ϕ_R und ϕ_L heißen Weyl-Spinoren.

- Während massive Spin-1/2-Fermionen durch vierkomponentige Dirac-Spinoren und die DG beschrieben werden, ist für masselose Spin-1/2-Fermionen entweder ein rechts- oder ein linkshändiger zweikomponentiger Weyl-Spinor ϕ_R bzw. ϕ_L ausreichend.

- Lösung der rechtshändigen WG:

  - Ansatz $\phi_R(x) = (\phi_1(\mathbf{k}), \phi_2(\mathbf{k}))e^{\mp iE(\mathbf{k})t + i\mathbf{kx}}$ mit $E(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2} = |\mathbf{k}|$ liefert

    $$\Big(\pm |\mathbf{k}| - \vec{\sigma}\mathbf{k} \Big) \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad = \quad 0. \tag{119}$$

  - O.B.d.A. $\mathbf{k} = (0, 0, k^3)$ mit $k^3 > 0$ (also Bewegung in positiver z-Richtung). Damit

    $$\Big(\pm k^3 - \sigma_3 k^3 \Big) \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad = \quad 0; \tag{120}$$

    damit $(\phi_1(\mathbf{k}), \phi_2(\mathbf{k})) = (1, 0)$ für "positive Energie" $(e^{-iE(\mathbf{k})t})$ und $(\phi_1(\mathbf{k}), \phi_2(\mathbf{k})) = (0, 1)$ für "negative Energie" $(e^{+iE(\mathbf{k})t})$.

  - Umschreiben von (119):

    $$\frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad = \quad \pm \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \tag{121}$$

    $h = \vec{\sigma}\mathbf{k}/2|\mathbf{k}|$, die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung, wird als Helizität bezeichnet (tritt bei masselosen Teilchen an Stelle des Spins [mechanische Analogie: ein rotierendes Objekt, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, wird unendlich stark längenkontrahiert, seine Rotationsachse kann daher nur parallel oder antiparallel zur Bewegungsrichtung sein]). Spin-1/2-Teilchen (positive Energie), die durch die rechtshändige Weyl-Gleichung beschrieben werden, haben positive Helizität $h = +1/2$, Spin-1/2-Antiteilchen (negative Energie), die durch die rechtshändige Weyl-Gleichung beschrieben werden, haben negative Helizität $h = -1/2$.

- Lösung der linkshändigen WG analog.

- Parität: $\partial_j \to -\partial_j$, damit geht die rechtshändige WG (117) in die linkshändige WG (118) über und umgekehrt. Eine Paritätsverletzung tritt damit auf, wenn rechts- und linkshändige Weyl-Spinoren in unterschiedlicher Art und Weise in einer Theorie auftreten (z.B. Neutrinos im Standardmodell).

3.5 Die Maxwell-Gleichungen

- Maxwell-Gleichungen (MGs):

  - Inhomogene Gleichungen:

    $$\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad = \quad \rho(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad = \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \tag{122}$$

    mit der elektrischen Ladungsdichte ρ und der elektrischen Stromdichte $\mathbf{j}$.

– Homogene Gleichungen:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; 0. \tag{123}$$

Definiere dabei die elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = 1$. Damit magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2 = 1$. folglich $[\mathbf{E}] = [\mathbf{B}] = \mathrm{MeV}^2$ bzw. $[\mathbf{E}] = [\mathbf{B}] = 1/\mathrm{fm}^2$ (natürliche Einheiten; siehe Abschnitt 1.2).

- Kovariante Form der MGs:

  – Verwende Vektorpotential $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ an Stelle von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$:

  $$\mathbf{E}(x) \;=\; -\partial_t \mathbf{A}(x) - \nabla\phi(x) \quad , \quad \mathbf{B}(x) \;=\; \nabla \times \mathbf{A}(x). \tag{124}$$

  – Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Damit $E_j = F^{j0}$ und $B_j = -\epsilon_{jkl} F^{kl}/2$ bzw.

  $$F^{\mu\nu}(x) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{125}$$

  – Mit $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ ist (122) äquivalent zu

  $$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) \;=\; j^\nu(x) \tag{126}$$

  und (123) äquivalent zu

  $$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}(x) \;=\; 0 \tag{127}$$

  ($\epsilon^{0123} = +1$).

  – Die homogenen MGs (127) werden bei Verwendung von Vektorpotentialen automatisch erfüllt:

  $$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}(x) \;=\; \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \Big(\partial_\rho A_\sigma(x) - \partial_\sigma A_\rho(x) \Big) \;=\; 0. \tag{128}$$

- Eichfreiheit:

  – Die Beziehung zwischen A^μ und $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ (124) ist nicht eindeutig. Eine gegebene em Feldkonfiguration $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ wird durch unendlich viele verschiedene A^μ beschrieben.

  – Messbar, d.h. von direkter physikalischer Bedeutung sind $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ (z.B. über die auf eine Testladung q ausgeübte Kraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$). A_μ enthält daher unphysikalische Freiheitsgrade (FHGs), sogenannte Eichfreiheitsgrade.

  – Eichtransformation:

  $$A_\mu(x) \;\to\; A'_\mu(x) \;=\; A_\mu(x) - \partial_\mu f(x). \tag{129}$$

  Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ (und damit $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) verändert sich dabei nicht:

  $$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(x) \;\to\; F'^{\mu\nu}(x) \;&=\; \partial^\mu A'^\nu(x) - \partial^\nu A'^\mu(x) \;= \\ &=\; \partial^\mu \Big(A^\nu(x) - \partial^\nu f(x) \Big) - \partial^\nu \Big(A^\mu(x) - \partial^\mu f(x) \Big) \;=\; F^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \tag{130}$$

  – Eichfixierung: Zusätzliche Bedingungen an A^μ, die die Eichfreiheitsgrade reduzieren, nicht aber die physikalischen FHGs (d.h. keine "physikalische em Feldkonfiguration" darf durch die Eichfixierung ausgeschlossen werden).

– Lorenz-Eichung: Fordere $\partial_\mu A^\mu = 0$. Damit werden die inhomogenen MGs (126) zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) \;=\; \partial_\mu\Big(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)\Big) \;=\; \Box A^\nu(x) \;=\; j^\nu(x) \tag{131}$$

(vier unabhängige masselose KGs).

– Coulomb-Eichung: Fordere $\nabla\mathbf{A} = 0$. Damit

$$\rho(x) \;=\; \nabla\mathbf{E}(x) \;=\; \nabla\Big(-\partial_t\mathbf{A}(x) - \nabla\phi(x)\Big) \;=\; -\triangle\phi(x) \tag{132}$$

(Poisson-Gleichung). Im Vakuum ($j^\mu = 0$) und bei Wahl geeigneter RBs ($A^\mu = 0$ im Unendlichen) folgt $\phi = A^0 = 0$.

• Lösung der MGs im Vakuum (in Coulomb-Eichung):

– $\phi = A^0 = 0$.

– Verbleibende Gleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu j}(x) \;=\; \partial_\mu\Big(\partial^\mu A^j(x) - \partial^j A^\mu(x)\Big) \;=\; \Box A^j(x) \;=\; 0. \tag{133}$$

(drei unabhängige masselose KGs) und $\nabla\mathbf{A} = 0$.

– Die KGs werden durch

$$A^j(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1,2,3} \epsilon^j(\lambda)\Big(a_\lambda(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^*_\lambda(\mathbf{k})e^{+ikx)}\Big) \tag{134}$$

gelöst (siehe Abschnitt 3.2), wobei $\epsilon^j(\lambda)$, $\lambda = 1,2,3$ orthonormale Vektoren sind.

– Die Eichfixierung liefert $k_j\epsilon^j(\lambda) = 0$ ($\epsilon(\lambda)$ steht also senkrecht zum Impuls, muss also $\mathbf{k}$-abhängig sein, also $\epsilon^j(\lambda) \to \epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})$, $\lambda = 1,2$). Z.B. für $\mathbf{k} = (0,0,k^3)$ $\epsilon^j(1,\mathbf{k}) = (1,0,0)$ und $\epsilon^j(2,\mathbf{k}) = (0,1,0)$.

– Endergebnis:

$$A^0(x) \;=\; 0 \tag{135}$$

$$A^j(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1,2} \epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})\Big(a_\lambda(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^*_\lambda(\mathbf{k})e^{+ikx)}\Big). \tag{136}$$

4 Klassische Feldtheorie

4.1 Mechanische Analogie zur Feldtheorie: Federkette

- Federkette, N Massenpunkte (Masse jeweils m, Koordinaten q_j) verbunden durch Federn (Federkonstante k), zusätzlich jeweils mit einer Feder (Federkonstante a) mit $q_j = 0$ verbunden:

$$L(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{m}{2}(\dot{q}_j(t))^2 - \frac{k}{2}\Big(q_j(t) - q_{j-1}(t)\Big)^2 - \frac{a}{2}(q_j(t))^2 \right), \tag{137}$$

  RBs $q_0 = 0$, $q_N = 0$.

- Übergang ins Kontinuum, d.h. unendlich viele Massenpunkte, $N \to \infty$, diskreter Index j wird zu "kontinuierlichem Index" $x \in [0, d]$, damit $\Delta x = d/N \to 0$:

$$L(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{N} \Delta x \left(\frac{m}{2\Delta x}(\dot{q}_j(t))^2 - \frac{k\Delta x}{2}\left(\frac{q_j(t) - q_{j-1}(t)}{\Delta x}\right)^2 - \frac{a}{2\Delta x}(q_j(t))^2 \right) \quad \to$$

$$\to \quad L[q, \dot{q}, q'] = \int_0^d dx \left(\frac{m}{2\Delta x}(\dot{q}(x,t))^2 - \frac{k\Delta x}{2}(q'(x,t))^2 - \frac{a}{2\Delta x}(q(x,t))^2 \right) \tag{138}$$

  (die Lagrange-Funktion $L(q_j, \dot{q}_j)$ [eine Funktion von vielen Variablen q_j] wird zu einem Funktional $L[q, \dot{q}, q']$ [bildet Funktionen von x auf eine Zahl ab, d.h. $L[q, \dot{q}, q']$ ist x-unabhängig]).

- Wähle $k = m/(\Delta x)^2$, außerdem Umbenennung $\sqrt{m/\Delta x}q(x,t) \to \phi(x,t)$, $a/m \to m^2$:

$$L[\phi, \dot{\phi}, \phi'] = \int_0^d dx \left(\frac{1}{2}(\dot{\phi}(x,t))^2 - \frac{1}{2}(\phi'(x,t))^2 - \frac{m^2}{2}(\phi(x,t))^2 \right) \tag{139}$$

  bzw.

$$L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int_0^d dx \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi(x,t))(\partial_\mu \phi(x,t)) - \frac{m^2}{2}(\phi(x,t))^2 \right) \tag{140}$$

  ("Viererindex" $\mu = 0, 1$; kann jedoch im Rahmen der mechanischen Analogie auch auf $\mu = 0, 1, 2$ erweitert werden [Federnetz] oder auf $\mu = 0, 1, 2, 3$ [Massenpunkte und Federn füllen in kubischer Anordnung den 3-dimensionalen (3D) Raum aus]).

- Häufig verwendet man auch die sogenannte Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi(x))(\partial_\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2}(\phi(x))^2, \tag{141}$$

  wobei ab jetzt $x = (t, \mathbf{r})$ wieder den Raumzeitvektor bezeichnet.

- Die zugehörige Wirkung ist

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] \quad = \quad \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial^\mu \phi(x))(\partial_\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2} (\phi(x))^2 \right), \tag{142}$$

wobei die Integrationsgrenzen von $\int d^4x$ i.d.R. weggelassen werden und sich aus dem jeweiligen Kontext ergeben.

4.2 BGls

- BGls für relativistische Feldtheorien sollen forminvariant unter Lorentz-Transformation sein, d.h. in allen Inertialsystemen gleich aussehen
  → Wirkung muss Lorentz-invariant sein, d.h. z.B. $S[\phi, \partial_\mu \phi] = S[\phi', \partial_\mu \phi']$.
  - Raumzeitintegration:

$$\int d^4x' \quad = \quad \int d^4x \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| \quad = \quad \int d^4x \left| \det \left(\Lambda^\mu{}_\nu \right) \right| \quad = \quad \int d^4x, \tag{143}$$

    wobei $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ und $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \pm 1$ (folgt aus (36)) verwendet wurde.
  - Damit muss die Lagrange-Dichte ein Lorentz-Skalar sein, d.h. z.B. $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \to \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$.
  - Bedingungen erfüllt für z.B. (141) und (142), wenn $\phi \to \phi' = \phi$ (dieses Verhalten unter Lorentz-Transformation wird für ϕ vorgegeben bzw. gefordert).

- BGls ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip (siehe auch Abschnitt 2.1.1).
  - Die physikalische Zeitentwicklung einer Feldkonfiguration $\phi(x)$ mit Randbedingungen $\phi(x \in \text{Rand}) = \phi_0(x \in \text{Rand})$ (häufig $\phi(|\mathbf{r}| \to \infty, t) = 0$, $\phi(\mathbf{r}, t_i) = \phi_{0,i}(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{r}, t_f) = \phi_{0,f}(\mathbf{r})$) minimiert S, also $\delta S = 0$ bei Variation der Feldkonfiguration um $\delta\phi(x)$.
  - Variationsrechnung führt auf Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad \delta S \quad &= \quad S[\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta \partial_\mu \phi] - S[\phi, \partial_\mu \phi] \quad = \\
&= \quad S[\phi, \partial_\mu \phi] + \int d^4x \, \frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta \phi(x)} \delta\phi(x) + \int d^4x \, \frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta \partial_\mu \phi(x)} \delta \partial_\mu \phi(x) \\
&\quad -S[\phi, \partial_\mu \phi] \quad = \\
&= \quad \int d^4x \, \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) + \int d^4x \, \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \partial_\mu \delta\phi(x) \quad = \\
&= \quad \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \right) \delta\phi(x) \\
&\quad + \underbrace{\int d^4x \, \partial_\mu}_{= \oint dn_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \underbrace{\delta\phi(x)}_{=0 \text{ für } x \in \text{Rand}} \right)
\end{aligned} \tag{144}$$

mit Nebenrechnungen

$$\frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta \phi(x)} \quad = \quad \ldots \quad = \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} \tag{145}$$

$$\frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta \partial_\mu \phi(x)} \quad = \quad \ldots \quad = \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \tag{146}$$

$$\delta \partial_\mu \phi(x) \quad = \quad \ldots \quad = \quad \partial_\mu \delta \phi(x); \tag{147}$$

da $\delta\phi(x)$ beliebig, folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \quad = \quad 0. \tag{148}$$

– Rechnung geradlinig auf beliebig viele Felder erweiterbar: mit $\phi \to \phi^a$ lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^a} \quad = \quad 0. \tag{149}$$

4.2.1 Lagrange-Dichte und BGl eines reellen Skalarfelds, Hamilton-Formalismus für Felder

- Lagrange-Dichte (141).
- Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad = \quad -m^2 \phi \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \quad = \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi; \tag{150}$$

damit

$$\Big(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \Big) \phi \quad = \quad 0. \tag{151}$$

Die KGG ist also die BGl eines reellen skalaren Felds.

- Der Feldauslenkung ϕ an jedem Raumpunkt $\mathbf{x}$ wird ein kanonisch konjugierter Impuls zugeordnet, d.h. unendlich viele kanonisch konjugierte Impulse; Definition wie in der Mechanik (siehe Abschnitt 2.1.2):

$$\pi(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{r})} \quad = \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{r})} \quad = \quad \dot{\phi}(\mathbf{r}). \tag{152}$$

Die kanonisch konjugierten Impulse haben nichts mit dem vom Feld ϕ "getragenen" Impuls zu tun (siehe Abschnitt 4.3.3).

****** 20. November 2024 (11. Vorlesung) ******

- Legendre-Transformation der Lagrange-Dichte liefert die Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H}(\pi,\phi) \;=\; \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) \;=\; \frac{1}{2}(\pi(x))^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}(\phi(x))^2. \tag{153}$$

  Die Hamilton-Funktion lautet

$$H[\pi,\phi] \;=\; \int d^3r\, \mathcal{H}(\pi,\phi). \tag{154}$$

- Häufig bewegt sich das Feld ϕ in einem Potential $V(\phi)$, z.B. $V(\phi) = \lambda\phi^4$. Damit

$$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) \;\to\; \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) - V(\phi), \tag{155}$$

  was in der BGl

$$\Big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\Big)\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \;=\; 0 \tag{156}$$

  resultiert.

4.2.2 Lagrange-Dichte und BGl eines komplexen Skalarfelds

- Komplexes Skalarfeld $\phi = (A + iB)/\sqrt{2}$, $\phi \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
- Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) \;&=\; (\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi \;= \\ &=\; \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu A)(\partial_\mu A) - \frac{m^2}{2}A^2\right) + \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu B)(\partial_\mu B) - \frac{m^2}{2}B^2\right),\end{aligned} \tag{157}$$

  entspricht also der Lagrange-Dichte zweier unabhängiger, d.h. nicht-WW reeller Skalarfelder. Diese Lagrange-Dichte ist reell (damit reelle Wirkung).

- BGls für A und B:

$$\Big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\Big)A \;=\; 0 \quad , \quad \Big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\Big)B \;=\; 0. \tag{158}$$

  Diese können zu einer "komplexen BGl" zusammengefasst werden:

$$\Big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\Big)\phi \;=\; 0. \tag{159}$$

4.2.3 Lagrange-Dichte und BGl eines Spin-1/2-Felds (Dirac-Feld)

- Spin-1/2-Feld $\psi \in \mathbb{C}$, hat vier Komponenten, ist ein Dirac-Spinor.
- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad = \quad \bar{\psi}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\Big)\psi. \tag{160}$$

  Diese Lagrange-Dichte ist reell (damit reelle Wirkung), außerdem ein Lorentz-Skalar, da $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ wie ein Vierervektor und $\bar{\psi}\psi$ wie ein Skalar unter Lorentz-Tranformation transformieren (siehe Abschnitt 3.3.5).

- BGl:
  - $\psi = A + iB$, $\psi \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
  - Euler-Lagrange-Gleichung für A:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \quad = \quad -m\bar{\psi} + i\gamma^0\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\gamma^0\psi \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A} \quad = \quad i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu; \tag{161}$$

    damit

$$i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} - i\gamma^0\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\gamma^0\psi \quad = \quad 0. \tag{162}$$

  - Euler-Lagrange-Gleichung für B analog:

$$i\Big(i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}\Big) - i\Big(- i\gamma^0\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\gamma^0\psi\Big) \quad = \quad 0. \tag{163}$$

  - Geeignete Linearkombinationen von (162) und (163) ergeben

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi \quad = \quad 0 \quad , \quad -i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu - m\bar{\psi}; \tag{164}$$

    diese Gleichungen sind äquivalent (lassen sich mittels Komplexkonjugation ineinander überführen). Die DG ist also die BGl eines Spin-1/2-Felds.

4.2.4 Lagrange-Dichte und BGls des Maxwell-Felds

- Maxwell-Feld $A^\mu \in \mathbb{R}$, hat vier Komponenten, ist ein Vierervektor.
- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}(A^\mu, \partial_\mu A^\nu) \quad = \quad -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad , \quad F^{\mu\nu} \quad = \quad \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu; \tag{165}$$

  diese Lagrange-Dichte ist reell (damit reelle Wirkung), außerdem ein Lorentz-Skalar.

- Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \quad = \quad 0 \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} \quad = \quad -\partial_\mu F^{\mu\nu}; \tag{166}$$

  damit

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \quad = \quad 0 \tag{167}$$

  (MGs).

4.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

- Kontinuierlichen Symmetrien der Wirkung bzw. der Lagrange-Funktion bedingen Kontinuitätsgleichungen, die wiederum Erhaltungsgrößen zur Folge haben.
- Noether-Theorem: Ermöglicht bei gegebener Symmetrietransformation die zugehörige Kontinuitätsgleichung bzw. Erhaltungsgröße auszurechnen.

4.3.1 Herleitung des Noether-Theorems

- Ausgangspunkt:
  - Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$.
  - Transformation der Felder: $\phi^a(x) \to \phi^a(s,x)$ mit $\phi^a(0,x) = \phi^a(x)$.
- Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x)) \quad = \\
&\quad = \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x))}{\partial \phi^b(s,x)} \frac{\partial \phi^b(s,x)}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(s,x)} \frac{\partial \partial_\nu \phi^b(s,x)}{\partial s} \quad = \\
&\quad = \quad \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x))}{\partial \phi^b(s,x)} - \left(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(s,x)} \right) \right)}_{\text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}} \frac{\partial \phi^b(s,x)}{\partial s} \\
&\qquad + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(s,x)} \frac{\partial \phi^b(s,x)}{\partial s} \right). \qquad (168)
\end{aligned}$$

  Erfüllen die Feldkonfigurationen $\phi^a(x)$ die BGls, folgt

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x))\Big|_{s=0} \quad = \quad \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(x)} \frac{\partial \phi^b(s,x)}{\partial s}\Big|_{s=0} \right) \qquad (169)$$

  (Noether-Theorem).

- Lässt die Transformation der Felder die Lagrange-Dichte invariant, d.h.

$$\mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x)) \quad = \quad \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) \qquad (170)$$

  bzw.

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(\phi^a(s,x), \partial_\mu \phi^a(s,x)) \quad = \quad 0, \qquad (171)$$

  folgt eine Kontinuitätsgleichung,

$$\partial_\nu j^\nu(x) \quad = \quad 0 \quad , \quad j^\nu(x) \quad = \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(x)} \frac{\partial \phi^b(s,x)}{\partial s}\Big|_{s=0}. \qquad (172)$$

- Ist z.B. $\mathbf{j}(|\mathbf{r}| \to \infty) = 0$ lässt sich mit dem Satz von Gauß eine Erhaltungsgröße angeben:

$$0 \;=\; \int d^4x\, \partial_\mu j^\mu(x) \;=\; \oint dn_\mu\, j^\mu(x) \;=\; \int d^3r\, j^0(t_1,\mathbf{r}) - \int d^3r\, j^0(t_0,\mathbf{r}) \tag{173}$$

liefert

$$Q \;=\; \int d^3r\, j^0(t,\mathbf{r}) \;=\; \text{konstant.} \tag{174}$$

4.3.2 Energie-Impuls-Tensor

- Transformation der Felder: $\phi^a(x) \to \phi^a(s,x) = \phi^a(s+x)$ (hier ist s kein einzelner Parameter, sondern ein Vierervektor s^μ mit vier unabhängigen Einträgen). Diese Transformation lässt die Lagrange-Dichte nicht invariant. Dennoch lassen sich Kontinuitätsgleichungen herleiten.

- Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s^\nu}\mathcal{L}(\phi^a(s,x),\partial_\mu\phi^a(s,x))\Big|_{s=0} \;&=\; \frac{\partial}{\partial s^\nu}\mathcal{L}(\phi^a(s+x),\partial_\mu\phi^a(s+x))\Big|_{s=0} \;= \\ &=\; \partial_\nu\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x)).\end{aligned} \tag{175}$$

- Kombination mit (169) liefert

$$\partial_\nu\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x))}{\partial\partial_\nu\phi^b(x)}\underbrace{\frac{\partial\phi^b(s,x)}{\partial s^\rho}\Big|_{s=0}}_{=\partial_\rho\phi^b(x)}\Bigg) \;=\; \partial_\rho\mathcal{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x)) \tag{176}$$

bzw. in kompakter Schreibweise

$$\partial_\nu T^{\nu\rho} \;=\; 0 \quad,\quad T^{\nu\rho} \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi^b}\partial^\rho\phi^b - \eta^{\nu\rho}\mathcal{L}; \tag{177}$$

$T^{\mu\nu}$ wird als Energie-Impuls-Tensor bezeichnet (Begründung im nächsten Abschnitt).

****** 22. November 2024 (12. Vorlesung) ******

4.3.3 Anwendungsbeispiele des Noether-Theorems

Komplexes Skalarfeld, Multiplikation mit einer Phase:

- Komplexes Skalarfeld $\phi = (A + iB)/\sqrt{2}$, $\phi \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

- Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;&=\; (\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi \;= \\ &=\; \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu A)(\partial_\mu A) - \frac{m^2}{2}A^2\right) + \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu B)(\partial_\mu B) - \frac{m^2}{2}B^2\right).\end{aligned} \tag{178}$$

- Transformation der Felder: $\phi(x) \to \phi(s,x) = e^{is}\phi(x)$ lässt die Lagrange-Dichte invariant. Damit $A(s,x) = A(x) - sB(x) + \mathcal{O}(s^2)$, $B(s,x) = B(x) + sB(x) + \mathcal{O}(s^2)$.

- Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\nu A(x)} = \frac{1}{2}\partial^\nu A(x) \quad , \quad \left.\frac{\partial A(s,x)}{\partial s}\right|_{s=0} = -B(x) \tag{179}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\nu B(x)} = \frac{1}{2}\partial^\nu B(x) \quad , \quad \left.\frac{\partial B(s,x)}{\partial s}\right|_{s=0} = +A(x) \tag{180}$$

  liefert das Noether-Theorem (172) den Viererstrom

$$\begin{aligned} j^\nu(x) &= \frac{1}{2}\Big(- (\partial^\nu A(x))B(x) + (\partial^\nu B(x))A(x)\Big) = \\ &= \frac{i}{2}\Big((\partial^\nu \phi^*(x))\phi(x) - \phi^*(x)(\partial^\nu \phi(x))\Big); \end{aligned} \tag{181}$$

  bis auf einen irrelevanten Faktor entspricht dieser Viererstrom gerade der im Rahmen der KGG diskutierten Kontinuitätsgleichung (siehe Abschnitt 3.2). Nach der Quantisierung des komplexen Skalarfelds wird klar werden, dass es sich bei j^0 um die elektrische Ladungsdichte und bei $\mathbf{j}$ um die elektrische Stromdichte handelt.

- Physikalische Konsequenz: Die elektrische Ladung kann sich zwar umverteilen, ist in Summe aber erhalten.

Mechanik, räumliche Translation:

- "Lagrange-Dichte":

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2. \tag{182}$$

- Transformation des "Felds": $x(t) \to x(s,t) = x(t) + s$ lässt die Lagrange-Dichte invariant.

- Mit

$$\frac{\partial L(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t)} = m\dot{x}(t) \quad , \quad \left.\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0} = 1 \tag{183}$$

  liefert das Noether-Theorem (172)

$$\partial_0 j^0(t) = 0 \quad , \quad j^0(t) = m\dot{x}(t) \tag{184}$$

  bzw. in einer in der Mechanik üblicheren Notation

$$\frac{d}{dt}p(t) = 0 \quad , \quad p = m\dot{x}(t). \tag{185}$$

  Räumliche Translationen liefern also im Fall freier Teilchen die Impulserhaltung.

Mechanik, zeitliche Translation:

- "Lagrange-Dichte":

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x). \tag{186}$$

- Transformation des "Felds": $x(t) \to x(s,t) = x(s+t)$.

- Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{187}$$

liefert das Noether-Theorem (177)

$$\partial_0 T^{00} = 0 \quad , \quad T^{00} = m\dot{x}\dot{x} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) \tag{188}$$

bzw. in einer in der Mechanik üblicheren Notation

$$\frac{d}{dt}E = 0 \quad , \quad E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x). \tag{189}$$

Zeitliche Translationen liefern also die Energieerhaltung.

Reelles Skalarfeld, Raumzeittranslationen:

- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{190}$$

- Transformation des Felds: $\phi(x) \to \phi(s,x) = \phi(s+x)$. An Hand obiger Überlegungen im Rahmen der Mechanik sollte $s = (s^0, 0)$ die Energieerhaltung und $s = (0, \mathbf{s})$ die Impulserhaltung liefern. Beide Erhaltungssätze werden durch den bereits hergeleiteten Energie-Impuls-Tensor und dessen zugehörige Kontinuitätsgleichung (177) beschrieben.

- Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} = \partial^\nu \phi \tag{191}$$

lautet der Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\nu\rho} = \partial^\nu \phi \partial^\rho \phi - \eta^{\nu\rho}\mathcal{L}; \tag{192}$$

dabei entspricht

$$T^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{193}$$

der Energiedichte (konsistent mit der in Abschnitt 4.2.1 abgeleiteten Hamilton-Dichte (153), d.h. $\mathcal{H} = T^{00}$) und

$$P^0 \quad = \quad \int d^3r\, T^{00} \quad = \quad \text{konstant} \tag{194}$$

der vom Feld getragenen und erhaltenen Energie. Analog entspricht

$$T^{0j} \quad = \quad (\partial^0\phi)(\partial^j\phi) \tag{195}$$

der Impulsdichte und

$$P^j \quad = \quad \int d^3r\, T^{0j} \quad = \quad \text{konstant} \tag{196}$$

dem vom Feld getragenen und erhaltenen Impuls. Dieser "physikalische Impuls" hat, wie in Abschnitt 4.2.1 bereits erwähnt, nichts mit den kanonisch konjugierten Impulsen $\pi(\mathbf{r}) = \dot{\phi}(\mathbf{r})$ der Feldvariablen $\phi(\mathbf{r})$ zu tun (Gleichung (152)).

5 Quantisierung nicht-WW Feldtheorien

- Im Folgenden ausschließlich kanonische Feldquantisierung (Quantisierung über Operatoren, Kommutatorrelationen, etc. analog zu Abschnitt 2.2 "Teilchen in der QM (kanonische Quantisierung)").
- Die ebenfalls gängige Feldquantisierung über Pfadintegrale erst in der Vorlesung "Quantenfeldtheorie II" [8].

5.1 Quantisierung des reellen Skalarfelds

- Grundidee: Die Lagrange-Dichten nicht-WW Feldtheorien sind quadratisch in den Feldvariablen und den zugehörigen kanonisch konjugierten Impulsen, haben also eine ähnliche Struktur wie der HO. Benutze daher die in Abschnitt 2.2.2 wiederholte "Erzeuger- und Vernichter-Technik" zur Konstruktion einer Basis von Energieeigenzuständen (damit bleibt die erforderliche Mathematik einfach, d.h. kein Lösen von DGls [SG], etc. erforderlich).
- **(1) Ausgangspunkt: Klassische Observablen werden zu Operatoren, "Feldoperatoren" und deren kanonisch konjugierte Impulse erfüllen Kommutatorrelationen.**
  - HO:

$$q \;\to\; \hat{q} \quad , \quad p \;\to\; \hat{p} \quad , \quad H(p,q) \;\to\; \hat{H}(\hat{p},\hat{q}) \;=\; \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}^2}{2} \tag{197}$$

$$[\hat{q},\hat{p}] \;=\; i. \tag{198}$$

  - Reelles Skalarfeld:

$$\phi(\mathbf{r}) \;\to\; \hat{\phi}(\mathbf{r}) \quad , \quad \pi(\mathbf{r}) \;\to\; \hat{\pi}(\mathbf{r}) \quad ,$$
$$H[\phi,\pi] \;\to\; \hat{H}[\hat{\phi},\hat{\pi}] \;=\; \int d^3r \left(\frac{1}{2}(\hat{\pi}(\mathbf{r}))^2 + \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi}(\mathbf{r}))^2 + \frac{m^2}{2}(\hat{\phi}(\mathbf{r}))^2 \right) \tag{199}$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}_1),\hat{\phi}(\mathbf{r}_2)] \;=\; [\hat{\pi}(\mathbf{r}_1),\hat{\pi}(\mathbf{r}_2)] \;=\; 0 \quad , \quad [\hat{\phi}(\mathbf{r}_1),\hat{\pi}(\mathbf{r}_2)] \;=\; i\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{200}$$

  ($\hat{\phi}$ und $\hat{\pi}$ sind in Anlehnung an $\phi,\pi \in \mathbb{R}$ hermitesche Operatoren; im Gegensatz zur QM ist in der Feldtheorie $\mathbf{r}$ kein Operator sondern ein "kontinuierlicher Index" der Feldoperatoren); hier sind $\hat{\phi}$ und $\hat{\pi}$ zeitunabhängige Schrödinger-Operatoren; bei Verwendung der in der QFT üblicheren zeitabhängigen Heisenberg-Operatoren gelten die Kommutatorrelationen (200) für identische Zeitargumente, d.h.

