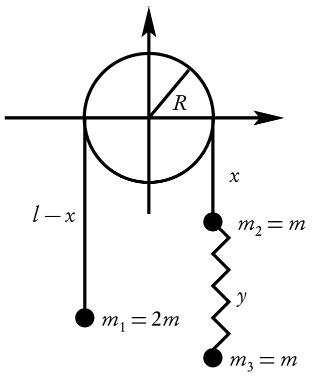
Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees Sommersemester 2014

Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 11 (07.07.-11.07.2014)

Übungen zur Abgabe am 04.07.2014

Aufgabe 43: Seilrolle mit Feder (Kategorie A)
Ein Seil der Länge $l+\pi R$ ist über eine Rolle vom Radius R geführt. An einem Ende hängt eine Masse $m_1=2m$. Am anderen Ende hängt eine Masse $m_2=m$, und unter dieser, verbunden durch eine Feder der Federkonstante k eine weitere Masse $m_3=m$. Die Massen von Rolle, Feder und Seil können vernachlässigt werden. Die Ruhelänge der Feder sei y_0.

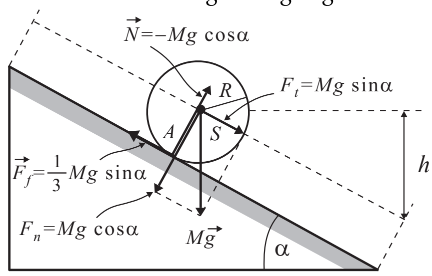


(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion. Benutzen Sie dabei die in der Abbildung gezeigten generalisierten Koordinaten x und y.

(b) Welche generalisierte Koordinate ist zyklisch? Welche Erhaltungsgröße ist damit verbunden?

(c) Zur Zeit $t=0$ werde das System aus der Ruhe mit $x=x_0$ und $y=y_0$ losgelassen. Wie bewegen sich die drei Massen?

Aufgabe 44: Abrollen eines Zylinders (Kategorie A)
Wir wiederholen Aufgabe 23 (Blatt 7) unter Verwendung des Lagrange-Formalismusses:
Ein Zylinder mit Masse M und Radius R rolle mit waagrecht gelegter Achse eine schiefe Ebene hinunter.



Finden Sie die Lagrange-Funktion und leiten Sie die Bewegungsgleichung des Zylinders her.
Betrachten Sie sowohl einen homogenen Zylinder als auch einen Hohlzylinder und berechnen Sie zunächst deren Trägheitsmomente.

Weitere Übungsaufgaben

Aufgabe 45: Zwei durch eine Feder verbundene Massenpunkte (Kategorie B)

Zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 sind mittels einer Feder mit Federkonstanten k miteinander verbunden und befinden sich im Schwerefeld der Erde. Dabei sei d_0 die Federlänge in der Ruhelage. Stellen Sie mit Hilfe der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen auf.

Wählen Sie dazu als generalisierte Koordinaten Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Welche Koordinaten sind zyklisch? Welcher allgemeine Erhaltungssatz ist damit verbunden?

Führen Sie Kugelkoordinaten für die Relativkoordinaten ein. Welche weitere zyklische Variable ergibt sich und welcher Erhaltungssatz ist damit verbunden?

Hinweis: Die Bewegungsgleichungen müssen *nicht* gelöst werden!

Aufgabe 46: Das Kepler-Problem im Lagrange-Formalismus (Kategorie C)

Wir betrachten die Bewegung zweier Himmelskörper, die sich allein unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Gravitationswechselwirkung mit dem Potential

$$V = -\frac{K}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}, \quad K = \gamma m_1 m_2,$$

befinden.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System zweier Massenpunkte auf. Verwenden Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2.$$

(b) Welche dieser Koordinaten sind zyklisch und welchen Erhaltungssätzen entspricht die Konstanz der dazugehörigen kanonisch konjugierten Impulse?

(c) Führen Sie Kugelkoordinaten für die Relativkoordinaten

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

ein. Welche weiteren Koordinaten sind dann zyklisch und warum?

(d) Zeigen Sie, daß sich die Basisvektoren für die Relativkoordinaten sich stets so wählen lassen, daß sich aufgrund der Anfangslage der Körper diese je nach Anfangsrelativgeschwindigkeit entweder auf einer Geraden bewegen oder oder $\varphi = \text{const} = 0$ ist.

(e) Diskutieren Sie dann im zweiten Fall, der der gewöhnlichen Bewegung von Himmelskörpern entspricht, die Lagrange-Funktion des auf die generalisierten Koordinaten r und ϑ reduzierten Problems. Welche Koordinate ist nun zyklisch und welchem allgemeinen Erhaltungssatz entspricht dies? Erläutern Sie, daß dies zum Flächensatz (2. Kepler-Gesetz) führt.

(f) Argumentieren Sie, warum der Energiesatz gilt und verwenden Sie diesen zur Herleitung der Bahnform $r = r(\vartheta)$.

Hinweis: Es empfiehlt sich, die generalisierte Koordinate $s = 1/r$ einzuführen.
