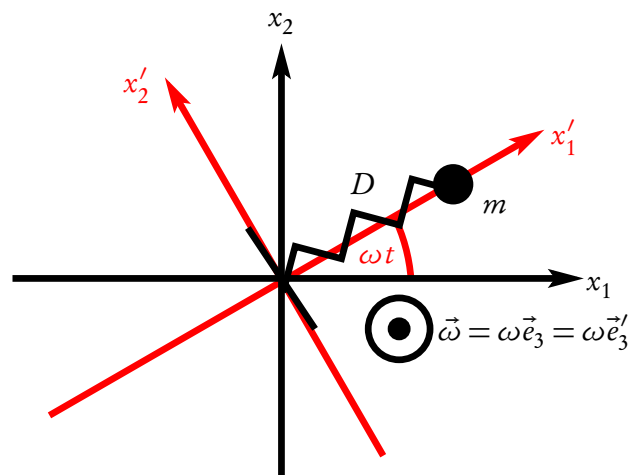


## Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 6

### Aufgabe 1 (10 Punkte): Perle auf rotierendem Stab

Eine Perle der Masse  $m$  sei auf einem Stab befestigt, auf dem sie reibungsfrei gleiten kann, sowie an einer Feder mit der Federkonstanten  $D$  und der Länge  $L$  (wenn sie entspannt ist) befestigt. Der Stab rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $\vec{e}_3$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems.



Wir nehmen im Folgenden an, dass am Stabende bei  $x_1' = 0$  die Perle festgehalten wird, d.h. es kann nicht  $x_1' < 0$  sein.

- (a) (1 Punkt) Beschreiben Sie die Koordinaten  $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$  im Inertialsystem als Funktion der generalisierten Koordinate  $q = x_1'$  (das ist offenbar eine kartesische Koordinate im rotierenden Bezugssystem) und berechnen Sie  $\dot{\underline{x}}$ .

**Lösung:** Aus der Skizze liest man direkt ab

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1' \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Die Zeitableitung, also die Geschwindigkeit, ist

$$\dot{\underline{x}} = \dot{x}_1' \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + x_1' \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- (b) (1 Punkt) Berechnen Sie das Potential  $V(x_1')$  für die Federkraft und stellen Sie die Lagrangefunktion  $L(x_1', \dot{x}_1') = T - V$  auf.

**Lösung:** Die Federkraft, ausgedrückt durch Komponenten bzgl. des rotierenden Systems, ist

$$\underline{F}'_{\text{Feder}} = -D(x_1' - L)\vec{e}'_1 \quad (3)$$

und damit das Potential

$$V(x_1') = \frac{D}{2}(x_1' - L)^2, \quad (4)$$

denn der Gradient, berechnet im rotierenden Bezugssystem ist

$$\underline{F}' = -\underline{\nabla}'V(x_1') = -\underline{e}'_1 V'(x_1') = -D(x_1 - L)\underline{e}'_1. \quad (5)$$

Die Lagrange-Funktion ist  $L = T - V = m\dot{x}^2/2 - V(x_1')$  mit (2) ergibt sich

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1'^2 + x_1'^2\omega^2). \quad (6)$$

Es ist also

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}_1'^2 + x_1'^2\omega^2) - \frac{D}{2}(x_1' - L)^2. \quad (7)$$

- (c) (3 Punkte) Wie lautet die Bewegungsgleichung für  $x_1'$  und wie ist sie im Rahmen des allgemeinen Formalismus' für rotierende Bezugssysteme (also mit Trägheitskräften) zu interpretieren? Welche Kräfte wirken außer der Federkraft und den Trägheitskräften noch auf die Perle?

**Lösung:** Die Bewegungsgleichung erhält man aus der Euler-Lagrange-Gleichung. Der kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1'} = m_1 \dot{x}_1' \quad (8)$$

und die Euler-Lagrangegleichung lautet daher

$$\dot{p} = m_1 \ddot{x}_1' \stackrel{\text{EL}}{=} \frac{\partial L}{\partial x_1'} = \underbrace{m\omega^2 x_1'}_{F'_{Zf1}} - \underbrace{D(x_1' - L)}_{F'_{\text{Feder1}}} = (m\omega^2 - D)x_1' + DL. \quad (9)$$

Als „Netto-Kraft“ wirkt auf das Teilchen offenbar die Federkraft  $F'_{\text{Feder1}}$  und die Zentrifugalkraft  $F'_{Zf1}$ .

Es wirken natürlich, vom rotierenden System aus gesehen außer diesen beiden Kräften (Federkraft und Zentrifugalanteil der Trägheitskräfte) noch die Coriolis-Kraft und die entsprechende „Zwangskraft“ der Stange,  $\underline{F}'_Z$  die die Perle auf der Stange festhält.