$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}_1,t),\hat{\phi}(\mathbf{r}_2,t)] \;=\; [\hat{\pi}(\mathbf{r}_1,t),\hat{\pi}(\mathbf{r}_2,t)] \;=\; 0 \quad ,$$
$$[\hat{\phi}(\mathbf{r}_1,t),\hat{\pi}(\mathbf{r}_2,t)] \;=\; i\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{201}$$

- Ab jetzt werden Dächer auf Operatoren wieder weggelassen.
- **(2) Definiere in geeigneter Weise Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:**
  - HO:

$$a \;=\; \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, q + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\, p \tag{202}$$

(Vernichtungsoperator). Damit folgt

$$a^\dagger \;=\; \sqrt{\frac{m\omega}{2}}q - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}p \tag{203}$$

(Erzeugungsoperator).

– Reelles Skalarfeld: Die Definition der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren orientiert sich einerseits am HO (Gleichung 202), andererseits an der allgemeinen klassischen Lösung der KGG für $\phi \in \mathbb{R}$ (52) (Letzteres wird am Ende von Schritt **(3)** ersichtlich),

$$a(\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r \left(E(\mathbf{k})\phi(\mathbf{r}) + i\pi(\mathbf{r})\right)e^{-i\mathbf{kr}} \tag{204}$$

(Vernichtungsoperatoren). Damit folgt

$$a^\dagger(\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r \left(E(\mathbf{k})\phi(\mathbf{r}) - i\pi(\mathbf{r})\right)e^{+i\mathbf{kr}} \tag{205}$$

(Erzeugungsoperatoren).

****** 27. November 2024 (13. Vorlesung) ******

- **(3) Auflösen nach "Feldoperatoren" und kanonisch konjugierten Impulsen:**

  – HO: Trivial,

$$q \;=\; +\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right) \quad , \quad p \;=\; -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right). \tag{206}$$

  – Reelles Skalarfeld: Nach geeigneter Linearkombination,

$$a(+\mathbf{k}) + a^\dagger(-\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r\, 2E(\mathbf{k})\phi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}} \tag{207}$$

$$a(+\mathbf{k}) - a^\dagger(-\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r\, 2i\pi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}, \tag{208}$$

kann mit Hilfe von Fourier-Transformation nach ϕ und π aufgelöst werden,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) \;&=\; +\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\left(a(+\mathbf{k}) + a^\dagger(-\mathbf{k})\right)e^{+i\mathbf{kr}} \;= \\ &=\; +\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\left(a(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{kr}} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr}}\right)\end{aligned} \tag{209}$$

$$\begin{aligned}\pi(\mathbf{r}) \;&=\; -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\left(a(+\mathbf{k}) - a^\dagger(-\mathbf{k})\right)e^{+i\mathbf{kr}} \;= \\ &=\; -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\left(a(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{kr}} - a^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr}}\right)\end{aligned} \tag{210}$$

(wie in Schritt **(2)** angedeutet, wurde die Definition (204) so gewählt, dass (209) der klassischen Lösung der KGG für $\phi \in \mathbb{R}$ und $t = 0$ entspricht (Gleichung (52)) und (210) den entsprechenden klassischen kanonisch konjugierten Impulsen).

- **(4) Berechnen verschiedener Kommutatorrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, Ausdrücken des Hamilton-Operators durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:**

  – HO:

  $$[a, a^\dagger] = 1 \tag{211}$$

  $$H = \frac{1}{2}\Big(a^\dagger a + a a^\dagger\Big)\omega = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\omega \tag{212}$$

  $$[H, a^\dagger] = +\omega a^\dagger \quad , \quad [H, a] = -\omega a \tag{213}$$

  (diese Gleichungen erlauben die Berechnung der Energieeigenwerte und die Konstruktion der Energieeigenzustände [siehe Abschnitt 2.2.2]).

  – Reelles Skalarfeld:

  $$\begin{aligned}
  &[a(\mathbf{k}_1), a^\dagger(\mathbf{k}_2)] = \\
  &= \int d^3r_1 \int d^3r_2\, e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)}[E(\mathbf{k}_1)\phi(\mathbf{r}_1) + i\pi(\mathbf{r}_1), E(\mathbf{k}_2)\phi(\mathbf{r}_2) - i\pi(\mathbf{r}_2)] = \\
  &= \int d^3r_1 \int d^3r_2\, e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)} \\
  &\quad \Big(- iE(\mathbf{k}_1) \underbrace{[\phi(\mathbf{r}_1), \pi(\mathbf{r}_2)]}_{=+i\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} + iE(\mathbf{k}_2) \underbrace{[\pi(\mathbf{r}_1), \phi(\mathbf{r}_2)]}_{=-i\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \Big) = \\
  &= \underbrace{\int d^3r_1\, e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}_1}}_{=(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} \Big(E(\mathbf{k}_1) + E(\mathbf{k}_2)\Big) = (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).
  \end{aligned} \tag{214}$$

  Analog

  $$[a(\mathbf{k}_1), a(\mathbf{k}_2)] = [a^\dagger(\mathbf{k}_1), a^\dagger(\mathbf{k}_2)] = 0. \tag{215}$$

  Für den Hamilton-Operator ergibt sich nach längerer Rechnung

  $$\begin{aligned}
  H = P^0 &= \int d^3r\, T^{00} = \int d^3r \left(\frac{1}{2}(\pi(\mathbf{r}))^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 + \frac{m^2}{2}(\phi(\mathbf{r}))^2\right) = \\
  &= \ldots = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \frac{E(\mathbf{k})}{2}\Big(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})\Big) = \\
  &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} E(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \underbrace{\int d^3k\, \delta(0)\frac{E(\mathbf{k})}{2}}_{=E_{\text{Vakuum}}=\infty \text{ (Vakuumenergie)}} ,
  \end{aligned} \tag{216}$$

  für den Impulsoperator des Felds (Gleichungen (195) und (196))

  $$\begin{aligned}
  P^j &= \int d^3r\, T^{0j} = -\int d^3r\, \pi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r}) = \ldots = \\
  &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \frac{\mathbf{k}}{2}\Big(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})\Big) = \\
  &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})
  \end{aligned} \tag{217}$$

(→ Hausaufgabe). Weitere essentielle Kommutatorrelationen sind

$$[H, a^\dagger(\mathbf{k})] \quad = \quad \ldots \quad = \quad +E(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) \tag{218}$$

$$[H, a(\mathbf{k})] \quad = \quad \ldots \quad = \quad -E(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) \tag{219}$$

(→ ebenfalls Hausaufgabe). Das reelle quantisierte Skalarfeld entspricht also einer unendlichen Menge quantisierter HOs (für jeden denkbaren Impuls $\mathbf{k}$ ein HO).

- **(5) Zeitabhängige Heisenberg-Operatoren (werden in der QFT häufiger verwendet, als zeitunabhängige Schrödinger-Operatoren):**
  - HO:
    - Zeitabhängige Heisenberg-Operatoren erfüllen die Heisenbergsche BGl (19), speziell
      $$\frac{d}{dt}a(t) \quad = \quad i[H, a(t)] \quad , \quad a(t=0) = a. \tag{220}$$
    - Ansatz: $a(t) = f(t)a$ mit $f(t=0) = 1$.
    - Damit
      $$\dot{f}(t)a \quad = \quad if(t)[H, a] \quad = \quad -if(t)\omega a \tag{221}$$
      bzw.
      $$\dot{f}(t) \quad = \quad -i\omega f(t); \tag{222}$$
      die Lösung dieser DGl mit den geforderten ABs ist $f(t) = e^{-i\omega t}$, also ergibt sich für den zeitabhängigen Heisenberg-Vernichtungsoperator
      $$a(t) \quad = \quad ae^{-i\omega t}. \tag{223}$$
    - Durch analoge Rechnung bzw. komplexe Konjugation erhält man für den zeitabhängigen Heisenberg-Erzeugungsoperator
      $$a^\dagger(t) \quad = \quad a^\dagger e^{+i\omega t}. \tag{224}$$
  - Reelles Skalarfeld:
    - Zeitabhängige Heisenberg-Operatoren erfüllen die Heisenbergsche BGl (19), speziell
      $$\frac{d}{dt}a(\mathbf{k}, t) \quad = \quad i[H, a(\mathbf{k}, t)] \quad , \quad a(\mathbf{k}, t=0) = a(\mathbf{k}). \tag{225}$$
    - Ansatz: $a(\mathbf{k}, t) = f(\mathbf{k}, t)a(\mathbf{k})$ mit $f(\mathbf{k}, t=0) = 1$.
    - Damit
      $$\dot{f}(\mathbf{k}, t)a(\mathbf{k}) \quad = \quad if(\mathbf{k}, t)[H, a(\mathbf{k})] \quad = \quad -if(\mathbf{k}, t)E(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \tag{226}$$
      bzw.
      $$\dot{f}(\mathbf{k}, t) \quad = \quad -iE(\mathbf{k})f(\mathbf{k}, t). \tag{227}$$
      Die Lösung dieser DGl mit den geforderten ABs ist $f(\mathbf{k}, t) = e^{-iE(\mathbf{k})t}$, also ergibt sich für die zeitabhängigen Heisenberg-Vernichtungsoperatoren
      $$a(\mathbf{k}, t) \quad = \quad a(\mathbf{k})e^{-iE(\mathbf{k})t}. \tag{228}$$
    - Durch analoge Rechnung bzw. komplexe Konjugation erhält man für die zeitabhängigen Heisenberg-Erzeugungsoperatoren
      $$a^\dagger(\mathbf{k}, t) \quad = \quad a^\dagger(\mathbf{k})e^{+iE(\mathbf{k})t}. \tag{229}$$

* Für die zeitabhängigen Heisenberg-Feldoperatoren und die entsprechenden kanonisch konjugierten Impulsoperatoren folgt bei Verwendung von (209) und (210)

$$\phi(\mathbf{r},t) = +\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(a(\mathbf{k},t)e^{+i\mathbf{kr}} + a^\dagger(\mathbf{k},t)e^{-i\mathbf{kr}}\Big) =$$

$$= +\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(a(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kr})} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kr})}\Big) \quad (230)$$

$$\pi(\mathbf{r},t) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\Big(a(\mathbf{k},t)e^{+i\mathbf{kr}} - a^\dagger(\mathbf{k},t)e^{-i\mathbf{kr}}\Big) =$$

$$= -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\Big(a(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kr})} - a^\dagger(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{kr})}\Big) \quad (231)$$

bzw. kompakter

$$\phi(x) = +\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{+ikx}\Big)$$

$$\pi(x) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\Big(a(\mathbf{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\mathbf{k})e^{+ikx}\Big).$$

Diese Operatoren haben die gleiche Form, wie die klassische Lösung der KGG für $\phi \in \mathbb{R}$ (Gleichung (52)). An Stelle der beliebigen klassischen "Koeffizientenfunktion" $a(\mathbf{k})$ treten die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger(\mathbf{k})$ und $a(\mathbf{k})$. Der Feldoperator ist auf Grund der gewählten Normierung $\propto 1/E(\mathbf{k})$ forminvariant unter Lorentz-Transformation ($d^3k/E(\mathbf{k})$ ist Lorentz-invariant [→ Hausaufgabe]).

****** 29. November 2024 (14. Vorlesung) ******

- **(6) Konstruktion des Zustandsraums in Form von Energieeigenzuständen:**
  - HO:
    * Definiere den Operator

$$N = a^\dagger a. \quad (232)$$

Dieser vertauscht mit H, d.h. $[N,H]=0$. folglich können die Eigenzustände von H nach Energieeigenwerten und zusätzlich nach Eigenwerten von N klassifiziert werden.

    * Sei $|\psi\rangle$ Eigenzustand von H und von N, d.h.

$$H|\psi\rangle = E_\psi|\psi\rangle \quad , \quad N|\psi\rangle = n_\psi|\psi\rangle. \quad (233)$$

auf Grund von

$$H = \left(N+\frac{1}{2}\right)\omega \quad (234)$$

sind E_ψ und n_ψ nicht unabhängig, d.h.

$$E_\psi = \left(n_\psi+\frac{1}{2}\right)\omega. \quad (235)$$

    * Es folgt

$$Ha^\dagger|\psi\rangle = \Big(a^\dagger H + [H,a^\dagger]\Big)|\psi\rangle = \Big(E_\psi+\omega\Big)a^\dagger|\psi\rangle \quad (236)$$

$$Ha|\psi\rangle = \Big(aH + [H,a]\Big)|\psi\rangle = \Big(E_\psi-\omega\Big)a|\psi\rangle, \quad (237)$$

d.h. $a^\dagger$ bzw. a erzeugt bzw. vernichtet ein Energiequant der Größe ω. Analog folgt bei Verwendung von $[N, a^\dagger] = +a^\dagger$ und $[N, a] = -a$

$$Na^\dagger|\psi\rangle = \Big(a^\dagger N + [N, a^\dagger]\Big)|\psi\rangle = \Big(n_\psi + 1\Big)a^\dagger|\psi\rangle \quad (238)$$

$$Na|\psi\rangle = \Big(aN + [N, a]\Big)|\psi\rangle = \Big(n_\psi - 1\Big)a|\psi\rangle. \quad (239)$$

* Probleme: (1) Unendlich große negative Energien ...? (2) Außerdem gilt $n_\psi = \langle\psi|N|\psi\rangle = |a|\psi\rangle|^2 \geq 0$.
* Ausweg: Definiere den Grundzustand $|0\rangle$ als den Energieeigenzustand, der durch $n_0 = 0$ charakterisiert wird, für den damit $N|0\rangle = 0$ gilt und damit $0 = \langle 0|N|0\rangle = |a|0\rangle|^2$ und damit $a|0\rangle = 0$ ($|0\rangle$ ist der einzige Energieeigenzustand von dem aus durch Anwenden von a nicht zu tieferen Energieeigenzuständen abgestiegen werden kann).
* Konstruiere alle weiteren Zustände durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren,

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle \quad (240)$$

$$|2\rangle = (a^\dagger)^2|0\rangle \quad (241)$$

$$\ldots$$

$$|j\rangle = (a^\dagger)^j|0\rangle \quad (242)$$

(die Zustände $|j\rangle$ sind im Gegensatz zur Darstellung in Abschnitt 2.2.2 nicht normiert).

* Physikalische Interpretation dieser Zustände:

$$N|j\rangle = n_j|j\rangle = j|j\rangle, \quad (243)$$

d.h. N zählt die Anregungsquanten;

$$H|j\rangle = E_j|j\rangle = \left(j + \frac{1}{2}\right)\omega|j\rangle, \quad (244)$$

d.h. $|j\rangle$ ist ein Energieeigenzustand mit Energie $E_j = (j + 1/2)\omega$.

– Reelles Skalarfeld:

* Definiere die Operatoren

$$N(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(0)}a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}). \quad (245)$$

Diese vertauschen sowohl miteinander als auch mit H, d.h. $[N(\mathbf{k}_1), N(\mathbf{k}_2)] = [N(\mathbf{k}), H] = 0$. Folglich können die Eigenzustände von H nach Energieeigenwerten und zusätzlich nach Eigenwerten von $N(\mathbf{k})$ klassifiziert werden.

* Sei $|\psi\rangle$ Eigenzustand von H und von sämtlichen $N(\mathbf{k})$, d.h.

$$H|\psi\rangle = E_\psi|\psi\rangle \quad , \quad N(\mathbf{k})|\psi\rangle = n_\psi(\mathbf{k})|\psi\rangle. \quad (246)$$

Auf Grund von

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}E(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + E_{\text{Vakuum}} =$$

$$= \int d^3k\,\delta(0)E(\mathbf{k})N(\mathbf{k}) + E_{\text{Vakuum}} \quad (247)$$

sind E_ψ und $n_\psi(\mathbf{k})$ nicht unabhängig, d.h.

$$E_\psi = \int d^3k\,\delta(0)E(\mathbf{k})n_\psi(\mathbf{k}) + E_{\text{Vakuum}} \quad (248)$$

(das Auftreten von $\delta(0)$ erklärt sich plausibel aber in "schlechtem mathematischem Stil" wie folgt: $\delta(0) = 1/d^3k$; damit $\int d^3k\,\delta(0) \to \sum_{\mathbf{k}}$; bei einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl von Anregungsquanten ist $\int d^3k\,\delta(0)$ also gerade eine Summe über alle besetzten Impulse).

* Es folgt

$$Ha^\dagger(\mathbf{k})|\psi\rangle = \Big(a^\dagger(\mathbf{k})H + [H, a^\dagger(\mathbf{k})]\Big)|\psi\rangle = \Big(E_\psi + E(\mathbf{k})\Big)a^\dagger(\mathbf{k})|\psi\rangle \quad (249)$$

$$Ha(\mathbf{k})|\psi\rangle = \Big(a(\mathbf{k})H + [H, a(\mathbf{k})]\Big)|\psi\rangle = \Big(E_\psi - E(\mathbf{k})\Big)a(\mathbf{k})|\psi\rangle, \quad (250)$$

d.h. $a^\dagger(\mathbf{k})$ bzw. $a(\mathbf{k})$ erzeugt bzw. vernichtet ein Energiequant der Größe $E(\mathbf{k})$. Analog folgt bei Verwendung von $[N(\mathbf{k}_1), a^\dagger(\mathbf{k}_2)] = +(\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/\delta(0))a^\dagger(\mathbf{k}_1)$ und $[N(\mathbf{k}_1), a(\mathbf{k}_2)] = -(\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/\delta(0))a(\mathbf{k}_1)$

$$N(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2)|\psi\rangle = \Big(a^\dagger(\mathbf{k}_2)N(\mathbf{k}_1) + [N(\mathbf{k}_1), a^\dagger(\mathbf{k}_2)]\Big)|\psi\rangle =$$

$$= \left(n_\psi(\mathbf{k}_1) + \frac{\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{\delta(0)}\right)a^\dagger(\mathbf{k}_2)|\psi\rangle \quad (251)$$

$$N(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2)|\psi\rangle = \Big(a(\mathbf{k}_2)N(\mathbf{k}_1) + [N(\mathbf{k}_1), a(\mathbf{k}_2)]\Big)|\psi\rangle =$$

$$= \left(n_\psi(\mathbf{k}_1) - \frac{\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{\delta(0)}\right)a(\mathbf{k}_2)|\psi\rangle \quad (252)$$

(ähnliche Argumente wie oben liefern $\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/\delta(0) \to \delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ [Kronecker-δ], d.h. die Quantenzahl $n_\psi(\mathbf{k}_1)$ steigt bzw. sinkt um 1, falls $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$).

* Probleme: (1) Unendlich große negative Energien ...? (2) Außerdem gilt $n_\psi(\mathbf{k}) = \langle\psi|N(\mathbf{k})|\psi\rangle = |a(\mathbf{k})|\psi\rangle|^2/(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(0) \geq 0$.
* Ausweg: Definiere den Grundzustand $|0\rangle$ (Vakuumzustand) als den Energieeigenzustand, der durch $n_0(\mathbf{k}) = 0$ charakterisiert wird, für den damit $N(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ für alle $\mathbf{k}$ gilt und damit $0 = \langle 0|N(\mathbf{k})|0\rangle = |a(\mathbf{k})|0\rangle|^2$ und damit $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ ($|0\rangle$ ist der einzige Energieeigenzustand, von dem aus durch Anwenden von keinem $a(\mathbf{k})$ nicht zu tieferen Energieeigenzuständen abgestiegen werden kann).
* Konstruiere alle weiteren Zustände durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren,

$$|\mathbf{k}_1\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_1)|0\rangle \quad (253)$$

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2)|0\rangle \quad (254)$$

$$\ldots$$

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_j\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2)\ldots a^\dagger(\mathbf{k}_j)|0\rangle. \quad (255)$$

* Physikalische Interpretation dieser Zustände:

$$N(\mathbf{p})|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\rangle = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_j)}{\delta(0)}}_{n(\mathbf{p})} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\rangle, \quad (256)$$

d.h. $N(\mathbf{p})$ zählt die Anregungsquanten mit Impuls $\mathbf{p}$. Definiere

$$\mathcal{N} = \int d^3k\,\delta(0)N(\mathbf{k}). \quad (257)$$

Es folgt

$$\mathcal{N}|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\rangle = n|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\rangle, \quad (258)$$

d.h. $\mathcal{N}$ zählt die Anregungsquanten aller Impulse.

$$H|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n\rangle \;=\; \Big(\sum_{j=1}^{n} E(\mathbf{k}_j) + E_{\text{Vakuum}}\Big)|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n\rangle, \tag{259}$$

d.h. jedes Anregungsquant mit Impuls $\mathbf{k}$ liefert einen Beitrag $E(\mathbf{k})$ zur Energie. Der Vakuumzustand besitzt offensichtlich die unendliche Energie

$$E_{\text{Vakuum}} \;=\; \int d^3k\,\delta(0)\frac{E(\mathbf{k})}{2} \tag{260}$$

(jeder Impuls entspricht einem HO, der eine Grundzustandsenergie von $E(\mathbf{k})/2$ besitzt). Diese unendliche Energie ist unproblematisch, da in der Physik nur Energiedifferenzen von Bedeutung sind. Nach Umdefinition $H \to H - E_{\text{Vakuum}}$ verschwindet diese Unendlichkeit und das "neue Vakuum" $|0\rangle$ hat Energie $E_0 = 0$.

$$\mathbf{P}|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n}\mathbf{k}_j|\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n\rangle, \tag{261}$$

d.h. jedes Anregungsquant mit Impuls $\mathbf{k}$ liefert einen Beitrag $\mathbf{k}$ zum Gesamtimpuls. (259) und (261) legen nahe, dass der Erzeugungsoperator $a^\dagger(\mathbf{k})$ ein Teilchen mit Impuls $\mathbf{k}$ erzeugt, d.h. der QM Ein-Teilchen-Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}}$ entspricht der QFT Zustand $a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$, der QM Zwei-Teilchen-Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2} + (\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2)$ entspricht der QFT Zustand $a^\dagger(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2)|0\rangle$, etc. Da beliebig viele Quanten eines Impulses $\mathbf{k}$ durch entsprechend häufige Anwendung von $a^\dagger(\mathbf{k})$ erzeugt werden können, beschreibt das Feld ϕ offensichtlich Bosonen.

- Besetzungszahldarstellung: An Stelle einer Auflistung aller Einteilchenimpulse $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots$ (der gleiche Impuls kann mehrfach vorkommen), können Zustände auch durch die Quantenzahlen $n(\mathbf{k})$ charakterisiert werden (Besetzungszahldarstellung), z.B.

$$|n(\mathbf{k})=1\rangle \;=\; |\mathbf{k}\rangle \tag{262}$$

$$|n(\mathbf{k})=2\rangle \;=\; |\mathbf{k},\mathbf{k}\rangle \tag{263}$$

$$|n(\mathbf{k}_1)=1, n(\mathbf{k}_2)=1\rangle \;=\; |\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\rangle. \tag{264}$$

- Normierung der Zustände (253) bis (255):
  - Einteilchenzustände:

$$\langle\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\rangle \;=\; \langle 0|a(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2)|0\rangle \;=\; \langle 0|\Big(a^\dagger(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_1) + [a(\mathbf{k}_1),a^\dagger(\mathbf{k}_2)]\Big)|0\rangle \;=$$
$$=\; (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2). \tag{265}$$

  - Mehrteilchenzustände:

$$\langle n(\mathbf{k}_1),n(\mathbf{k}_2),\ldots|n(\mathbf{k}_1),n(\mathbf{k}_2),\ldots\rangle \;=$$
$$=\; \langle n(\mathbf{k}_1)-1,n(\mathbf{k}_2),\ldots|a(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_1)|n(\mathbf{k}_1)-1,n(\mathbf{k}_2),\ldots\rangle \;=$$
$$=\; \langle n(\mathbf{k}_1)-1,n(\mathbf{k}_2),\ldots|(2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_1)\delta(0)(N(\mathbf{k}_1)+1)|n(\mathbf{k}_1)-1,n(\mathbf{k}_2),\ldots\rangle \;=$$
$$=\; n(\mathbf{k}_1)(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(0)\langle n(\mathbf{k}_1)-1,n(\mathbf{k}_2),\ldots|n(\mathbf{k}_1)-1,n(\mathbf{k}_2),\ldots\rangle \;=$$
$$=\; \ldots \;=\; \prod_j n(\mathbf{k}_j)!\Big((2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_j)\delta(0)\Big)^{n(\mathbf{k}_j)}. \tag{266}$$

– Da $E(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$ forminvariant unter Lorentz-Transformation ist ($\rightarrow$ Hausaufgabe), bleibt die Normierung der Zustände unter Lorentz-Transformation erhalten.

– Eine in der Literatur ebenfalls häufig gewählte und durch gewisse Umdefinitionen in der Quantisierung erreichbare Normierung ist $\langle \mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\rangle = \delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$ (bleibt unter Lorentz-Transformation nicht erhalten).

- $\phi(\mathbf{r})|0\rangle$ beschreibt ein bei $\mathbf{r}$ lokalisiertes Teilchen:

  – QM: Ortseigenzustand $|\mathbf{r}\rangle$, Impulseigenzustand $|\mathbf{p}\rangle$,

  $$\langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle \;=\; \#\int d^3r'\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}'}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \;=\; \#e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \tag{267}$$

  – QFT, reelles Skalarfeld:

  $$\langle \mathbf{p}|\phi(\mathbf{r})|0\rangle \;=\; \langle 0|a(\mathbf{p})\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(a(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{k}\mathbf{r}}+a^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\Big)|0\rangle \;=$$
  $$=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\langle 0|a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \;=\; e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \tag{268}$$

  – Vergleich von (267) und (268) führt zur genannten Interpretation.

***** 4. Dezember 2024 (15. Vorlesung) ******

5.2 Quantisierung des komplexen Skalarfelds

- Die Definition von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren orientiert sich wieder an der allgemeinen klassischen Lösung der KGG (52) und den entsprechenden klassischen kanonisch konjugierten Impulsen:

$$\phi(\mathbf{r}) \;=\; \phi(\mathbf{r},t=0) \;=\; +\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(a(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{k}\mathbf{r}}+b^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r})}\Big) \tag{269}$$

$$\pi(\mathbf{r}) \;=\; \dot\phi(\mathbf{r},t=0) \;=\; -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\Big(a(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{k}\mathbf{r}}-b^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r})}\Big). \tag{270}$$

  ϕ und π sind, im Gegensatz zum reellen Skalarfeld, keine hermitischen Operatoren, weshalb auch zwei Sorten von Erzeugungs und Vernichtungoperatoren a, $a^\dagger$ und b, $b^\dagger$ benötigt werden.

- Auflösen nach a und b:

$$a(\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r\,\Big(E(\mathbf{k})\phi(\mathbf{r})+i\pi(\mathbf{r})\Big)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tag{271}$$

$$b(\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r\,\Big(E(\mathbf{k})\phi^\dagger(\mathbf{r})+i\pi^\dagger(\mathbf{r})\Big)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \tag{272}$$

- Aufstellen der Kommutatorrelationen für nicht hermitische Feldoperatoren $\phi(\mathbf{r})$ und deren kanonisch konjugierte Impulse $\pi(\mathbf{r})$: Definiere $\phi = (A+iB)/\sqrt{2}$ mit hermitischen Operatoren A und B (damit folgt $\pi = (\pi_A+i\pi_B)/\sqrt{2}$), verwende das übliche schon in

der QM diskutierte Prinzip, dass ein hermitischer "Feldoperator" und dessen kanonisch konjugierter Impuls nicht vertauschen:

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{r}_1),\pi(\mathbf{r}_2)] &= \frac{1}{2}[A(\mathbf{r}_1)+iB(\mathbf{r}_1),\pi_A(\mathbf{r}_2)+i\pi_B(\mathbf{r}_2)] = \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{[A(\mathbf{r}_1),\pi_A(\mathbf{r}_2)]}_{=i\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}+\frac{i}{2}\underbrace{[A(\mathbf{r}_1),\pi_B(\mathbf{r}_2)]}_{=0}+\frac{i}{2}\underbrace{[B(\mathbf{r}_1),\pi_A(\mathbf{r}_2)]}_{=0}-\frac{1}{2}\underbrace{[B(\mathbf{r}_1),\pi_B(\mathbf{r}_2)]}_{=i\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} = \\
&= 0. \qquad (273)
\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Überlegungen erhält man

$$[\phi(\mathbf{r}_1),\pi^\dagger(\mathbf{r}_2)] = \ldots = i\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad (274)$$
$$[\phi(\mathbf{r}_1),\phi(\mathbf{r}_2)] = [\phi(\mathbf{r}_1),\phi^\dagger(\mathbf{r}_2)] = 0 \qquad (275)$$
$$[\pi(\mathbf{r}_1),\pi(\mathbf{r}_2)] = [\pi(\mathbf{r}_1),\pi^\dagger(\mathbf{r}_2)] = 0. \qquad (276)$$

- Geradlinige Rechnung liefert die Kommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren,

$$[a(\mathbf{k}_1),a^\dagger(\mathbf{k}_2)] = [b(\mathbf{k}_1),b^\dagger(\mathbf{k}_2)] = (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \qquad (277)$$
$$[a(\mathbf{k}_1),a(\mathbf{k}_2)] = [b(\mathbf{k}_1),b(\mathbf{k}_2)] = [a(\mathbf{k}_1),b(\mathbf{k}_2)] = [a(\mathbf{k}_1),b^\dagger(\mathbf{k}_2)] = 0, \qquad (278)$$

den Hamilton-Operator,

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3r \ \Big(\pi^\dagger(\mathbf{r})\pi(\mathbf{r}) + (\nabla\phi^\dagger(\mathbf{r}))(\nabla\phi(\mathbf{r})) + m^2\phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\Big) = \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}E(\mathbf{k})\Big(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\Big) + E_{\text{Vakuum}}. \qquad (279)
\end{aligned}$$

sowie

$$[H,a^\dagger(\mathbf{k})] = +E(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) \quad , \quad [H,a(\mathbf{k})] = -E(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \qquad (280)$$
$$[H,b^\dagger(\mathbf{k})] = +E(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) \quad , \quad [H,b(\mathbf{k})] = -E(\mathbf{k})b(\mathbf{k}). \qquad (281)$$

Weitere Schritte zur Quantisierung genau wie in Abschnitt 5.1;. Das komplexe Skalarfeld beschriebt also zwei Sorten identischer Spin-0-Teilchen ("a-Teilchen" und "b-Teilchen", die Antiteilchen der a-Teilchen). Dies hatte sich bereits auf klassischer Ebene angedeutet (ein komplexes Skalarfeld ist äquivalent zu zwei reellen Skalarfeldern, Abschnitt 4.2.2). Koppelt man ein komplexes Skalarfeld an ein em Feld, erhalten a-Teilchen und b-Teilchen zwangsläufig entgegengesetzte Ladungen.

- Elektrische Ladung:
  - Beim erstmaligen Aufstellen der KGG mit Hilfe des Korrespondenzprinzips wurde eine Kontinuitätsgleichung angegeben (Gleichung (53)). Der Versuch einer Interpretation von j^0 als Wahrscheinlichkeitsdichte scheiterte (negative Wahrscheinlichkeiten).

– Die angesprochene Kontinuitätsgleichung wurde in Abschnitt 4.3.3 mit Hilfe des Noether-Theorems und der Symmetrietransformation "Multiplikation mit einer Phase" hergeleitet.

– Die zugehörige klassische Erhaltungsgröße ist

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int d^3r\, j^0(\mathbf{r},t) = \int d^3r\, \frac{i}{2}\Big((\partial_t\phi^*(\mathbf{r},t))\phi(\mathbf{r},t) - \phi^*(\mathbf{r},t)(\partial_t\phi(\mathbf{r},t))\Big) = \\ &= \text{konstant}, \end{aligned} \tag{282}$$

der entsprechende Operator

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r\, \frac{i}{2}\Big(\pi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) - \phi^\dagger(\mathbf{r})\pi(\mathbf{r})\Big) = \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\Big) + \underbrace{\text{konstant}}_{=\infty} = \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\mathcal{N}_a - \mathcal{N}_b\Big) + \text{konstant}. \end{aligned} \tag{283}$$

Q entspricht also der Differenz der angeregten a-Quanten und b-Quanten (bzw. Teilchen und Antiteilchen), was zur Interpretation als elektrische Ladung führt. Die Kontinuitätsgleichung (53) beschreibt also die Erhaltung der elektrischen Ladung.

