Übungen zur Theoretischen Physik 2 – Blatt 4 (19.05.-23.05.2014)

Übung zur Abgabe am 16.05.2014

Aufgabe 12: Schwerpunktsberechnungen (Kategorie A)

Der Schwerpunkt eines Körpers K ist durch

$$\vec{x}_{\text{s}} = \frac{1}{M} \int_K \mathrm{d}^3\vec{x}\,\rho(\vec{x})\vec{x} \tag{1}$$

gegeben. Dabei ist $\rho(\vec{x})$ die Massendichte des Körpers, und M die Gesamtmasse.

Berechnen Sie den Schwerpunkt folgender homogener ($\rho = \text{const}$) Körper mit Gesamtmasse M:

(a) der Halbkugel vom Radius a

$$\vec{x}(r,\vartheta,\varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0,a], \quad \vartheta \in [0,\pi/2], \quad \varphi \in [0,2\pi]. \tag{2}$$

Hinweise: Berechnen Sie zunächst das Volumen V der Halbkugel und damit $\rho = M/V$.

Das Volumenelement in den hier verwendeten Kugelkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\vartheta$.

(b) des geraden Kreiskegels vom Radius a und Höhe h

$$\vec{x}(R,\varphi,z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dabei ist $z \in [0,h]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und für jedes z ist $R \in [0, az/h]$ (warum?).

Hinweis: Berechnen Sie zunächst wieder das Volumen des Kegels und damit $\rho = M/V$. Das Volumenelement der hier verwendeten Zylinderkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,R$.

Aufgabe 13: Reduzierte Masse (Kategorie A)

Zeigen Sie, daß sich die kinetische Energie zweier Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 in die kinetische Energie des Schwerpunktes und die kinetische Energie der Relativbewegung aufspaltet.

Hinweis: Es gilt für die Schwerpunktskoordinaten $\vec{X} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/M$. Drücken Sie nun $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ durch $\vec{X}$ und die Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ aus und setzen das Resultat in die kinetische Energie

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^2 \tag{4}$$

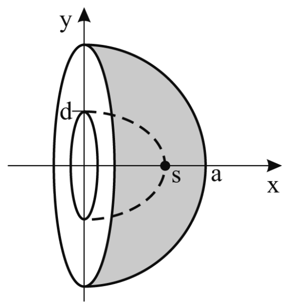
ein.

Weitere Übungsaufgaben

Aufgabe 14: Schwerpunkt einer Halbkugel mit Loch (Kategorie B)
In eine Halbkugel mit Radius a ist ein ebenfalls halbkugelförmiges Loch mit Radius d gebohrt. Wo befindet sich der Schwerpunkt?

Hinweis:

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + c$$



Aufgabe 15: Erhaltung der Masse (Kategorie B)
In der Newtonschen Mechanik gilt für ein abgeschlossenes System wechselwirkender Massenpunkte wegen des dritten Newtonschen Axioms der Impulserhaltungssatz

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\vec{x}}_j = \text{const.} \tag{5}$$

Dies gilt in jedem Inertialsystem, d.h. die Naturgesetze sind invariant unter der Transformation

$$\vec{x}_j \to \vec{x}\,'_j = \vec{x}_j - \vec{v}t, \quad j \in \{1, \ldots, N\}. \tag{6}$$

(a) Wie lauten die Impulse der Teilchen und der Gesamtimpuls im neuen Bezugssystem?

(b) Folgern Sie daraus und der Impulserhaltung im neuen Bezugssystem, daß damit notwendig die Gesamtmasse

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j \tag{7}$$

ebenfalls eine Erhaltungsgröße der Bewegung sein muß.