**Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees** **Sommersemester 2014**

# Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 9 (23.06.-27.06.2014)

---

## Übungen zur Abgabe am 20.06.2014

**Aufgabe 34: Steinerscher Satz für den Trägheitstensor (Kategorie A)**

Es seien die Komponenten des Trägheitstensors $\Theta_{jk}^{(\text{cm})}$ um den Schwerpunkt bzgl. eines beliebigen kartesischen Koordinatensystems gegeben. Wie lautet der Trägheitstensor bzgl. eines beliebigen anderen Punktes $\vec{R}$ bzgl. derselben kartesischen Basis?

---

**Aufgabe 35: Homogenes Rotationsellipsoid (Kategorie A)**

Berechnen Sie den Trägheitstensor eines homogenen Rotationsellipsoiden der Gesamtmasse $M$ mit den Halbachsen $a = b$ und $c$ um den Schwerpunkt.

**Hinweis:** Überlegen Sie sich zuerst die Richtung der Hauptachsen aufgrund der Symmetrie des Körpers und wählen Sie das entsprechende kartesische Koordinatensystem.

---

## Weitere Übungsaufgaben

**Aufgabe 36: Stabilitätsbetrachtungen am freien Kreisel (Kategorie B)**

Betrachten Sie die Eulerschen Kreiselgleichungen für einen freien Kreisel (d.h. die Bewegung eines starren Körpers, der in seinem Schwerpunkt gelagert ist)

$$\hat{\Theta}' \dot{\vec{\omega}}' = -\vec{\omega}\,' \times (\hat{\Theta}' \vec{\omega}\,'),$$

wobei $\vec{\omega}\,'$ der Winkelgeschwindigkeitsvektor im körperfesten Bezugssystem ist.

(a) Wählen Sie als kartesische körperfeste Basisvektoren ein Hauptachsensystem, wo der Trägheitstensor diagonal ist, d.h. $\hat{\Theta}' = \operatorname{diag}(A, B, C)$ und schreiben Sie die Eulerschen Kreiselgleichungen explizit in Komponenten hin.

(b) Der Kreisel werde nun zur Zeit $t = 0$ um die 3-Achse dieses Hauptachsensystems in Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0$ gebracht. Zeigen Sie, daß dann $\vec{\omega}\,' = \omega_0 \vec{e}\,'_3 = \text{const}$ eine Lösung der Eulerschen Kreiselgleichungen ist.

(c) Betrachten Sie nun eine kleine Störung dieser Lösung, indem Sie $\vec{\omega}\,' = (\alpha, \beta, \omega_0 + \gamma)$ setzen und annehmen, daß $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \ll \omega_0$ sind. Wie lauten die entsprechenden linearisierten Eulerschen Kreiselgleichungen für diese Störungen?

(d) Lösen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung und diskutieren Sie, wann die lineare Näherung gerechtfertigt ist, d.h. wann die Störungen zu allen Zeiten $t > 0$ klein bleiben.

Was ist demnach das Kriterium dafür, daß die Rotation um die 3-Achse stabil unter kleinen Störungen ist?

---

Bitte wenden!

**Aufgabe 37: Lösung für die Euler-Gleichungen des freien symmetrischen Kreisels (Kategorie C)**
Betrachten Sie die Eulerschen Kreiselgleichungen für den freien symmetrischen Kreisel, d.h. bzgl. des körperfesten Hauptachsensystems gilt $B = A \neq C$.

(a) Lösen Sie die vollen nichtlinearen Bewegungsgleichungen und zeigen Sie, daß man die körperfesten $2'$- und $3'$-Achsen so wählen kann, daß

$$\vec{\omega}\,' = \begin{pmatrix} -\xi_0 \sin(\Omega t) \\ \xi_0 \cos(\Omega t) \\ \omega_3' \end{pmatrix}$$

ist. Dabei sind $\xi_0$ und $\omega_3'$ Integrationskonstanten. Bestimmen Sie $\Omega$!

(b) Wie lautet der Gesamtdrehimpuls bzgl. körperfester Koordinaten?

(c) Beschreiben Sie die Bewegung aus Sicht des raumfesten Systems. Wählen Sie dazu die raumfesten Basisvektoren so, daß der zeitlich konstante Drehimpuls in die 3-Richtung weist: $\vec{J} = (0, 0, J)^{\mathrm{T}}$.

Führen Sie nun Euler-Winkel wie in der Vorlesung ein, so daß die Umrechnung eines beliebigen Vektors $\vec{V}$ von körper- in raumfeste Koordinaten durch

$$\vec{V} = \hat{D}\vec{V}\,', \quad \hat{D} = \hat{D}_3(\alpha)\hat{D}_1(\beta)\hat{D}_3(\gamma)$$

und bestimmen Sie $\beta$ und $\gamma$ aus der Bedingung

$$\vec{J}\,' = \hat{D}^{\mathrm{T}}\vec{J} = \hat{D}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix}.$$

Den verbliebenen Winkel $\alpha$ erhalten Sie durch Vergleich der Lösung für $\vec{\omega}\,'$ und dem Zusammenhang zwischen Eulerwinkeln und Winkelgeschwindigkeit im raumfesten Koordinaten aus der Vorlesung. Es wird nur die $3'$-Komponente benötigt:

$$\omega_3' = \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma}.$$

Geben Sie schließlich $\vec{\omega}$ und die Figurenachse $\vec{f} = \hat{D}(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ als Funktion der Zeit an.

---

**Aufgabe 38: Holonomität von differentiellen Zwangsbedingungen (Kategorie A)**
Stellen Sie fest, ob folgende Zwangsbedingungen in differentieller Form holonom sind. Falls ja, finden Sie die explizite Form ($f(x, y, z, t) = 0$).

$$\frac{2x}{vt}\mathrm{d}x + \frac{2y}{vt}\mathrm{d}y + \frac{2z}{vt}\mathrm{d}z - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{vt^2}\mathrm{d}t = 0, \tag{1}$$

$$\frac{2y}{vt}\mathrm{d}x + \frac{2z}{vt}\mathrm{d}y + \frac{2x}{vt}\mathrm{d}z - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{vt^2}\mathrm{d}t = 0. \tag{2}$$

---