H. van Hees **Wintersemester 2026/2027**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 3

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Elektrisches Potential eines homogen geladenen Zylinders

Gegeben sei ein unendlich langer Zylinder parallel zur x_3-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Der Mittelpunkt der Kreisquerschnittsflächen sei bei $x_1 = x_2 = 0$ und der Kreisradius a. Der Zylinder bestehe aus homogen geladener Materie, d.h. im Zylinder sei die Ladungsdichte $\rho = \text{const}$ und außerhalb 0. Rechnen Sie in Zylinderkoordinaten. Die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts dürfen im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

(a) **[1 Punkt]** Argumentieren Sie, dass aus Symmetriegründen das elektrostatische Potential nur von R abhängen kann. Überlegen Sie dazu zuerst, welche Symmetrien der Zylinder aufweist.

(b) **[3 Punkte]** Verwenden Sie nun den Ansatz $\Phi(\vec{r}) = V(R)$, um die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

durch einfache Integrationen zu lösen und berechnen Sie dann $\vec{E} = -\text{grad}\,\Phi$.

Tipp: Verwenden Sie die Stetigkeit von Φ und $\vec{E}$ bei $R = a$ sowie die Bedingung, dass Φ in $R = 0$ keine Singularität besitzen darf, um die auftretenden Integrationskonstanten für die Bereiche $R < a$ und $R > a$ vollständig festzulegen.

(c) **[2 Punkte]** Überprüfen Sie die Lösung, indem Sie zeigen, dass in der Tat überall

$$\text{div}\,\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{2}$$

gilt.

(d) **[4 Punkte]** Lösen Sie dieselbe Aufgabe nochmals direkt mit dem Gaußschen Gesetz in Integralform und dem der Symmetrie des Problems entsprechenden Ansatz für das elektrische Feld: $\vec{E}(\vec{R}) = E_R(R)\vec{e}_R$ und einer geeigneten Wahl für das Integrationsvolumen.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Potentialwirbel

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_3 \times \frac{\vec{r}}{x_1^2 + x_2^2}. \tag{3}$$

(a) **[3 Punkte]** Berechnen Sie Rotation und Divergenz des Feldes in kartesischen Koordinaten!

(b) **[2 Punkte]** Stellen Sie das Vektorfeld in Standardzylinderkoordinaten (R, φ, z) dar und berechnen Sie abermals Rotation und Divergenz. Dabei dürfen wieder die Formeln in Anhang A.2 des Manuskripts verwendet werden.

(c) **[2 Punkte]** Existiert ein skalares Potential, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi = -\text{grad}\,\Phi \tag{4}$$

gilt?

(d) **[3 Punkte]** Berechnen Sie das Wegintegral

$$J = \int_{K_a} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{V} \tag{5}$$

entlang des Kreises in der x_1-x_2-Ebene mit dem Mittelpunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und Radius a, der durch

$$K_a : \quad \vec{r}(\varphi) = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{6}$$

parametrisiert sei.

(e) **Zum Knobeln (3 Zusatzpunkte):** Wie lässt sich das mit dem in Abschnitt 1.5.5 des Manuskripts besprochenen Lemma von Poincaré vereinbaren? Ist der Satz von Stokes auf das Wegintegral anwendbar?
