

Der freie Kreis sel

Im folgen den betrachten wir die Rotation eines starren Körpers, der in seinem Schwerpunkt gelagert ist. Dann gilt (S. 5.7) (20)

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{Lab}} = 0,$$

d.h. im Laborsystem (Inertialsystem) ist der Gesamtdrehimpuls erhalten.

Wir betrachten zunächst die Bewegungsgleichungen in einem körperfesten Bezugssystem, das wir gleich als Hauptachsen system wählen.

Dann ist

$$\hat{\Theta}' = \begin{pmatrix} \Theta_I' & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{II}' & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{III}' \end{pmatrix}$$

und

$$\left. \frac{d\vec{L}'}{dt} \right|_{\text{Lab}} = \left. \frac{d\vec{L}'}{dt} \right|_K + \vec{\omega}' \times \vec{L}' \stackrel{!}{=} 0$$

(S. Vorlesung über Bewegung, in rotierender Bezugssystemen).

Mit $\vec{L}' = \hat{\Theta}' \vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \Theta_I' \omega_x' \\ \Theta_{II}' \omega_y' \\ \Theta_{III}' \omega_z' \end{pmatrix}$

Da im körperfesten System $\hat{\Theta}' = \text{const}$ ist, folgt

$$\begin{pmatrix} \Theta_I' \dot{\omega}_x' \\ \Theta_{II}' \dot{\omega}_y' \\ \Theta_{III}' \dot{\omega}_z' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_x' \\ \omega_y' \\ \omega_z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_I' \omega_x' \\ \Theta_{II}' \omega_y' \\ \Theta_{III}' \omega_z' \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} (\Theta_{III}' - \Theta_{II}') \omega_y' \omega_z' \\ (\Theta_I' - \Theta_{III}') \omega_x' \omega_z' \\ (\Theta_{II}' - \Theta_I') \omega_x' \omega_y' \end{pmatrix}$$

Es gelten also die Eulerschen Kreisgleichungen

(21)

$$\theta_{II}' \dot{\omega}_x' = (\theta_{II}' - \theta_{III}') \omega_y' \omega_z' \quad (E. 1)$$

$$\theta_{II}' \dot{\omega}_y' = (\theta_{III}' - \theta_I') \omega_x' \omega_z' \quad (E. 2)$$

$$\theta_{III}' \dot{\omega}_z' = (\theta_I' - \theta_{II}') \omega_x' \omega_y' \quad (E. 3)$$

Dies ist ein in. sehr kompliziertes System von DGLs. Eine allgemeine Lösung ist nur in Spezialfällen möglich. Wir betrachten den Fall des symmetrischen Kreisels.

Der freie Symmetrische Kreisel

Sei \vec{e}_3' die Symmetrieachse ("Figuraachse"). Dann ist

$$\theta_I' = \theta_{II}' \neq \theta_{III}'.$$

Aus (E.3) folgt, daß

$$\dot{\omega}_z' = 0 \Rightarrow \omega_z' = \text{const.}$$

Setzen wir dann $A = \frac{\theta_{III}' - \theta_I'}{\theta_{II}'} = \frac{\theta_{III}' - \theta_{II}'}{\theta_I'}$, ergibt sich für

(E.1) und (E.2):

$$\dot{\omega}_x' = -A \omega_z' \omega_y' \quad (E. 4)$$

$$\dot{\omega}_y' = +A \omega_z' \omega_x' \quad (E. 5)$$

Wegen $A = \text{const}$ und $\omega_z' = \text{const.}$ folgt durch Ableiten von (E.4) nach der Zeit und Anwendung von (E.5)

$$\ddot{\omega}_x' = -A \omega_z' \dot{\omega}_y' = -(A \omega_z')^2 \omega_x'$$

Die allgemeine Lösung können wir in der Form

$$\omega_x' (t) = \omega_{x0}' \cos(\Lambda \omega_z' t + \varphi_0)$$

Schreiben. Für ω_y' folgt mit (E.4)

$$\omega_y' = -\frac{\dot{\omega}_x'}{\Lambda \omega_z'} = \omega_{x0}' \sin(\Lambda \omega_z' t + \varphi_0)$$