5.3 Quantisierung des Dirac-Felds

- Zunächst analoges Vorgehen, wie bisher.
- Klassische kanonisch konjugierte Impulse: Definiere $\psi = A + iB$, dann

$$\pi_A(\mathbf{r}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}(\mathbf{r})} = i\bar{\psi}(\mathbf{r})\gamma^0 = i\psi^\dagger(\mathbf{r}) = i(A(\mathbf{r}) - iB(\mathbf{r})) \tag{284}$$

$$\pi_B(\mathbf{r}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{B}(\mathbf{r})} = -\bar{\psi}(\mathbf{r})\gamma^0 = -\psi^\dagger(\mathbf{r}) = -(A(\mathbf{r}) - iB(\mathbf{r})) \tag{285}$$

(Feldvariablen und kanonisch konjugierte Impulse sind also äquivalent).

- Klassische Hamilton-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_A(\mathbf{r})\dot{A}(\mathbf{r}) + \pi_B(\mathbf{r})\dot{B}(\mathbf{r}) - \mathcal{L} = i\bar{\psi}(\mathbf{r})\gamma^0\partial_0\psi(\mathbf{r}) - \mathcal{L} = \\ &= i\bar{\psi}(\mathbf{r})\gamma^j\partial_j\psi(\mathbf{r}) + m\bar{\psi}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{286}$$

- Definition von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gemäß der allgemeinen klassischen Lösung der DG (78):

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{r=1,2}\Big(b_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{kr}} + d_r^\dagger(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr}}\Big). \tag{287}$$

(die vier Komponenten von ψ werden durch zwei b_r und zwei $d_r^\dagger$ ausgedrückt).

- Hamilton-Operator:

$$H \;=\; \ldots \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{r=1,2} E(\mathbf{k}) \Big(b_r^\dagger(\mathbf{k}) b_r(\mathbf{k}) - d_r(\mathbf{k}) d_r^\dagger(\mathbf{k}) \Big). \tag{288}$$

- Problem: Standardkommutatorrelationen,

$$[b_r(\mathbf{k}_1), b_s^\dagger(\mathbf{k}_2)] \;=\; [d_r(\mathbf{k}_1), d_s^\dagger(\mathbf{k}_2)] \;=\; (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta_{r,s} \quad , \quad \ldots \tag{289}$$

  würden auf Grund von $-d_r(\mathbf{k}) d_r^\dagger(\mathbf{k})$ im Hamilton-Operator zu unendlich großen negativen Energien führen ...?

- Ausweg: Fordere stattdessen Antikommutatorrelationen,

$$\{b_r(\mathbf{k}_1), b_s^\dagger(\mathbf{k}_2)\} \;=\; \{d_r(\mathbf{k}_1), d_s^\dagger(\mathbf{k}_2)\} \;=\; (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta_{r,s} \tag{290}$$

$$\{b_r(\mathbf{k}_1), b_s(\mathbf{k}_2)\} \;=\; \{d_r(\mathbf{k}_1), d_s(\mathbf{k}_2)\} \;=\; \{b_r(\mathbf{k}_1), d_s(\mathbf{k}_2)\} \;=\; \{b_r(\mathbf{k}_1), d_s^\dagger(\mathbf{k}_2)\} \;=\; 0. \tag{291}$$

  Dies führt auf

$$H \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{r=1,2} E(\mathbf{k}) \Big(b_r^\dagger(\mathbf{k}) b_r(\mathbf{k}) + d_r^\dagger(\mathbf{k}) d_r(\mathbf{k}) \Big) + E_{\text{Vakuum}}. \tag{292}$$

- Einschub: QM "HO" mit Antikommutatorrelationen ("fermionischer HO").
  - Ausgangspunkt:

$$\{a, a^\dagger\} \;=\; 1 \quad , \quad \{a, a\} \;=\; 0 \quad , \quad H \;=\; a^\dagger a \omega. \tag{293}$$

  - Offensichtlich gilt $a^2 = (a^\dagger)^2 = 0$.
  - Sei $|\phi\rangle$ ein beliebiger Zustand. Dann

$$Ha|\phi\rangle \;=\; 0, \tag{294}$$

    also ist $a|\phi\rangle$ entweder Eigenzustand von H mit Energieeigenwert $E = 0$ oder $a|\phi\rangle = 0$.
  - Sei $|\phi\rangle$ ein beliebiger Zustand. Dann

$$Ha^\dagger|\phi\rangle \;=\; \omega a^\dagger|\phi\rangle, \tag{295}$$

    also ist $a^\dagger|\phi\rangle$ entweder Eigenzustand von H mit Energieeigenwert $E = \omega$ oder $a^\dagger|\phi\rangle = 0$.
  - Definiere den Grundzustand $|0\rangle$ analog zum HO via $a|0\rangle = 0$. Für diesen Zustand gilt $H|0\rangle = 0$, also $E_0 = 0$.
  - Definiere $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$. Für diesen Zustand gilt $\langle 1|1\rangle = \langle 0|aa^\dagger|0\rangle = \langle 0|(-a^\dagger a + 1)|0\rangle = 1$ und $H|1\rangle = a^\dagger a \omega a^\dagger|0\rangle = \omega(-aa^\dagger + 1)a^\dagger|0\rangle = \omega|1\rangle$, also $E_1 = \omega$. Außerdem $a^\dagger|1\rangle = a^\dagger a^\dagger|0\rangle = 0$ und $a|1\rangle = aa^\dagger|0\rangle = (-a^\dagger a + 1)|0\rangle = |0\rangle$.

  - Es gibt also zwei Energieeigenzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit Energien $E_0 = 0$ und $E_1 = \omega$. Durch Anwenden eines "Erzeugungsoperators" $a^\dagger$ bzw. eines "Vernichtungsoperators" a kann zwischen den beiden Zuständen gewechselt werden. Für beliebige Zustände $|\phi\rangle$ (Linearkombinationen von $|0\rangle$ und $|1\rangle$) gilt $aa|\phi\rangle = a^\dagger a^\dagger|\phi\rangle = 0$. Der fermionische HO ist also deutlich primitiver als der übliche "bosonische HO".

- Die eben an Hand des QM fermionischen HOs gezeigten Überlegungen lassen sich direkt auf das quantisierte Dirac-Feld übertragen. Z.B.

  - Für den niedrigsten Energieeigenzustand, den Vakuumzustand $|0\rangle$, gilt $b_r(\mathbf{k})|0\rangle = d_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0$. $|0\rangle$ hat Energie E_{Vakuum}.
  - $b_r^\dagger(\mathbf{k})$ angewendet auf $|0\rangle$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\mathbf{k}$ und $r = 1, 2$ entsprechendem Spin; $b_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ ist ebenfalls ein Energieeigenzustand mit $E(\mathbf{k}) + E_{\text{Vakuum}}$.
  - Auf Grund von $b_r^\dagger(\mathbf{k})b_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ ist es nicht möglich, dass zwei Teilchen mit gleichem Impuls und gleicher Spineinstellung existieren. Das Pauli-Prinzip ist also automatisch erfüllt, d.h. nicht länger ein Prinzip, sondern eine Konsequenz der Antikommutatorrelationen.
  - Analoge Aussagen für die entsprechenden Erzeugungsoperatoren $d_r^\dagger(\mathbf{k})$ der Antiteilchen.

- Quantisierung des Dirac-Felds also nicht vollständig analog zur QM/zur Quantisierung des skalaren Felds (kanonisch konjugierte Impulse und Feldvariablen sind identisch, damit kann die Hamilton-Funktion vollständig durch Feldvariablen ausgedrückt werden; Antikommutatorrelationen an Stelle von Kommutatorrelationen) ... Ursachen: (1) Nur erste (Zeit-)Ableitungen treten in $\mathcal{L}$ auf, (2) DG beschreibt Fermionen, d.h. beinhaltet bereits das Pauli-Prinzip ... aber dennoch sehr ähnliches Vorgehen.

5.4 Quantisierung des Maxwell-Felds

- Ähnlich wie bei der Quantisierung des Dirac-Felds weicht auch die Quantisierung des Maxwell-Felds in gewissen Aspekten von der QM/der Quantisierung des skalaren Felds ab. Ursache: Unphysikalische Eichfreiheitsgrade.

- Im Folgenden drei mögliche Wege der Quantisierung. Physikalische Ergebnisse sind notwendiger Weise identisch.

5.4.1 "Phänomenologisch orientierte Vorgehensweise", Coulomb-Eichung

- In Abschnitt 3.5 wurden mit Hilfe der Coulomb-Eichung ($\nabla\mathbf{A} = 0$; im Vakuum folgt dann $A^0 = 0$) unphysikalische Eichfreiheitsgrade eliminiert. Verwende die entsprechende allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen, (136), als zeitabhängigen Feldoperator,

$$A^j(x) \quad = \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1,2} \epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})\Big(a_\lambda(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})e^{+ikx)}\Big), \tag{296}$$

bzw. betrachte diese Lösung bei $t = 0$ als Definition der zugehörigen zeitunabhängigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_\lambda(\mathbf{k})$ und $a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})$,

$$A^j(\mathbf{r}) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1,2} \epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})\Big(a_\lambda(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{kr}} + a^*_\lambda(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr})}\Big). \tag{297}$$

- Fordere die üblichen Kommutatorrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren,

$$[a_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), a^\dagger_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)] \;=\; (2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\delta_{\lambda_1,\lambda_2} \tag{298}$$

$$[a_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), a_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)] \;=\; [a^\dagger_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), a^\dagger_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)] \;=\; 0. \tag{299}$$

- Hamilton-Operator:
  - Kanonisch konjugierte Impulse zu A^μ:

    $$\pi_\mu(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu(\mathbf{r})} \;=\; -F_{0\mu}(\mathbf{r}) \;=\; \eta_{\mu\nu}F^{\nu 0}, \tag{300}$$

    d.h. $\pi_0(\mathbf{r}) = 0$ (nicht weiter störend, da auch $A^0(\mathbf{r}) = 0$), $\pi_j(\mathbf{r}) = -E_j(\mathbf{r})$.
  - Hamilton-Funktion:

    $$H \;=\; \pi_j(\mathbf{r})\dot{A}^j(\mathbf{r}) - \mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r})\Big), \tag{301}$$

    wobei $\dot{A}^j = \partial^0 A^j = F^{0j} = -E_j$ verwendet wurde.
  - Einsetzen von (296) in (301) und anschließende Interpretation von $a_\lambda(\mathbf{k})$ und $a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})$ als Operatoren liefert den Hamilton-Operator

    $$H \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1,2} E(\mathbf{k})a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k}) + E_{\text{Vakuum}}. \tag{302}$$

- Alles Weitere (Konstruktion der Zustände und deren Interpretation) wie bei der Quantisierung des reellen Skalarfelds. Die Erzeugungsoperatoren $a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})$ erzeugen Photonen der beiden $\lambda = 1, 2$ entsprechenden Polarisationsrichtungen mit Energie
$E(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2} = |\mathbf{k}|$.

****** 06. Dezember 2024 (16. Vorlesung) ******

5.4.2 "Theoretisch orientierte Vorgehensweise", Coulomb-Eichung

- Kanonisch konjugierte Impulse wie in (300).
- Versuch: Fordere die üblichen kanonischen Kommutatorrelationen,

$$[A^j(\mathbf{r}_1), \pi_k(\mathbf{r}_2)] \;=\; i\delta_{j,k}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{303}$$

$$[A^j(\mathbf{r}_1), A^k(\mathbf{r}_2)] \;=\; [\pi_j(\mathbf{r}_1), \pi_k(\mathbf{r}_2)] \;=\; 0. \tag{304}$$

- Problem: (303) ist inkonsistent mit der Eichfixierung $\nabla \mathbf{A} = 0$. Dies wird bei Anwendung von $\partial_j^{(\mathbf{r}_1)}$ auf (303) ersichtlich,

$$\partial_j^{(\mathbf{r}_1)}[A^j(\mathbf{r}_1), \pi_k(\mathbf{r}_2)] \;=\; [(\partial_j^{(\mathbf{r}_1)} A^j(\mathbf{r}_1)), \pi_k(\mathbf{r}_2)] \;=\; 0 \quad \text{(linke Seite)} \tag{305}$$

$$\partial_j^{(\mathbf{r}_1)} i\delta_{j,k}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \;=\; i\partial_k^{(\mathbf{r}_1)}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \;\neq\; 0 \quad \text{(rechte Seite).} \tag{306}$$

- Ausweg: Verallgemeinerung von (303), ersetze $\delta_{j,k} \to \Delta_{jk}$ (Δ_{jk} ist zunächst unbestimmt). Damit wird (306) zu

$$i\partial_j^{(\mathbf{r}_1)}\Delta_{jk}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{307}$$

  Dieser Ausdruck verschwindet z.B. bei Wahl von

$$\Delta_{jk} \;=\; \delta_{j,k} - \frac{\partial_j^{(\mathbf{r}_1)}\partial_k^{(\mathbf{r}_1)}}{\triangle^{(\mathbf{r}_1)}} \tag{308}$$

  ((308) verschwindet nicht nur, Δ_{jk} wurde auch "möglichst ähnlich" zum ursprünglichen $\delta_{j,k}$ gewählt; die $\mathbf{k}$-Richtung wurde aus der δ-Funktion "rausgefiltert", wie

$$\Delta_{jk}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \;=\; \left(\delta_{j,k} - \frac{\partial_j^{(\mathbf{r}_1)}\partial_k^{(\mathbf{r}_1)}}{\triangle^{(\mathbf{r}_1)}}\right)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \;=$$

$$= \;\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \left(\delta_{j,k} - \frac{k_j k_k}{\mathbf{k}^2}\right)e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \tag{309}$$

  zeigt). Damit

$$[A^j(\mathbf{r}_1), \pi_k(\mathbf{r}_2)] \;=\; i\left(\delta_{j,k} - \frac{\partial_j^{(\mathbf{r}_1)}\partial_k^{(\mathbf{r}_1)}}{\triangle^{(\mathbf{r}_1)}}\right)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{310}$$

- Definition von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren analog zu (297):

$$A^j(\mathbf{r}) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\sum_{\lambda=1,2}\epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})\Big(a_\lambda(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{kr}} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr})}\Big) \tag{311}$$

$$\pi_j(\mathbf{r}) \;=\; \dot{A}^j(\mathbf{r}, t=0) \;=$$

$$= \;-i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\sum_{\lambda=1,2}\epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})\Big(a_\lambda(\mathbf{k})e^{+i\mathbf{kr}} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr})}\Big); \tag{312}$$

  Auflösen nach $a_\lambda(\mathbf{k})$ und $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ ergibt

$$a_\lambda(\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r\, \epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})\Big(E(\mathbf{k})A^j(\mathbf{r}) + i\pi_j(\mathbf{r})\Big)e^{-i\mathbf{kr}} \tag{313}$$

$$a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \;=\; \int d^3r\, \epsilon^j(\lambda,\mathbf{k})\Big(E(\mathbf{k})A^j(\mathbf{r}) - i\pi_j(\mathbf{r})\Big)e^{+i\mathbf{kr}}. \tag{314}$$

- Die Kommutatorrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren können nun berechnet werden. Es ergeben sich (298) und (299).

- Alles Weitere wie in Abschnitt 5.4.1.

5.4.3 "Lorentz-kovariante Vorgehensweise", Lorenz-Eichung

- Verwende im Folgenden zeitabhängige Heisenberg-Operatoren.
- Wünschenswert für eine Lorentz-kovariante Quantisierung wären vier Eichfeldkomponenten A^μ und vier zugehörige kanonisch konjugierte Impulse π_μ mit Standardkommutatorrelationen

$$[A^\mu(\mathbf{r}_1,t),\pi_\nu(\mathbf{r}_2,t)] = i\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\eta^\mu{}_\nu \tag{315}$$
$$[A^\mu(\mathbf{r}_1,t),A_\nu(\mathbf{r}_2,t)] = [\pi^\mu(\mathbf{r}_1,t),\pi_\nu(\mathbf{r}_2,t)] = 0. \tag{316}$$

- Problem: $\pi_0(\mathbf{r}) = 0$ (klassische Feldgleichung, siehe (300)), d.h. Konsistenz mit (315) (Operatorgleichung) für $\mu=\nu=0$ fragwürdig.
- Ausweg: Verwende eine Lorentz-invariante Eichfixierung, d.h. Lorenz-Eichung, in der klassischen Feldtheorie $\partial_\mu A^\mu = 0$. Die Übersetzung auf Quantenebene ist nicht trivial (siehe weiter unten).
- Addiere einen Term zur Lagrange-Dichte, der auf Grund der Eichfixierung verschwindet,

$$\mathcal{L}(A^\mu,\partial_\mu A^\nu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad\to\quad -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{317}$$

der aber zu veränderten kanonisch konjugierten Impulsen

$$\pi_0(\mathbf{r}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^0(\mathbf{r})} = -\partial_\mu A^\mu(\mathbf{r}) \tag{318}$$

führt (die kanonisch konjugierten Impulse $\pi_j(\mathbf{r})$ verändern sich nicht). Die MGs lauten

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu}-\partial_\mu\eta^{\mu\nu}(\partial_\sigma A^\sigma) =$$
$$= -\partial_\mu\Big(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu\Big)-\partial^\nu(\partial_\sigma A^\sigma) = -\Box A^\nu, \tag{319}$$

entsprechen also vier unabhängigen KGGs (siehe auch (131)).

- Definiere Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gemäß der bekannten bzw. offensichtlichen klassischen Lösung von (319):

$$A^\mu(x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\sum_{\lambda=0,1,2,3}\epsilon^\mu(\lambda,\mathbf{k})\Big(a_\lambda(\mathbf{k})e^{-ikx}+a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})e^{+ikx}\Big) \tag{320}$$
$$\pi_0(x) = -\partial_\mu A^\mu(x) =$$
$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\sum_{\lambda=0,1,2,3}\epsilon^\mu(\lambda,\mathbf{k})\Big((+ik_\mu)a_\lambda(\mathbf{k})e^{-ikx}+(-ik_\mu)a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})e^{+ikx}\Big) \tag{321}$$
$$\pi_j(x) = -E_j(x) = \ldots, \tag{322}$$

wobei $\epsilon^\mu(\lambda,\mathbf{k})$, $\lambda=0,1,2,3$ orthonormale Vektoren sind, die wie folgt gewählt werden:

  - "Zeitartige Photonen":
    $\epsilon^\mu(\lambda = 0, \mathbf{k}) = (1, 0, 0, 0)$.
  - "Longitudinale Photonen":
    $\epsilon^\mu(\lambda = 3, \mathbf{k})$ in Impulsrichtung, also z.B. für $\mathbf{k} = (0, 0, k > 0)$
    $\epsilon^\mu(\lambda = 3, \mathbf{k}) = (0, 0, 0, 1)$.
  - "Transversale Photonen":
    $\epsilon^\mu(\lambda = 1, \mathbf{k})$ und $\epsilon^\mu(\lambda = 2, \mathbf{k})$ senkrecht zur Impulsrichtung, also z.B. für $\mathbf{k} = (0, 0, k > 0)$, $\epsilon^\mu(\lambda = 1, \mathbf{k}) = (0, 1, 0, 0)$ und $\epsilon^\mu(\lambda = 2, \mathbf{k}) = (0, 0, 1, 0)$.

- Für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgen die Kommutatorrelationen

$$[a_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), a^\dagger_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)] = -(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\eta_{\lambda_1\lambda_2} \tag{323}$$

$$[a_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), a_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)] = [a^\dagger_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), a^\dagger_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)] = 0, \tag{324}$$

der Hamilton-Operator ist

$$H = P^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} E(\mathbf{k}) \Big(- a^\dagger_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + \sum_{\lambda=1,2,3} a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \Big) + E_{\text{Vakuum}}, \tag{325}$$

der Impuls-Operator

$$P^j = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \mathbf{k} \Big(- a^\dagger_0(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + \sum_{\lambda=1,2,3} a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \Big). \tag{326}$$

- Probleme:
  - "Falsches Vorzeichen" bei der Kommutatorrelation (323) für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d.h. $[a_0(\mathbf{k}_1), a^\dagger_0(\mathbf{k}_2)] = -(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$.
  - "Falsches Vorzeichen" im Term $-a^\dagger_0(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})$ sowohl in H als auch in P^j.
  - $|a^\dagger_0(\mathbf{k})|0\rangle|^2 = \langle 0|a_0(\mathbf{k})a^\dagger_0(\mathbf{k})|0\rangle = -(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(0) < 0$, d.h. der Zustand $|\mathbf{k}, \lambda = 0\rangle = a^\dagger_0(\mathbf{k})|0\rangle$ hat negative Norm ...?! (Hierbei wurde von einem Vakuum ausgegangen, für das $a_0(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ gilt.)

****** 11. Dezember 2024 (17. Vorlesung) ******

- Ausweg: Eichfixierung auf Quantenebene, fordere für physikalische Zustände $|\text{phys}\rangle$ und $|\text{phys}'\rangle$

$$\langle \text{phys}|\partial_\mu A^\mu|\text{phys}'\rangle = 0, \tag{327}$$

d.h. die Eichfixierung auf klassischer Ebene, $\partial_\mu A^\mu$, gilt auf Quantenebene nicht für Operatoren, sondern ist lediglich als Erwartungswert physikalischer Zustände erfüllt. (327) ist erfüllt, wenn physikalische Zustände $|\text{phys}\rangle$ als diejenigen definiert werden, für die

$$\partial_\mu A^{+,\mu}|\text{phys}\rangle = 0 \tag{328}$$

gilt, wobei

$$A^{+,\mu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda,\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} \tag{329}$$

$$A^{-,\mu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda,\mathbf{k}) a^\dagger_\lambda(\mathbf{k}) e^{+ikx}. \tag{330}$$

Beweis, $0 = (\partial_\mu A^{+,\mu}|\text{phys}\rangle)^\dagger = \langle\text{phys}|\partial_\mu A^{-,\mu}$, damit
$\langle\text{phys}|\partial_\mu A^\mu|\text{phys}'\rangle = \langle\text{phys}|(\partial_\mu A^{+,\mu} + \partial_\mu A^{-,\mu})|\text{phys}'\rangle = 0$.

- Physikalische 1-Photon-Zustände mit Impuls $\mathbf{k} = (0,0,k>0)$:
  - Allgemeine 1-Photon-Zustände mit Impuls $\mathbf{k} = (0,0,k>0)$:

    $$|\psi_{\text{allg}}\rangle = \sum_{\lambda=0,1,2,3} c_\lambda a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})|0\rangle. \tag{331}$$

  - Die Bedingung (328) entspricht

    $$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu A^{+,\mu}|\psi_{\text{allg}}\rangle = \\ &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k}')} \sum_{\lambda'=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda',\mathbf{k}') a_{\lambda'}(\mathbf{k}')(-ik'_\mu) e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0,1,2,3} c_\lambda a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})|0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k}')} \sum_{\lambda'=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda',\mathbf{k}')(-ik'_\mu) e^{-ik'x} \sum_{\lambda=0,1,2,3} c_\lambda \\ &\qquad \underbrace{[a_{\lambda'}(\mathbf{k}'), a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})]}_{=-(2\pi)^3 2E(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\eta_{\lambda'\lambda}} |0\rangle = \\ &= +i \sum_{\lambda'=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda',\mathbf{k}) k_\mu e^{-ikx} \sum_{\lambda=0,1,2,3} c_\lambda \eta_{\lambda'\lambda}|0\rangle = \ldots = \\ &= +ik_0 e^{-ikx}\Big(c_0 + c_3\Big)|0\rangle, \end{aligned} \tag{332}$$

    also $c_0 + c_3 = 0$.
  - Der oben diskutierte problematische Zustand mit negativer Norm, $a^\dagger_0(\mathbf{k})|0\rangle$, ist damit unphysikalisch. Physikalische 1-Photon-Zustände sind

    $$|\psi_{\text{phys}}\rangle = \underbrace{\sum_{\lambda=1,2} c_\lambda a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})|0\rangle}_{=|\psi_t\rangle} + c_\phi|\phi\rangle \quad , \quad |\phi\rangle = \Big(a^\dagger_0(\mathbf{k}) - a^\dagger_3(\mathbf{k})\Big)|0\rangle. \tag{333}$$

  - Eigenschaften von $|\psi_{\text{phys}}\rangle$:
    - Norm: $\langle\phi|\phi\rangle = 0$, $\langle\phi|\psi_t\rangle = 0$, damit sind Skalarprodukte unabhängig von $c_\phi|\phi\rangle$, d.h. $\langle\psi_{\text{phys}}|\psi_{\text{phys}}\rangle = \langle\psi_t|\psi_t\rangle$.
    - Erwartungswert der Energie: $\langle\psi_{\text{phys}}|H|\psi_{\text{phys}}\rangle = \ldots = \langle\psi_t|H|\psi_t\rangle$.
    - Erwartungswert des Impulses: $\langle\psi_{\text{phys}}|P^j|\psi_{\text{phys}}\rangle = \ldots = \langle\psi_t|P^j|\psi_t\rangle$.

  - $c_\phi|\phi\rangle$, d.h. zeitartige und longitudinale Photonen, hat/haben also keinen Einfluss auf physikalische Observablen. Zustände, die sich nur in c_ϕ unterscheiden, sind physikalisch ununterscheidbar. Definiere daher die Äquivalenzrelation $|\psi_{\text{phys}}\rangle \sim |\psi'_{\text{phys}}\rangle$, falls $|\psi_t\rangle = |\psi'_t\rangle + c|\phi\rangle$. Arbeite der Einfachheit halber stets mit dem Repräsentanten, der nur transversale Photonen enthält, also für den $c_\phi = 0$ gilt.

- Analoge Überlegungen für Mehr-Photon-Zustände.

6 WW Quantenfelder, Störungstheorie

- Literatur: Darstellung orientiert sich an [4].
- Lagrange-Dichten, in denen die Felder höchstens linear oder quadratisch auftreten, beschreiben frei Teilchen (siehe Kapitel 3 bis 5).
- WW Quantenfelder erfordern kubische oder höhere Terme in den Feldern.
- Einfaches, in diesem Kapitel diskutiertes Beispiel: ϕ^4-Theorie,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad = \quad \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{334}$$

mit $\phi \in \mathbb{R}$. Für den Hamilton-Operator folgt

$$H \quad = \quad \underbrace{\int d^3r \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2\right)}_{=H_0} + \underbrace{\int d^3r \, \frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{=H_{\text{int}}}; \tag{335}$$

H_0 ist der freie Hamilton-Operator, H_{int} beschreibt die WW.

6.1 Die S-Matrix

- $|a(t)\rangle$: Zeitabhängiger Schrödinger-Zustand, der zu einem initialen Zeitpunkt t_i Eigenzustand einer Menge untereinander vertauschender Operatoren ist, deren Quantenzahlen mit a zusammengefasst werden (Beispiel: a steht für die in Abschnitt 5.1 eingeführten Besetzungszahlen, d.h. $|a\rangle = |a(t_i)\rangle$ entspricht einem Zustand mit fester Teilchenanzahl und definierten Impulsen).
- $|b(t)\rangle$: Zeitabhängiger Schrödinger-Zustand, der zu einem finalen Zeitpunkt t_f Eigenzustand einer Menge untereinander vertauschender Operatoren ist, deren Quantenzahlen mit b zusammengefasst werden, d.h. $|b\rangle = |b(t_f)\rangle$.
- Zeitentwicklung:

$$|a(t)\rangle \quad = \quad e^{-iH(t-t_i)}|a\rangle \quad , \quad |b(t)\rangle \quad = \quad e^{-iH(t-t_f)}|b\rangle. \tag{336}$$

- Die Amplitude für den Übergang von $|a\rangle$ nach $|b\rangle$ nach verstrichener Zeit $t_f - t_i$ beträgt

$$\langle b(t_f)|a(t_f)\rangle \quad = \quad \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle. \tag{337}$$

- S-Matrix:

$$S \quad = \quad \lim_{t_i \to -\infty, t_f \to +\infty} e^{-iH(t_f-t_i)}. \tag{338}$$

  - Im Limes $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$ entspricht (337) den Elementen $\langle b|S|a\rangle$ der S-Matrix.

- Die S-Matrix bildet initiale Zustände auf finale Zustände ab: $|a\rangle \to S|a\rangle$.
- In einer WW QFT beschreiben die Elemente der S-Matrix mögliche Streu- und Zerfallsprozesse und deren Wahrscheinlichkeiten (inklusive Teilchenerzeugung und -vernichtung). Kennt man die S-Matrix, können Streu- und Zerfallsprozesse berechnet werden (siehe Kapitel 7).

- Gelegentlich verwendet man auch die T-Matrix, definiert via $S = 1 + iT$. Die T-Matrix ist vom Informationsgehalt äquivalent zur S-Matrix.

- Übergang zum in der QFT üblicheren Heisenberg-Bild:
  - Zustände sind zeitunabhängig, d.h. entsprechen den Schrödinger-Zuständen zu fester Zeit, o.B.d.A. zu Zeit $t = 0$, d.h. $|a_H\rangle = |a(0)\rangle = e^{+iHt_i}|a\rangle$.
  - Um deutlich zu machen, auf welchen Zeitpunkt sich die Quantenzahlen a beziehen, wird folgende Notation benutzt: $|a, t_i\rangle = |a_H\rangle$.
    - $|a, t_i\rangle$ ist der Zustand bei $t = 0$, der bei $t = t_i$ der Zustand $|a\rangle$ war ("war" wenn $t_i < 0$, sonst "sein wird").
    - $|a, t_i\rangle$ ist also Eigenzustand zu den zu den Quantenzahlen a gehörigen zeitabhängigen Heisenberg-Operatoren bei $t = t_i$, wie folgende "Rechenskizze" zeigt:
      - $\hat{a}|a\rangle = a|a\rangle$.
      - Damit $e^{+iHt_i}\hat{a}e^{-iHt_i}e^{+iHt_i}|a\rangle = ae^{+iHt_i}|a\rangle$, d.h. $e^{+iHt_i}\hat{a}e^{-iHt_i}|a, t_i\rangle = a|a, t_i\rangle$.
      - Aufgrund von (18) gilt $\hat{a}_H(t) = e^{+iHt}\hat{a}e^{-iHt}$. Damit $\hat{a}_H(t_i)|a, t_i\rangle = a|a, t_i\rangle$.
  - Analog $|b, t_f\rangle = |b_H\rangle = |b(0)\rangle = e^{+iHt_f}|b\rangle$.
  - Elemente der S-Matrix:

$$\lim_{t_i\to-\infty, t_f\to+\infty} \langle b, t_f|a, t_i\rangle \quad = \quad \langle b|S|a\rangle. \tag{339}$$

6.2 Die LSZ-Formel

- Die LSZ-Formel verbindet die zur Berechnung von Streu- und Zerfallsprozessen notwendigen Elemente der S-Matrix mit z.B. im Rahmen der Störungstheorie berechenbaren Vakuumerwartungswerten (VEVs) von zeitgeordneten Produkten von Feldoperatoren.

- Keine Herleitung der LSZ-Formel, da aufwändig. Siehe z.B. [4], Kapitel 5.2.

- LSZ-Formel (Lehmann-Symanzik-Zimmermann) für ϕ^4-Theorie:

$$\left(\prod_{j=1}^{m} \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{i\sqrt{Z}}{q_j^2 - m^2}\right)\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m|S|\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\rangle \quad \sim$$

$$\sim \quad \prod_{j=1}^{m} \int d^4x_j e^{+ip_j x_j} \prod_{j=1}^{n} \int d^4y_j e^{-iq_j y_j} \langle \Omega|T\Big\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_m)\phi(y_1)\ldots\phi(y_n)\Big\}|\Omega\rangle. \tag{340}$$

- Linke Seite:
  - $|\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m\rangle$, $|\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\rangle$: m- bzw. n-Teilchenzustände mit definierten Impulsen (siehe Abschnitt 5.1). Voraussetzung für Gültigkeit der LSZ-Formel: $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{q}_k$.

