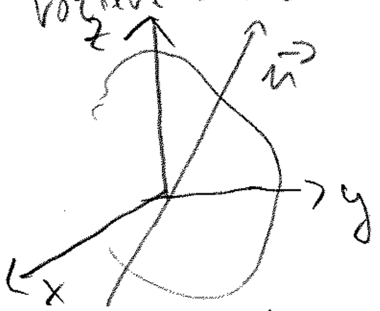
Vorlesungen Theoretische Physik 2: 31.05., 03.06., 04.06.

Das Trägheitsmoment (Wiederholung)

Starrer Körper rotiere um eine Achse



Sei $\vec\omega = \omega\vec n$ die (momentane) Winkelgeschwindigkeit. Dann ist die kinetische Energie

$T = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\vec v_\nu^{\,2}$, wobei m_ν die Massenpunkte sind, die den starren Körper bilden und $\vec v_\nu$ die Geschwindigkeiten, gemessen in einem Bezugssystem mit Ursprung auf der Drehachse.

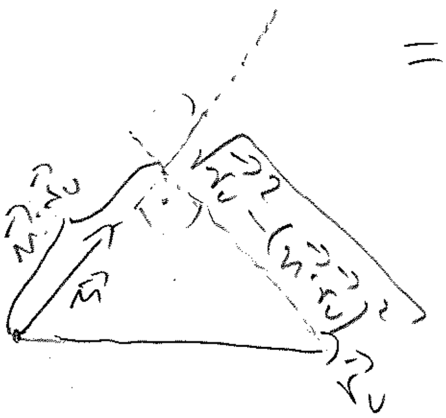
Starrheitsbedingung: $\vec v_\nu = \vec\omega \times \vec r_\nu$ (1)

$$\Rightarrow \quad T = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\left(\vec\omega\times\vec r_\nu\right)^2 \qquad (2)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}(\vec\omega\times\vec r_\nu)^2 &= (\vec\omega\times\vec r_\nu)\cdot(\vec\omega\times\vec r_\nu)\\ &= \vec\omega\cdot\left[\vec r_\nu\times(\vec\omega\times\vec r_\nu)\right]\\ &= \vec\omega\cdot\left[\vec\omega\,(\vec r_\nu^{\,2}) - \vec r_\nu\,(\vec r_\nu\cdot\vec\omega)\right] \qquad (3)\\ &= \omega^2\left[\vec r_\nu^{\,2} - (\vec n\cdot\vec r_\nu)^2\right] = \omega^2\rho_\nu^2\end{aligned}$$

$\perp$ Abstand des Punktes m_ν von der Drehachse

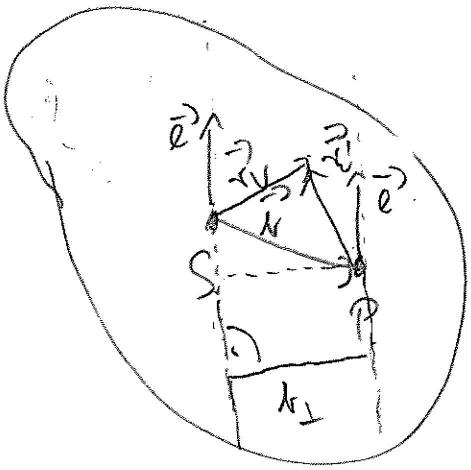


Trägheitsmoment um Achse

$$\Rightarrow \quad T = \frac{\omega^2}{2}\sum_\nu m_\nu\rho_\nu^2 = \frac{\Theta_{\vec n}}{2}\omega^2 \qquad (4)$$

