H. van Hees **Wintersemester 2026/2027**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Lösungen 2

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Visualisierung von elektrostatischen Feldern und Potentialen
Erklären Sie anhand der beiden Maxwell-Gleichungen für die Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2}$$

die grundlegenden Eigenschaften elektrostatischer Felder. Sie dürfen die Inhalte im Skript verwenden, d.h. dass aus (1) folgt, dass (in jedem einfach wegzusammenhängenden Gebiet) ein elektrostatisches skalares Potential Φ existiert, so dass

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{3}$$

ist.
Betrachten Sie nun die sog. **Äquipotentialflächen**, also die Flächen, die implizit durch

$$\Phi(\vec{x}) = C = \text{const} \tag{4}$$

definiert sind. Nehmen Sie dazu an, dass eine solche Äquipotentialfläche mit zwei Parametern q_1, q_2 parametrisiert sei, d.h.

$$\Phi[\vec{x}(q_1, q_2)] = C = \text{const} \tag{5}$$

für alle $(q_1, q_2) \in D$, wobei D ein Definitionsbereich für die Parameter der Fläche ist. Bilden Sie nun die Ableitungen nach q_1 und q_2, erhalten Sie (*warum?*)

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \cdot \vec{E}[\vec{x}(q_1, q_2)] = 0, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{6}$$

Das bedeutet, dass $\vec{E}$ entlang der Äquipotentialäche senkrecht auf dieser Fläche steht (*warum?*).
Man definiert nun Feldlinien als Linien, deren Tangenten an jedem Punkt in die Richtung des elektrischen Feldes zeigen. Nach der obigen Überlegung sind die Feldlinien dadurch bestimmt, dass sie die Äquipotentialflächen senkrecht schneiden. Zeichnen Sie die Äquipotentialflächen und Feldlinien für das Coulomb-Feld einer Punktladung im Ursprung und verifizieren Sie obigen Betrachtungen zu den Feldlinien und Äquipotentialflächen. Was passiert bei der Singularität im Ursprung?
Lösung: Gl. (1) besagt, dass das elektromagnetische Feld „wirbelfrei“ ist. Das bedeutet, dass die Feldlinien, also die Linien im Raum, deren Tangenten in jedem Punkt in Richtung des elektrischen Feldes zeigen, nie geschlossen sein können (Ausnahme sind Felder mit Singularitäten, so dass der Definitionsbereich des Feldes kein einfach wegzusammenhängendes Gebiet ist, wie z.B. der „Potentialwirbel“ vom vorigen Übungsblatt). Daher existiert in einfach wegzusammenhängenden Gebiet gemäß dem Lemma von Poincaré ein skalares Potential gemäß (3).
Gl. (2) besagt, dass die Quellen des elektroststischen Feldes (ruhende) Ladungsverteilungen sind. Aus (3) und (2) folgt, dass das Potential die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \Delta\Phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{7}$$

erfüllt. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass die Lösung dieser Gleichung durch die Superposition von Coulomb-Feldern von Punktladungen, also für kontinuierliche Ladungsdichten durch

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{8}$$

gegeben ist.
Betrachten wir nun die durch $(q_1, q_2) \in D$ parametrisierten Äquipotentialflächen (5). Leitet man diese Gleichung nach q_j ($j \in \{1,2\}$) ab, folgt mit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \Phi[\vec{x}(q_1, q_2)] = \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \partial_k \Phi(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}(q_1,q_2)} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \cdot \vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \cdot \vec{E} = 0. \tag{9}$$

Dabei haben wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, wonach über den doppelt auftretenden Index k von 1 bis 3 zu summieren ist. Die beiden Vektoren $\partial\vec{x}/\partial q_j$ sind zwei Tangentialvektoren an die Äquipotentialfläche, die die entsprechende Tangentenfläche in dem betrachteten Punkt aufspannen, und (9) besagt, dass das elektrische Feld auf beiden Tangentialvektoren und damit auf der Fläche senkrecht steht, d.h. parallel zum Flächennormalenvektor ist.
Für das Coulomb-Feld einer Ladung Q im Ursprung des Koordinatensystems gilt