- $\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle$: Die zur Berechnung von Streu- und Zerfallsprozessen erforderlichen Elemente der S-Matrix.
- Da $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{q}_k$, folgt $\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle = 0$ und daraus $\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | iT | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle$.
- Z: Renormierungsfaktor der Wellenfunktionsrenormierung (siehe z.B. [8], Kapitel 8). $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$, d.h. kann für Störungsentwicklungen bis einschließlich $\mathcal{O}(\lambda)$ ignoriert werden.

- Rechte Seite:
  - $T\{\ldots\}$: Zeitgeordnetes Produkt, d.h. die Feldoperatoren werden gemäß ihren Zeitargumenten sortiert, große Zeiten links, kleine Zeiten rechts, z.B.

$$T\Big\{\phi(x)\phi(y)\Big\} \quad = \quad \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & \text{falls } x_0 > y_0 \\ \phi(y)\phi(x) & \text{falls } y_0 > x_0 \end{cases} . \tag{341}$$

  - $|\Omega\rangle$: Vakuum der WW ϕ^4-Theorie. $|\Omega\rangle \neq |0\rangle$, wobei $|0\rangle$ das Vakuum der freien ϕ^4-Theorie bezeichnet (siehe Abschnitt 6.3).
  - $\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \ldots \phi(x_m)\phi(y_1) \ldots \phi(y_n)\} | \Omega \rangle$: VEVs, die mit Hilfe von Störungstheorie (siehe Abschnitt 6.3 und folgende Abschnitte) oder auch nicht-perturbativ mit Hilfe von Pfadintegralen und Gitterfeldtheorie berechnet werden können (siehe z.B. [8]). Diese speziellen VEVs werden auch als n-Punkt-Funktionen bezeichnet.

- $\sim$ bedeutet, dass linke und rechte Seite lediglich in der Umgebung der Multipole $p_j^0 \to E(\mathbf{p}_j)$, $q_j^0 \to E(\mathbf{q}_j)$ identisch sind, d.h. sich abseits dieser Multipole um schwächer divergente oder endliche Terme unterscheiden. Um ein Element der S-Matrix zu bestimmen (linke Seite), muss die Fourier-transformierte n-Punkt-Funktion (rechte Seite) in der Umgebung der Multipole berechnet und der entsprechende Koeffizient abgelesen werden.

****** 13. Dezember 2024 (18. Vorlesung) ******

6.3 Umschreiben WW VEVs in freie VEVs

- Ziel: Berechne die in der LSZ-Formel auftretenden n-Punkt-Funktionen $\langle \Omega | T\{\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)\} | \Omega \rangle$.

- Die in Kapitel 5 zur Quantisierung freier Felder verwendeten Erzeuger- und Vernichtertechniken lassen sich nicht direkt auf WW Feldtheorien anwenden (die zu Grunde liegende Feldgleichung muss linear sein, d.h. lineare Superposition von Einzellösungen, z.B. ebene Wellen, bildet die allgemeine Lösung).

- Strategie: Drücke die n-Punkt-Funktionen $\langle \Omega | T\{\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)\} | \Omega \rangle$ der WW Theorie vollständig durch Feldoperatoren und Zustände der freien Theorie aus. Solche Ausdrücke können dann mit den Erzeuger- und Vernichtertechniken aus Kapitel 5 berechnet werden.

- Feldoperator im WW-Bild ϕ_I:

– Definiere $\phi_I(\mathbf{r},t)$ als einen Feldoperator, der zum Zeitpunkt $t=0$ dem zeithabhängigen Feldoperator $\phi(\mathbf{r},t)$ der WW Theorie im Heisenberg-Bild entspricht, bzw. dem zeitunabhängigen Feldoperator $\phi(\mathbf{r})$ im Schrödinger-Bild (siehe (209)),

$$\phi_I(\mathbf{r},t=0) = \phi(\mathbf{r},t=0) = \phi(\mathbf{r}), \tag{342}$$

sich aber zeitlich wie ein Feldoperator der freien Theorie mit H_0 entwickelt, d.h.

$$\phi_I(\mathbf{r},t) \;=\; e^{+iH_0t}\phi_I(\mathbf{r},t=0)e^{-iH_0t} \tag{343}$$

(H_0 ist, im Gegensatz zu H, in der WW Theorie nicht zeitunabhängig; im Folgenden bezeichnet H_0 stets $H_0(t=0)$). Operatoren, deren Zeitentwicklung durch H_0 gegeben ist, bezeichnet man als Operatoren im WW-Bild.

– Definition für andere Operatoren im WW-Bild analog, z.B. π_I.

– Bei $t=0$ erzeugen die Operatoren $\phi_I(\mathbf{r},t)$ und $\phi(\mathbf{r},t)$ jeweils ein ϕ-Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ (siehe (267) und (268) und umgebenden Text).

– Die zeitlichen Entwicklungen von ϕ_I und ϕ unterscheiden sich jedoch. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r},t) \;&=\; e^{+iHt}\underbrace{\phi(\mathbf{r},t=0)}_{=\phi_I(\mathbf{r},t=0)}e^{-iHt} \;=\; e^{+iHt}e^{-iH_0t}\phi_I(\mathbf{r},t)e^{+iH_0t}e^{-iHt} \;=\\ &=\; U^\dagger(t,0)\phi_I(\mathbf{r},t)U(t,0),\end{aligned} \tag{344}$$

wobei der Zeitentwicklungsoperator

$$U(t,t_0) \;=\; e^{+iH_0t}e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0t_0} \tag{345}$$

definiert und verwendet wurde (siehe [9]).

– Nebenbemerkung: Die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi_I\rangle$ im WW-Bild ist, passend zu (343), durch

$$|\psi_I(t)\rangle \;=\; e^{+iH_0t}e^{-iHt}|\psi\rangle \tag{346}$$

gegeben, wobei $|\psi\rangle = |\psi_I(t=0)\rangle = |\psi_H(t=0)\rangle = |\psi_S\rangle$. Daraus folgt unmittelbar

$$|\psi_I(t)\rangle \;=\; U(t,t_0)|\psi_I(t_0)\rangle. \tag{347}$$

Der Zeitentwicklungsoperator $U(t,t_0)$ verschiebt also einen Zustand im WW-Bild in der Zeit von t_0 nach t (daher der Name "Zeitentwicklungsoperator").

– ϕ_I und π_I erfüllen bei $t=0$ offensichtlich Standardkommutatorrelationen (201). Dies ist auch bei beliebigen anderen Zeitpunkten der Fall, wie sich leicht zeigen lässt. Zusammen mit der vorgegebenen Zeitentwicklung (343) wird eine vollständige Quantentheorie für ϕ_I und π_I definiert, die gerade der freien in Kapitel 5.1 diskutierten Theorie für ein reelles Skalarfeld entspricht. Alle dort diskutierten Eigenschaften und Gleichungen können im Folgenden für ϕ_I und π_I verwendet werden. Z.B. kann ϕ_I als lineare Superposition von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt werden,

$$\phi_I(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\left(a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{+ikx}\right), \tag{348}$$

wobei deren Kommutatorrelationen ebenfalls denen in Kapitel 5.1 entsprechen ((214) und (215)) und damit geradliniges Rechnen erlauben.

- Zeitentwicklungsoperator:
  - Ausgehend von (345) lässt sich
    $$U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \quad , \quad U^\dagger(t_1,t_2) = U(t_2,t_1) \tag{349}$$
    geradlinig zeigen (Hausaufgabe).
  - U erfüllt folgende DGl:
    $$i\partial_t U(t,t_0) \;=\; e^{+iH_0t}\underbrace{(H-H_0)}_{=H_{\rm int}}e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0t_0} \;=\; \underbrace{e^{+iH_0t}H_{\rm int}e^{-iH_0t}}_{=H_I(t)}U(t,t_0) \;=$$
    $$= \; H_I(t)U(t,t_0) \tag{350}$$
    (genau wie H_0 ist $H_{\rm int}$ nicht zeitunabhängig und bezeichnet im Folgenden stets $H_{\rm int}(t=0)$; H_I wird als Hamilton-Operator des WW-Bilds bezeichnet; diese übliche Notation ist nicht konsistent, da H_I nicht den vollständigen Hamilton-Operator im WW-Bild bezeichnet, sondern nur den WW Anteil; eine bessere Notation wäre $H_{{\rm int},I}$).
  - Lösung der DGl (350) mit der entsprechend der Definition von U notwendigen AB $U(t_0,t_0)=1$:
    $$U(t,t_0) \;=\; T\Big\{\exp\Big(-i\int_{t_0}^{t}dt'\,H_I(t')\Big)\Big\} \tag{351}$$
    (kann durch Entwicklung der Exponentialfunktion Ordnung für Ordnung nachgeprüft werden).
  - Ausdrücken von H_I durch ϕ_I:
    $$H_I(t) \;=\; e^{+iH_0t}H_{\rm int}e^{-iH_0t} \;=\; e^{+iH_0t}\Big(\int d^3r\,\frac{\lambda}{4!}(\underbrace{\phi(\mathbf{r},0)}_{=\phi_I(\mathbf{r},0)})^4\Big)e^{-iH_0t} \;=$$
    $$= \; \int d^3r\,\frac{\lambda}{4!}(\phi_I(\mathbf{r},t))^4. \tag{352}$$
- Beziehung zwischen $|0\rangle$ und $|\Omega\rangle$:
  - Betrachte die Zeitentwicklung von $|0\rangle$ in der WW ϕ^4-Theorie:
    $$e^{-iHt}|0\rangle \;=\; \sum_n |n\rangle e^{-iE_nt}\langle n|0\rangle \;=\; |\Omega\rangle e^{-iE_\Omega t}\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq\Omega}|n\rangle e^{-iE_nt}\langle n|0\rangle, \tag{353}$$
    wobei $|n\rangle$ die Energieeigenzustände der WW ϕ^4-Theorie bezeichnen.
  - Betrachte den Limes $t\to\infty(1-i\epsilon)$ (die Zeit wird also imaginär mit einem winzigen Imaginärteil; viele der Limites $t\to\infty$ sind in der QFT in dieser Weise zu interpretieren; schreibe im Folgenden nur $t\to\infty$; siehe [8]):
    $$|\Omega\rangle \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{-iE_\Omega t}\langle\Omega|0\rangle}e^{-iHt}|0\rangle \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{-i(E_\Omega-E_0)t}\langle\Omega|0\rangle}\underbrace{e^{-iHt}e^{+iH_0t}}_{=U^\dagger(-t,0)}|0\rangle \;=$$
    $$= \; \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{-i(E_\Omega-E_0)t}\langle\Omega|0\rangle}U(0,-t)|0\rangle, \tag{354}$$
    wobei $\langle\Omega|0\rangle\neq 0$ angenommen wurde (für $\lambda\ll 1$, d.h. wenn Störungstheorie anwendbar ist, sind $|0\rangle$ und $|\Omega\rangle$ ähnlich) und die rechte Gleichung in (349) verwendet wurde.

– Analog lässt sich

$$\langle\Omega| \;=\; \lim_{t\to\infty}\langle 0|U(+t,0)\frac{1}{e^{-i(E_\Omega-E_0)t}\langle 0|\Omega\rangle} \tag{355}$$

zeigen.

***** 18. Dezember 2024 (19. Vorlesung) *****

- n-Punkt-Funktionen:
  - O.B.d.A. im Folgenden $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$. Damit $\langle\Omega|\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)|\Omega\rangle = \langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle$.
  - Ausdrücken der n-Punkt-Funktionen durch ϕ_I:

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)|\Omega\rangle \;=\\
&\quad= \langle\Omega|\Big(U^\dagger(t_1,0)\phi_I(x_1)U(t_1,0)\Big)\Big(U^\dagger(t_2,0)\phi_I(x_2)U(t_2,0)\Big)\ldots\\
&\qquad\Big(U^\dagger(t_n,0)\phi_I(x_n)U(t_n,0)\Big)|\Omega\rangle \;=\\
&\quad= \langle\Omega|U(0,t_1)\phi_I(x_1)U(t_1,t_2)\phi_I(x_2)U(t_2,t_3)\ldots U(t_{n-1},t_n)\phi_I(x_n)U(t_n,0)|\Omega\rangle,
\end{aligned} \tag{356}$$

    wobei die beiden Gleichungen in (349) verwendet wurden.
  - Führe neuen Zeitpunkt t ein mit $+t > t_1 > \ldots > t_n > -t$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)|\Omega\rangle \;=\\
&\quad= \langle\Omega|U(0,+t)\Big(U(+t,t_1)\phi_I(x_1)U(t_1,t_2)\phi_I(x_2)U(t_2,t_3)\ldots\\
&\qquad U(t_{n-1},t_n)\phi_I(x_n)U(t_n,-t)\Big)U(-t,0)|\Omega\rangle \;=\\
&\quad= \langle\Omega|U(0,+t)T\Big\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\ldots\phi_I(x_n)U(+t,-t)\Big\}U(-t,0)|\Omega\rangle \;=\\
&\quad= \langle\Omega|U(0,+t)T\Big\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\ldots\phi_I(x_n)\exp\Big(-i\int_{-t}^{+t}dt'\,H_I(t')\Big)\Big\}\\
&\qquad U(-t,0)|\Omega\rangle
\end{aligned} \tag{357}$$

    (der Übergang am zweiten Gleichheitszeichen ist zulässig wegen der Zeitordnung).
  - Betrachte den Limes $t\to\infty$ und verwende (354) und (355):

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|T\Big\{\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\Big\}|\Omega\rangle \;=\\
&\quad= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{-2i(E_\Omega-E_0)t}|\langle 0|\Omega\rangle|^2}\\
&\qquad\langle 0|T\Big\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\ldots\phi_I(x_n)\exp\Big(-i\int_{-t}^{+t}dt'\,H_I(t')\Big)\Big\}|0\rangle
\end{aligned} \tag{358}$$

    (die linke Seite wurde durch Wiedereinführen der Zeitordnung in dem Sinn verallgemeinert, dass $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$ nicht mehr erforderlich ist: (1) Ersetze auf der linken Seite $\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)$ durch $T\{\phi(x_{p_1})\phi(x_{p_2})\ldots\phi(x_{p_n})\}$, wobei p_j eine beliebige Permutation von $j = 1,\ldots,n$ ist; (2) innerhalb von $T\{\ldots\}$ auf der rechten Seite können die Feldoperatoren beliebig vertauscht werden; ordne sie in analoger Weise $\phi(x_{p_1})\phi(x_{p_2})\ldots\phi(x_{p_n})$ an; (3) benenne x_{p_j} in x_j um).

– Benutze

$$1 \;=\; \langle\Omega|\Omega\rangle \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{-2i(E_\Omega-E_0)t}|\langle 0|\Omega\rangle|^2}\langle 0|T\Big\{\exp\Big(-i\int_{-t}^{+t}dt'\,H_I(t')\Big)\Big\}|0\rangle, \tag{359}$$

um den Vorfaktor loszuwerden.

– Endergebnis:

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|T\Big\{\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\Big\}|\Omega\rangle \;=\\
&\quad= \frac{\langle 0|T\Big\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\ldots\phi_I(x_n)\exp\Big(-i\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\,H_I(t')\Big)\Big\}|0\rangle}{\langle 0|T\Big\{\exp\Big(-i\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\,H_I(t')\Big)\Big\}|0\rangle} \;=\\
&\quad= \frac{\langle 0|T\Big\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\ldots\phi_I(x_n)\exp\Big(-i\int d^4y\,\frac{\lambda}{4!}(\phi_I(y))^4\Big)\Big\}|0\rangle}{\langle 0|T\Big\{\exp\Big(-i\int d^4y\,\frac{\lambda}{4!}(\phi_I(y))^4\Big)\Big\}|0\rangle}.
\end{aligned} \tag{360}$$

Während die linke Seite einer n-Punkt-Funktion in der WW ϕ^4-Theorie entspricht, enthält die rechte Seite ausschließlich Feldoperatoren der freien ϕ^4-Theorie (siehe (348)) und den Vakuumzustand der freien ϕ^4-Theorie und kann damit mit den Erzeuger- und Vernichtertechniken aus Kapitel 5 berechnet werden.

6.4 Der Feynman-Propagator

- Im Folgenden wird überwiegend mit ϕ_I gerechnet. Verwende daher die vereinfachte Notation $\phi \to \phi'$ (WW Feldoperator) und $\phi_I \to \phi$ (freier Feldoperator).

- Wesentlicher "Baustein" bei der Zerlegung und Berechnung von (360): Feynman-Propagator,

$$\Delta_F(x-y) \;=\; \langle 0|T\Big\{\phi(x)\phi(y)\Big\}|0\rangle. \tag{361}$$

Dieser beschreibt in der freien skalaren QFT die Amplitude ein Teilchen, das zum Zeitpunkt y^0 bei $\mathbf{y}$ präpariert wurde, zum späteren Zeitpunkt x^0 bei $\mathbf{x}$ zu finden (falls $x^0 > y^0$) oder umgekehrt (falls $y^0 > x^0$).

- Aufspalten der Feldoperatoren in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, $\phi = \phi^+ + \phi^-$,

$$\phi^+(x) \;=\; \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\,a(\mathbf{k})e^{-ikx} \quad,\quad \phi^-(x) \;=\; \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\,a^\dagger(\mathbf{k})e^{+ikx}. \tag{362}$$

Es gilt $\phi^+(x)|0\rangle = 0$ und $\langle 0|\phi^-(x) = 0$.

- $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned}
&T\Big\{\phi(x)\phi(y)\Big\} \;=\\
&\quad= \phi^+(x)\phi^+(y) + \underbrace{\phi^+(x)\phi^-(y)}_{\phi^-(y)\phi^+(x)+[\phi^+(x),\phi^-(y)]} + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \;=\\
&\quad= :\phi(x)\phi(y): + [\phi^+(x),\phi^-(y)]
\end{aligned} \tag{363}$$

(: ... : bezeichnet "Normalordnung", d.h. alle Erzeugungsoperatoren stehen links, alle Vernichtungsoperatoren rechts, z.B. : $a(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2) := a^\dagger(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_1)$).

- $y^0 > x^0$:

$$T\Big\{\phi(x)\phi(y)\Big\} \;=\; \ldots \;=\; :\phi(x)\phi(y): + [\phi^+(y), \phi^-(x)]. \tag{364}$$

- Damit

$$T\Big\{\phi(x)\phi(y)\Big\} \;=\; :\phi(x)\phi(y): + \Theta(x^0 - y^0)[\phi^+(x), \phi^-(y)] + \Theta(y^0 - x^0)[\phi^+(y), \phi^-(x)]. \tag{365}$$

- Da $\langle 0| : \phi(x)\phi(y) : |0\rangle = 0$ und der Kommutator $[\phi^+(x), \phi^-(y)]$ kein Operator ist, sondern lediglich eine Funktion, folgt

$$\begin{aligned}\Delta_F(x-y) \;&=\; \Theta(x^0 - y^0)[\phi^+(x), \phi^-(y)] + \Theta(y^0 - x^0)[\phi^+(y), \phi^-(x)] \;= \\ &=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\Big(\Theta(x^0 - y^0)e^{-ik(x-y)} + \Theta(y^0 - x^0)e^{-ik(y-x)}\Big).\end{aligned} \tag{366}$$

- Mit Hilfe des Residuensatzes kann man

$$\Delta_F(x-y) \;=\; \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{367}$$

zeigen (ϵ ist eine winzige positive Zahl; sie definiert, welcher Pol beim Residuensatz innerhalb des Integrationswegs liegt):

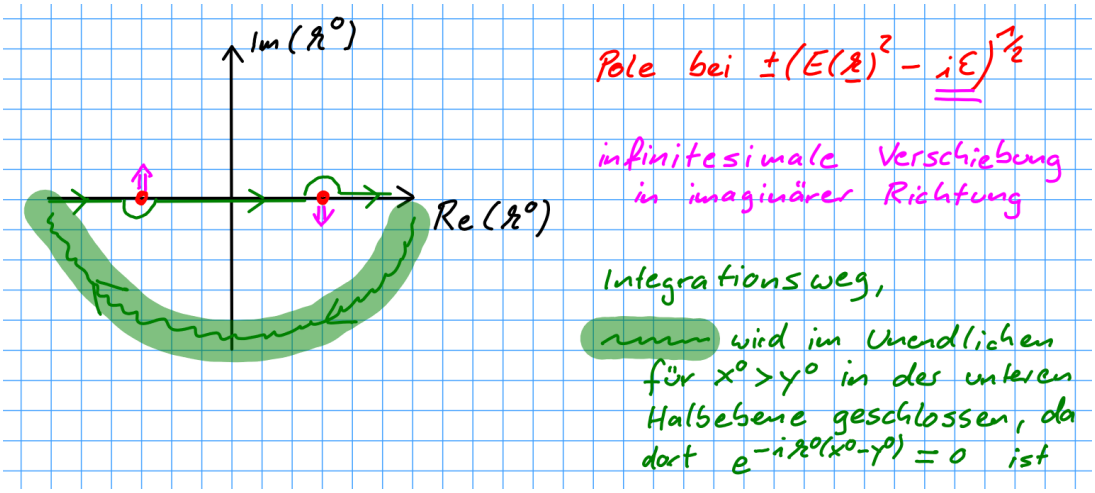
  - Zunächst:

$$\begin{aligned}\Delta_F(x-y) \;&=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int \frac{dk^0}{2\pi} e^{-ik^0(x^0-y^0)} \frac{i}{(k^0)^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2 - i\epsilon)} \;= \\ &=\; -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int \frac{dk^0}{2\pi i} \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0 - \sqrt{E(\mathbf{k})^2 - i\epsilon})(k^0 + \sqrt{E(\mathbf{k})^2 - i\epsilon})}.\end{aligned} \tag{368}$$

  - Residuensatz, $x^0 - y^0 > 0$, der k^0-Integrationsweg muss in der negativen imaginären Halbebene geschlossen werden,

$$\begin{aligned}\Delta_F(x-y) \;&=\; -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Big(-\frac{e^{-iE(\mathbf{k})(x^0-y^0)}}{2E(\mathbf{k})}\Big) \;= \\ &=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} e^{-ik(x-y)}\end{aligned} \tag{369}$$

(der Pol bei $k^0 = \sqrt{E(\mathbf{k})^2 - i\epsilon}$ liegt innerhalb des Integrationswegs; zusätzliches Minuszeichen, weil der Integrationsweg im Uhrzeigersinn verläuft, also "entgegen der rechten Hand").



– Analoges Vorgehen für $y^0 - x^0 > 0$ liefert die Behauptung (367).

- Häufig verwendet man auch den Feynman-Propagator "im Implusraum",

$$\tilde{\Delta}_F(k) \;=\; \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \;=\; \int d^4x\, e^{+ikx} \Delta_F(x) \tag{370}$$

(folgt unmittelbar aus (367)).

6.5 Störungsentwicklung von n-Punkt-Funktionen

- Annahme/Voraussetzung: "Kopplungskonstante" $\lambda \ll 1$, d.h. H_{int} ist klein gegenüber H_0. Damit können die Effekte der WW Ordnung für Ordnung in λ berechnet werden. Der Entwicklungspunkt der entsprechenden Taylor- bzw. Störungsreihe ist $\lambda = 0$, die freie ϕ^4-Theorie.

- Wick-Theorem:

$$\begin{aligned} &T\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\} \;= \\ &\quad = \;:\phi(x_1)\ldots\phi(x_n): + \text{alle Kombinationen von Normalordnung und Kontraktionen,} \end{aligned} \tag{371}$$

wobei eine Kontraktion zweier Felder $\phi(x_1)$ und $\phi(x_2)$ der Feynman-Propagator $\Delta_F(x_1 - x_2)$ ist (Gleichung (368)).

– Hier keine Herleitung des Wick-Theorems (findet sich z.B. in [5], Kapitel 4.3).

– Beispiel:

$$\begin{aligned} &T\Big\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\Big\} \;= \\ &\quad = \;:\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4): \\ &\qquad + :\phi(x_1)\phi(x_2):\Delta_F(x_3 - x_4) + :\phi(x_1)\phi(x_3):\Delta_F(x_2 - x_4) \\ &\qquad + :\phi(x_1)\phi(x_4):\Delta_F(x_2 - x_3) + :\phi(x_2)\phi(x_3):\Delta_F(x_1 - x_4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ : \phi(x_2)\phi(x_4) : \Delta_F(x_1 - x_3) + : \phi(x_3)\phi(x_4) : \Delta_F(x_1 - x_2) \\
&+\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) \\
&+\Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3); \qquad (372)
\end{aligned}
$$

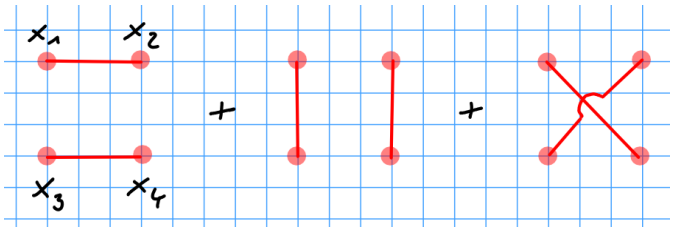
da $\langle 0| : \phi(x_1) \ldots : |0\rangle = 0$,

$$
\begin{aligned}
\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\Big\}|0\rangle \quad &= \\
&+\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) \\
&+\Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3). \qquad (373)
\end{aligned}
$$

- Die Störungsentwicklung einer n-Punkt-Funktion entspricht einer Taylor-Entwicklung der beiden Exponentialfunktionen der rechten Seite von (360), d.h. einer Entwicklung in λ:

$$
\begin{aligned}
&\langle \Omega|T\Big\{\phi'(x_1)\ldots\phi'(x_n)\Big\}|\Omega\rangle \quad = \\
&= \quad \frac{\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\exp\Big(-i\int d^4y\,\frac{\lambda}{4!}(\phi(y))^4\Big)\Big\}|0\rangle}{\langle 0|T\Big\{\exp\Big(-i\int d^4y\,\frac{\lambda}{4!}(\phi(y))^4\Big)\Big\}|0\rangle} \quad = \\
&= \quad \Big(\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\Big\}|0\rangle - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)(\phi(y))^4\Big\}|0\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2)\Big) \\
&\quad \Big(1 + \frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,\langle 0|T\Big\{(\phi(y))^4\Big\}|0\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2)\Big) \quad = \\
&= \quad \langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\Big\}|0\rangle \\
&\quad -\frac{i\lambda}{4!}\Big(\int d^4y\,\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)(\phi(y))^4\Big\}|0\rangle \\
&\qquad +\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\Big\}|0\rangle\int d^4y\,\langle 0|T\Big\{(\phi(y))^4\Big\}|0\rangle\Big) \\
&\quad +\mathcal{O}(\lambda^2). \qquad (374)
\end{aligned}
$$

- Beispiel: Berechnung von $\langle \Omega|T\{\phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3)\phi'(x_4)\}|\Omega\rangle$, liefert die nötigen Elemente der S-Matrix für elastische Streuung $\phi + \phi \to \phi + \phi$.
  - Ordnung λ^0:
    - Entspricht (373), also freie, d.h. unabhängige Propagation bzw. Bewegung zweier ϕ-Teilchen
      $x_1 \leftrightarrow x_2$ und $x_3 \leftrightarrow x_4$ sowie
      $x_1 \leftrightarrow x_3$ und $x_2 \leftrightarrow x_4$ sowie
      $x_1 \leftrightarrow x_4$ und $x_2 \leftrightarrow x_3$.
    - Wird bildlich in Form des Feynman-Diagramms



geschrieben (Feynman-Diagramme sind eine kompakte bildliche aber dennoch präzise Notation für längliche mathematische Ausdrücke).

* Beitrag zur S-Matrix: Die LSZ-Formel (340) erfordert die Fourier-transformierte n-Punkt-Funktion,

$$\int d^4x_1\, e^{+ip_1x_1} \int d^4x_2\, e^{+ip_2x_2} \int d^4x_3\, e^{-iq_1x_3} \int d^4x_4\, e^{-iq_2x_4}$$
$$\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\Big\}|0\rangle \quad =$$
$$\int d^4x_1\, e^{+ip_1x_1} \int d^4x_2\, e^{+ip_2x_2} \int d^4x_3\, e^{-iq_1x_3} \int d^4x_4\, e^{-iq_2x_4}$$
$$\Big(\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4)+\dots\Big) \quad =$$
$$= \underbrace{\int d^4x_2\, e^{+i(p_1+p_2)x_2}}_{=(2\pi)^4\delta(p_1+p_2)} \underbrace{\int d^4(x_1-x_2)\, e^{+ip_1(x_1-x_2)}\Delta_F(x_1-x_2)}_{=\tilde\Delta_F(p_1)}$$
$$\underbrace{\int d^4x_4\, e^{-i(q_1+q_2)x_4}}_{=(2\pi)^4\delta(q_1+q_2)} \underbrace{\int d^4(x_3-x_4)\, e^{-iq_1(x_3-x_4)}\Delta_F(x_3-x_4)}_{=\tilde\Delta_F(q_1)}+\dots \quad =$$
$$= (2\pi)^8\delta(p_1+p_2)\delta(q_1+q_2)\frac{i}{p_1^2-m^2}\frac{i}{q_1^2-m^2}+\dots, \tag{375}$$

wobei (370) verwendet wurde. Damit

$$\frac{i}{p_1^2-m^2}\frac{i}{p_2^2-m^2}\frac{i}{q_1^2-m^2}\frac{i}{q_2^2-m^2}\langle \mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2|S|\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\rangle \quad \sim$$
$$\sim \quad (2\pi)^8\delta(p_1+p_2)\delta(q_1+q_2)\frac{i}{p_1^2-m^2}\frac{i}{q_1^2-m^2}+\dots \tag{376}$$

Die rechte Seite ist in der Umgebung der Multipole $p_j^0 \to E(\mathbf{p}_j)$, $q_j^0 \to E(\mathbf{q}_j)$ weniger divergent als die linke Seite, also verschwindender λ^0-Beitrag zu Elementen der S-Matrix $\langle \mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2|S|\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\rangle$ mit $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{q}_k$.

* Allgemeine Regel: Kein Feynman-Diagramm, das einen Feynman-Propagator $\Delta_F(x_l-x_m)$ (x_l und x_m bezeichnen äußere Punkte) beinhaltet (also ein Teilchen, das am WW-Prozess nicht teilnimmt), trägt zu Elementen der S-Matrix mit $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{q}_k$ bei.

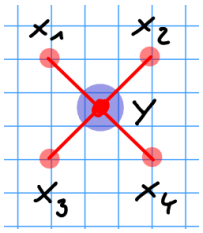
– Ordnung λ^1:

* Enthält

$$-\frac{i\lambda}{4!}\Big(\int d^4y\, \langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)(\phi(y))^4\Big\}|0\rangle+\dots\Big) \quad =$$
$$= \quad -i\lambda\int d^4y\, \Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y)+\dots, \tag{377}$$

also Propagation bzw. Bewegung zweier ϕ-Teilchen von/nach x_1, x_2, x_3, x_4 mit WW bei y (Faktor 1/4! verschwindet, weil es 4! mögliche Kontraktionen gibt, die mathematisch identisch sind).

* Beitrag wird bildlich in Form des Feynman-Diagramms



geschrieben.