Satz von Steiner

Sei Θ_S Trägheitsmoment für Achse durch den Schwerpunkt und Θ das Trägheitsmoment um einen beliebigen anderen Punkt um parallele Achse. Sei also



$$\vec r_\nu = \vec r + \vec r_\nu' \Rightarrow \vec r_\nu' = \vec r_\nu - \vec r$$

$$\rho_\nu' \overset{(3)}{=} \vec r_\nu'^2 - (\vec e\cdot\vec r_\nu')^2$$

$$= (\vec r_\nu - \vec r)^2 - [\vec e\cdot(\vec r_\nu - \vec r)]^2$$

$$= \vec r_\nu^2 - 2\vec r\vec r_\nu + \vec r^2 - [(\vec e\cdot\vec r_\nu)^2 - 2(\vec e\cdot\vec r)(\vec r_\nu\cdot\vec r) + (\vec e\cdot\vec r)^2]$$

(5)

Nun ist

$$\frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \vec r_\nu = 0, \quad \text{mit } M = \sum_\nu m_\nu$$

denn dies ist der Schwerpunktsvektor bzgl. Vektor zum Schwerpunkt $\Rightarrow$ also 0. Damit folgt

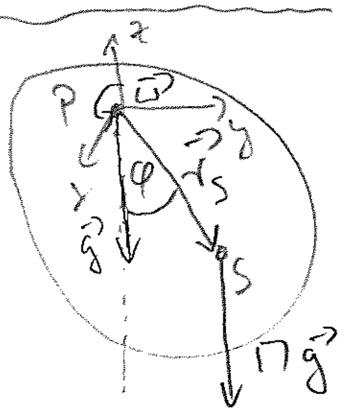
$$\Theta' \overset{(4)}{=} \sum_\nu m_\nu \rho_\nu'^2 = \sum_\nu m_\nu[\vec r_\nu^2 + \vec r^2 - (\vec e\cdot\vec r_\nu)^2 - (\vec e\cdot\vec r)^2]$$

$$= \sum_\nu m_\nu[\vec r_\nu^2 - (\vec e\cdot\vec r_\nu)^2] + \sum_\nu m_\nu[\vec r^2 - (\vec e\cdot\vec r)^2]$$

$$\Theta' = \Theta_S + M b_\perp^2 \qquad (6)$$ Satz von Steiner

Dabei ist $b_\perp$ der Abstand der beiden Drehachsen (gemessen $\perp$ zu diesen Achsen.

Physikalisches Pendel



$$T = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 \quad \text{mit } \Theta\text{: Trägheitsmoment um Achse} \qquad (7)$$

Gesamte potentielle Energie (gemessen im Bezugssystem um P)

$$V = -\sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{g} = -M \vec{g} \cdot \vec{r}_S = -Mg \cdot \underbrace{|\vec{r}_S|}_{a} \cos\varphi \qquad (8)$$

Gesamtenergie

$$E = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 - Mga\cos\varphi \qquad (9)$$

Energieerhaltung (bei reibungsfreier Schwingung)

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}\left[\Theta\ddot{\varphi} + Mga\sin\varphi\right] = 0$$

$$\Rightarrow \Theta\ddot{\varphi} = -Mga\sin\varphi \qquad (10)$$

Komponente d. Drehmoments des SP um P in Richtung der Drehachse

Zeitableitung der Komponente des Drehimpulses in Richtung der Drehachse

$|\varphi| \ll 1$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{mga}{\Theta}\varphi \qquad (11)$$

$\Rightarrow$ Harmonischer Oszi mit Kreisfrequenz

$$\Omega = \sqrt{\frac{mga}{\Theta}} \qquad (12)$$

und Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mga}} \qquad (13)$$

Mit Satz von Steiner

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_s + ma^2}{mga}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_s}{mga} + \frac{a}{g}} \qquad (14)$$

