Hendrik van Hees (Goethe-Universität Frankfurt, Institut für Theoretische Physik)

Physik-Vorkurs WS 2019

Übungen zur Thermodynamik – Lösungen

Allgemeine Konstanten (gerundet)

Boltzmannkonstante $k_B = 1{,}381\ \frac{J}{K}$; universelle Gaskonstante $R = N_A k_B = 8{,}314 \frac{J}{K \cdot mol}$; Avogadrokonstante $N_A = 6{,}022 \frac{1}{mol}$; Normaldruck $p_{norm} = 1{,}013$ bar; Temperaturskalen: $0°C \mathrel{\widehat{=}} 273{,}15$ K.
Die Molmasse eines Gases ist definiert als $m_{mol} = m_{Molekel} N_A$. Die Einheit ist $[m_{mol}] =$ kg/mol bzw. $[m_{mol}] =$ g/mol.

Druckeinheiten: $1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $1\,\text{bar} = 10^5$ Pa

(1) Alice und Bob bewohnen zwei gleich große Zimmer, die durch eine offene Tür verbunden sind. Alices Zimmer ist klimatisiert und besitzt eine um 5 K geringere Temperatur. In welchem Raum befinden sich mehr Luftmoleküle?

Lösung: Gleich große Zimmer heißt, dass $V_1 = V_2 = V$. Da die Tür offensteht, ist $p_1 = p_2 = p$. Nach der idealen Gasgleichung $pV = \nu RT$ ist $\nu_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{pV}{RT_1}$ und $\nu_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2} = \frac{pV}{RT_1}$. Damit ist $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{T_2}{T_1}$. Da $T_1 < T_2$ ist $\nu_1 > \nu_2$, d.h. in Alices Zimmer (Temperatur T_1) mehr Luftmoleküle befinden.

(2) Wenn die Temperatur einer bestimmten Gasmenge bei konstantem Druck verringert wird, was geschieht dann mit dem Volumen?

Lösung: Ideale Gasgleichung: $V = \frac{\nu RT}{p}$. Wenn also T verringert wird und ν und p gleich bleiben, wird auch das Volumen verringert.

(3) Wovon hängt die mittlere kinetische Energie der Teilchen eines idealen Gases ab:

(a) von der Anzahl der Mole des Gases und der Temperatur
(b) vom Druck und von der Temperatur
(c) allein von der Temperatur?

Lösung: Die mittlere kinetische Energie eines Moleküls eines idealen Gases ist durch $\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ gegeben, hängt also nur von der Temperatur ab, d.h. Antwort (c) ist richtig.

(4) Zwei identische Behälter enthalten unterschiedliche ideale Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur. Welche der folgenden Aussagen trifft bzw. treffen dann zu?

(a) Die Anzahlen der Gasteilchen in beiden Behältern sind gleich.
(b) Die Gesamtmassen an Gas in beiden Behältern sind gleich.
(c) Die mittleren Geschwindigkeiten der Gasteilchen in beiden Behältern sind gleich.
(d) Keine dieser Aussagen trifft zu.

Lösung:

(a) Nach der idealen Gasgleichung ist $pV = \nu RT = N k_B T$, d.h. es ist $N = \frac{pV}{k_B T}$. Da die Behälter identisch sind besitzen beide das gleiche Volumen. Außerdem sind nach Voraussetzung für beide Gase Druck und Temperatur gleich. Demnach müssen auch beide Gase die gleiche Anzahl Moleküle enthalten. (a) ist also richtig.

(b) Die Gesamtmasse eines idealen Gases ist $m_{tot} = N m_{Teilchen}$, wobei $m_{Teilchen}$ die Masse eines einzelnen Gasteilchens ist. Da die Gase voraussetzungsgemäß verschieden sind, also aus verschiedenen Teilchen (Atomen oder Molekülen) bestehen, sind die Massen der beiden Gase verschieden. (b) ist also falsch.

(c) Die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens ist $\langle E\rangle_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$, d.h. diese ist für beide Gassorten gleich. Andererseits ist aber $\langle E\rangle = \frac{m_{\mathrm{Teilchen}}}{2}\left\langle v^2\right\rangle$. Da die Masse der Teilchen in den beiden Gasen verschieden ist, sind also die mittleren Geschwindigkeiten $\sqrt{\langle v^2\rangle}$ voneinander verschieden. (c) ist also falsch.

(5) Wie groß ist das Volumen V_{mol} von einem mol idealem Gas unter „Normalbedingungen", d.h. bei der Temperatur von 0°C und dem Druck $p_{\mathrm{norm}} = 1{,}013$ bar?

Lösung: Aus der idealen Gasgleichung $pV = \nu RT$ folgt $V = \frac{\nu RT}{p} = 2{,}24 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}^3 = 2{,}24 \cdot 10^{-2}(10\,\mathrm{dm})^3 = 22{,}4\mathrm{dm}^3 (= 22{,}4\,\mathrm{l})$.

(6) Die Molmasse von Stickstoffgas (aus N_2-Molekülen) beträgt $m_{\mathrm{mol}} = 28\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$ und besitzt die Temperatur $T = 300$ K. Was ist die mittlere kinetische Energie eines Stickstoffmoleküls? Wie groß ist die quadratgemittelte Schwindigkeit $\sqrt{\langle v^2\rangle}$?