* Beitrag zur S-Matrix: Die LSZ-Formel (340) erfordert die Fourier-transformierte n-Punkt-Funktion,

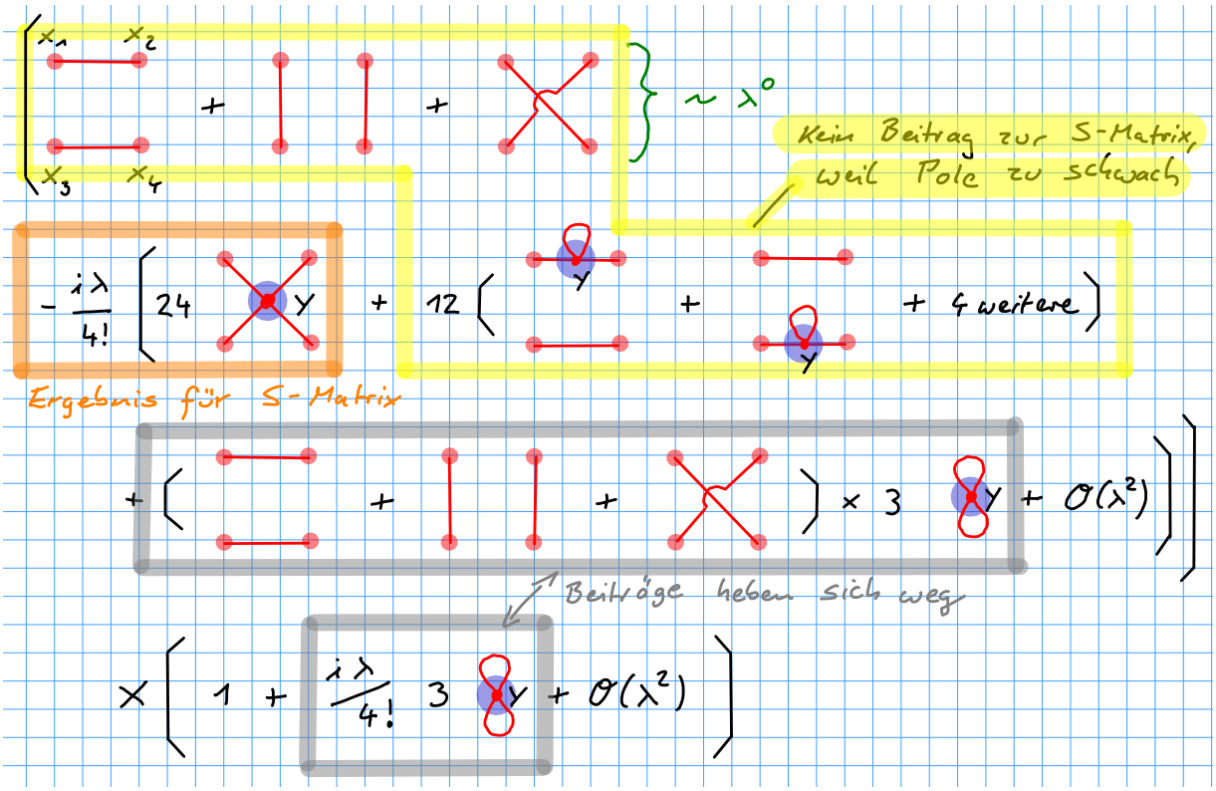
$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1\, e^{+ip_1x_1} \int d^4x_2\, e^{+ip_2x_2} \int d^4x_3\, e^{-iq_1x_3} \int d^4x_4\, e^{-iq_2x_4} \\
&\qquad \Big(-i\lambda \int d^4y\, \Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y)\Big) + \ldots \quad = \\
&= \quad -i\lambda \int d^4y \underbrace{\int d^4x_1\, e^{+ip_1x_1}\Delta_F(x_1-y)}_{=e^{+ip_1y}\tilde{\Delta}_F(p_1)} \underbrace{\int d^4x_2\, e^{+ip_2x_2}\Delta_F(x_2-y)}_{=e^{+ip_2y}\tilde{\Delta}_F(p_2)} \\
&\quad \underbrace{\int d^4x_3\, e^{+iq_1x_3}\Delta_F(x_3-y)}_{=e^{-iq_1y}\tilde{\Delta}_F(q_1)} \underbrace{\int d^4x_4\, e^{+iq_2x_4}\Delta_F(x_4-y)}_{=e^{-iq_2y}\tilde{\Delta}_F(q_2)} \quad = \\
&= \quad -i\lambda(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\frac{i}{p_1^2-m^2}\frac{i}{p_2^2-m^2}\frac{i}{q_1^2-m^2}\frac{i}{q_2^2-m^2} + \ldots,
\end{aligned} \tag{378}$$

wobei (370) verwendet wurde. Aus der LSZ-Formel folgt

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|S|\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle \quad = \quad -i\lambda(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-q_1-q_2) + \ldots \tag{379}$$

für $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{q}_k$.

* Sämtliche Feynman-Diagramme bis einschließlich $\mathcal{O}(\lambda)$ ((374) graphisch):



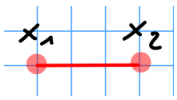
Vakuumdiagramme heben sich weg (allgemeine Regel für beliebige λ-Ordnungen). Kein Beitrag zu den Elementen der S-Matrix, wenn mindestens ein Teilchen nicht an der WW teilnimmt (siehe oben).

– Endergebnis:

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | S | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \quad = \quad -i\lambda(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{380}$$

für $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{q}_k$.

- Beispiel: Berechnung von $\langle \Omega | T\{\phi'(x_1)\phi'(x_2)\} | \Omega \rangle$, des ϕ-Teilchen-Propagators.
  – Ordnung λ^0:
    * Entspricht dem Feynman-Propagator (367), also freie Propagation bzw. Bewegung eines ϕ-Teilchens.
    * Wird bildlich in Form des Feynman-Diagramms



geschrieben.

  – Ordnung λ^1:

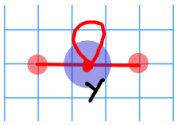
* Enthält

$$-\frac{i\lambda}{4!}\left(\int d^4y\,\langle 0|T\Big\{\phi(x_1)\phi(x_2)(\phi(y))^4\Big\}|0\rangle + \dots\right) \quad =$$

$$= \quad -\frac{i\lambda}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(y-y) + \dots \quad = \quad \dots, \tag{381}$$

also Propagation bzw. Bewegung eines ϕ-Teilchens von/nach x_1, x_2, WW mit einem virtuellen ϕ-Teilchen bei y (Faktor 1/4! wird durch 1/2 ersetzt, weil es 12 mögliche Kontraktionen gibt, die mathematisch identisch sind).

* Beitrag wird bildlich in Form des Feynman-Diagramms



geschrieben.

* Einsetzen von (366):

$$\dots \quad =$$

$$= \quad -\frac{i\lambda}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} + \dots \quad \sim$$

$$\sim \quad -\frac{i\lambda}{4(2\pi)^3}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\underbrace{4\pi\int_0^\infty dk\,k^2\frac{1}{k}}_{=2\pi\lim_{k\to\infty}k^2=\infty} \tag{382}$$

... unendlicher Beitrag ...?!

* Ähnliche Unendlichkeiten treten auch bei anderen Feynman-Diagrammen auf, die Loops enthalten.
* Ausweg: Renormierung, "schicke" die in der Lagrange-Dichte auftretenden Parameter (in ϕ^4-Theorie m, λ, ϕ) auf geeignete Weise gegen extreme Werte (i.d.R. 0 oder ∞), um trotz der auftretenden Unendlichkeiten endliche physikalische Ergebnisse zu erhalten (siehe [8], Kapitel 8).

- Feynman-Regeln:
  - In der Praxis startet man zur Berechnung von n-Punkt-Funktionen nicht mit Rechnungen/Formeln wie z.B. (374) oder (382), sondern zeichnet zunächst alle bis zur gewünschten Ordnung auftretenden Feynman-Diagramme. Diese übersetzt man dann mit Hilfe der unten angegebenen Feynman-Regeln in mathematische Ausdrücke.
  - Feynman-Regeln im Ortsraum für n-Punkt-Funktionen

    $$\langle\Omega|T\Big\{\phi'(y_1)\dots\phi'(y_n)\Big\}|\Omega\rangle : \tag{383}$$

    * $\Delta_F(x,y)$ für jede Linie von x nach y ("freie Bewegung" eines ϕ-Teilchens von x nach y).
    * Integration über WW-Punkte y,

      $$-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,. \tag{384}$$

* Vorfaktoren durch einfache kombinatorische Überlegungen (zählen der äquivalenten Kontraktionen).

– Feynman-Regeln im Impulsraum für Fourier-transformierte n-Punkt-Funktionen (zeitgeordnete Produkte von n Feldoperatoren $\phi(y_j)$), d.h. jeder in der n-Punkt-Funktion auftretende Feldoperator wird gemäß $\int d^4y_j\, e^{-iq_jy_j}$ für ein einlaufendes Teilchen (Teilchen im initialen Zustand, siehe (340)) und gemäß $\int d^4y_j\, e^{+ip_jy_j}$ für ein auslaufendes Teilchen (Teilchen im finalen Zustand, siehe (340)) Fourier-transformiert (damit können S-Matrix-Elemente direkt mit Hilfe der LSZ-Formel (340) abgelesen werden).

  * Jede Linie erhält einen Pfeil, der die Impulsrichtung anzeigt. Die Pfeilrichtung ist dabei willkürlich. Äußere Linien werden mit dem entsprechenden Impuls p_j bzw. q_j beschriftet, innere Linien mit einem neuen Impuls k_j. Jede Linie liefert

    $$\tilde{\Delta}_F(q) \quad = \quad \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad , \quad q \quad = \quad p_j, q_j, k_j. \tag{385}$$

    Da die Beiträge $\tilde{\Delta}_F(q)$ der äußeren Linien immer in gleicher Weise auftreten und diese Beiträge sich auch in der linken Seite der LSZ-Formel (340) finden, werden sie i.d.R. weggelassen.
  * Jeder WW-Punkt (Vertex) liefert

    $$-(2\pi)^4 \frac{i\lambda}{4!} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), \tag{386}$$

    wobei die k_j die einlaufenden Impulse sind.
  * Innere Linien liefern zusätzlich eine Impulsintegration

    $$\int \frac{d^4k_j}{(2\pi)^4}. \tag{387}$$

  * Kombinatorische Vorfaktoren analog zum Ortsraum.

7 Zerfalls- und Streuprozesse in der QFT

- Rigorose Behandlung von Zerfalls- und Streuprozessen ist schwierig/aufwändig. Im Folgenden daher eher eine Skizze ihrer QFT Beschreibung.

7.1 Zerfallsprozesse

- Ein Teilchen A, das mit anderen Teilchen B_j auf geeignete Weise wechselwirkt, kann in diese Teilchen zerfallen, falls $m_A > \sum_j m_{B_j}$ (Energieerhaltung damit nicht verletzt): $A \to B_1 + B_2 + \ldots$
  - Zerfall $\phi \to \phi + \phi + \phi$ in ϕ^4-Theorie ist damit also ausgeschlossen.
  - Betrachte daher als einfaches Beispiel zwei reelle Skalarfelder A und B (Massen m_A und m_B mit $m_A > 2m_B$) mit WW

    $$H_{\text{int}} = \int d^3r\, \lambda A B^2 \tag{388}$$

    und berechne die Zerfallsrate (Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit) von $A \to B + B$.

- Zerfallswahrscheinlichkeit nach sehr langer Zeit (S-Matrix entspricht $t_f - t_i \to \infty$): Summiere das Betragsquadrat der Übergangsamplituden $\langle B(\mathbf{p}_1), B(\mathbf{p}_2)|S|A(\mathbf{k}=0)\rangle$ über alle finalen Zustände (d.h. über alle Impulse der B-Teilchen):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{p}_1}\sum_{\mathbf{p}_2}\Big|\langle B(\mathbf{p}_1), B(\mathbf{p}_2)|S|A(\mathbf{k}=0)\rangle\Big|^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_1\,\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_2\,\Big|\langle B(\mathbf{p}_1), B(\mathbf{p}_2)|S|A(\mathbf{k}=0)\rangle\Big|^2 \end{aligned} \tag{389}$$

  (das A-Teilchen ist in Ruhe, daher $\mathbf{k}=0$; $\sum_{\mathbf{p}} \to (1/(dp)^3)\int d^3p = (V/(2\pi)^3)\int d^3p$).

- Normierung der Zustände:
  - Bisher "relativistische Normierung", z.B. $\langle \mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\rangle = (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ (siehe (265)).
  - (389) erfordert "Normierung auf 1", z.B. $\langle \mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\rangle = \delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$.
  - Korrigiere daher für jeden Zustand und jedes Teilchen mit Impuls $\mathbf{k}$ mit dem Faktor

    $$\begin{aligned} \Big((2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\delta(0)\Big)^{1/2} &= \left((2\pi)^3 2E(\mathbf{k})\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\, e^{i(\mathbf{k}=0)\mathbf{r}}\right)^{1/2} = \\ &= \Big(2E(\mathbf{k})V\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{390}$$

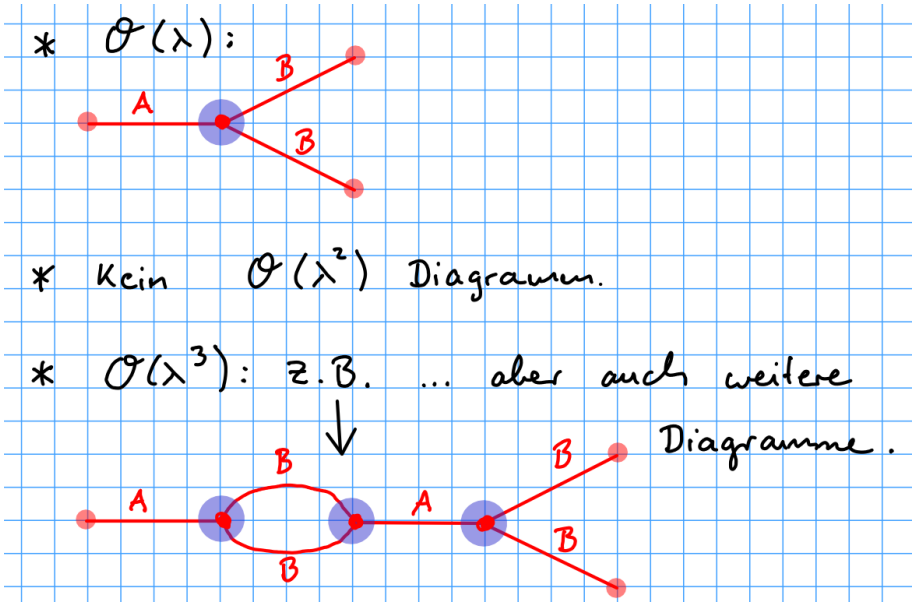
  - (389) wird damit zu

$$\begin{aligned} W &= \\ &= \frac{1}{2}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_1\,\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_2\,\frac{1}{2m_A V}\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)V}\frac{1}{2E(\mathbf{p}_2)V} \\ &\quad \Big|\langle B(\mathbf{p}_1), B(\mathbf{p}_2)|S|A(\mathbf{k}=0)\rangle\Big|^2. \end{aligned} \tag{391}$$

- Berechnung der Übergangsamplituden wie in Kapitel 6 am Beispiel der ϕ^4-Theorie gezeigt:

$$\langle B(\mathbf{p}_1), B(\mathbf{p}_2)|S|A(\mathbf{k}=0)\rangle = -2i\lambda(2\pi)^4\delta(k-p_1-p_2)+\mathcal{O}(\lambda^3) \tag{392}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\langle B(\mathbf{p}_1), B(\mathbf{p}_2)|S|A(\mathbf{k}=0)\rangle\right|^2 = \\
&= 4\lambda^2(2\pi)^8\delta(k-p_1-p_2)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{i(k-p_1-p_2=0)x}+\mathcal{O}(\lambda^4) = \\
&= 4\lambda^2(2\pi)^4\delta(k-p_1-p_2)V(t_f-t_i)+\mathcal{O}(\lambda^4).
\end{aligned} \tag{393}$$



- Zerfallsrate = Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{W}{t_f-t_i} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_1\,\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p_2\,\frac{1}{2m_AV}\frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)V}\frac{1}{2E(\mathbf{p}_2)V}4\lambda^2(2\pi)^4\delta(k-p_1-p_2)V \\
&\quad +\mathcal{O}(\lambda^4) = \\
&= \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2 4m_A}\int d^3p_1\,\frac{1}{(E(\mathbf{p}_1))^2}\delta(m_A-2E(\mathbf{p}))+\mathcal{O}(\lambda^4) = \\
&= \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2 4m_A}4\pi\int_0^\infty dp\,p^2\frac{1}{(E(p))^2}\frac{\delta(m_A/2-E(p))}{2}+\mathcal{O}(\lambda^4) = \\
&= \frac{\lambda^2}{8\pi m_A}\int_{m_B}^\infty dE\,Ep(E)\,\frac{1}{E^2}\delta(m_A/2-E)+\mathcal{O}(\lambda^4) = \\
&= \frac{\lambda^2\sqrt{(m_A/2)^2-m_B^2}}{4\pi m_A^2}+\mathcal{O}(\lambda^4),
\end{aligned} \tag{394}$$

wobei

– $\int d^3p = \int_0^\infty dp\, p^2 \int_0^\theta d\theta\, \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi$,
– $dE = (dE/dp)dp = (p/E)dp$,
– $\int_0^\infty dp\, p = \int_m^\infty dE\, E$

verwendet wurde (einfacher Check: $[\lambda] = 1/\text{Länge}$, Γ hat also die richtige Dimension).

7.2 Streuprozesse

- Wirkungsquerschnitt σ:
  - $[\sigma] = (\text{Länge})^2$.
  - Anschaulich: "Trefferfläche" eines Targetteilchens (z.B. Mechanik, Streuung zweier Kugeln mit Radien r_1 (Projektil) und r_2 (Target), $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$).
  - Präzise Definition:

$$N = j\sigma(t_f - t_i). \tag{395}$$

    N ist die mittlere Anzahl der Treffer im Zeitraum $t_f - t_i$, wenn ein Targetteilchen einem einlaufenden Strom j von Projektilen ausgesetzt ist. Für $j = \rho v = v/V$ (der Strom besteht aus einem einzelnen Teilchen) entspricht N der Wahrscheinlichkeit W für eine Streuung.

- Beispiel: ϕ^4-Theorie, elastische Streuung zweier ϕ-Teilchen, $\phi + \phi \to \phi + \phi$.
- Wahrscheinlichkeit für eine Streuung:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}_1} \sum_{\mathbf{p}_2} \Big| \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 = 0 \rangle \Big|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p_1 \, \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p_2 \, \frac{1}{2E(\mathbf{k}_1)V} \frac{1}{2mV} \frac{1}{2E(\mathbf{p}_1)V} \frac{1}{2E(\mathbf{p}_2)V} \\ &\quad \Big| \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 = 0 \rangle \Big|^2, \end{aligned} \tag{396}$$

  wobei im letzten Schritt von "Normierung auf 1" zu "relativistischer Normierung" übergegangen wurde.

- Übergangsamplituden (siehe (380)):

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 = 0 \rangle = -i\lambda(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{397}$$

$$\Big| \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 = 0 \rangle \Big|^2 = \lambda^2 (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) V(t_f - t_i) + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{398}$$

- Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{j(t_f - t_i)} = \frac{WV}{v(t_f - t_i)} = \\ &= \frac{\lambda^2}{128\pi^2 v E(\mathbf{k}_1) m} \int d^3p_1 \int d^3p_2 \, \frac{1}{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)} \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) + \mathcal{O}(\lambda^3) = \\ &= \ldots = \frac{\lambda^2}{32\pi(k_1 + k_2)^2} \end{aligned} \tag{399}$$

(Rechnung nicht ganz einfach; siehe z.B. [5], Abschnitte 4.5 und 4.6).

****** 17. Januar 2024 (22. Vorlesung) ******

8 Quantenelektrodynamik (QED)

8.1 QED = U(1)-Eichtheorie, Eichprinzip

- Die Lagrange-Dichte des freien Dirac-Felds,

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad = \quad \bar{\psi}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\Big)\psi, \tag{400}$$

  ist invariant unter globalen U(1)-Transformationen, d.h. mit $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\Lambda}\psi(x)$ (Λ = konstant, d.h. x-unabhängig) gilt $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu \psi')$. Die dieser globalen Symmetrie zugeordnete Erhaltungsgröße ist die elektrische Ladung (siehe Abschnitt 5.2).

- Gruppe $G = \mathrm{U}(N)$:
  - Gruppe der unitären $N \times N$-Matrizen: $g \circ g^\dagger = g^\dagger \circ g = 1$ ("Rotationsmatrizen im Komplexen"), wobei g bzw. g_j hier und im Folgenden Gruppenelemente bezeichnen, d.h. $g, g_j \in G$.
  - Gruppeneigenschaften:
    - Abgeschlossenheit: $g_1 \circ g_2 \in G$.
    - Assoziativgesetz: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$.
    - Existenz eines neutralen Elements, $1 \in G$: $1 \circ g = g \circ 1 = g$.
    - Existenz eines inversen Elements zu jedem g, $g^\dagger \in G$: $g \circ g^\dagger = g^\dagger \circ g = 1$.
    - Kommutativgesetz gilt nur für $G = \mathrm{U}(1)$: $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$. U(1) wird auch als Abelsche Gruppe bzw. U(1)-Eichtheorie als Abelsche Eichtheorie bezeichnet.

- Gruppe $G = \mathrm{U}(1)$: Der oben verwendete Phasenfaktor $e^{-i\Lambda}$ ist Element von U(1).

- Gruppe $G = \mathrm{SU}(N)$: Eine Untergruppe von U(N) mit der zusätzlichen Eigenschaft $\det(g) = 1$.

- Eichprinzip:
  - Fordere Invarianz von $\mathcal{L}$ unter lokalen U(1)-Transformationen,

    $$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) \quad = \quad e^{-i\Lambda(x)}\psi(x). \tag{401}$$

    Modifiziere die Lagrange-Dichte des freien Dirac-Felds auf minimale Weise, so dass die Forderung nach lokaler U(1)-Symmetrie (= Eichsymmetrie) erfüllt ist.
  - **Das Eichprinzip gehört zu den fundamentalen Prinzipien der Physik. Alle vier Fundamentalkräfte werden durch Eichtheorien beschrieben, die mit dem Eichprinzip konstruiert werden können (Elektromagnetismus = U(1)-Eichtheorie; Starke WW (QCD) = SU(3)-Eichtheorie; Schwache WW = SU(2)-Eichtheorie; Gravitation: Invariant unter lokalen Koordinatentransformationen).**

- Anwenden des Eichprinzips:

– Starte mit der Lagrange-Dichte des freien Dirac-Felds (400).

– Führe eine lokale U(1)-Transformation (= Eichtransformation) aus:

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu \psi') \quad = \quad \bar{\psi}(x) e^{+i\Lambda(x)} \Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \Big) e^{-i\Lambda(x)} \psi(x) \quad =$$
$$= \quad \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) + \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\partial_\mu \Lambda(x)) \psi(x). \tag{402}$$

– Führe ein neues Feld A_μ ein, das sich unter Eichtransformationen gemäß

$$A_\mu(x) \quad \rightarrow \quad A'_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \tag{403}$$

transformiert, und addiere einen zusätzlichen Term zu $\mathcal{L}$ der den "störenden Term" $+\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu \Lambda(x))\psi(x)$ in (402) kompensiert:

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\mu) \quad = \quad \bar{\psi}(x) \Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \Big) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma^\mu e A_\mu(x) \psi(x) \quad =$$
$$= \quad \bar{\psi}(x) \Big(i\gamma^\mu \underbrace{(\partial_\mu - ieA_\mu(x))}_{=D_\mu} - m \Big) \psi(x) \quad = \quad \bar{\psi}(x) \Big(i\gamma^\mu D_\mu - m \Big) \psi(x) \tag{404}$$

(D_μ wird als kovariante Ableitung bezeichnet, e als Kopplungskonstante).

– Damit

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\mu) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu \psi', A'_\mu) \quad = \quad \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\mu), \tag{405}$$

d.h. die Lagrange-Dichte (404) ist lokal U(1)-invariant, erfüllt also die Forderung des Eichprinzips.

- Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung unter Eichtransformationen:

$$D_\mu \psi(x) \quad \rightarrow \quad D'_\mu \psi'(x) \quad = \quad \Big(\partial_\mu - ie \Big(A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \Big) \Big) \Big(e^{-i\Lambda(x)} \psi(x) \Big) \quad =$$
$$= \quad e^{-i\Lambda(x)} D_\mu \psi(x). \tag{406}$$

$D_\mu \psi$ hat also das gleiche Transformationsverhalten, wie ψ. Damit ist die Eichinvarianz der Lagrange-Dichte (404) offensichtlich.

- Das neue Feld A_μ benötigt für eine physikalisch sinnvolle Dynamik selbst einen "kinetischen Term" (mindestens quadratische Terme in A_μ mit Ableitungen). Eine einfache Lorentz- und eichinvariante Kombination, die quadratisch in A_μ ist, ist

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{407}$$

wobei $F_{\mu\nu}$, der sogenannte Feldstärketensor, bereits eichinvariant ist und die Komponenten den elektrischen und magnetischen Feldern entsprechen (siehe Abschnitt 3.5).

- Lagrange-Dichte der QED:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi_l, \partial_\mu \psi_l, A_\mu) \quad = \quad \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_l \Big(i\gamma^\mu D_\mu - m_l \Big) \psi_l - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \tag{408}$$

wobei ψ_l Elektronen und Positronen (bzw. Myonen bzw. Tauonen) und A_μ Photonen beschreibt ($m_e = 0.511\,\text{MeV}$, $m_\mu = 106\,\text{MeV}$, $m_\tau = 1777\,\text{MeV}$).

8.2 Feynman-Regeln der QED (Lorenz-Eichung)

8.2.1 Der Feynman-Propagator für Elektronen (bzw. Myonen oder Tauonen)

- Zeitgeordnetes Produkt fermionischer Operatoren:

$$T\Big\{\psi_A(x)\bar{\psi}_B(y)\Big\} \;=\; \begin{cases} +\psi_A(x)\bar{\psi}_B(y) & \text{falls } x_0 > y_0 \\ -\bar{\psi}_B(y)\psi_A(x) & \text{falls } y_0 > x_0 \end{cases} \tag{409}$$

(beim Verbinden von S-Matrix-Elementen und n-Punkt-Funktionen tritt Zeitordnung auf [LSZ-Formel, siehe Abschnitt 6.2]; $\pm$ in (409) ergibt sich [im Gegensatz zum bosonischen Fall] auf Grund der Antivertauschungsrelationen fermionischer Operatoren).

- Feynman-Propagator für Elektronen:

$$S_{F,e}(x-y) \;=\; \langle 0|T\Big\{\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)\Big\}|0\rangle \;=\; \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)} \underbrace{\frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m_e)}{k^2 - m_e^2 + i\epsilon}}_{=\tilde{S}_{F,e}(k)} \tag{410}$$

(eine 4×4-Matrix im Spinraum; Berechnung analog zu Abschnitt 6.4). Aus den Überlegungen aus Kapitel 5.3, insbesondere Gl. (287), folgt
$\langle 0|T\{\psi(x)\psi(y)\}|0\rangle = \langle 0|T\{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle = 0$.

8.2.2 Der Feynman-Propagator für Photonen

- Verwende Lorenz-Eichung $\partial_\mu A_\mu = 0$ (siehe Abschnitt 5.4.3) und eine verallgemeinerte Form der Lagrange-Funktion (317)

$$\mathcal{L}(A^\mu, \partial_\mu A^\nu) \;=\; -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \;\;\to\;\; -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{411}$$

(in (317) $\xi = 1$: Feynman-Eichung; ebenfalls gängig ist $\xi = 0$: Landau-Eichung).

- Feynman-Propagator für Photonen:

$$D_{F,\mu\nu}(x-y) \;=\; \langle 0|T\Big\{A_\mu(x)A_\nu(y)\Big\}|0\rangle \;=$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)} \underbrace{\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left(\eta_{\mu\nu} + (\xi-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}_{=\tilde{D}_{F,\mu\nu}(k)}. \tag{412}$$

***** 22. Januar 2024 (23. Vorlesung) *****

8.2.3 Feynman-Regeln

- Feynman-Regeln im Impulsraum für Fourier-transformierte n-Punkt-Funktionen (zeitgeordnete Produkte von n Feldoperatoren $\psi_l(y_j)$, $\bar{\psi}_l(y_j)$ und/oder $A_\mu(y_j)$), d.h. jeder in der n-Punkt-Funktion auftretende Feldoperator wird gemäß $\int d^4y_j\, e^{-iq_jy_j}$ für ein einlaufendes Teilchen (Teilchen im initialen Zustand, siehe (340)) und gemäß $\int d^4y_j\, e^{+ip_jy_j}$ für ein auslaufendes Teilchen (Teilchen im finalen Zustand, siehe (340)) Fourier-transformiert (damit können S-Matrix-Elemente direkt mit Hilfe einer LSZ-Formel analog zu (340) abgelesen werden).

- Zeichne zunächst alle bis zur gewünschten Ordnung in e auftretenden Feynman-Diagramme.

- Jede Elektron-Linie (bzw. Myon-Linie bzw. Tauon-Linie) erhält einen Pfeil, der die Impulsrichtung anzeigt. Der Pfeil führt stets von ψ_l nach $\bar{\psi}_l$. Der Pfeil zeigt damit von einlaufenden Elektronen weg und zu auslaufenden Elektronen hin, umgekehrt für Positronen, d.h. Antiteilchen. Äußere Linien werden mit dem entsprechenden Impuls p_j bzw. q_j beschriftet, innere Linien mit einem neuen Impuls k_j. Jede innere Linie liefert

$$\tilde{S}_{F,l}(k_j) \;=\; \frac{i(\gamma^\mu k_{j,\mu} + m_l)}{k_j^2 - m_l^2 + i\epsilon}. \tag{413}$$

  Für äußere Linien gilt

  - einlaufende Elektronen mit Spin s_j liefern $\ldots u_{l,s_j}(q_j)$,
  - auslaufende Elektronen mit Spin r_j liefern $\bar{u}_{l,r_j}(p_j)\ldots$,
  - einlaufende Positronen mit Spin s_j liefern $\bar{v}_{l,s_j}(q_j)\ldots$,
  - auslaufende Positronen mit Spin r_j liefern $\ldots v_{l,r_j}(p_j)$,

  wobei Faktoren $\propto 1/(q_j^2 - m_l^2)$ bzw. $\propto 1/(p_j^2 - m_l^2)$, wie schon bei der ϕ^4-Theorie weggelassen werden (siehe Abschnitt 6.5).

- Jede Photon-Linie erhält einen Pfeil, der die Impulsrichtung anzeigt. Die Pfeilrichtung ist willkürlich. Außere Linien werden mit dem entsprechenden Impuls p_j bzw. q_j beschriftet, innere Linien mit einem neuen Impuls k_j. Jede innere Linie liefert

$$\tilde{D}_{F,\mu\nu}(k_j) \;=\; \frac{-i}{k_j^2 + i\epsilon}\left(\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{k_{j,\mu}k_{j,\nu}}{k^2}\right). \tag{414}$$

  Für äußere Linien gilt

  - ein- bzw. auslaufende Photonen mit Polarisation λ liefern $\epsilon_\mu(p,\lambda)$,

  wobei Faktoren $\propto 1/q_j^2$ bzw. $\propto 1/p_j^2$ ebenfalls weggelassen werden.

- Aufgrund des Weglassens der Faktoren $\propto 1/(q_j^2 - m_l^2)$, $\propto 1/(p_j^2 - m_l^2)$, $\propto 1/q_j^2$ bzw. $\propto 1/p_j^2$ entspricht die Summe aller Diagramme bis zu einer gegebenen Ordnung der Reihenentwicklung eines S-Matrix-Elements (mit anderen Worten: die angegebenen Feynman-Regeln sind Regeln zur Berechnung von S-Matrix-Elementen).

- Jeder WW-Punkt (Vertex) liefert

$$-(2\pi)^4 ie\delta(k_1+k_2+k_3)\Big(\dots\gamma^\mu\dots\Big), \tag{415}$$

wobei die k_j die einlaufenden Impulse sind.

- Innere Linien liefern zusätzlich eine Impulsintegration

$$\int \frac{d^4k_j}{(2\pi)^4}. \tag{416}$$

- Kombinatorische Vorfaktoren (bzw. Regeln zum Angeben dieser Faktoren) können mit Überlegungen analog zu Abschnitt 6.5 gewonnen werden.

