

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 9

Aufgabe 1 (10 Punkte): Poisson-Klammeralgebra

Es seien A, B und C beliebige Phasenraumfunktionen, also Funktionen von $(q, p) \equiv (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln für Poisson-Klammern erfüllt sind:

- (a) (2 Punkte) $\{A, \lambda_1 B + \lambda_2 C\}_{\text{pb}} = \lambda_1 \{A, B\}_{\text{pb}} + \lambda_2 \{A, C\}_{\text{pb}}$, wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.
- (b) (1 Punkt) $\{B, A\}_{\text{pb}} = -\{A, B\}_{\text{pb}}$.
- (c) (4 Punkte) $\{A, \{B, C\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{B, \{C, A\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{C, \{A, B\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} = 0$. (Jacobi-Identität)
- (d) (3 Punkte) $\{AB, C\}_{\text{pb}} = A \{B, C\}_{\text{pb}} + \{A, C\}_{\text{pb}} B$.

Hinweis: Die Rechnungen mit Poisson-Klammern werden erheblich vereinfacht, wenn man die Phasenraumvariablen wie folgt organisiert: $(\eta_1, \dots, \eta_f, \eta_{f+1}, \dots, \eta_{2f}) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ und die reelle $(2f) \times (2f)$ -Matrix J_{ab} einführt mit

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0_{f \times f} & 1_{f \times f} \\ -1_{f \times f} & 0_{f \times f} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wobei $0_{f \times f}$ die $f \times f$ -Matrix mit allen Matrixelementen gleich 0 und $1_{f \times f} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ (f -dimensionale Einheitsmatrix) sind. Mit dieser Notation ist dann

$$\{A, B\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta} (\partial_\alpha A) (\partial_\beta B), \quad (2)$$

wobei griechische Indizes von 1 bis $2f$ laufen und $\partial_\alpha A = \partial A / \partial \eta_\alpha$ ist. Auch hier wird wieder die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Beim Beweis der Jacobi-Identität benötigt man dann nur noch, dass $\partial_\alpha \partial_\beta A = \partial_\beta \partial_\alpha A$ und die Antisymmetrie von $\hat{J}$, also $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$.

Bemerkung: Mit den Identitäten (a)-(c) erweist sich die Poisson-Klammer als eine Lie-Algebra, die auf dem Vektorraum der Phasenraumfunktionen operiert.

Die Eigenschaft (d) macht die Poisson-Klammer zugleich zu einer sog. Derivation, so dass für die in der Vorlesung definierten Lie-Ableitungen die Produktregel gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Endliche Galilei-Boosts als kanonische Transformation

Für den Galileiboost hatten wir als infinitesimale Generatoren

$$\vec{K} = m\vec{x} - \vec{p}t \quad (3)$$

gefunden. Wir betrachten nun einen endlichen Boost in Richtung von $\vec{n}$. Zur Abkürzung schreiben wir im Folgenden $K = \vec{n} \cdot \vec{K}$. Wir berechnen den endlichen Boost mittels dieses infinitesimalen Generators auf zwei Arten:

(1) Mit Lie-Ableitungen (5 Punkte)

Die kanonische Transformation einer beliebigen Phasenraumfunktion, die durch den infinitesimalen Generator K definiert wird, ergibt sich durch die Differentialgleichung

$$\partial_v \Phi_v = -\mathfrak{L}_K \Phi_v = -\{K, \Phi\}_{\text{pb}} = \{\Phi, K\}_{\text{pb}}. \quad (4)$$

Formal ist die Lösung durch die Operatorexponentialfunktion gegeben, also

$$\Phi_v = \exp(-v \mathfrak{L}_K) \Phi. \quad (5)$$

Nun ist

$$\mathfrak{L}_K = \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot (m\vec{x} - \vec{p}t)} = m \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}} - t \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}. \quad (6)$$

Man berechne die Operatorexponentialfunktion. Gehen Sie dabei wie folgt vor

- (a) Zeigen Sie, dass $[\mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}, \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}] = 0$ ist, d.h. dass

$$\exp(-v \mathfrak{L}_K) = \exp(-mv \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}) \exp(vt \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}) \quad (7)$$

- (b) Berechnen Sie die Wirkung der beiden Exponentialfunktionen durch Auswerten der Exponentialreihe, berechnen Sie dazu zuerst

$$\mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}} \Phi, \quad \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}} \Phi \quad (8)$$

und dann durch wiederholte Anwendung der Ergebnisse die Exponentialreihen

$$\begin{aligned} \exp(-mv \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}) \Phi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-mv)^j}{j!} \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{x}}^j \Phi, \\ \exp(vt \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}) \Phi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(vt)^j}{j!} \mathfrak{L}_{\vec{n} \cdot \vec{p}}^j \Phi. \end{aligned} \quad (9)$$

- (c) Zeigen Sie durch Anwendung auf $H = \vec{p}^2/(2m)$, dass dies wirklich eine Symmetrie ist, d.h. dass $H'(\vec{P}) = H(\vec{P})$ ist, wobei $\vec{P} = \vec{p}_v$ und $H' = H_v$ ist.

(2) Als endliche kanonische Transformation (5 Punkte)

Verwenden Sie das Resultat der vorigen Aufgabe, also die Transformation von $(\vec{x}, \vec{p})$ zu neuen Phasenraumvariablen $(\vec{X}, \vec{P}) = (\vec{x}_v, \vec{p}_v)$, um die erzeugende Funktion der endlichen kanonischen Transformation in der Form $g(\vec{x}, \vec{P}, t)$ zu bestimmen, die die kanonische Transformation durch

$$\vec{p} = \partial_{\vec{x}} g(\vec{x}, \vec{P}, t), \quad \vec{X} = \partial_{\vec{P}} g(\vec{x}, \vec{P}, t), \quad H' = H + \partial_t g \quad (10)$$

definiert.