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r = |\vec{x}|. \tag{10}$$

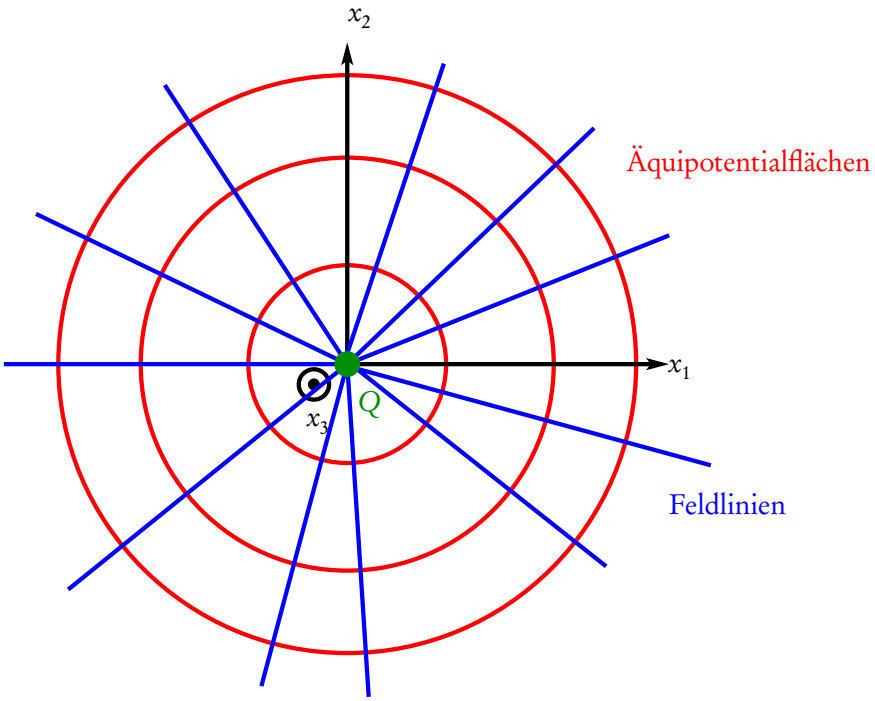
Die Äquipotentialflächen sind also durch

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = C = \text{const} \Rightarrow r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 C} = \text{const} \tag{11}$$

gegeben. Die Äquipotentialflächen sind also Kugeln um den Ursprung. Die Feldlinien des elektrischen Feldes stehen senkrecht auf all diesen Kugeln, sind also die Geraden durch den Ursprung. In der Tat ist das Coulomb-Feld ein Radialfeld, denn es gilt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \frac{Q\vec{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{12}$$

Die Feldlinien schneiden sich im Ursprung, also dort wo die Punktladung sitzt und für die Singularität des Potentials und des elektrischen Feldes verantwortlich ist. Entsprechend besitzt dort das Feld keine definierte Richtung, und die Feldstärke $|\vec{E}| \to \infty$ für $\vec{x} \to 0$.



Für die räumliche Visualisierung denke man sich die obige ebene Skizze um die x_2-Achse rotiert vor.

Aufgabe 2: Dipolfeld in kartesischen und Kugelkoordinaten

In Abschnitt 1.5.8 im Mankuskript haben wir das elekstrostatische Potential eines Dipols im Ursprung des Koordinatensystems hergeleitet:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{13}$$

Es sei ein kartesisches Koordinatensystem so gewählt, dass $\vec{p} = p\vec{e}_3$.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld in kartesischen Koordinaten.