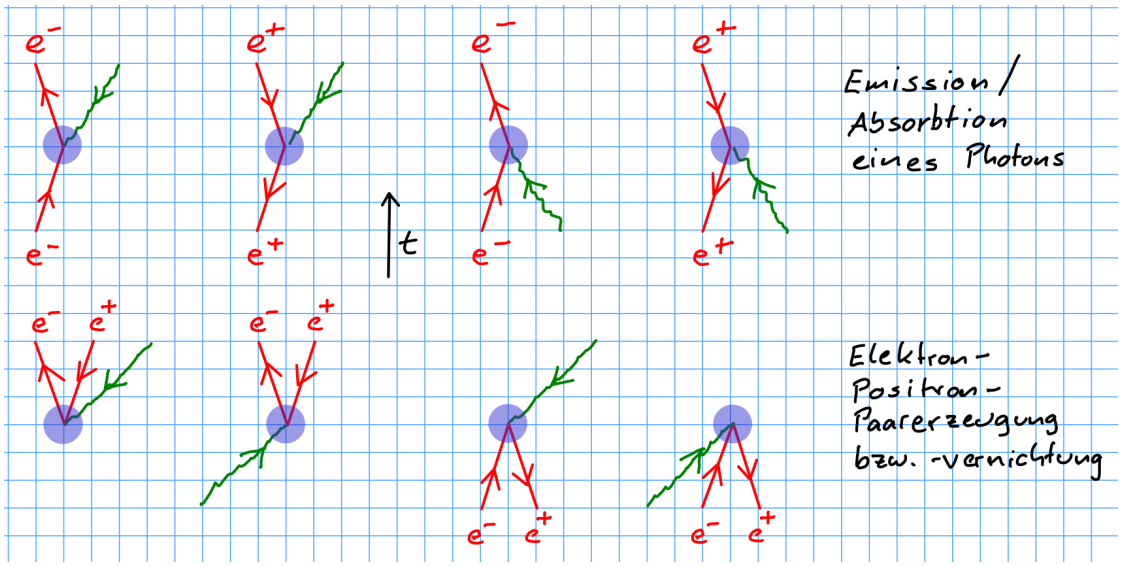
8.2.4 Elementarprozesse

- Für Elektronen (bzw. Myonen oder Tauonen) gibt es acht Elementarprozesse, die dem kubischen WW-Term

$$\bar\psi_l(x)(x)\gamma^\mu eA_\mu(x)\psi_l(x) \tag{417}$$

der Lagrange-Dichte (408) bzw. dem Vertex (415) entsprechen:

  - Ein Elektron bzw. Positron emittiert bzw. absorbiert ein Photon (4×).
  - Ein Elektron-Positron-Paar wird erzeugt bzw. vernichtet, ein Photon wird erzeugt bzw. vernichtet (4×).



- Prozesse der Art $\mu^- \to e^- + \gamma$ (ein Myon geht unter Aussendung eines Photons in ein Elektron über), etc. werden in der Natur nicht beobachtet. Dementsprechend wurde die Lagrange-Dichte (408) konstruiert, d.h. in den WW-Termen treten Elektron- und Myon-Operatoren nicht gleichzeitig auf (analog auch für Elektronen und Tauonen sowie Myonen und Tauonen).

– Leptonenzahl: $L = L_e + L_\mu + L_\tau$.

– Leptonenfamilienzahlen: $L_l = n_l - \bar{n}_l$ (Differenz der Anzahl der Leptonen [z.B. Elektronen] und der Antileptonen [z.B. Positronen] einer Familie).

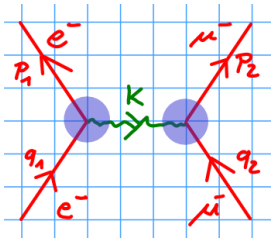
– Leptonenzahl und Leptonenfamilienzahlen sind in der QED und im Standardmodell erhalten.

8.3 Streuprozesse

- Literatur: [6], Kapitel 5.

8.3.1 Elektron-Myon-Streuung

- Streuprozess: $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$.
- Nur ein Feynman-Diagramm in niedrigster Ordnung ($\mathcal{O}(e^2)$).



- Für die relevanten Elemente der S-Matrix $\langle e^-(\mathbf{p}_1, r_1), \mu^-(\mathbf{p}_2, r_2)|S|e^-(\mathbf{q}_1, s_1), \mu^-(\mathbf{q}_2, s_2)\rangle$ benötigt man die Fourier-transformierte 4-Punkt-Funktion, d.h. man verwendet die Feynman-Regeln im Impulsraum (siehe Abschnitt 8.2.3):

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(-(2\pi)^4 ie\delta(q_1 - p_1 - k)\Big)\Big(\bar{u}_{e,r_1}(p_1)\gamma^\mu u_{e,s_1}(q_1)\Big) \\
&\qquad \Big(-(2\pi)^4 ie\delta(q_2 - p_2 + k)\Big)\Big(\bar{u}_{\mu,r_2}(p_2)\gamma^\nu u_{\mu,s_2}(q_2)\Big)\frac{-i}{k^2 + i\epsilon}\eta_{\mu\nu} \quad = \\
&= \underbrace{i(2\pi)^4\delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)e^2\Big(\bar{u}_{e,r_1}(p_1)\gamma^\mu u_{e,s_1}(q_1)\Big)\Big(\bar{u}_{\mu,r_2}(p_2)\gamma_\mu u_{\mu,s_2}(q_2)\Big)\frac{1}{(q_1 - p_1)^2}}_{\text{“}=\text{''}\langle e^-(\mathbf{p}_1,r_1),\mu^-(\mathbf{p}_2,r_2)|S|e^-(\mathbf{q}_1,s_1),\mu^-(\mathbf{q}_2,s_2)\rangle + \mathcal{O}(e^4)}
\end{aligned} \tag{418}$$

(es wurde Feynman-Eichung [$\xi = 1$] verwendet).

- Häufig wird bei Streuexperimenten Spin und Polarisation nicht gemessen. Dann muss über einlaufende Spins/Polarisationen gemittelt werden, hier

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1}\sum_{s_2}, \tag{419}$$

und über auslaufende Spins/Polarisationen summiert werden, hier

$$\sum_{r_1}\sum_{r_2}. \tag{420}$$

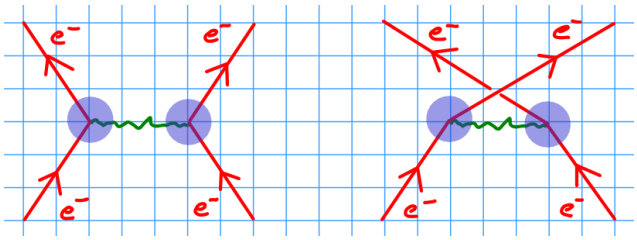
- Berechnung des Wirkungsquerschnitts wie in Abschnitt 7.2 skizziert. Ergebnis im Center of Mass System und im relativistischen Grenzfall ($E_{e^-}, E_{\mu^-} \gg m_{e^-}, m_{\mu^-}$, d.h. $m_{e^-}, m_{\mu^-} \approx 0$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2(q_1+q_2)^2}\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}, \tag{421}$$

wobei $\cos(\theta) = \mathbf{p}_1\mathbf{q}_1/|\mathbf{p}_1||\mathbf{q}_1|$.

8.3.2 Elektron-Elektron-Streuung

- Streuprozess: $e^- + e^- \to e^- + e^-$.
- Zwei Feynman-Diagramme in niedrigster Ordnung ($\mathcal{O}(e^2)$).



- Wirkungsquerschnitt im Center of Mass System und im relativistischen Grenzfall ($E_{e^-} \gg m_{e^-}$):

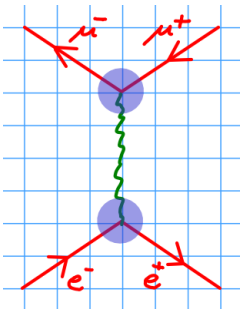
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2(q_1+q_2)^2}\left(\underbrace{\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}}_{\text{Diagramm 1}} + \underbrace{\frac{1+\sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)}}_{\text{Diagramm 2}} + \underbrace{\frac{2}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)}}_{\text{Mischterm}}\right), \tag{422}$$

wobei $\cos(\theta) = \mathbf{p}_1\mathbf{q}_1/|\mathbf{p}_1||\mathbf{q}_1|$ oder $\cos(\theta) = \mathbf{p}_1\mathbf{q}_2/|\mathbf{p}_1||\mathbf{q}_2|$.

****** 24. Januar 2024 (24. Vorlesung) ******

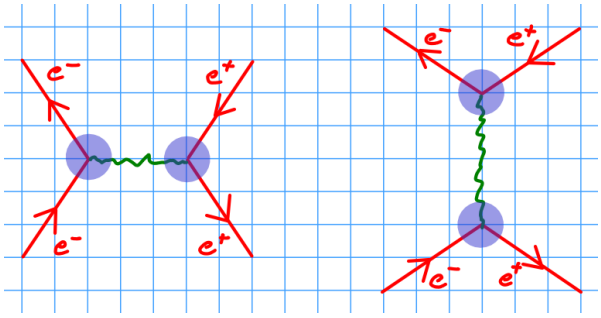
8.3.3 Myon-Paarerzeugung

- Streuprozess: $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$.
- Ein Feynman-Diagramme in niedrigster Ordnung ($\mathcal{O}(e^2)$).



8.3.4 Elektron-Positron-Streuung (Bhabha-Streuung)

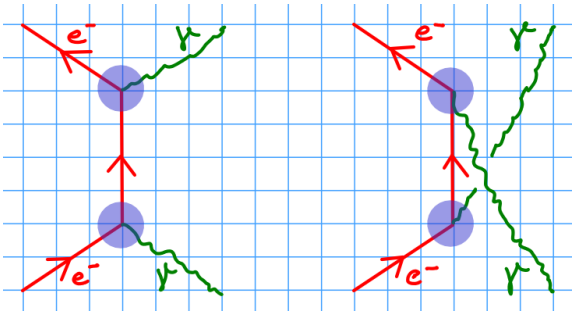
- Streuprozess: $e^- + e^+ \to e^- + e^+$.
- Zwei Feynman-Diagramme in niedrigster Ordnung ($\mathcal{O}(e^2)$).



- Ein Vergleich störungstheoretischer Ergebnisse mit experimentellen Daten findet sich z.B. in [6], Seite 72 und 73.

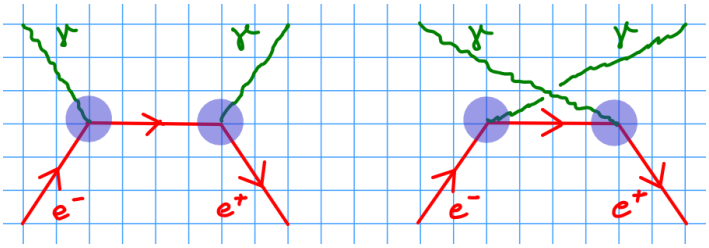
8.3.5 Compton-Streuung

- Streuprozess: $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$.
- Zwei Feynman-Diagramme in niedrigster Ordnung ($\mathcal{O}(e^2)$).



8.3.6 Paarvernichtung

- Streuprozess: $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$.
- Zwei Feynman-Diagramme in niedrigster Ordnung ($\mathcal{O}(e^2)$).

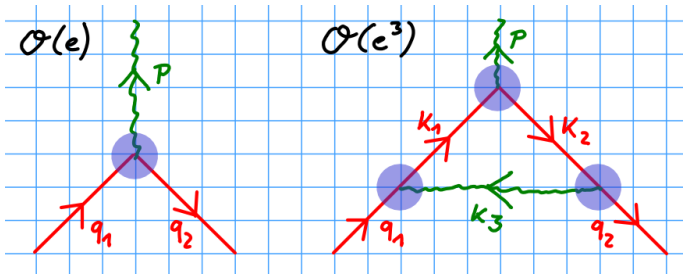


8.4 Strahlungskorrekturen, laufende Kopplung, Renormierung

- In führender Ordnung ($\mathcal{O}(e)$) koppeln zwei Elektronen/Positronen (Impulse q_1 und q_2) und ein Photon (auslaufender Impuls p) gemäß

$$-(2\pi)^4 i\delta(q_1 - q_2 - p)\Big(\bar{X}(e;q_2)e\{\gamma^\mu\}X(e;q_1)\Big)X_\mu(\gamma;p), \tag{423}$$

  wobei z.B. $X_\mu(\gamma;p) = \epsilon_\mu(p,\lambda)$, falls es sich um ein ein- oder auslaufendes Photon mit Impuls p und Polarisation λ handelt, oder $X_\mu(\gamma;p) = -i\eta_{\mu\nu}/p^2$, falls das Photon virtuell ist, Impuls p hat und über den Index ν an einen anderen Vertex koppelt. Analog kann z.B. $X(e;q_1) = u_{e,s_1}(q_1)$ ein einlaufendes Elektron mit Impuls q_1 und Spin s_1 beschreiben, etc.



- In höheren Ordnungen (nächste Ordnung ist $\mathcal{O}(e^3)$) tragen weitere Diagramme bei, z.B.

$$\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}$$
$$\Big(-(2\pi)^4 ie\delta(-k_1+k_3+q_1)\Big)\Big(-(2\pi)^4 ie\delta(+k_2-k_3-q_2)\Big)$$
$$\Big(-(2\pi)^4 ie\delta(+k_1-k_2-p)\Big)$$
$$\Big(\bar{X}(e;q_2)\gamma^\rho(\gamma^\alpha k_{2,\alpha}+m_e)\gamma^\mu(\gamma^\beta k_{1,\beta}+m_e)\gamma^\sigma X(e;q_1)\Big)X_\mu(\gamma;p)$$
$$\frac{i}{k_1^2-m_e^2}\frac{i}{k_2^2-m_e^2}\frac{-i}{k_3^2}\eta_{\rho\sigma} \quad =$$

$$
\begin{aligned}
&= -(2\pi)^4 i\delta(q_1-q_2-p) \\
&\quad \Big(\bar{X}(e;q_2)e^3 \underbrace{\Big\{ -i\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\, \frac{\gamma^\rho(\gamma^\alpha(k_1-q_1+q_2)_\alpha+m_e)\gamma^\mu(\gamma^\beta k_{1,\beta}+m_e)\gamma_\rho}{(k_1^2-m_e^2)((k_1-q_1+q_2)^2-m_e^2)(k_1-q_1)^2} \Big\}}_{=F^\mu_{e^3,1}(q_1,q_2)\sim \#\int^\infty dk_1\, 1/k_1 = \#\lim_{k_1\to\infty}\log(k_1)=\infty} \\
&\quad X(e;q_1)\Big) X_\mu(\gamma;p). \qquad (424)
\end{aligned}
$$

In höheren Ordnungen ist die Elektron-Elektron-Photon-Kopplung also abhängig von den ein- bzw. auslaufenden Impulsen.

- Die physikalische Kopplung entspricht einer Summe ($\sum_j$) über diese und weitere Diagramme,

$$
e_{\text{phys}}(q_1,q_2)\gamma^\mu \;=\; e\gamma^\mu + e^3\sum_j F^\mu_{e^3,j}(q_1,q_2) + \mathcal{O}(e^5), \qquad (425)
$$

ist also impulsabhängig und wegen $F^\mu_{e^3,j}\to\infty$ scheinbar unendlich:

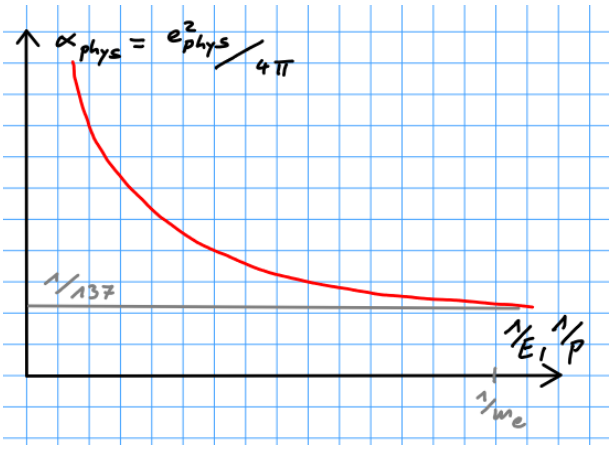
  - Impulsabhängigkeit:
    O.k., physikalisch beobachtbares Phänomen, wird als "laufende Kopplung" bzw. "Running Coupling" bezeichnet.
  - $e_{\text{phys}}\to\infty$:
    Nicht akzeptabel, e_{phys} muss endlich sein, sollte sogar klein sein, damit Störungstheorie anwendbar ist. Renormierung löst dieses Problem:
    * Regularisiere Unendlichkeiten, z.B. mit einem Impuls-Cutoff Λ,
      $$\int^\infty dk_1 \;\to\; \int^\Lambda dk_1. \qquad (426)$$
      Wähle Λ hinreichend groß bzw. bilde am Ende einer Rechnung den Limes $\Lambda\to\infty$. Damit $F^\mu_{e^3,j}(q_1,q_2)\to F^\mu_{e^3,j}(q_1,q_2;\Lambda)$ (für endliches Λ ist $F^\mu_{e^3,j}(q_1,q_2;\Lambda)$ endlich).
    * Löse (425) nach e, der sogenannten nackten Kopplung (bare coupling) auf (im Folgenden nur schematisch, d.h. Spinabhängigkeit wird ignoriert):
      $$
      \begin{aligned}
      e(\Lambda) &= e_{\text{phys}}(q_1,q_2) - e(\Lambda)^3\sum_j F_{e^3,j}(q_1,q_2;\Lambda) + \mathcal{O}(e(\Lambda)^5) \;= \\
      &= e_{\text{phys}}(q_1,q_2) - e^3_{\text{phys}}(q_1,q_2)\sum_j F_{e^3,j}(q_1,q_2;\Lambda) + \mathcal{O}(e(\Lambda)^5) \;= \\
      &= e_{\text{phys}}(q_1,q_2)\Big(1 - e^2_{\text{phys}}(q_1,q_2)\sum_j F_{e^3,j}(q_1,q_2;\Lambda) + \mathcal{O}(e^4_{\text{phys}}(q_1,q_2))\Big).
      \end{aligned} \qquad (427)
      $$
      Die nackte in der Lagrange-Dichte auftretende Kopplung muss also im Limes $\Lambda\to\infty$ ebenfalls in spezieller Weise (427) gegen Unendlich geschickt werden, um eine endliche physikalische Kopplung zu erhalten.

- Die eben skizzierte Renormierung wird in der Praxis anders ausgeführt:

- Da die eben und in Abschnitt 8.2.4 studierten Elementarprozesse, z.B. $e^- + e^+ \to \gamma$, auf Grund der Viererimpulserhaltung verboten sind, d.h. nur als Teile von Feynman-Diagrammen mit zumindest teilweise virtuellen Teilchen auftreten können, betrachtet man stattdessen z.B. die in Abschnitt 8.3 besprochenen Streuprozesse, z.B. $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$. Diese Prozesse sind in führender Ordnung proportional zu e^2 und haben eine Entwicklung in geraden Potenzen von e, weshalb man als Kopplungskonstante $\alpha = e^2/4\pi$, die Feinstrukturkonstante, verwendet (Rechnungen ähnlich, allerdings etwas aufwändiger).
- Die Regularisierung über einen Impuls-Cutoff wird häufig durch elegantere Regularisierungen ersetzt, z.B. dimensionale Regularisierung (man rechnet in einer kontinuierlichen Anzahl d von Raumzeitdimensionen und bildet am Ende den Limes $d \to 4$).
- Neben der Kopplungskonstante muss auch die Elektron-, Myon- und Tauon-Masse renormiert werden, sowie die Felder ψ_l und A_μ.
- Details in [8].

****** 29. Januar 2025 (25. Vorlesung) ******

- Laufende Kopplung:
  - $\alpha \approx 1/137$ bei äußeren Energien/Impulsen $\approx m_e$.
  - $\alpha \approx 1/128$ bei äußeren Energien/Impulsen $\approx 200\,\mathrm{GeV}$.
  - α steigt zu großen Energien hin an.



  - Die Feinstrukturkonstante ist also keine Konstante.

9 Phänomenologie der starken WW

- Proton:
  Massiv ($m_p = 938.3\,\mathrm{MeV}$), Spin $J = 1/2$ $\quad\rightarrow\quad$ Dirac-Feld $p(x)$.
- Neutron:
  Massiv ($m_n = 939.6\,\mathrm{MeV}$), Spin $J = 1/2$ $\quad\rightarrow\quad$ Dirac-Feld $n(x)$.
- Proton und Neutron haben gleiche Eigenschaften (Spin, gleiche Kernkräfte), nahezu gleiche Masse, $(m_n - m_p)/m_n \approx 0.0014$
  $\rightarrow$ approximative Symmetrie ("Isospin").

9.1 Protonen, Neutronen und Isospin

- Nukleon: Kombination zweier Dirac-Spinoren,

$$N(x) \;=\; \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}. \tag{428}$$

  Der vierkomponentige Spin-Raum wird damit um einen zweikomponentigen Isospinraum erweitert. Insgesamt hat $N(x)$ also acht Komponenten.

- Zwei komplexe Felder, deren zugeordnete Teilchen sich gleich verhalten bzw. gleiche Eigenschaften aufweisen, legen folgende Isospinsymmetrie nahe: "Komplexe Rotationen" im zweikomponentigen Isospinraum, d.h. SU(2)-Isospintransformationen,

$$N(x) \;\rightarrow\; N'(x) \;=\; UN(x) \quad , \quad U \;=\; \exp\left(i\alpha^a T^a\right) \quad , \quad T^a \;=\; \frac{\sigma^a}{2} \tag{429}$$

  (Transformationsverhalten genau wie bei zwei Spinzuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$).

- Proton $N(x) = (p(x), 0)$ hat Isospinquantenzahlen $I = 1/2$, $I_3 = +1/2$.
- Neutron $N(x) = (0, n(x))$ hat Isospinquantenzahlen $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$.
- Elektrische Ladung:
  Proton $\quad\rightarrow\quad$ $Q = -e$,
  Neutron $\quad\rightarrow\quad$ $Q = 0$,
  allgemein für Nukleonen $Q = 1/2 + I_3$.
  $\rightarrow$ Die em WW bricht die Isospinsymmetrie.
- Experimentell beobachtet man weitere approximative Isospin-Multiplets:
  - Pionen ($J = 0$), $\Pi(x) = (\pi^+(x), \pi^0(x), \pi^-(x))$:
    Isospin-Triplet, $I = 1$, $I_3 = +1, 0, -1$, d.h. SU(2)-Isospintransformationen wie in (429), jedoch mit anderen Generatoren T^a, die die 3×3-Darstellung der SU(2) Matrizen erzeugen. Massen $m_{\pi^\pm} = 139.6\,\mathrm{MeV}$, $m_{\pi^0} = 135.0\,\mathrm{MeV}$, Massendifferenz $(m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0})/(m_{\pi^\pm} + m_{\pi^0}) \approx 1.7 \times 10^{-2}$.
  - ρ-Mesonen ($J = 1$), $(\rho^+(x), \rho^0(x), \rho^-(x))$:
    Isospin-Triplet, $I = 1$, $I_3 = +1, 0, -1$.

– Σ-Baryonen ($J = 1/2$), $(\Sigma^+(x), \Sigma^0(x), \Sigma^-(x))$:
Isospin-Triplet, $I = 1$, $I_3 = +1, 0, -1$.
– Kaonen ($J = 0$): $(K^+(x), K^0(x))$ und $(\bar{K}^0(x), K^-(x))$: Isospin-Doublet, $I = 1/2$, $I_3 = +1/2, -1/2$.
– ...

9.1.1 Isospininvariante freie Theorie (Protonen und Neutronen)

- Isospininvariante Ausdrücke:
  – $N^\dagger N = p^\dagger p + n^\dagger n$, da
  $$N'^\dagger N' \;=\; N^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{=1} N \;= N^\dagger N. \tag{430}$$
  – $N^\dagger \gamma^\mu N = p^\dagger \gamma^\mu p + n^\dagger \gamma^\mu n$, da
  $$N'^\dagger \gamma^\mu N' \;=\; N^\dagger \underbrace{U^\dagger \gamma^\mu}_{=\gamma^\mu U^\dagger} U N \;= N^\dagger \gamma^\mu N \tag{431}$$
  (γ^μ wirkt im Spinraum, U wirkt im Isospinraum, die beiden Operationen sind also unabhängig und vertauschen damit).
  – ...
- Isospininvariante freie Theorie:
$$\mathcal{L} \;=\; \bar{N}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N\Big)N \;=\; \bar{p}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N\Big)p + \bar{n}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N\Big)n \tag{432}$$
(exakte Isospinsymmetrie erfordert $m_p = m_n$, hier bezeichnet mit $m_N = m_p = m_n$).

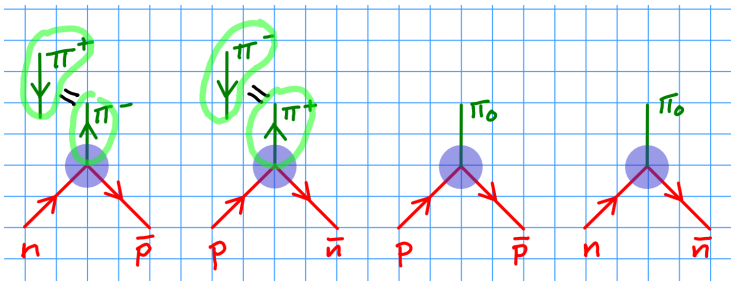
9.1.2 Isospininvariante WW Theorie (Protonen, Neutronen und Pionen)

- Pionen: Pseudoskalare Mesonen, d.h. $J^P = 0^-$
$\rightarrow$ freie Theorie beschrieben durch KG-Felder.
- Konstruiere Nukleon-Pion-WW mit folgenden Eigenschaften:
  (1) Lorentz-invariant.
  (2) Isospininvariant.
  (3) Paritätsinvariant (wird experimentell beobachtet).
- Pseudoskalares Isospin-Triplet aufgebaut aus N erforderlich: $\bar{N} i\gamma^5 T^a N$ (Kopplung von $\bar{N}$ und N via T^a analog zur Kopplung zweier Spins zu einem Spin-1-Triplet).
- WW-Term in $\mathcal{L}$:
$$\mathcal{L}_{\text{int}} \;=\; g\Big(\bar{N} i\gamma^5 T^a N\Big)\phi^a \quad , \quad \phi^a \;=\; \begin{pmatrix} (\pi^+ + \pi^-)/\sqrt{2} \\ i(\pi^+ - \pi^-)/\sqrt{2} \\ \pi^0 \end{pmatrix} \tag{433}$$
mit reellen Feldern π^+, π^- und π^0.

- Isospininvariante WW Theorie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{N}\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_N\Big)N + \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) - \frac{m_\pi^2}{2}\phi^\dagger\phi + g\Big(\bar{N}i\gamma^5 T^a N\Big)\phi^a \quad = \\
&= \bar{p}\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_N\Big)p + \bar{n}\Big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_N\Big)n \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial^\mu\pi^+)(\partial_\mu\pi^+) - \frac{m_\pi^2}{2}(\pi^+)^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu\pi^-)(\partial_\mu\pi^-) - \frac{m_\pi^2}{2}(\pi^-)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial^\mu\pi^0)(\partial_\mu\pi^0) - \frac{m_\pi^2}{2}(\pi^0)^2 \\
&\quad + \frac{ig}{2}\Big(\sqrt{2}\Big(\bar{p}\gamma^5 n\Big)\pi^+ + \sqrt{2}\Big(\bar{n}\gamma^5 p\Big)\pi^- + \Big(\bar{p}\gamma^5 p - \bar{n}\gamma^5 n\Big)\pi^0\Big). \qquad (434)
\end{aligned}$$

- Elementarprozesse: Vier kubische WW-Terme, wobei jeder jeweils acht unterschiedliche Elementarprozesse beschreibt (siehe auch Abschnitt 8.2.4).



- Warum gerade diese spezielle Zuweisung von π^+, π^- und π^0 auf die drei Komponenten ϕ^a (und nicht z.B. $\phi^a = (\pi^+, \pi^-, \pi^0)$)?
  - Bei dieser Zuweisung ist die elektrische Ladung bei WW erhalten.
  - Besseres Verständnis durch das im nächsten Abschnitt diskutierte Quark-Modell.

9.2 Quark-Modell

9.2.1 Flavor-Multiplets, Flavor-Quantenzahlen

- Hunderte von Hadronen werden experimentell beobachtet:
  - Mesonen: Ganzzahliger Spin, d.h. Bosonen, z.B. π, K, D, D_s, ...
  - Baryonen: Halbzahliger Spin, d.h. Fermionen, z.B. p, n, Λ, Σ, Ξ, Ω, ...

  $\rightarrow$ Lässt universelle Substruktur vermuten.
- Quark-Modell (Gell-Mann, Zweig, 1964): Hadronen setzen sich aus Quarks (Spin 1/2, verschiedene Sorten, sogenannte "Flavors") zusammen:
  - Mesonen: $\bar{q}q$ (Quark-Antiquark-Zustände).

  - Baryonen: qqq (3-Quark-Zustände).

- Beispiel: Pion-Isospin-Triplet.

  - Pionen ($I = 1$) setzen sich aus zwei fundamentalen $I = 1/2$ Bausteinen zusammen, einem u-Quark ($I_3 = +1/2$) und einem d-Quark ($I_3 = -1/2$).
  - Isospinsymmetrie wie bei Nukleonen (Gleichung (429)): "Komplexe Rotationen" im zweikomponentigen Isospinraum, also SU(2)-Isospintransformationen,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad U = \exp\left(i\alpha^a T^a\right) \quad , \quad T^a = \frac{\sigma^a}{2}. \tag{435}$$

  - Die drei Pionen entsprechen den $I = 1$ Quarkkombinationen $\pi^+ = \bar{d}u$, $\pi^- = \bar{u}d$, $\pi^0 = (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}$. Isospintransformationen mischen die drei Pionen des Triplets untereinander, nicht jedoch Pionen mit dem Singlet-Zustand $\eta' = (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}$.
  - Das Pion-Isospin-Triplet ϕ^a für den WW-Term (433) ergibt sich analog zum $\bar{N}T^aN$-Triplet im selben WW-Term, also

$$\phi^a = \#\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} T^a \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \frac{\#}{2} \begin{pmatrix} \bar{d}u + \bar{u}d \\ i(\bar{d}u - \bar{u}d) \\ \bar{u}u - \bar{d}d \end{pmatrix}. \tag{436}$$

- Hinzunahme eines dritten Quarks: $(u, d) \rightarrow (u, d, s)$. Damit Erweiterung der SU(2)-Isospin-Symmetrie auf SU(3)-Flavor-Symmetrie,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad , \quad U = \exp\left(i\alpha^a T^a\right) \quad , \quad T^a = \frac{\lambda^a}{2}, \tag{437}$$

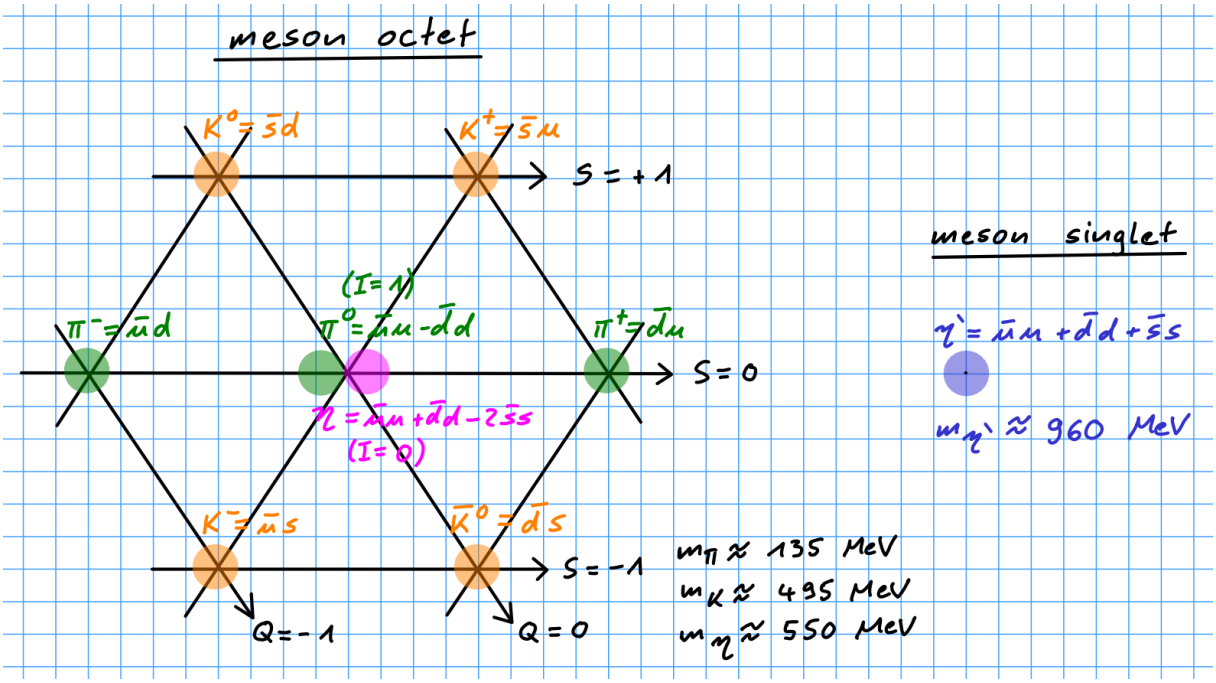
  wobei λ^a die Gell-Mann-Matrizen (die Erzeugenden der SU(3)) bezeichnen.

