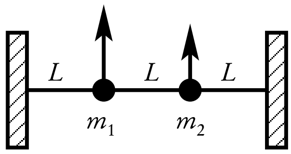
Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 5 (19.05.-23.05.2014)

Übung zur Abgabe am 23.05.2014

Aufgabe 16.1: Zwei Teilchen an gespanntem Faden (Kategorie A)

Zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 seien bei gleichem Abstand L an einem Faden befestigt, der zwischen zwei Punkten (Abstand $3L$) fest eingespannt ist. Wir betrachten kleine transversale Auslenkungen der Massenpunkte (d.h. in Pfeilrichtung).



(a) Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für die beiden Massen unter der Annahme kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage auf, wobei angenommen werden darf, daß die Fadenspannung konstant bleibt.

(b) Betrachten Sie den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$ und finden Sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden des Systems. Interpretieren Sie die Bewegungsformen der Eigenmoden physikalisch.

Weitere Übungsaufgaben

Aufgabe 16.2: Zwei Teilchen an gespanntem Faden (Kategorie B)

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für allgemeine $m_1 \neq m_2$. Betrachten Sie insbesondere auch die Fälle $m_1 \gg m_2$ und $m_1 \to \infty$, $m_2 = \text{const}$.

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung der gekoppelten Bewegungsgleichungen?

Aufgabe 17: Gekoppelte Pendel und Schwebung (Kategorie B)

Zwei Pendel von gleicher Masse und Länge sind über eine Spiralfeder miteinander gekoppelt. Sie sollen in einer Ebene schwingen. Die Kopplung soll schwach sein (d.h. die beiden Eigenfrequenzen des Systems sind nicht sehr verschieden).

(a) Stellen Sie die für kleine Pendelauslennkungen genäherten Bewegungsgleichungen für die beiden Pendel auf und versuchen Sie, die Differentialgleichungen zu entkoppeln.

(b) Wie sehen die Eigenschwingungen des gekoppelten Pendelsystems aus? Was sind die jeweiligen Eigenfrequenzen?

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen: $x_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = A$, $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$, wobei x_1 und x_2 Ablenkungen des jeweiligen Pendels aus der Ruhelage.

(d) Diskutieren Sie die Lösungen und skizzieren Sie die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 18: Mathematisches zur schwingenden Kette (Kategorie C)

Wir betrachten wie in der Vorlesung und im Lehrbuch[1] einen masselosen Faden, an dem N Massenpunkte der Masse m im Abstand a aufgereiht sind. Die Punkte 0 und $N+1$ des Fadens sind fest eingespannt und nehmen nicht an der Schwingung teil. Die Auslenkung aus der Ruhelage in y-Richtung, so daß die geringfügige Auslenkung in x-Richtung vernachlässigbar ist. Die Fadenspannung T ist über den ganzen Faden konstant. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_\nu}{\mathrm{d}t^2} = \frac{T}{ma}(y_{\nu-1} - 2y_\nu + y_{\nu+1}), \nu \in \{1, \dots, N\} \quad \text{mit} \quad y_0 = y_{N+1} = 0. \tag{1}$$

Der Ansatz für die Eigenmoden des schwingenden Systems

$$y_\nu(t) = A_\nu \cos(\omega t) \tag{2}$$

liefert das charakterische Polynom für das entstehende Eigenwertproblem in Gestalt der entsprechenen Determinante D_N, für die in der Vorlesung die Rekursionsformel

$$D_N = cD_{N-1} - D_{N-2}, \quad D_1 = c, \quad D_2 = c^2 - 1, \tag{3}$$

wobei $c = (2T - ma\omega^2)/T$ ist, hergeleitet wurde. Der Ansatz $D_N = p^N$ führte schließlich auf die Lösung dieser Rekursionsformel

$$D_N = \frac{\sin[(N+1)\Theta]}{\sin\Theta}, \tag{4}$$

wobei $c = 2\cos\Theta$ ist.

Überprüfen Sie durch explizites Einsetzen, daß (4) tatsächlich die Rekursionsformel (3) löst.

Hinweis: Verwenden Sie die Additions- und Subtraktionstheoreme für Sinus und Cosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{5}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{6}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{7}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \tag{8}$$

die Identität

$$\cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1 \tag{9}$$

und beachten Sie, daß

$$\cot\Theta = \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}. \tag{10}$$

[1] W. Greiner, Theoretische Physik Bd. 2, Verlag Harri Deutsch (2008)