

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 9

Aufgabe 1 (10 Punkte): Poisson-Klammeralgebra

Es seien A, B und C beliebige Phasenraumfunktionen, also Funktionen von $(q, p) \equiv (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln für Poisson-Klammern erfüllt sind:

- (a) (2 Punkte) $\{A, \lambda_1 B + \lambda_2 C\}_{\text{pb}} = \lambda_1 \{A, B\}_{\text{pb}} + \lambda_2 \{A, C\}_{\text{pb}}$, wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

Lösung: Mit der abkürzenden Schreibweise aus dem Hinweis folgt die Behauptung sofort aus der Linearität der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \{A, \lambda_1 B + \lambda_2 C\}_{\text{pb}} &= J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha A)[\partial_\beta(\lambda_1 B + \lambda_2 C)] \\ &= J_{\alpha\beta} \partial_\alpha A (\lambda_1 \partial_\beta B + \lambda_2 \partial_\beta C) \\ &= \lambda_1 \{A, B\}_{\text{pb}} + \lambda_2 \{A, C\}_{\text{pb}}. \end{aligned} \quad (1)$$

- (b) (1 Punkt) $\{B, A\}_{\text{pb}} = -\{A, B\}_{\text{pb}}$.

Lösung: Dies ergibt sich aus der Antisymmetrie der Matrix $\hat{f}$:

$$\{B, A\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha B)(\partial_\beta A) = -J_{\beta\alpha}(\partial_\beta A)(\partial_\alpha B) = -\{A, B\}_{\text{pb}}. \quad (2)$$

- (c) (4 Punkte) $\{A, \{B, C\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{B, \{C, A\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{C, \{A, B\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} = 0$. (Jacobi-Identität)

Lösung: Für den ersten Term gilt

$$\{A, \{B, C\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha A) \partial_\beta [J_{\gamma\delta}(\partial_\gamma B)(\partial_\delta C)] = J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha A) [(\partial_\beta \partial_\gamma B)(\partial_\delta C) + (\partial_\gamma B)(\partial_\beta \partial_\delta C)]. \quad (3)$$

Die anderen beiden Terme erhält man daraus durch die „zyklische Permutation“ $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$:

$$\{B, \{C, A\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha B) [(\partial_\beta \partial_\gamma C)(\partial_\delta A) + (\partial_\gamma C)(\partial_\beta \partial_\delta A)], \quad (4)$$

$$\{C, \{A, B\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha C) [(\partial_\beta \partial_\gamma A)(\partial_\delta B) + (\partial_\gamma A)(\partial_\beta \partial_\delta B)], \quad (5)$$

Um die linke Seite des Ausdrucks zu erhalten, müssen wir (3-5) addieren. Betrachten wir nun die beiden rot gefärbten Beiträge zu dieser Summe, folgt aus der Antisymmetrie der Matrix $\hat{f}$ und der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen von B

$$\begin{aligned} &J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha A)(\partial_\delta C)(\partial_\beta \partial_\gamma B) + J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta}(\partial_\gamma A)(\partial_\alpha C)(\partial_\beta \partial_\delta B) \\ &= J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha A)(\partial_\delta C)(\partial_\beta \partial_\gamma B) - J_{\gamma\delta} J_{\beta\alpha}(\partial_\gamma A)(\partial_\alpha C)(\partial_\delta \partial_\beta B) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass sich der zweite Term vom ersten nur durch das Vorzeichen unterscheidet, da nur Summationsindizes umbenannt sind, d.h. die beiden Beiträge heben sich gegenseitig auf. Die gleiche Überlegung zeigt, dass sich auch die blau bzw. grün gefärbten Beiträge jeweils gegenseitig wegheben. Damit ist die Jacobi-Identität gezeigt.

(d) (3 Punkte) $\{AB, C\}_{\text{pb}} = A\{B, C\}_{\text{pb}} + \{A, C\}_{\text{pb}}B$.