Für einen Beobachter im körperfesten System stellt die Figuren-achse \vec{e}_3' fest, und die unmerkliche Drehachse beschreibt einen Kegel um die Figuren-achse. Die Präzessionswinkelgeschwindigkeit ist $\Omega_{\text{pr} \ddot{a}z} = \Lambda \omega_z' = \frac{\Theta_{\text{III}}' - \Theta_{\text{I}}'}{\Theta_{\text{II}}'} \omega_z'$

Für $\omega_z' > 0$ (was man stets durch geeignete Orientierung von \vec{e}_3' erreichen kann) erfolgt die Präzession entgegen dem Uhrzeigersinn, falls $\Theta_{\text{III}}' > \Theta_{\text{I}}'$ (oblaten Kreisel) und im Uhrzeigersinn falls $\Theta_{\text{III}}' < \Theta_{\text{I}}'$ (prolaten Kreisel).

Der Drehimpuls ist im körperfesten Koordinatensystem

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \Theta_{\text{I}}' \omega_x' \\ \Theta_{\text{I}}' \omega_y' \\ \Theta_{\text{III}}' \omega_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{\text{I}}' \omega_{x0}' \cos(\Lambda \omega_z' t + \varphi_0) \\ \Theta_{\text{I}}' \omega_{x0}' \sin(\Lambda \omega_z' t + \varphi_0) \\ \Theta_{\text{III}}' \omega_z' \end{pmatrix}$$

Auch \vec{L} rotiert also im körperfesten System mit derselben Präzessionsfrequenz $\Omega_{\text{pr} \ddot{a}z}$ um die gleiche Sinn um die Figuren-achse wie \vec{e}_3' .

In einem festen System können wir daraus die Bewegung des Systems verstehen, indem wir Invarianten bilden, denn zu jedem Zeitpunkt ergeben sich die Komponenten im raumfesten System durch eine orthogonale Transformations (Drehung) aus denen des körperfesten Systems. (23)

Aus der obigen Betrachtung folgt, daß $\vec{e}_3^1, \vec{\omega}^1, \vec{L}^1$ immer in einer Ebene liegen. Das wird durch die unter Drehungen invariante Beziehung

$$\vec{e}_3^1 \cdot (\vec{\omega}^1 \times \vec{L}^1) = 0$$

ausgedrückt. Es gilt also auch im raumfesten System $\vec{e}_3 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{L}) = 0$ und Drehimpuls

\Rightarrow Figurenachsen, momentane Winkelgeschwindigkeit liegen immer in einer Ebene.

In raumfesten System ist $\vec{L} = \text{const.}$ Die Projektion von $\vec{\omega}$ und \vec{e}_3^1 auf die Drehimpulsrichtung ist konstant:

$$\vec{L} \cdot \vec{e}_3^1 = \vec{L}^1 \cdot \vec{e}_3^1 = \Theta_{III}^1 \omega_z^1 = \text{const.}$$

$$\vec{L} \cdot \vec{\omega} = \vec{L}^1 \cdot \vec{\omega}^1 = \Theta_I^1 \omega_{ox}^2 + \Theta_{III}^1 \omega_z^2 = \text{const.}$$

Die Winkel zwischen \vec{e}_3^1 und $\vec{\omega}^1, \vec{e}_3^1$ und \vec{L}^1 sowie $\vec{\omega}^1$ und \vec{L}^1 sind konstant:

$$\cos \varphi_1(\vec{\omega}^1) = \frac{\vec{e}_3^1 \cdot \vec{\omega}^1}{|\vec{\omega}^1|} = \frac{\omega_z^1}{\sqrt{\omega_{ox}^2 + \omega_z^2}} = \text{const.}$$

$$\cos \varphi_2(\vec{L}^1) = \frac{\vec{e}_3^1 \cdot \vec{L}^1}{|\vec{L}^1|} = \frac{\omega_z^1}{\sqrt{\omega_z^2 + \left(\frac{\Theta_I^1}{\Theta_{III}^1}\right)^2 \omega_{ox}^2}} = \text{const.}$$