Minimum der Schwingungsdauer

Argument der Wurzel minimal! Setze $A = \frac{\Theta_s}{mg}$

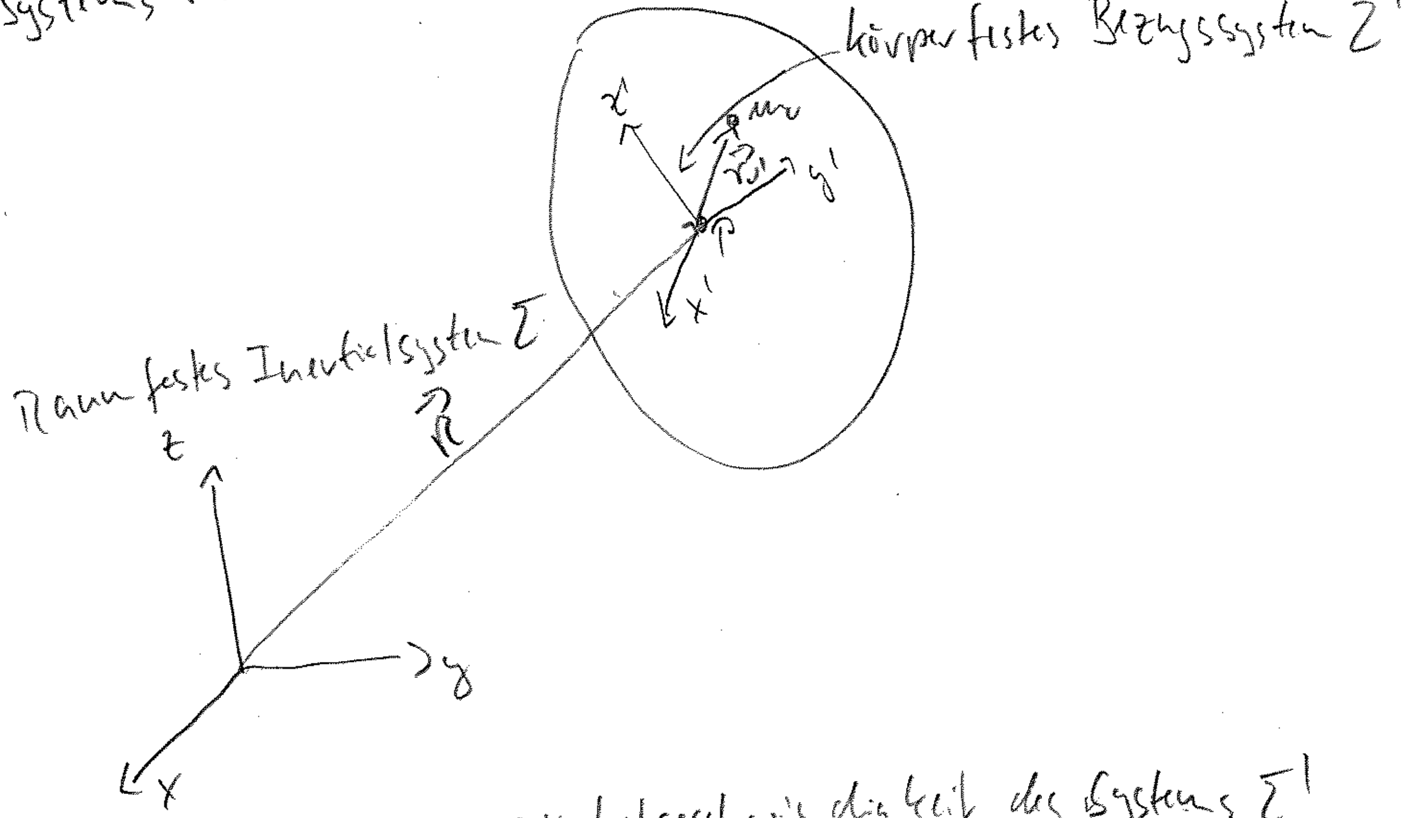
$$f(a) = \frac{A}{a} + \frac{a}{g} \; ; \; f'(a) = -\frac{A}{a^2} + \frac{1}{g} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow a^2 - Ag = 0 \Rightarrow a = \sqrt{Ag} = \sqrt{\frac{\Theta_s}{m}}$$

$$f''(a) = \frac{2A}{a^3} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Rotation um einen Punkt

Starrer Körper: Lage bestimmt durch einen festen Punkt im Körper und Rotation eines körperfesten kartesischen Koordinatensystems relativ zu einem inertialen Laborsystem



Es sei die momentane Winkelgeschwindigkeit des Systems Σ' gegen Σ durch $\vec{\omega}$ gegeben. Weiter sei $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ die Geschwindigkeit des Punktes P. Dann gilt

$$\vec{v}_\nu = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$$

Die kinetische Gesamtenergie ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \left[\vec{V}^2 + 2\,\vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + M \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{S}) + \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2$$

Dabei ist

$$M = \sum_\nu m_\nu$$ die Gesamtmasse des Körpers

$$\vec{s} = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu$$

der Schwerpunktsvektor relativ zum körperfesten Punkt P.