Lösung: Die kinetische Energie aller in einem Mol enthaltenen Stickstoffmoleküle ist $U_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{2}\nu RT = 3{,}742\,\mathrm{kJ}$. Andererseits ist $U_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{mol}}\nu\left\langle v^2\right\rangle$ oder $\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{2U_{\mathrm{kin}}/m_{\mathrm{mol}}} = 517\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1861\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

(7) (Knobelaufgabe) Ein geschlossener, thermisch isolierter Zylinder besitzt in der Mitte eine Trennwand. Die linke Hälfte ist mit einem einatomigen idealen Gas der Temperatur T und dem Druck p gefüllt, die rechte Hälfte ist leer (Vakuum). Nun wird die Trennwand schlagartig zur Seite hin entfernt und kurz gewartet, bis das Gas wieder im Gleichgewicht ist. Wie haben sich die Temperatur, der Druck und die innere Energie des Gases verändert?

Lösung: Nehmen wir an, dass das Herausziehen der Wand keinerlei Energieänderung am Gas bewirkt, bleiben die innere Energie erhalten, d.h. es gilt $U_2 = U_1$. Da im thermodynamischen Gleichgewicht $U = C_V T = \frac{3}{2}\nu RT$ ist und die Gasmenge sich nicht ändert, folgt $T_2 = T_1$. Nach der idealen Gasgleichung gilt $p_1V_1 = p_2V_2 = \nu RT$. Wegen $V_2 = 2V_1$ ist $p_2 = p_1V_1/V_2 = \frac{1}{2}p_1$, d.h. der Druck fällt auf den halben Wert.

Man beachte, dass wegen $\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - p\mathrm{d}V = 0$ in diesem Fall das Gas einerseits mechanische Arbeit („Expansionsarbeit") abgibt aber diese Energie in Form von Wärme auch wieder aufnimmt. Hier handelt es sich um einen sog. irreversiblen Prozess: Anfangs strömt das Gas in die leere Hälfte, d.h. es findet eine gerichtete Bewegung statt, und das Gas als Ganzes besitzt mechanische Translationsenergie. Durch die nachfolgenden Stöße der Gasatome untereinander wird diese gerichtete Bewegung allerdings nach einiger Zeit in die ungeordnete Bewegung des Gases im nunmehr doppelt so großen im thermischen Gleichgewicht, also in Wärmebewegung umgewandelt.

Bemerkung: In der Tat findet man, dass in diesem Beispiel die Entropie zunimmt und der Prozeß tatsächlich irreversibel ist, denn will man den Ausgangszustand wieder herstellen, muss man das Gas wieder vollständig in die eine Hälfte des Behälters bringen. Das kann man aber nun nicht mehr durch einfaches schnelles Einfügen einer Trennwand bewerkstelligen, denn dazu müßte man dies zu einem Zeitpunkt tun, bei dem sich zufällig (!!!) vollständig alle Moleküle in dieser einen Hälfte befinden. Das ist aber praktisch unmöglich, denn da im Gleichgewicht die Gasmoleküle gleichverteilt im gesamten Volumen sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Atome in der einen Hälfte sind $1/2^N$, wo $N = \mathcal{O}(10^{24})$ ist, d.h. die Wahscheinlichkeit $1/2^N$ ist praktisch Null.

Man muss also z.B. einen Kolben nehmen, und das Gas auf die Hälfte zusammendrücken, wobei man gegen den Gasdruck Kompressionsarbeit verrichten, d.h. man muss dem Gas die entsprechende Energie zuführen. Damit man dann wieder auf die gleiche Temperatur wie zu Anfang kommt, muss diese Arbeit als Wärme wieder nach außen abgeführt werden. Das System ist bei diesem Prozess also notwendig nicht mehr von der Umgebung isoliert und also kein abgeschlossenes System.

Ausblick: In der Thermodynamikvorlesung lernt man dazu auch noch die Zustandsgröße Entropie und den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kennen, wonach die Entropie eines geschlossenen Systems nie abnehmen kann. In der Tat ist die Entropieänderung in dem obigen Beispiel, wo das Gas in den leeren Teilraum des Volumens expandiert $\Delta S = \nu R\ln(V_2/V_1) \geq 0$. Wollte man umgekehrt das Volumen Verringern, wäre die Entropieänderung entsprechend negativ, und das ist in einem abgeschlossenen System praktische unmöglich (d.h. die Wahrscheinlichkeit für diese Entropieabnahme ist, wie oben angedeutet, praktisch 0), und man muss das System nach außen öffnen, sodass die Entropie des Teilsystems zwar abnehmen kann, wobei aber die Umgebung zumindest diese Entropie aufnehmen muss. I.a., wird die Entropie des Gesamtsystems Gas+Umgebung sogar zunehmen, d.h. die betrachtete Expansion ist **irreversibel**, d.h. sie wird mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit nicht spontan im abgeschlossenen System „Gas“ erfolgen.

Die Aufgaben stammen aus

P. A. Tipler, G. Mosca, Physik, 8. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2019).
`https://doi.org/10.1007/978-3-642-54166-7`

Die Lösungen finden Sie im dazugehörigen Arbeitsbuch:

D. Mills, Arbeitsbuch zu Tipler/Mosca Physik, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2016).