Lösung: Zunächst ist in kartesischen Koordinaten $\vec{p}\cdot\vec{r} = px_3$, d.h.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{px_3}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{14}$$

In kartesischen Koordinaten gilt

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\Phi = -\begin{pmatrix}\partial_1\Phi\\ \partial_2\Phi\\ \partial_3\Phi\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \partial_j\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}. \tag{15}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} E_1 &= -\partial_1\frac{px_3}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{px_3}{4\pi\epsilon_0}\partial_1 r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r^3} = \frac{3px_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_1}{r^5},\\ E_2 &= -\partial_2\frac{px_3}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{3px_3}{4\pi\epsilon_0}\partial_2 r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r^3} = \frac{3px_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_2}{r^5},\\ E_3 &= -\partial_3\frac{px_3}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3px_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_3}{r^5}. \end{aligned} \tag{16}$$

Zusammengefasst ist also

$$\underline{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^5}\begin{pmatrix} 3x_3x_1 \\ 3x_3r_2 \\ 3x_3^2 - r^2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

In koordinatenunabhängiger Form ist dies

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}[(3\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}]. \tag{18}$$

(b) Rechnen Sie das Potential in die Standardkugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und Zylinderkoordinaten (R, φ, z) um.

Lösung: In Kugelkoordinaten ist $\vec{p}\cdot\vec{r} = r\,p\cos\vartheta$ und damit

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{19}$$

und in Zylinderkoordinaten gilt $\vec{p}\cdot\vec{r} = pz$ und folglich

$$\vec{\Phi}(R, \varphi, z) = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}. \tag{20}$$

(c) Berechnen Sie nochmals das elektrische Feld in Kugelkoordinaten sowie Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass die Resultate tatsächlich mit dem Ergebnis der Rechnung in kartesischen Koordinaten übereinstimmen.

Tipp: Die Formeln in Anhang A des Manuskripts dürfen ohne Beweis verwendet werden.

Lösung: Der Gradient in Kugelkoordinaten ist in Gl. (A.3.4) im Skript angegeben. Demnach ist

$$\begin{aligned} E_r &= -\partial_r\Phi = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{r}\partial_\vartheta\Phi = \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Phi = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Um zu sehen, dass dies mit dem Ergebnis (17) in kartesischen Koordinaten übereinstimmt, verwenden wir am einfachsten die koordinatenunabhängige Form (18) und berechnen die Komponenten bzgl. der Orthonormalbasis der Kugelkoordinaten (A.3.9) im Manuskript. Demnach ist

$$\begin{aligned} E_r &= \vec{e}_r\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}[3(\vec{p}\cdot\vec{r})r - r^2\vec{p}\cdot\vec{e}_r] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}2r^2p\cos\vartheta = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\vartheta &= \vec{e}_\vartheta\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}(-r^2\vec{e}_\vartheta\cdot\vec{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}p\sin\vartheta, \\ E_\varphi &= \vec{e}_\varphi\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}(-r^2\vec{p}\cdot\vec{e}_\varphi) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Dabei haben wir $\vec{e}_\vartheta\cdot\vec{r} = \vec{e}_\varphi\cdot\vec{r} = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_\varphi = 0$ benutzt. Da (22) mit (21) übereinstimmt, stimmen wie zu erwarten die Gradienten des Potentials in kartesischen und Kugelkoordinaten überein.

In Zylinderkoordinaten ist gemäß Gl. (A.2.4)

$$\begin{aligned} E_R &= -\partial_R \Phi = \frac{3pzR}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{5/2}}, \\ E_\varphi &= -\frac{1}{R}\partial_\varphi \Phi = 0, \\ E_z &= -\partial_z \Phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{5/2}}(2z^2-R^2) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{5/2}}(3z^2-r^2). \end{aligned} \tag{23}$$

Nun ist $R^2+z^2=r^2$ und $pz = \vec{p}\cdot\vec{r}$. Damit ist in kartesischen Koordinten gemäß (A.2.8)

$$\underline{E} = E_R \underline{e}_R + E_z \vec{e}_z = \frac{1}{4\pi\epsilon r^5}\left[3\vec{p}\cdot\vec{r}\begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} - r^2 p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}(3(\vec{p}\cdot\vec{r})\underline{r} - r^2\underline{p}), \tag{24}$$

und das stimmt mit (18) überein.