$$\cos \angle (\vec{\omega}, \vec{L}) = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{|\vec{\omega}| |\vec{L}|} = \frac{\theta_I \omega_{x0} + \theta_{II} \omega_z}{\sqrt{\omega_{x0}^2 + \omega_z^2} \sqrt{\theta_I^2 \omega_{x0}^2 + \theta_{II}^2 \omega_z^2}} \quad (24)$$

$$= \text{const.}$$

Falls wir wieder $\omega_z > 0$ haben (durch geeignete Orientierung von \vec{e}_3), sind alle $\cos \angle$ in dieser \mathfrak{K} ≥ 0 und damit der Winkel in Intervall $[0, \pi/2]$. Dort ist der Cos. monoton fallend

\Rightarrow Falls $\theta_{II} > \theta_I$ (oblater Kessel) $\Rightarrow \angle(\vec{f}, \vec{L}) < \angle(\vec{f}, \vec{\omega})$
 Falls $\theta_{II} < \theta_I$ (prolater Kessel) $\Rightarrow \angle(\vec{f}, \vec{L}) > \angle(\vec{f}, \vec{\omega})$

Figura Achse beschreibt im raum festen System Kegel um die konstante Drehimpulsachse

\Rightarrow Nutation; Nutationskegel

Drehachse beschreibt im raum festen System Kegel um die konstante Drehimpulsachse

\Rightarrow Rastpolkegel

Zustand beschreibt $\vec{\omega}$ einen Kegel um \vec{f}

\Rightarrow Gangpolkegel

Alle Kegel werden mit derselben Frequenz $\Omega_{\text{pr\u00e4z}}$ durchlaufen

\Rightarrow Bilder auf der n\u00e4chsten Seite

3.6 · Elemente der Kreiseltheorie

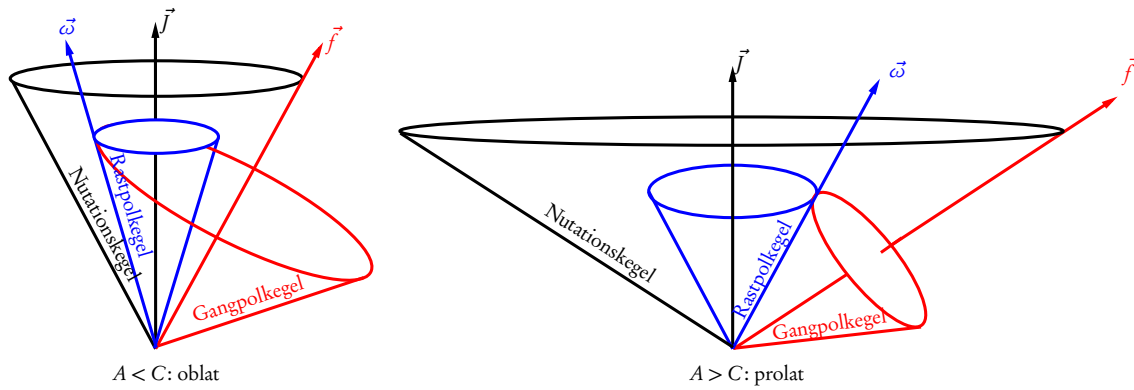


Abbildung 3.10: Zum kräftefreien symmetrischen Kreisel. Die drei Vektoren \vec{J} , $\vec{\omega}$ und \vec{f} befinden sich stets in einer Ebene, die bzgl. des raumfesten Bezugssystems um die zeitlich konstante Drehimpulsachse rotiert, d.h. $\vec{\omega}$ und \vec{f} beschreiben gerade Kreiskegel um die Drehimpulsachse, die man als Rastpol- (blau) bzw. Nutationskegel (schwarz) bezeichnet. Zugleich rotiert $\vec{\omega}$ vom körperfesten Bezugssystem aus betrachtet auf dem Gangpolkegel (rot) um die Figurenachse. Je nachdem, ob die Hauptträgheitsmomente einer oblaten oder prolaten Kreiselform entsprechen, rollt also der Rastpolkegel auf dem Inneren bzw. Äußeren des Gangpolkegels ab.