Quantitativ erkennt man das, indem man die allgemeine Formel für die Bewegung im rotierenden Bezugssystem verwendet. Dabei ist in unserem Fall  $\underline{\omega}' = \omega \underline{e}'_3 = \text{const}$ , und die Bewegungsgleichung lautet (mit  $\underline{x}' = (x_1', 0, 0)^T$ )

$$\begin{aligned} m\ddot{\underline{x}}' &= \underbrace{\underline{F}'_{\text{Felder}} + \underline{F}'_Z}_{\text{echte Wechselwirkungskräfte}} - 2m\underline{\omega}' \times \dot{\underline{x}}' - m\underline{\omega}' \times (\underline{\omega}' \times \underline{x}') \\ &= \begin{pmatrix} -D(x_1' - L) + mx_1'^2\omega^2 \\ -2m\omega\dot{x}_1' \end{pmatrix} + \underline{F}'_Z. \end{aligned} \quad (10)$$

Da  $x_2' = 0 = \text{const}$  ist, muss also die Zwangskraft

$$\underline{F}'_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ +2m\omega\dot{x}_1' \end{pmatrix} \quad (11)$$

sein, d.h. sie muss die Coriolis-Kraft kompensieren.

- (d) (2 Punkte) Welchen Wert  $D_{\min}$  muss die Federkonstante  $D$  mindestens besitzen, damit es eine stabile Ruhelage für die Perle gibt, also  $x'_1(t) = x'_{10}$  eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist?

**Lösung:** Gemäß der Bewegungsgleichung (9) muss für  $x'_1 = x'_{10} = \text{const}$

$$(m\omega^2 - D)x'_{10} + DL = 0 \Rightarrow x'_{10} = -\frac{DL}{m\omega^2 - D} \quad (12)$$

gelten. Da offenbar  $x'_{10} > 0$  sein muss, ist dies nur eine Lösung, wenn  $D > D_{\min}$  mit

$$D_{\min} = m\omega^2 \quad (13)$$

ist.

- (e) (3 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für beliebige Werte der Federkonstanten  $D$  und die Anfangsbedingungen  $x'_1(0) = x'_{10} > 0$  und  $\dot{x}'_1(0) = 0$ .

**Hinweis:** Es ist sinnvoll, die drei Fälle  $D < D_{\min}$ ,  $D > D_{\min}$  und  $D = D_{\min}$  zu unterscheiden.

**Lösung:**

- $D > D_{\min}$  Wir setzen  $D_{\text{eff}} = D - m\omega^2 > 0$ . Dann lautet die Bewegungsgleichung, in die „Normalform“ einer linearen DGL gebracht,

$$\ddot{x}'_1 + \frac{1}{m}D_{\text{eff}}x'_1 = DL. \quad (14)$$

Mit  $x'_1 = DL/D_{\text{eff}} + y'_1$ , folgt

$$y''_1 + \omega_0^2 y'_1 = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{D_{\text{eff}}/m}. \quad (15)$$

Das ist die Gleichung für einen ungedämpften harmonischen Oszillator mit der allgemeinen Lösung

$$y'_1(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (16)$$

und damit

$$x'_1(t) = y'_1(t) + \frac{DL}{D_{\text{eff}}} = \frac{DL}{D_{\text{eff}}} + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t). \quad (17)$$

Mit  $x'_1(0) = DL/D_{\text{eff}} + C_1 = x_{10}$ , also  $C_1 = x_{10} - DL/D_{\text{eff}}$  und  $\dot{x}'_1(0) = C_2 \omega_0 = 0$  folgt

$$x'_1(t) = \frac{DL}{D_{\text{eff}}} + \left(x_{10} - \frac{DL}{D_{\text{eff}}}\right) \cos(\omega t). \quad (18)$$

Damit die Perle nicht an die Begrenzung bei  $x'_1 = 0$  prallt, muss für alle Zeiten  $x'_1(t) > 0$  und damit  $0 < x_{10} < 2DL/D_{\text{eff}}$  sein.

- $D < D_{\min}$ . Dann ist mit den obigen Bezeichnungen  $D_{\text{eff}} < 0$ . Setzen wir also  $\tilde{D}_{\text{eff}} = -D_{\text{eff}} > 0$ , lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}'_1 - \frac{1}{m}\tilde{D}_{\text{eff}}x'_1 = DL \quad (19)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x'_1(t) = -\frac{DL}{\tilde{D}_{\text{eff}}} + C_1 \cosh(\gamma t) + C_2 \sinh(\gamma t) \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{m}\tilde{D}_{\text{eff}}}. \quad (20)$$

Mit den Anfangsbedingungen erhält man

$$x_1'(t) = -\frac{DL}{\tilde{D}_{\text{eff}}} + \left(x'_{10} + \frac{DL}{\tilde{D}}\right) \cosh(\gamma t). \quad (21)$$

Damit für alle Zeiten  $x_1'(t) > 0$  ist, muss  $x'_{10} > 0$  sein.

- $D = D_{\text{min}}$ . Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}'_1 = \frac{DL}{m} \Rightarrow x_1'(t) = \frac{DL}{2m} t^2 + C_1 t + C_2, \quad (22)$$

also mit den Anfangsbedingungen

$$x_1'(t) = x'_{10} + \frac{DL}{2m} t^2. \quad (23)$$

Damit für alle Zeiten  $x_1(t)' > 0$  ist, muss  $x'_{10} > 0$  sein.