Lösung: Dies lässt sich auf die Produktregel für partielle Ableitungen zurückführen:

$$\{AB, C\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}[\partial_\alpha(AB)](\partial_\beta C) = J_{\alpha\beta}[(\partial_\alpha A)B + A(\partial_\alpha B)](\partial_\beta C) = \{A, C\}_{\text{pb}}B + A\{B, C\}_{\text{pb}}. \quad (7)$$

Hinweis: Die Rechnungen mit Poisson-Klammern werden erheblich vereinfacht, wenn man die Phasenraumvariablen wie folgt organisiert: $(\eta_1, \dots, \eta_f, \eta_{f+1}, \dots, \eta_{2f}) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ und die reelle $(2f) \times (2f)$ -Matrix J_{ab} einführt mit

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0_{f \times f} & 1_{f \times f} \\ -1_{f \times f} & 0_{f \times f} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

wobei $0_{f \times f}$ die $f \times f$ -Matrix mit allen Matrixelementen gleich 0 und $1_{f \times f} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ (f -dimensionale Einheitsmatrix) sind. Mit dieser Notation ist dann

$$\{A, B\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha A)(\partial_\beta B), \quad (9)$$

wobei griechische Indizes von 1 bis $2f$ laufen und $\partial_\alpha A = \partial A / \partial \eta_\alpha$ ist. Auch hier wird wieder die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Beim Beweis der Jacobi-Identität benötigt man dann nur noch, dass $\partial_\alpha \partial_\beta A = \partial_\beta \partial_\alpha A$ und die Antisymmetrie von $\hat{J}$, also $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$.

Bemerkung: Mit den Identitäten (a)-(c) erweist sich die Poisson-Klammer als eine Lie-Algebra, die auf dem Vektorraum der Phasenraumfunktionen operiert.

Die Eigenschaft (d) macht die Poisson-Klammer zugleich zu einer sog. Derivation, so dass für die in der Vorlesung definierten Lie-Ableitungen die Produktregel gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Endliche Galilei-Boosts als kanonische Transformation

Für den Galileiboost hatten wir als infinitesimale Generatoren

$$\vec{K} = m\vec{x} - \vec{p}t \quad (10)$$

gefunden. Wir betrachten nun einen endlichen Boost in Richtung von $\vec{n}$. Zur Abkürzung schreiben wir im Folgenden $K = \vec{n} \cdot \vec{K}$. Wir berechnen den endlichen Boost mittels dieses infinitesimalen Generators auf zwei Arten:

(1) Mit Lie-Ableitungen (5 Punkte)

Die kanonische Transformation einer beliebigen Phasenraumfunktion, die durch den infinitesimalen Generator K definiert wird, ergibt sich durch die Differentialgleichung

$$\partial_v \Phi_v = -\mathcal{L}_K \Phi_v = -\{K, \Phi\}_{\text{pb}} = \{\Phi, K\}_{\text{pb}}. \quad (11)$$

Formal ist die Lösung durch die Operatorexponentialfunktion gegeben, also

$$\Phi_v = \exp(-v \mathcal{L}_K) \Phi. \quad (12)$$

Nun ist

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L}_{\vec{n} \cdot (m\vec{x} - \vec{p}t)} = m \mathcal{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}} - t \mathcal{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}. \quad (13)$$

Man berechne die Operatorexponentialfunktion. Gehen Sie dabei wie folgt vor

- (a) Zeigen Sie, dass $[\mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}, \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}] = 0$ ist, d.h. dass

$$\exp(-v \mathfrak{L}_K) = \exp(-m v \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}) \exp(v t \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}) \quad (14)$$

Lösung: In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass

$$[\mathfrak{L}_A, \mathfrak{L}_B] = \mathfrak{L}_{\{A,B\}_{\text{pb}}}. \quad (15)$$

Nun ist

$$\{\vec{n} \cdot \vec{x}, \vec{n} \cdot \vec{p}\}_{\text{pb}} = n_a n_b \{x_a, p_b\}_{\text{pb}} = n_a n_b \delta_{ab} = \vec{n}^2 = 1 = \text{const} \Rightarrow [\mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}, \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}] = \mathfrak{L}_1 = 0. \quad (16)$$

- (b) Berechnen Sie die Wirkung der beiden Exponentialfunktionen durch Auswerten der Exponentialreihe, berechnen Sie dazu zuerst

$$\mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}} \Phi, \quad \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}} \Phi \quad (17)$$

und dann durch wiederholte Anwendung der Ergebnisse die Exponentialreihen

$$\begin{aligned} \exp(-m v \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}) \Phi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-m v)^j}{j!} \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}^j \Phi, \\ \exp(v t \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}) \Phi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(v t)^j}{j!} \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}^j \Phi. \end{aligned} \quad (18)$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}} \Phi &= \{\vec{n} \cdot \vec{x}, \Phi\}_{\text{pb}} = n_j \{x_j, \Phi\}_{\text{pb}} = n_j \delta_{ja} \partial_{p_a} \Phi = \vec{n} \cdot \partial_{\vec{p}} \Phi, \\ \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}} \Phi &= \{\vec{n} \cdot \vec{p}, \Phi\}_{\text{pb}} = n_j \{p_j, \Phi\}_{\text{pb}} = -n_j \delta_{ja} \partial_{x_a} \Phi = -\vec{n} \cdot \partial_{\vec{x}} \Phi. \end{aligned} \quad (19)$$