- Für die Flavor-Multiplets gilt:

  - Mesonen:

$$\bar{3} \otimes 3 = 1 \oplus 8 \tag{438}$$

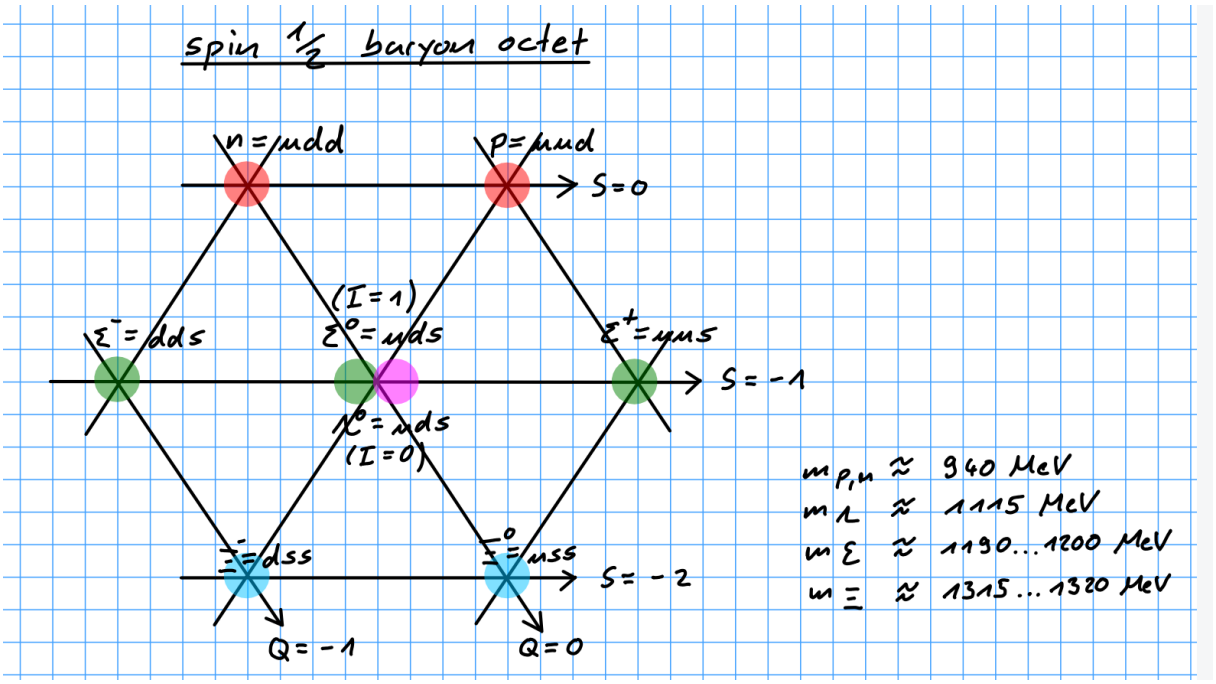
    (vorher $\bar{2} \otimes 2 = 1 \oplus 3$).



– Baryonen:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 \quad = \quad 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \tag{439}$$

(vorher $2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \oplus 2 \oplus 4$).



– Bei exakter SU(2)-Isospin- bzw. SU(3)-Flavor-Symmetrie wären die Hadronen innerhalb eines Multiplets gleich schwer.

  - In der Natur beobachtet man ähnliche aber nicht identische Hadron-Massen innerhalb eines Multiplets.
  - Ursache: SU(2)-Isospin- bzw. SU(3)-Flavor-Symmetrie nicht exakt realisiert (würde gleiche Quarkmassen $m_u = m_d = m_s$ [und gleiche elektrische Ladungen] erfordern).
  - SU(2)-Isospin-Multiplets: $m_u = 2.3\,\text{MeV} \approx 0$, $m_d = 4.8\,\text{MeV} \approx 0$, erklärt $m_p = 938.3\,\text{MeV} \approx m_n = 939.6\,\text{MeV}$ oder $m_{\pi^\pm} = 139.6\,\text{MeV} \approx m_{\pi^0} = 135.0\,\text{MeV}$.
  - SU(3)-Flavor-Multiplets: $m_s = 95\,\text{MeV}$. Damit $m_s \approx 0$ bzw. $m_u \approx m_d \approx m_s$ in weniger guter Näherung erfüllt, damit nur grobe Übereinstimmung von Hadron-Massen innerhalb eines Multiplets, z.B. $m_{\pi^\pm} = 139.6\,\text{MeV} \approx m_{K^\pm} = 493.7\,\text{MeV}$.

- Insgesamt existieren sechs verschiedene Quarkflavors, (u, d, s, c, b, t). Auf Grund der schweren sich unterscheidenden Quarkmassen $m_c = 1.275\,\text{GeV}$, $m_b = 4.18 \ldots 4.65\,\text{GeV}$ und $m_t = 160 \ldots 174\,\text{GeV}$ macht eine Erweiterung auf SU(4)-, SU(5)- oder SU(6)-Flavorsymmetrie i.d.R. wenig Sinn.

****** 5. Februar 2025 (27. Vorlesung) ******

- Für jeden Quarkflavor existiert eine separate U(1)-Symmetrie[1], die die Erhaltung der Anzahl der Quarks minus die Anzahl der Antiquarks des entsprechenden Flavors zur Folge hat (siehe Abschnitt 5.2). Diesen Symmetrien sind die folgenden Flavor-Quantenzahlen zugeordnet:
  - Baryonenzahl:
    $B = +(N_q - N_{\bar{q}})/3$, wobei $N_q = N_u + N_d$ und $N_{\bar{q}} = N_{\bar{u}} + N_{\bar{d}}$.
  - Isospin:
    I, I_z (bezieht sich auf u- und d-Quarks; siehe oben).
  - Strangeness:
    $S = -(N_s - N_{\bar{s}})$.
  - Charm:
    $C = +(N_c - N_{\bar{c}})$.
  - Bottomness:
    $B' = -(N_b - N_{\bar{b}})$.
  - Topness:
    $T = +(N_t - N_{\bar{t}})$.
- Elektrische Ladung Q:
  $\Delta Q = +2/3$ für u-, c- und t-Quarks, $\Delta Q = -1/3$ für d-, s- und b-Quarks, umgekehrt für Antiquarks.

9.2.2 Quarkfarben

- Warum nur $\bar{q}q$-Zustände (Mesonen) und qqq-Zustände (Baryonen)? Warum z.B. keine qq- oder $\bar{q}qq$- oder $qqqq$-Zustände?

[1] Diese Symmetrien werden von der schwachen WW gebrochen (siehe Abschnitt 12.3).

- Quarks besitzen einen nicht beobachtbaren, zusätzlichen "internen" FHG, ihre Farbe ("Color"). Drei mögliche Zustände, $q = (r, g, b)$ (rot, grün, blau).

- Zugehörige Symmetrie: SU(3)-Farbsymmetrie,

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r' \\ g' \\ b' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad U = \exp\left(i\alpha^a T^a\right) \quad , \quad T^a = \frac{\lambda^a}{2}. \tag{440}$$

  Die Farbe ist die Ladung der starken WW (analog zu elektrischer Ladung und em WW; im Gegensatz zur elektrischen Ladung gibt es drei Arten der Ladung, rot, grün und blau).

- Farbe ist nicht direkt beobachtbar, d.h. farbige Zustände wie z.B. ein rotes Quark oder ein grünes Quark treten nicht auf. Physikalische Zustände sind immer farbneutral, d.h. enthalten rote, grüne und blaue Quarks in gleichberechtigter Weise ($\rightarrow$ Farb-Singlet-Zustände).

- Farb-Multiplets:

  - $\bar{q}q$-Zustände:
    $\bar{3} \otimes 3 = 1 \oplus 8$
    $\rightarrow$ enthält einen Singlet-Zustand, also physikalisch realisierbar.
  - qqq-Zustände:
    $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$
    $\rightarrow$ enthält einen Singlet-Zustand, also physikalisch realisierbar.
  - qq-Zustände:
    $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$
    $\rightarrow$ enthält keinen Singlet-Zustand, also physikalisch nicht existent.
  - ...

10 Quantenchromodynamik (QCD)

10.1 QCD = SU(3)-Eichtheorie

- Betrachte im Folgenden allgemein SU(N)-Eichtheorien, $N \geq 2$ ("Yang-Mills-Theorien").
- Überlegungen analog zur U(1)-Eichtheorie (Abschnitt 8.1).
- Starte erneut mit der Lagrange-Dichte des freien Dirac-Felds,

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad = \quad \bar{\psi}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\Big)\psi, \tag{441}$$

  wobei ψ ein N-komponentiger Vektor im "Farbraum" ist, d.h. $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^N)$.

- Fordere Invarianz von $\mathcal{L}$ unter lokalen SU(N)-Transformationen,

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) \quad = \quad G(x)\psi(x) \quad , \quad G(x) \quad = \quad \exp\Big(-i\Lambda^a(x)T^a\Big), \tag{442}$$

  wobei T^a die Erzeugenden der SU(N) bezeichnen, z.B. $T^a = \sigma^a/2$ für SU(2) oder $T^a = \lambda^a/2$ für SU(3). Modifiziere die Lagrange-Dichte des freien Dirac-Felds auf minimale Weise, so dass die Forderung nach lokaler SU(N)-Symmetrie (= Eichsymmetrie) erfüllt ist.

- Führe ein neues Feld $A_\mu = A_\mu^a T^a$ ein (eine $N \times N$-Matrix im Farbraum), das sich unter Eichtransformationen gemäß

$$A_\mu(x) \quad \to \quad A'_\mu(x) \quad = \quad G(x)\Big(A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu\Big)G^{-1}(x) \tag{443}$$

  transformiert.

- Definiere analog zur U(1)-Eichtheorie eine kovariante Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$. Diese transformiert sich unter Eichtransformationen gemäß

$$\begin{aligned} D_\mu \quad \to \quad D'_\mu \quad &= \quad \partial_\mu - igG(x)\Big(A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu\Big)G^{-1}(x) \quad = \\ &= \quad G(x)\partial_\mu G^{-1}(x) + (\partial_\mu G(x))G^{-1}(x) + G(x)\Big(-igA_\mu(x)\Big)G^{-1}(x) \\ &\quad +G(x)(\partial_\mu G^{-1}(x)) \quad = \\ &= \quad G(x)D_\mu G^{-1}(x). \end{aligned} \tag{444}$$

- Es folgt $D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) = G(x)D_\mu\psi(x)$, womit sich leicht eine eichinvariante Modifikation von (441) konstruieren lässt,

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, A_\mu) \quad = \quad \bar{\psi}\Big(i\gamma^\mu D_\mu - m\Big)\psi. \tag{445}$$

- Konstruktion des kinetischen Terms für das Eichfeld A_μ:

– Feldstärketensor (ebenfalls eine $N \times N$-Matrix im Farbraum):

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \frac{i}{g}[\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] = \\ = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \tag{446}$$

Dieser ist im Gegensatz zum Abelschen Fall nicht eichinvariant, sondern transformiert sich unter Eichtransformationen gemäß $F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = G(x)F_{\mu\nu}(x)G^{-1}(x)$.

– Eine einfache Lorentz- und eichinvariante Kombination ähnlich zum kinetischen Term der U(1)-Eichtheorie ist

$$\mathrm{Tr}\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big). \tag{447}$$

- Lagrange-Dichte der QCD:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}(\psi_f, \partial_\mu\psi_f, A_\mu) = \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{\psi}_f\Big(i\gamma^\mu D_\mu - m_f\Big)\psi_f - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big), \tag{448}$$

wobei ψ_f Quarks und Antiquarks und A_μ Gluonen beschreibt ($m_u \approx 2.3\,\mathrm{MeV}$, $m_d \approx 4.8\,\mathrm{MeV}$, $m_s \approx 95\,\mathrm{MeV}$, $m_c \approx 1.28\,\mathrm{GeV}$, $m_b \approx 4\,\mathrm{GeV}$, $m_t \approx 170\,\mathrm{GeV}$). Die in Kapitel 9 aus phänomenologischer Sicht diskutierten Isospin-, Flavor- und Farbsymmetrien sind nun auf fundamentaler Ebene sichtbar.

- Quantisierung der QCD:

  – Nicht einfach, Probleme bereiten erneut die unphysikalischen Eichfreiheitsgrade (siehe die Quantisierung des Maxwell-Felds, Abschnitt 5.4).

  – Auf Grund der notwendigen Eichfixierung treten neue Felder, sogenannte Geistfelder auf (Spin-0-Teilchen die sich dennoch wie Fermionen verhalten).

  – WWs, d.h. Vertices in Feynman-Diagrammen: $\psi_f\bar{\psi}_f A_\mu$, $(A_\mu)^3$, $(A_\mu)^4$; darüber hinaus noch WWs mit den Geistfeldern, deren Struktur von der gewählten Eichfixierung abhängt.

  – Siehe z.B. Vorlesung "Quantenfeldtheorie II" im Sommersemester [8].

10.2 Weitere Phänomene der starken WW/QCD

- Die folgenden Phänomene werden hier nur oberflächlich beschrieben. Eine detailliertere Behandlung findet sich ebenfalls in der Vorlesung "Quantenfeldtheorie II" [8].

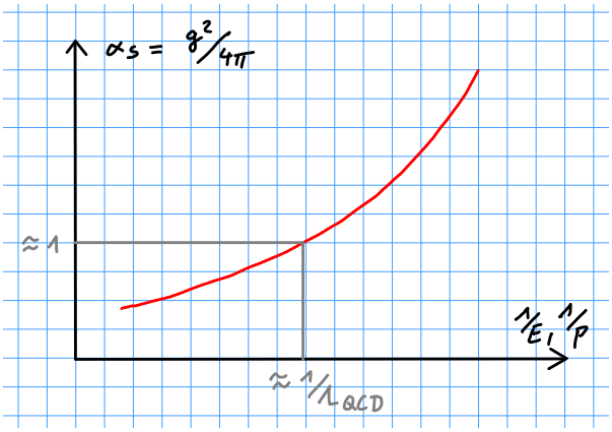
10.2.1 Laufende Kopplung und asymptotische Freiheit

- Genau wie in der QED hängt auch die QCD-Kopplungskonstante g von den Impulsen der ein- und auslaufenden Teilchen (Quarks- und Gluonen) ab ("laufende Kopplung", "Running Coupling").

- Große Energien und Impulse $\gtrsim \Lambda_{\mathrm{QCD}} \approx 200\,\mathrm{MeV}$:

  - Die QCD-Kopplungskonstante g wird klein (umgekehrt bei der QED), man spricht von "asymptotischer Freiheit".
  - Störungstheorie ist eine gute Näherung, kann z.B. zur Berechnung hochenergetischer Streuprozesse verwendet werden.

- Kleine Energien und Impulse $\lesssim \Lambda_{\mathrm{QCD}} \approx 200\,\mathrm{MeV}$:
  - Die QCD-Kopplungskonstante g wird groß (umgekehrt bei der QED).
  - Störungstheorie versagt, da $g \gtrsim 1$. Massen von Hadronen (gebundene Zustände von Quarks und Gluonen mit überwiegend niedrigen Impulsen) können nicht im Rahmen der Störungstheorie berechnet werden (numerische Rechnungen notwendig $\rightarrow$ Gitter-QCD).

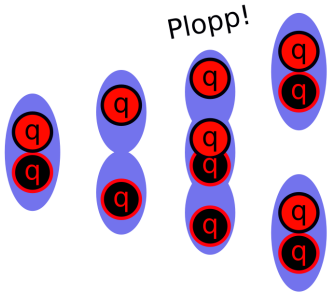


****** 7. Februar 2024 (28. Vorlesung) ******

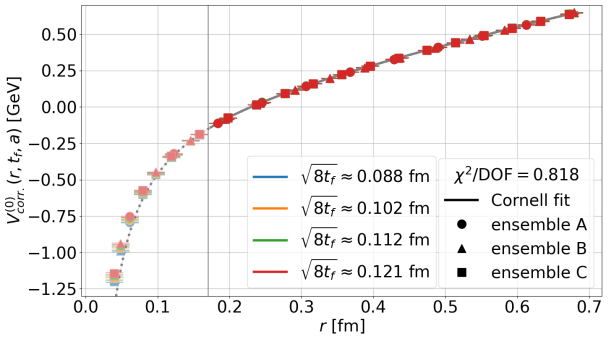
10.2.2 Confinement

- Quarks treten bei niedrigen Energien und Temperaturen nicht isoliert auf, sondern stets in Form von gebundenen farbneutralen Zuständen, den sogenannten Hadronen, entweder als Mesonen (Quark-Antiquark-Paare) oder als Baryonen (drei Quarks bzw. drei Antiquarks). Dieses Phänomen wird als "Confinement" bezeichnet.

- Versucht man ein Quark aus einem Hadron zu entfernen, also zu isolieren, entsteht bei einem Abstand von $\approx 1\,\mathrm{fm}$ ein neues Quark-Antiquark-Paar. An Stelle eines isolierten Quarks erhält man erneut ein Hadron.

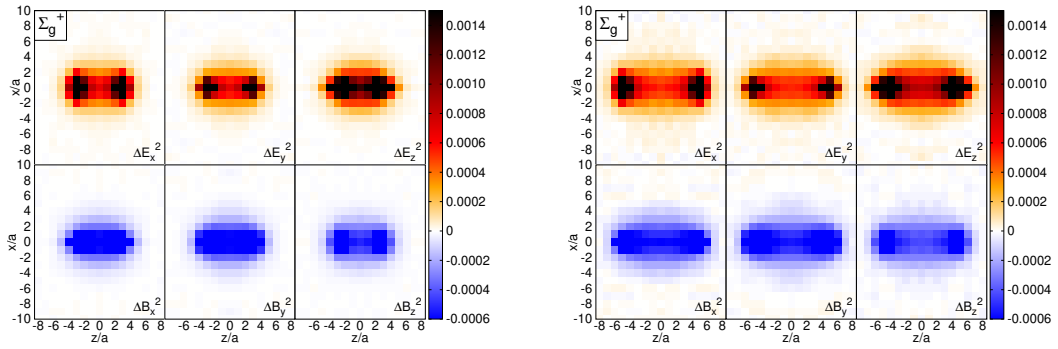


- Verständlich wird das Phänomen des Confinements an Hand des (statischen) Quark-Antiquark-Potentials, das sich z.B. mit Gitter-QCD berechnen lässt (erste Gitter-QCD-Berechnungen in den 1980er Jahren [siehe z.B. Arbeiten von Michael Creutz]; eine Standardgröße, die sehr häufig berechnet wird; Abbildung aus [10]). Im Gegensatz zum Elektromagnetismus oder der Gravitation wird die Kraft zwischen einem Quark und einem Antiquark mit steigendem Abstand nicht kleiner, sondern bleibt konstant. Die zur Separation notwendige Energie ist also nicht endlich, sondern wächst linear mit dem Abstand an. Ab $\approx 1\,\text{fm}$ ist ausreichend Energie vorhanden, um ein neues Quark-Antiquark-Paar zu bilden.



- Das qualitativ unterschiedliche Verhalten der starken Kraft im Vergleich zur elektromagnetischen Kraft wird häufig mit der Tatsache in Verbindung gebracht, dass Gluonen selbst Ladung tragen und sich damit gegenseitig anziehen können (WW-Terme $(A_\mu)^3$, $(A_\mu)^4$). Wie man ebenfalls mit Gitter-QCD-Rechnungen nachweisen kann, breitet sich das von einem Quark ausgehende gluonische Feld nicht in alle Richtungen aus, sondern ist in einer Art Röhre ("Flussschlauch", "String") konzentriert, die das Quark mit anderen Quarks/Antiquarks verbindet. Der Querschnitt des Flussschlauchs ist im Wesentlichen unabhängig vom Abstand der von ihm verbundenen Quarks, was wiederum das lineare Potential erklärt.

$r \approx 0.56\,\text{fm}$ $\qquad\qquad$ $r \approx 0.93\,\text{fm}$



(Beiträge zur gluonischen Energiedichte [obere Reihe: chromoelektrische Feldkomponenten; untere Reihe: chromomagnetische Feldkomponenten]; Abbildung aus [11])

10.2.3 Beobachtete Hadronen

- Siehe z.B. die www-Seite der Particle Data Group `http://pdg.lbl.gov/` [7].

11 Der Higgs-Mechanismus

- Motivation:
  - Die fundamentalen Kräfte werden fast alle durch Eichtheorien mit entsprechenden masselosen Eichbosonen beschrieben (Elektromagnetismus, starke WW, Gravitation). Die schwache WW passt dagegen nicht ins Bild (massive W- und Z-Bosonen) ...?
  - Der Higgs-Mechanismus erlaubt die Vereinheitlichung von elektromagnetischer und schwacher WW zur elektroschwachen WW auf der Ebene von Eichtheorien.
  - Der Higgs-Mechanismus erklärt, wie Teilchen Masse erhalten.

- Der Higgs-Mechanismus wird im Folgenden an Hand eines einfachen Modells, der skalaren Elektrodynamik (keine direkte Entsprechung in der Natur), erläutert:

$$\mathcal{L}(\phi, A_\mu) \quad = \quad (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{449}$$

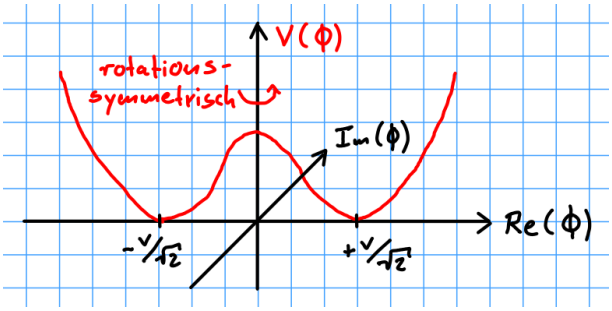
  mit der üblichen kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

- Bisher stets Potentialstruktur $V(\phi) = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$. Dieses Potential entspricht einem Massenterm bzw. einer Masse m für ϕ-Teilchen und einer 4-Teilchen WW.

- Was passiert bei umgekehrter Wahl des Vorzeichens vor m^2 ...? D.h. studiere im Folgenden das Potential

$$V(\phi) \quad = \quad \frac{\lambda}{4}\left(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2}\right)^2 \quad = \quad \# \underbrace{-\frac{\lambda v^2}{4}}_{=m^2}\phi^*\phi + \#(\phi^*\phi)^2, \tag{450}$$

  wobei $\lambda > 0$ ("Mexican-Hat-Potential", "Higgs-Potential").



- $m^2 = -\lambda v^2/4 < 0$, also negatives Massenquadrat ...? Haben ϕ-Teilchen eine imaginäre Masse ...?

- Nein, Störungstheorie ist für $m^2 < 0$ i.d.R. nicht direkt anwendbar. Der Grund hierfür lässt sich einfach an Hand der QM illustrieren.

– QM Teilchen in einer Dimension, Masse m, Potential

$$V(x) \;=\; +m\omega x^2/2 + \lambda x^4 \tag{451}$$

$(m, \omega, \lambda > 0)$:
Störungstheorie basiert auf einer Entwicklung um die gelöste Theorie mit Potential $V(x) = +m\omega x^2/2$ (HO). Für hinreichend kleines λ und niedrige Energieeigenzustände der "x^4-Theorie" ähneln die Energieeigenzustände den HO-Energieeigenzuständen. Anschaulich spüren die entsprechenden Wellenfunktionen den x^4-Term kaum, d.h. dessen Effekt kann Ordnung für Ordnung in λ berechnet werden. Ist man z.B. an den niedrigen Energieeigenwerten interessiert, ist Störungstheorie bereits in führender Ordnungen in λ eine gute Näherung.

– QM Teilchen in einer Dimension, Masse m, Potential

$$V(x) \;=\; \frac{\lambda}{4}\left(x^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 \;=\; \# - \frac{\lambda v^2}{4}x^2 + \#x^4 \tag{452}$$

$(m, \lambda, v > 0)$:
Die eben angestellten Überlegungen sind nicht übertragbar. Der "HO" mit
$V(x) = -\lambda v^2 x^2/4$ ist mathematisch lösbar, macht aber physikalisch wenig Sinn (die Energie ist nach unten unbeschränkt, die niedrigen Energieeigenzustände haben also unendlich große negative Energie). Die niedrigen Energieeigenzustände der x^4-Theorie sind in den beiden Potentialtöpfen konzentriert und haben offensichtlich endliche Energie. Die beiden Theorien haben im Hinblick auf das Spektrum also wenig miteinander zu tun, eine Störungsentwicklung der Energieeigenwerte macht deshalb keinen Sinn.

– Ausweg:
Störungsentwicklung um einen der beiden Potentialtöpfe, d.h. um $x_0 = \pm v/\sqrt{2}$. Setze zu diesem Zweck $x = x_0 + y$. Für das Potential ergibt sich

$$\begin{aligned} V(x) \;&\to\; \frac{\lambda}{4}\left(\left(\pm\frac{v}{\sqrt{2}} + y\right)^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 \;=\; \frac{\lambda}{4}\left(\pm\sqrt{2}vy + y^2\right)^2 \;= \\ &=\; \frac{\lambda v^2}{2}y^2 + \underbrace{\frac{\lambda v^2}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{v}y^3 + \frac{1}{2v^2}y^4\right)}_{=V_{\rm int}(y)}. \end{aligned} \tag{453}$$

Für hinreichend niedrige Energien sehen die beiden Potentialtöpfe näherungsweise wie HOs aus, d.h. die Energieeigenzustände ähneln den bekannten Eigenzuständen des HOs. Eine Störungsentwicklung in der neuen Koordinate y mit WW-Term $V_{\rm int}(y)$ macht bei kleinen $1/v$ also Sinn.

- Verallgemeinerung auf Feldtheorien: Finde zuerst die energetischen Minima einer Theorie (klassische Feldkonfigurationen, die die Energie minimieren). Benutze eines dieser Minima als Entwicklungspunkt und wende Störungstheorie auf die entsprechenden neuen Koordinaten (Feldauslenkungen relativ zum Entwicklungspunkt) an.

- Anwendung auf skalare Elektrodynamik mit Potential (450):

– Die Minima des Potentials (450) liegen in der "Hutkrempe" $|\phi| = v/\sqrt{2}$. Definiere also neue Koordinaten gemäß

$$\phi(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(v + \rho(x)\Big)e^{-i\chi(x)/v} \tag{454}$$

mit $\rho, \chi \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$.

– Das Feld χ steht im Exponenten, ist daher mathematisch nur schwer zu behandeln. Benutze daher die U(1)-Eichsymmetrie, um dieses Feld zu eliminieren. Eichfixierung $\chi(x) = 0$ (offensichtlich erfüllbar, da unter Eichtransformationen $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\Lambda(x)}\phi(x)$, siehe (401)).

– Die Struktur der Lagrange-Dichte verändert sich:

$$\phi(x) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(v + \rho(x)\Big) \tag{455}$$

$$D_\mu\phi(x) \;\to\; \Big(\partial_\mu - ieA_\mu(x)\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(v + \rho(x)\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\rho(x) - \frac{ie}{\sqrt{2}}A_\mu(x)\Big(v + \rho(x)\Big) \tag{456}$$

$$V(\phi) \;\to\; V(\rho) \;=\; \frac{\lambda v^2}{4}(\rho(x))^2 + \frac{\lambda v}{4}(\rho(x))^3 + \frac{\lambda}{16}(\rho(x))^4, \tag{457}$$

also

$$\mathcal{L}(\phi, A_\mu) \;\to\; \mathcal{L}(\rho, A_\mu) \;=$$
$$= \;\frac{1}{2}(\partial^\mu\rho)(\partial_\mu\rho) - V(\rho) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{2}A^\mu(x)A_\mu(x)\Big(v + \rho(x)\Big)^2. \tag{458}$$

- Physikalische Interpretation der Theorie (458) ("Welche Teilchen beschreibt sie?"):

  – Feld ρ:

    * Reelles Feld, ein FHG, Teilchen ist also gleich Antiteilchen.
    * Quadratischer ρ-Term mit negativem Vorzeichen $-\lambda v^2\rho^2/4$, also massive Teilchen mit Masse $m_\rho = \sqrt{\lambda v^2/2}$.

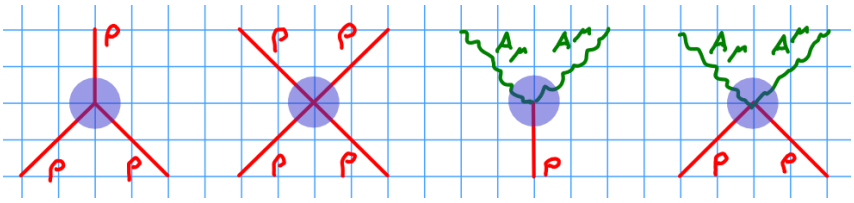
  – Feld A_μ:

    * Quadratischer A_μ-Term mit positivem Vorzeichen $+e^2v^2A^\mu A_\mu/2$, also keine Photonen mehr, sondern massive Vektorbosonen mit Masse $m_A = ev$.

  – Abzählen der FHGs:

    * Vorher: ϕ (2 FHGs), A_μ (2 FHGs; ein Photon hat zwei Polarisationsrichtungen [Abschnitt 5.4]).
    * Nachher: ρ (1 FHGs), A_μ (3 FHGs; ein massives Vektorboson [d.h. ein Spin-1-Teilchen] hat drei Spineinstellungen).
    * Das Umschreiben der Theorie auf einen geeigneteren Satz von Feldvariablen verändert also nicht die Anzahl der FHGs (ein guter Cross-Check).

  – WWs, d.h. Vertices in Feynman-Diagrammen: ρ^3, ρ^4, $\rho A^\mu A_\mu$, $\rho^2 A^\mu A_\mu$.



– ϕ bzw. ρ werden als Higgs-Felder bezeichnet.

– Die Lagrange-Dichte (449) mit dem Mexican-Hat-Potential (450) ist zwar U(1)-symmetrisch bezüglich ϕ, das Potential bewirkt aber, dass die klassischen Grundzustände, um die eine Störungsentwicklung und Teilcheninterpretation sinnvoll ist, diese Symmetrie nicht mehr besitzen. Die U(1)-Symmetrie ist damit dynamisch gebrochen, die masselosen Eichbosonen werden zu massiven Vektorbosonen. Dieser Mechanismus, d.h. dass zunächst scheinbar masselose Teilchen zu massiven Teilchen werden, wird als Higgs-Mechanismus bezeichnet.