Freier unsymmetrischer Kreisel

Hier gibt es keine einfache geschlossene Lösung. Wir analysieren im folgenden die Stabilität der Rotation um die Hauptfreiheitsachsen.

Euler'sche Kreiselgleichungen:

$$\Theta_I \dot{\omega}'_x = (\Theta_{II} - \Theta_{III}) \omega'_y \omega'_z$$

$$\Theta_{II} \dot{\omega}'_y = (\Theta_{III} - \Theta_I) \omega'_x \omega'_z$$

$$\Theta_{III} \dot{\omega}'_z = (\Theta_I - \Theta_{II}) \omega'_x \omega'_y$$

Offenbar ist $\omega'_z = \text{const}, \omega'_x = \omega'_y = 0$

immer eine Lösung.

Nun betrachten wir kleine Störungen um diese Lösung

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \omega'_0 + \gamma' \end{pmatrix} \text{ mit } \omega'_0 = \text{const}$$

In 1. Ordnung in α', β', γ' erhalten wir \downarrow bis auf Größen 2. Ordnung $\Rightarrow \gamma' = 0$

$$\Theta_{III} \dot{\omega}'_z = (\Theta_I - \Theta_{II}) \alpha' \beta' \approx 0 \Rightarrow \gamma' = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_z = \omega'_0 + \gamma' \approx \text{const} \Rightarrow \omega'_z \approx \omega'_0; \gamma' = 0$$

Dann können wir wie beim symmetrischen Kreisel weiterrechnen

$$\ddot{\omega}'_x = \frac{\Theta_{II} - \Theta_{III}}{\Theta_{II} - \Theta_I} \frac{\Theta_{II}}{\Theta_I} \omega_0'^2 \omega'_x$$

Diese Gleichung ist von der Form

(27)

$$\ddot{\omega}'_x = -A\omega_0'^2 \omega'_x$$

mit

$$A = \frac{\theta_{III}' - \theta_{II}'}{\theta_{III}' - \theta_I'} \frac{\theta_{II}'}{\theta_I'}$$

Das ist vom Typ der Schwingungsgleichung falls $A > 0$ ist, also wenn $\theta_{III}' > \theta_{II}'$ und $\theta_{III}' > \theta_I'$ oder $\theta_{III}' < \theta_{II}'$ und $\theta_{III}' < \theta_I'$

Dann ist

$$\omega'_x = \omega_{x0} \cos(\sqrt{A}\omega_0' t + \varphi)$$

$$\omega'_{y,z} = \frac{\theta_I'}{\theta_{II}' - \theta_{III}'} \frac{\dot{\omega}'_x}{\omega_0'} = -\omega_{x0}' \frac{\theta_I'}{\theta_{II}' - \theta_{III}'} \sqrt{A} \sin(\sqrt{A}\omega_0' t + \varphi)$$

Die Amplitude bleibt also klein gegen ω_0' , wenn $|\omega_{x0}'| \ll |\omega_0'|$.

Falls aber $A < 0$, also wenn $\theta_I' < \theta_{III}' < \theta_{II}'$ oder $\theta_I' > \theta_{III}' > \theta_{II}'$ ist, so folgt

$$\ddot{\omega}'_x = |A|\omega_0'^2 \omega'_x$$

$$\Rightarrow \omega'_x = C_1 \exp(|A|\omega_0' t) + C_2 \exp(-|A|\omega_0' t)$$

$\Rightarrow \omega'_x$ wächst exponentiell an \Rightarrow Bewegung instabil und
Näherung bricht für große t zusammen.

\Rightarrow Beim ungesymmetrischen Kreisel ist Rotation um \vec{e}_3 -Achse nur stabil, wenn θ_{III}' das kleinste oder das größte der drei Hauptträgheitsmomente ist.