Einsetzen in die Exponentialreihen in (18) liefert dann jeweils Taylorreihen, die besagen, dass

$$\begin{aligned} \exp(-m v \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}) \Phi(\vec{x}, \vec{p}, t) &= \Phi(\vec{x}, \vec{p} - m \vec{v}, t), \\ \exp(v t \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}) \Phi &= \Phi(\vec{x} - \vec{v} t, \vec{p}, t). \end{aligned} \quad (20)$$

Der Boost ist also durch

$$\Phi_v(\vec{x}, \vec{p}, t) = \Phi(\vec{x} - \vec{v} t, \vec{p} - m \vec{v}, t) \quad (21)$$

gegeben.

- (c) Zeigen Sie durch Anwendung auf $H = \vec{p}^2/(2m)$, dass dies wirklich eine Symmetrie ist, d.h. dass $H'(\vec{P}) = H(\vec{P})$ ist, wobei $\vec{P} = \vec{p}_v$ und $H' = H_v$ ist.

Lösung: Da $H = H(\vec{p})$ ist, folgt $H' = H_v = H(\vec{p} - m \vec{v})$ und $\vec{P} = \vec{p}_v = \vec{p} - m \vec{v}$ und damit $H'(\vec{P}) = H(\vec{P})$, d.h. der Galilei-Boost ist eine Symmetrietransformation.

(2) Als endliche kanonische Transformation (5 Punkte)

Verwenden Sie das Resultat der vorigen Aufgabe, also die Transformation von $(\vec{x}, \vec{p})$ zu neuen Phasenraumvariablen $(\vec{X}, \vec{P}) = (\vec{x}_v, \vec{p}_v)$, um die erzeugende Funktion der endlichen kanonischen Transformation in der Form $g(\vec{x}, \vec{p}, t)$ zu bestimmen, die die kanonische Transformation durch

$$\vec{p} = \partial_{\vec{x}} g(\vec{x}, \vec{p}, t), \quad \vec{X} = \partial_{\vec{p}} g(\vec{x}, \vec{p}, t), \quad H' = H + \partial_t g \quad (22)$$

definiert.

Lösung: Die obige Rechnung zeigt, dass die kanonische Transformation durch

$$\vec{X} = \vec{x}_v = \vec{x} - \vec{v}t, \quad \vec{P} = \vec{p}_v = \vec{p} - m\vec{v} \quad (23)$$

gegeben ist. Wir suchen nun die erzeugende Funktion, so dass diese Transformation gemäß (22) definiert wird. Es ist also

$$\vec{p} = \partial_{\vec{x}} g(\vec{x}, \vec{P}, t) = \vec{P} + m\vec{v} \Rightarrow g(\vec{x}, \vec{P}, t) = \vec{x} \cdot (\vec{P} + m\vec{v}) + C_1(\vec{P}, t) \quad (24)$$

und

$$\vec{X} = \partial_{\vec{P}} g(\vec{x}, \vec{P}, t) = \vec{x} + \partial_{\vec{P}} C_1(\vec{P}, t) = \vec{x} - \vec{v}t \Rightarrow C_1(\vec{P}, t) = -\vec{P} \cdot \vec{v}t + C_2(t). \quad (25)$$

Es ist also

$$g(\vec{x}, \vec{P}, t) = \vec{x} \cdot (\vec{P} + m\vec{v}) - \vec{P} \cdot \vec{v}t + C_2(t) \quad (26)$$

und damit schließlich

$$H' = H = \partial_t g = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \vec{P} \cdot \vec{v} + \dot{C}_2(t) = \frac{1}{2m} (\vec{P} + m\vec{v})^2 - \vec{P} \cdot \vec{v} + \dot{C}_2(t) = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \dot{C}_2(t). \quad (27)$$

Setzen wir $C_2(t) = -m\vec{v}^2 t/2$, also

$$G(\vec{x}, \vec{P}, t) = \vec{x} \cdot (\vec{P} + m\vec{v}) - \vec{P} \cdot \vec{v}t - \frac{m}{2} \vec{v}^2 t, \quad (28)$$

folgt schließlich

$$H' = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 = H(\vec{P}), \quad (29)$$

d.h. der Boost ist eine Symmetrietransformation.