****** 12. Februar 2025 (29. Vorlesung) ******

12 Das Standardmodell der Teilchenphysik

- Literatur: [3], Kapitel 87 bis 89.
- Beschreibt starke, schwache und em WW durch eine SU(3) × SU(2) × U(1)-Eichtheorie. Gravitation ist nicht Teil des Standardmodells der Teilchenphysik.
- Leptonen:
  Jeweils drei Sorten von linkshändigen Weyl-Feldern in den Darstellungen $(1, 2, -1/2)$ (bedeutet z.B. Singlet bezüglich SU(3), Doublet bezüglich SU(2), U(1)-Ladung $-1/2$ [Hyperladung bzw. Hypercharge, entspricht nicht der elektrischen Ladung]) und $(1, 1, +1)$.
- Quarks:
  Jeweils drei Sorten von linkshändigen Weyl-Feldern in den Darstellungen $(3, 2, +1/6)$, $(\bar{3}, 1, -2/3)$, $(\bar{3}, 1, +1/3)$.
- Higgs-Feld:
  Ein komplexes Skalarfeld in der Darstellung $(1, 2, -1/2)$.

12.1 Elektroschwacher Eich- und Higgs-Sektor

- Starte mit dem Higgs-Feld (Darstellung $(1, 2, -1/2)$) und den relevanten SU(2) und U(1) Eichfeldern:
  - Reicht aus, um zu verstehen, warum die Austauschteilchen der schwachen WW (W- und Z-Bosonen) massiv sind (Eichtheorien implizieren i.d.R. masselose Vektorbosonen; siehe Abschnitte 8.1 und 10.1).
  - Der zu Grunde liegende Mechanismus ist der Higgs-Mechanismus (siehe Kapitel 11).
  - Die Eichgruppen SU(2) und U(1) müssen gleichzeitig betrachtet werden. Bei Identifikation der physikalischen FHGs mischen die beiden Eichgruppen auf Grund des Higgs-Mechanismus. Nach geeigneter Eichfixierung verbleibt eine U(1)-Symmetrie, die der em WW entspricht (dies ist nicht die U(1)-Symmetrie, mit der gestartet wurde).
- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_1 = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu,a} F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \tag{459}$$

  mit dem Higgs-Potential

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \tag{460}$$

der kovarianten Ableitung

$$D_\mu\phi \;=\; \partial_\mu\phi - i\Big(g_2 A^a_\mu\frac{\sigma^a}{2} + g_1 B_\mu\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big)\phi \;=$$
$$=\; \partial_\mu\phi - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} +g_2A^3_\mu - g_1B_\mu & g_2(A^1_\mu - iA^2_\mu) \\ g_2(A^1_\mu + iA^2_\mu) & -g_2A^3_\mu - g_1B_\mu \end{pmatrix}\phi \tag{461}$$

(also SU(2)-Eichfeld $A_\mu = A^a_\mu\sigma^a/2$ und U(1)-Eichfeld B_μ) und den üblichen Feldstärketensoren

$$F^a_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g_2\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \quad,\quad B_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{462}$$

($F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\sigma^a/2$; die linke Gleichung in (462) ist damit äquivalent zu (446), wie man durch eine kurze Nebenrechnung zeigen kann [ist als Übung zu empfehlen]; in ähnlicher Weise gilt bzw. kann man zeigen $-(1/2)\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = -(1/4)F^{\mu\nu,a}F^a_{\mu\nu}$).

- Identifikation der physikalischen FHGs:
  - Störungsentwicklung um eines der Minima des Higgs-Potentials. Diese liegen bei $|\phi| = v/\sqrt{2}$.
  - Eichfixierung $\phi(x) = (v + H(x), 0)/\sqrt{2}$, wobei H ein reelles Feld ist.
  - Das Feld ϕ verliert durch die Eichfixierung drei FHGs. Dies deutet an, dass die masselosen Eichfelder diese FHGs erhalten und damit drei massive Vektorbosonen entstehen (analog zu Kapitel 11).
  - Das Higgs-Potential verändert seine Struktur:

    $$V(\phi) \;\to\; V(H) \;=\; \frac{\lambda v^2}{4}H^2 + \frac{\lambda v}{4}H^3 + \frac{\lambda}{16}H^4. \tag{463}$$

    Die Masse des Higgs-Teilchens ist damit $(m_H)^2 = \lambda v^2/2$.
  - Der kinetische Term des Higgs-Felds verändert seine Struktur:

    $$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) \;=\; \frac{1}{2}\Big(D^\mu(v+H,0)\Big)^\dagger\Big(D_\mu(v+H,0)\Big). \tag{464}$$

    Der v^2-Anteil entspricht Massentermen für die Eichfelder:

    $$\frac{v^2}{8}(1,0)\begin{pmatrix} +g_2A^{\mu,3} - g_1B^\mu & g_2(A^{\mu,1} - iA^{\mu,2}) \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +g_2A^3_\mu - g_1B_\mu & \dots \\ g_2(A^1_\mu + iA^2_\mu) & \dots \end{pmatrix}(1,0). \tag{465}$$

    Die gemischten Terme $(D^\mu v)^\dagger(D_\mu H)$ und $(D^\mu H)^\dagger(D_\mu v)$ heben sich gegenseitig weg.
  - Eine Lagrange-Funktion, ausgedrückt durch physikalische FHGs, enthält keine gemischten quadratischen Terme. Dies erreicht man durch folgende Linearkombination:

    $$W^+_\mu \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu - iA^2_\mu) \quad,\quad W^-_\mu \;=\; (W^+_\mu)^\dagger \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu + iA^2_\mu) \tag{466}$$
    $$Z_\mu \;=\; +c_wA^3_\mu - s_wB_\mu \quad,\quad A_\mu \;=\; +s_wA^3_\mu + c_wB_\mu \tag{467}$$

mit $c_w = \cos(\theta_w)$, $s_w = \sin(\theta_w)$ und $\theta_w = \operatorname{atan}(g_1/g_2)$. Der Massenterm (465) wird zu

$$\frac{v^2 g_2^2}{8}(1,0)\begin{pmatrix} Z^\mu/c_w & \sqrt{2}W^{\mu,+} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu/c_w & \dots \\ \sqrt{2}W_\mu^- & \dots \end{pmatrix}(1,0) \;=$$

$$= \; (m_W)^2 W^{\mu,+}W_\mu^- + \frac{(m_Z)^2}{2}Z^\mu Z_\mu \tag{468}$$

mit $m_W = vg_2/2$ und $m_Z = vg_2/2c_w = m_W/c_w$. Das masselos verbleibende Vektorboson A_μ entspricht dem Photon.

- Lagrange-Dichte in physikalischen FHGs: Nach Einsetzen der physikalischen Vektorbosonfelder (466) und (467) in die kinetischen Terme der Eichfelder $F^{\mu\nu,a}F^a_{\mu\nu}$ und $B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \;=& \\ =\; & +\frac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - \frac{m_H^2}{2}H^2 - \frac{m_H^2}{2v}H^3 - \frac{m_H^2}{8v^2}H^4 \\ & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - (D^\mu)^\dagger W^{\nu,-}\Big(D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+\Big) \\ & +\left((m_W)^2 W^{\mu,+}W_\mu^- + \frac{(m_Z)^2}{2}Z^\mu Z_\mu\right)\left(1+\frac{H}{v}\right)^2 \\ & +ie\Big(F^{\mu\nu} + \cot(\theta_w)Z^{\mu\nu}\Big)W_\mu^+ W_\nu^- \\ & -\frac{e^2}{2s_w^2}\Big(W^{\mu,+}W_\mu^- W^{\nu,+}W_\nu^- - W^{\mu,+}W_\mu^+ W^{\nu,-}W_\nu^-\Big).\end{aligned} \tag{469}$$

  - Zeile 1: Massives reelles Higgs-Feld und dessen Selbst-WW.
  - Zeile 2: Kinetische Terme der Vektorbosonen, wobei

    $$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad Z_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu. \tag{470}$$

    Für die kovariante Ableitung gilt

    $$D_\mu \;=\; \partial_\mu - ig_2 A_\mu^3 \;=\; \partial_\mu - ie\Big(A_\mu + \cot(\theta_w)Z_\mu\Big) \tag{471}$$

    mit der em Kopplungskonstante $e = g_2 s_w$, d.h. die W-Bosonen sind elektrisch geladen und tragen Ladung $\pm e$.
  - Zeile 3: Massenterme der W- und Z-Bosonen, WWs der W- und Z-Bosonen mit dem Higgs-Feld.
  - Zeile 4 und 5: WW-Terme der Vektorbosonen untereinander.
  - Die Beziehungen zwischen den vier physikalischen Parametern m_H, m_W, m_Z und e und den vier ursprünglichen Parametern λ, v, g_1 und g_2 nochmals zusammengefasst:
    $(m_H)^2 = \lambda v^2/2 \approx 125\,\text{GeV}$ (?),
    $m_W = vg_2/2 = 80.4\,\text{GeV}$,
    $m_Z = m_W/c_w = 91.2\,\text{GeV}$ (wobei $\theta_w = \operatorname{atan}(g_1/g_2)$ und damit $s_w^2 = 0.223$),
    $e = g_2 s_w$.

- Obwohl mit einer SU(2) × U(1)-Eichtheorie gestartet wurde, ist aufgrund des Higgs-Mechanismus und nach der Identifikation der physikalischen FHGs, unter anderem mit Hilfe einer geeigneten Eichfixierung, lediglich noch eine U(1)-Eichsymmetrie sichtbar. Diese entspricht nicht der ursprünglichen U(1)-Eichsymmetrie.

12.2 Lepton-Sektor

- Füge zur Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_1$ (Gleichung (469)) drei Familien/Generationen von Leptonen hinzu, (e, ν_e), (μ, ν_μ) und (τ, ν_τ).

- Starte zunächst mit einer Familie, (e, ν_e). Diese wird durch linkshändige Weyl-Felder (siehe Abschnitt 3.4) l und $\bar{e}$ (der Überstrich ist Teil des Namens, bezeichnet also keine Komplexkonjugation, etc.) in den Darstellungen $(1, 2, -1/2)$ und $(1, 1, +1)$ bezüglich der Eichsymmetrie beschrieben. Da nur linkshändige aber keine rechtshändigen Weyl-Felder verwendet werden, bricht dieser Teil des Standardmodells die Parität.

- Kinetische Terme:

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,kin}} = il^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu l + i\bar{e}^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{e} \tag{472}$$

mit $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$ (analog zu den γ-Matrizen für Dirac-Spinoren) und den kovarianten Ableitungen

$$D_\mu l = \partial_\mu l - i\Big(g_2 A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + g_1 B_\mu \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big) l \tag{473}$$

$$D_\mu \bar{e} = \partial_\mu \bar{e} - i g_1 B_\mu (+1) \bar{e}. \tag{474}$$

- Aufgrund der Tatsache, dass nur linkshändige aber keine rechtshändigen Weyl-Spinoren zur Verfügung stehen, und der Forderungen nach Lorentz-Invarianz, Eichinvarianz und Renormierbarkeit ist lediglich ein WW-Term folgender Form erlaubt:

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,Higgs-WW}} = -y\epsilon^{ab}\phi^a l^b \bar{e} + \text{h.c.}, \tag{475}$$

wobei y eine Kopplungskonstante und ϵ der total antisymmetrische Tensor ist ($\epsilon^{12} = +1$), die Indizes a und b die Doublets der SU(2)-Eichgruppe betreffen und im Spinraum die übliche abkürzende Schreibweise $l\bar{e} = \epsilon^{AB} l_B \bar{e}_A = l^T(-i\sigma_2)\bar{e}$ (ist ein Lorentz-Skalar) verwendet wurde.

***** 14. Februar 2025 (30. Vorlesung) ******

- Die in Abschnitt (12.1) gewählte Eichfixierung $\phi(x) = (v + H(x), 0)/\sqrt{2}$ verändert die Struktur von (475):

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,Higgs-WW}} = -\frac{y}{\sqrt{2}}(v + H)\Big(l^2 \bar{e} + \text{h.c.}\Big). \tag{476}$$

- Verwende die Notation $l = (l^1, l^2) = (\nu, e)$. Definiere einen Dirac-Spinor $\mathcal{E} = (e, +i\sigma^2 \bar{e}^*)$, das Elektron-Feld (man kann zeigen, dass sich $+i\sigma^2\bar{e}^*$ unter Lorentz-Transformationen wie ein rechtshändiger Weyl-Spinor transformiert; aus Abschnitt 3.4 ist bekannt, dass ein

Dirac-Spinor eine Kombination eines links- und eines rechtshändigen Spinors ist). Damit wird (476) zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lepton,Higgs-WW}} &= -\frac{y}{\sqrt{2}}(v+H)\Big(e^T(-i\sigma_2)\bar{e}+\bar{e}^\dagger(+i\sigma_2)e^*\Big) = \\ &= -\frac{y}{\sqrt{2}}(v+H)\Big(\bar{e}^T(-i\sigma_2)e+e^\dagger(+i\sigma_2)\bar{e}^*\Big) = -\frac{y}{\sqrt{2}}(v+H)\bar{\mathcal{E}}\mathcal{E} \qquad (477)\end{aligned}$$

(beim Vertauschen der Reihenfolge von e und $\bar{e}$ tritt ein zusätzliches Minuszeichen auf, da e und $\bar{e}$ bereits wie fermionische Operatoren behandelt werden müssen), wobei die chirale Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (478)$$

verwendet wurde, d.h. $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\dagger\gamma^0 = (\bar{e}^T(-i\sigma^2), e^\dagger)$. Das Elektron hat damit die Masse $m_e = yv/\sqrt{2}$ erhalten.

- Definiere für das Neutrino ebenfalls einen vierkomponentigen Spinor, $\mathcal{N}_L = (\nu, 0)$.
- Ausdrücken der Ableitungsanteile der kinetischen Terme (472) durch $\mathcal{E}$ und $\mathcal{N}_L$:

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,kin}} = i\bar{\mathcal{E}}\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{E} + i\bar{\mathcal{N}}_L\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{N} + \ldots \qquad (479)$$

- Analog zu Abschnitt 12.1 können die verbleibenden WW-Terme, die den kovarianten Ableitungen entspringen, durch die physikalischen FHGs $\mathcal{E}$, $\mathcal{N}_L$, $W^\pm_\mu$, Z_μ und A_μ ausgedrückt werden:

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,kin}} = \ldots + \frac{g_2}{\sqrt{2}}\Big(W^+_\mu J^{\mu,-} + W^-_\mu J^{\mu,+}\Big) + \frac{e}{s_w c_w} Z_\mu J^{\mu,Z} + eA_\mu J^{\mu,\text{em}} \qquad (480)$$

mit

$$J^{\mu,-} = \bar{\mathcal{N}}_L\gamma^\mu\mathcal{E}_L \quad , \quad J^{\mu,+} = \bar{\mathcal{E}}_L\gamma^\mu\mathcal{N}_L \qquad (481)$$

$$J^{\mu,Z} = \frac{1}{2}\Big(\bar{\mathcal{N}}_L\gamma^\mu\mathcal{N}_L - \bar{\mathcal{E}}_L\gamma^\mu\mathcal{E}_L\Big) - s_w^2 J^{\mu,\text{em}} \qquad (482)$$

$$J^{\mu,\text{em}} = -\bar{\mathcal{E}}\gamma^\mu\mathcal{E} \qquad (483)$$

und $\mathcal{E}_L = (1-\gamma_5)\mathcal{E}/2 = (e, 0)$.

- Die Terme $i\bar{\mathcal{E}}\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{E}$ aus (479), $eA_\mu J^{\mu,\text{em}} = i\bar{\mathcal{E}}\gamma^\mu ieA_\mu\mathcal{E}$ aus (480) und $-yv\bar{\mathcal{E}}\mathcal{E}/\sqrt{2} = -m_e\bar{\mathcal{E}}\mathcal{E}$ aus (477) bilden zusammen

$$i\bar{\mathcal{E}}\gamma^\mu D_\mu\mathcal{E} - m_e\bar{\mathcal{E}}\mathcal{E} \quad , \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \qquad (484)$$

also im Wesentlichen die Lagrange-Dichte der QED (408) (bis auf eine Umdefinition von $e \to -e$ [in diesem Kapitel $e > 0$], Beschränkung auf eine Familie und den kinetischen Term der Photonen, der sich bereits in (469) findet).

- Die WW-Terme in (477) und (480) können in gewohnter Weise interpretiert werden.

  - Experimentelle Beobachtung: Elektronen sind einfach elektrisch geladen, Neutrinos dagegen elektrisch neutral.
  - Dies spiegelt sich konsistent in den WW-Termen in (480) wieder: Es existiert kein WW-Term, in dem $\mathcal{N}_L$ und A_μ vorkommt.

- Erweiterung auf drei Familien:
  - Kinetische Terme: Summiere über drei Familien,

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,kin}} \quad \to \quad \sum_{A=1}^{3} \Big(i(l^{(A)})^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu l^{(A)} + i(\bar{e}^{(A)})^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{e}^{(A)} \Big). \tag{485}$$

  - WW-Terme: Der allgemeinste erlaubte WW-Term ist

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,Higgs-WW}} \quad \to \quad - \sum_{A,B=1}^{3} \Big(y_{AB} \epsilon^{ab} \phi^a l^{b,(A)} \bar{e}^{(B)} + \text{h.c.} \Big); \tag{486}$$

    dieser kann durch geeignete unitäre Transformationen der Feldvariablen $l^{(A)} \to L_{AB} l^{(B)}$ und $\bar{e}^{(A)} \to \bar{E}_{AB} \bar{e}^{(B)}$ "entkoppelt" werden, d.h. $y_{AB} \to \text{diag}(y_1, y_2, y_3)_{AB}$ mit $y_A \in \mathbb{R}$; damit

$$\mathcal{L}_{\text{lepton,Higgs-WW}} \quad \to \quad - \sum_{A=1}^{3} \Big(y_A \epsilon^{ab} \phi^a l^{b,(A)} \bar{e}^{(A)} + \text{h.c.} \Big). \tag{487}$$

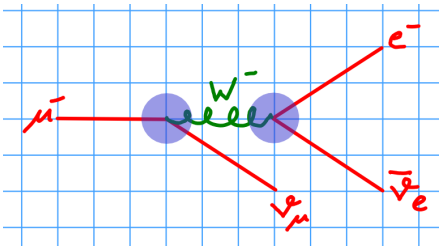
  - Jede weitere Lepton-Familie $((\mu, \nu_\mu), (\tau, \nu_\tau))$ hat also genau die gleiche Struktur, wie (e, ν_e).

- Der Lepton-Sektor trägt

$$\mathcal{L}_2 \quad = \quad \mathcal{L}_{\text{lepton,kin}} + \mathcal{L}_{\text{lepton,Higgs-WW}} \tag{488}$$

  zur Lagrange-Dichte des Standardmodells bei.

- Beispiel-Prozess: Myon-Zerfall, $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ (siehe z.B. [3], Kapitel 88).



12.3 Quark-Sektor

- Die Konstruktion ähnelt der des Lepton-Sektors.

- Füge zur Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ (Gleichungen 469) und (488)) drei Familien/Generationen von Quarks hinzu, (u, d), (c, s) und (t, b).

- Starte zunächst mit einer Familie, (u, d). Diese wird durch linkshändige Weyl-Felder (siehe Abschnitt 3.4) q, $\bar{u}$ und $\bar{d}$ (der Überstrich ist Teil des Namens, bezeichnet also keine Komplexkonjugation, etc.) in den Darstellungen $(3, 2, +1/6)$, $(\bar{3}, 1, -2/3)$ und $(\bar{3}, 1, +1/3)$ bezüglich der Eichsymmetrie beschrieben ($\bar{3}$ bezeichnet die komplex konjugierte Darstellung zu 3 mit den Erzeugenden $T^a_{\bar{3}} = -(T^a_3)^*$). Da nur linkshändige aber keine rechtshändigen Weyl-Felder verwendet werden, bricht dieser Teil des Standardmodells die Parität.

- Kinetische Terme:

$$\mathcal{L}_{\text{quark,kin}} = iq^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu q + i\bar{u}^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{u} + i\bar{d}^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{d} \tag{489}$$

  mit den kovarianten Ableitungen

$$D_\mu q = \partial_\mu q - i\left(g_3 \mathcal{A}^a_\mu \frac{\lambda^a}{2} + g_2 A^a_\mu \frac{\sigma^a}{2} + g_1 B_\mu \left(+\frac{1}{6}\right)\right) q \tag{490}$$

$$D_\mu \bar{u} = \partial_\mu \bar{u} - i\left(g_3 \mathcal{A}^a_\mu \frac{\bar{\lambda}^a}{2} + g_1 B_\mu \left(-\frac{2}{3}\right)\right) \bar{u} \tag{491}$$

$$D_\mu \bar{d} = \partial_\mu \bar{d} - i\left(g_3 \mathcal{A}^a_\mu \frac{\bar{\lambda}^a}{2} + g_1 B_\mu \left(+\frac{1}{3}\right)\right) \bar{d} \tag{492}$$

  ($\bar{\lambda} = -(\lambda^a)^*$; das SU(3)-Eichfeld $\mathcal{A}^a_\mu$ beschreibt Gluonen).

- Aufgrund der Tatsache, dass nur linkshändige aber keine rechtshändigen Weyl-Spinoren zur Verfügung stehen, und der Forderungen nach Lorentz-Invarianz, Eichinvarianz und Renormierbarkeit sind lediglich WW-Terme folgender Form erlaubt:

$$\mathcal{L}_{\text{quark,Higgs-WW}} = -y''(\phi^a)^\dagger q^{ac} \bar{u}^c - y' \epsilon^{ab} \phi^a q^{bc} \bar{d}^c + \text{h.c.}, \tag{493}$$

  wobei y' und y'' Kopplungskonstanten sind, die Indizes a und b die Doublets der SU(2)-Eichgruppe und c die Triplets der SU(3)-Eichgruppe betreffen und im Spinraum die übliche abkürzende Schreibweise $q\bar{u} = \epsilon^{AB} q_B \bar{u}_A = q^T(-i\sigma_2)\bar{u}$ (ist ein Lorentz-Skalar; analog für $q\bar{d}$) verwendet wurde.

- Die in Abschnitt 12.1 gewählte Eichfixierung $\phi(x) = (v + H(x), 0)/\sqrt{2}$ verändert die Struktur von (493):

$$\mathcal{L}_{\text{quark,Higgs-WW}} = -\frac{y''}{\sqrt{2}}(v + H) q^{1c} \bar{u}^c - \frac{y'}{\sqrt{2}}(v + H) q^{2c} \bar{d}^c + \text{h.c.} \tag{494}$$

- Verwende die Notation $q = (q^{1c}, q^{2c}) = (u^c, d^c)$ im SU(2)-Raum. Definiere die Dirac-Spinoren $\mathcal{U}^c = (u^c, +i\sigma^2(\bar{u}^c)^*)$ und $\mathcal{D}^c = (d, +i\sigma^2(\bar{d}^c)^*)$, die u- und d-Quark-Felder (diese Felder gehören zur 3-Darstellung der SU(3)-Eichsymmetrie). Damit wird (494) zu

$$\mathcal{L}_{\text{quark,Higgs-WW}} = \ldots = -\frac{y''}{\sqrt{2}}(v + H) \bar{\mathcal{U}}^c \mathcal{U}^c - \frac{y'}{\sqrt{2}}(v + H) \bar{\mathcal{D}}^c \mathcal{D}^c \tag{495}$$

  (im Folgenden werden die SU(3)-Farbindizes c weggelassen). Das u-Quark hat damit die Masse $m_u = y''v/\sqrt{2}$, das d-Quark die Masse $m_d = y'v/\sqrt{2}$ erhalten.

- Ausdrücken der Ableitungs- und gluonischen Anteile der kinetischen Terme (489) durch $\mathcal{U}$ und $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{L}_{\text{quark,kin}} \;=\; i\bar{\mathcal{U}}\gamma^\mu D_\mu \mathcal{U} + i\bar{\mathcal{D}}\gamma^\mu D_\mu \mathcal{D} + \ldots \quad , \quad D_\mu \;=\; \partial_\mu - ig_3 \mathcal{A}_\mu. \tag{496}$$

- Analog zu den Abschnitten 12.1 und 12.2 können die verbleibenden WW-Terme, die den kovarianten SU(2)- und U(1)-Ableitungen entspringen, durch die physikalischen FHGs $\mathcal{U}$, $\mathcal{D}$, $W_\mu^\pm$, Z_μ und A_μ ausgedrückt werden:

$$\mathcal{L}_{\text{quark,kin}} \;=\; \ldots + \frac{g_2}{\sqrt{2}}\Big(W_\mu^+ J^{\mu,-} + W_\mu^- J^{\mu,+}\Big) + \frac{e}{s_w c_w} Z_\mu J^{\mu,Z} + eA_\mu J^{\mu,\text{em}} \tag{497}$$

mit

$$J^{\mu,-} \;=\; \bar{\mathcal{U}}_L \gamma^\mu \mathcal{D}_L \quad , \quad J^{\mu,+} \;=\; \bar{\mathcal{D}}_L \gamma^\mu \mathcal{U}_L \tag{498}$$

$$J^{\mu,Z} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\bar{\mathcal{U}}_L \gamma^\mu \mathcal{U}_L - \bar{\mathcal{D}}_L \gamma^\mu \mathcal{D}_L\Big) - s_w^2 J^{\mu,\text{em}} \tag{499}$$

$$J^{\mu,\text{em}} \;=\; +\frac{2}{3}\bar{\mathcal{U}}\gamma^\mu \mathcal{U} - \frac{1}{3}\bar{\mathcal{D}}\gamma^\mu \mathcal{D} \tag{500}$$

und $\mathcal{U}_L = (1-\gamma_5)\mathcal{U}/2 = (u, 0)$ und analog für $\mathcal{D}_L$.

- Die Terme in (496) und $-y''v\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U}/\sqrt{2} - y'v\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}/\sqrt{2} = -m_u\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U} - m_d\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ aus (495) bilden zusammen

$$i\bar{\mathcal{U}}\gamma^\mu D_\mu \mathcal{U} - m_u\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U} + i\bar{\mathcal{D}}\gamma^\mu D_\mu \mathcal{D} - m_d\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} \quad , \quad D_\mu \;=\; \partial_\mu - ig_3\mathcal{A}_\mu, \tag{501}$$

also im Wesentlichen die Lagrange-Dichte der QCD (448) (bis auf Beschränkung auf eine Familie und den kinetischen Term der Gluonen).

- Die WW-Terme in (495), (496) und (497) können in gewohnter Weise interpretiert werden.
  - Experimentelle Beobachtung: u-Quarks tragen die elektrische Ladung $+2/3$, d-Quarks die elektrische Ladung $-1/3$.
  - Dies spiegelt sich konsistent in den WW-Termen, z.B. in (500), wieder.

- Erweiterung auf drei Familien:
  - Kinetische Terme: Summiere über drei Familien,

$$\mathcal{L}_{\text{quark,kin}} \;\to\; \sum_{A=1}^{3}\Big(i(q^{(A)})^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu q^{(A)} + i(\bar{u}^{(A)})^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{u}^{(A)} + i(\bar{d}^{(A)})^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \bar{d}^{(A)}\Big). \tag{502}$$

  - WW-Terme: Der allgemeinste erlaubte WW-Term ist

$$\mathcal{L}_{\text{quark,Higgs-WW}} \;\to\; -\sum_{A,B=1}^{3}\Big(y''_{AB}(\phi^a)^\dagger q^{a,(A)}\bar{u}^{(B)} + y'_{AB}\epsilon^{ab}\phi^a q^{b,(A)}\bar{d}^{(B)} + \text{h.c.}\Big). \tag{503}$$

Dieser kann durch geeignete unitäre Transformationen der Feldvariablen $u^{(A)} \to U_{AB}u^{(B)}$, $\bar{u}^{(A)} \to \bar{U}_{AB}\bar{u}^{(B)}$, $d^{(A)} \to D_{AB}d^{(B)}$ und $\bar{d}^{(A)} \to \bar{D}_{AB}\bar{d}^{(B)}$ "entkoppelt" werden, d.h. $y''_{AB} \to \mathrm{diag}(y''_1, y''_2, y''_3)_{AB}$ und $y'_{AB} \to \mathrm{diag}(y'_1, y'_2, y'_3)_{AB}$ mit $y''_A, y'_A \in \mathbb{R}$; damit

$$\mathcal{L}_{\text{quark,Higgs-WW}} \quad \to \quad -\sum_{A=1}^{3} \Big(y''_A (\phi^a)^\dagger q^{a,(A)} \bar{u}^{(A)} + y'_A \epsilon^{ab} \phi^a q^{b,(A)} \bar{d}^{(A)} + \text{h.c.} \Big); \tag{504}$$

in den Strömen, die an die W-Bosonen koppeln, vermischen sich jedoch die Quarkfamilien,

$$J^{\mu,-} \quad \to \quad \bar{\mathcal{U}}_L V \gamma^\mu \mathcal{D}_L \quad , \quad J^{\mu,+} \quad \to \quad \bar{\mathcal{D}}_L V^\dagger \gamma^\mu \mathcal{U}_L \tag{505}$$

mit der Cabibbo-Kobayasi-Masawa-Matrix (CKM-Matrix) $V = U^\dagger D$. Diese kann nach geeigneten Phasentransformationen der Feldvariablen $\mathcal{U}^{(A)} \to e^{i\alpha_A}\mathcal{U}^{(A)}$ und $\mathcal{D}^{(A)} \to e^{i\beta_A}\mathcal{D}^{(A)}$ durch vier reelle Größen θ_1, θ_2, θ_3 und δ parametrisiert werden,

$$V \quad = \quad \begin{pmatrix} +c_1 & +s_1 c_3 & +s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & +c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & +c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & +c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \tag{506}$$

mit $s_1 = 0.224$, $s_2 = 0.041$, $s_3 = 0.016$ und $\delta = 40°$ entsprechend experimentellen Beobachtungen.

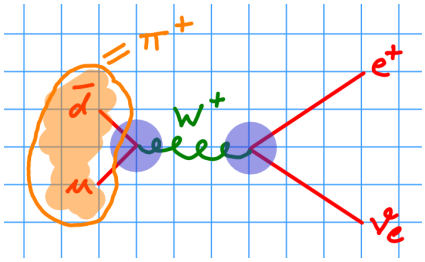
- Der Quark-Sektor trägt

$$\mathcal{L}_3 \quad = \quad \mathcal{L}_{\text{quark,kin}} + \mathcal{L}_{\text{quark,Higgs-WW}} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu,a}\mathcal{F}^a_{\mu\nu} \tag{507}$$

zur Lagrange-Dichte des Standardmodells bei, wobei $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ der übliche gluonische Feldstärketensor ist,

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} \quad = \quad \partial_\mu \mathcal{A}^a_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^a_\mu + g_3 \epsilon^{abc} \mathcal{A}^b_\mu \mathcal{A}^c_\nu. \tag{508}$$

- Beispiel-Prozess: π^+-Zerfall, $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ ($\pi^+ = \bar{d}u$).



12.4 Die Lagrange-Dichte des Standardmodells

- Kombiniere die Beträge der drei vorausgegangenen Abschnitte:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} \quad = \quad \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3. \tag{509}$$

Literatur

[1] O. Philipsen, "Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik," Springer.

[2] L. H. Ryder, "Quantum field theory," Cambridge University Press.

[3] M. Srednicki, "Quantum field theory," Cambridge University Press.

[4] M. Maggiore, "A modern introduction to quantum field theory," Oxford University Press.

[5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An introduction to quantum field theory," Perseus Books.

[6] P. Schmüser, "Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker," Springer.

[7] S. Navas *et al.* [Particle Data Group], "Review of particle physics," Phys. Rev. D **110**, no. 3, 030001 (2024).

[8] S. Lottini, O. Philipsen and M. Wagner, "Quantenfeldtheorie II," Vorlesungsskript, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Sommersemester 2012.

[9] W. Greiner, "Field quantization," Springer.

[10] M. Eichberg and M. Wagner, "Computing $1/m_Q$ and $1/m_Q^2$ corrections to the static potential with lattice gauge theory using gradient flow," PoS **LATTICE2024**, 117 (2025) [arXiv:2411.11640 [hep-lat]].

[11] L. Müller, O. Philipsen, C. Reisinger and M. Wagner, "Hybrid static potential flux tubes from SU(2) and SU(3) lattice gauge theory," Phys. Rev. D **100**, no. 5, 054503 (2019) [arXiv:1907.01482 [hep-lat]].