
Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Zeit: 90 Minuten

Bitte bearbeiten Sie die verschiedenen Aufgaben auf **getrennten Blättern!**

Bitte den **Namen** auf jedes abzugebende Blatt schreiben!

Aufgabe 1 (10 Punkte): Grundlagen der Mechanik

Erläutern Sie stichpunktartig anhand der folgenden Fragen die Grundlagen der Newtonschen Mechanik.

- (a) (3 Punkte) Wie werden Raum und Zeit in der Newtonschen Mechanik beschrieben?
 - (b) (4 Punkte) Wie lauten die Newtonschen Axiome?
 - (c) (3 Punkte) Inwiefern ist die Idee eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit problematisch?
-

Aufgabe 2 (10 Punkte): Erhaltungsgrößen

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von zwei Massenpunkten mit den Massen m_1 und m_2 . Die beiden Massenpunkte wechselwirken über ein Wechselwirkungspotential $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$.

- (a) (2 Punkte) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die beiden Massenpunkte?
- (b) (4 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die Gesamtenergie, der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls erhalten sind.
- (c) (4 Punkte) Führen Sie nun die Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und Schwerpunktskoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

ein. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $\vec{r}$ und $\vec{R}$?

Tip: Drücken Sie zunächst $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ mit Hilfe von $\vec{r}$ und $\vec{R}$ aus und setzen Sie die Ergebnisse in die Bewegungsgleichungen ein. Verwenden Sie außerdem den Impulserhaltungssatz!

bitte wenden!

Aufgabe 3 (10 Punkte): Planetenbewegung

Wir betrachten die Bewegung eines Planeten der Masse m um die Sonne, deren Masse $M \gg m$ ist. Wir dürfen also annehmen, dass die Sonne fest im Ursprung des Inertialsystems ruht.

- (a) (2 Punkte) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Planeten auf.
- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhalten ist und erläutern Sie, welches Keplersche Gesetz aus der Erhaltung des Drehimpulses folgt.
- (c) (5 Punkte) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass der Runge-Lenz-Vektor

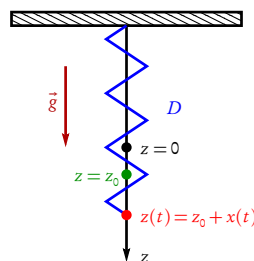
$$\vec{A} = \frac{1}{\gamma m M} \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (2)$$

erhalten ist. Dabei ist γ die Newtonsche Gravitationskonstante. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{r} \cdot \vec{A} = Ar \cos \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{A}$ ist. Das ergibt die Bahnkurve in Polarkoordinaten $r = |\vec{r}| = r(\varphi)$. Welches Keplersche Gesetz folgt daraus?

Hinweis: Sie müssen die Erhaltung von $\vec{A}$ **nicht** beweisen!

Aufgabe 4 (10 Punkte): Lagrange-Formalismus

Ein Körper hängt an einer Feder mit der Federkonstanten D im homogenen Schwerfeld der Erde (s. Skizze). Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes mit der Masse m in vertikaler Richtung (z -Richtung). Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass $z = 0$ der Lage entspricht, in der die Feder entspannt ist.



- (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion des Problems durch

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - \frac{D}{2} z^2 + m g z \quad (3)$$

gegeben ist und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung her.

- (b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Gleichgewichtslage z_0 , für die $z(t) = z_0 = \text{const}$ gilt.
- (c) (1 Punkt) Führen Sie durch $z = z_0 + x$ die neue Variable x ein und stellen Sie die Bewegungsgleichung für x auf.
- (d) (4 Punkte) Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung wenn die Anfangsauslenkung von der Gleichgewichtslage x_0 ist und der Körper zur Zeit $t = 0$ aus der Ruhe, also mit $\dot{x}(0) = v_0 = 0$, losgelassen wird?