(a) Für die freie Bewegung eines starren Körpers ist es daher sinnvoll den körperfesten Bezugspunkt in den Schwerpunkt zu legen. Dann ist

$$\vec{S}_{CM} = 0$$

und die Energie spaltet in Beitrag der Schwerpunktsbewegung und Rotationsenergie um Schwerpunkt auf:

$$T_{CM} = \frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2$$

(b) Wird ein Körper in dem Punkt P fixiert, kann er nur noch um diesen Punkt rotieren. Dann ist $\vec{V}_{fix} = 0$, und

$$T_{fix} = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2 = T_{rot} \quad \text{(Kreisel!)}$$

Betrachten wir also die Rotationsbewegung um einen festen Punkt. Nach Abspalten der Schwerpunktsbewegung erfaßt dies auch die Dynamik des freien Körpers.

Betrachten wir dazu die Bewegungsgleichungen im CM-System für einen Körper im homogenen Schwerefeld der Erde. Dann gilt für den Schwerpunkt

$$M \dot{\vec{V}}_{CM} = M \vec{g}$$

Die gesamte potentielle Energie ist

$$V_{cm} = -\sum_\nu m_\nu \vec{g}\cdot(\vec{R}_{cm}+\vec{r}_\nu)$$

$$= -M\vec{g}\cdot\vec{R}, \quad \text{da } M\vec{S}_{cm} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu = 0 \text{ im CM-System}$$

Die Gesamtenergie

$$E = T + V_{cm} = \frac{M}{2}\vec{V}_{cm}^2 - M\vec{g}\cdot\vec{R}_{cm} + T_{rot}$$

ist erhalten und da dies für $E_{cm} = \frac{M}{2}\vec{V}_{cm}^2 - M\vec{g}\cdot\vec{R}$ gesondert der Fall ist, gilt dies auch für T_{rot} allein.

Gesamtdrehmoment um Schwerpunkt

$$\vec{D} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{g} = 0$$

$\Rightarrow$ Gesamtspin (Drehimpuls relativ zum Schwerpunkt)

$$\vec{L}_{cm} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times \underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_\nu)}_{\vec{v}_\nu}$$

ist erhalten

$\Rightarrow$ Bewegung beschrieben durch

$$\dot{\vec{L}}_{cm} = 0$$

Für "schwerer Kreisel" (Körper fixiert in beliebigem Punkt)

$$E = \cancel{\frac{M}{2}\vec{V}^2}^{\,0} - M\vec{g}\cdot\vec{S} + T_{rot}$$

Gesamt-Drehmoment um fixierten Punkt

$$\vec{D} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{g} = M\vec{S}\times\vec{g}$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} = M\vec{S}\times\vec{g}$$

Der Trägheitstensor

Sowohl für T_{rot} als auch $\vec{L}$ benötigen wir den Trägheitstensor. Dieser ergibt sich wie folgt. Es gilt

$$\vec{L} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)$$

$$= \sum_\nu m_\nu \left[\vec{\omega}\, \vec{r}_\nu^{\,2} - \vec{r}_\nu (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\nu)\right]$$

$\Rightarrow$ Drehimpuls lineare Abbildung von $\vec{\omega}$. Suche Transformationsmatrix. Schreibe also alles in Komponenten um.

$$\vec{r}_\nu = \begin{pmatrix} r_{\nu 1} \\ r_{\nu 2} \\ r_{\nu 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \\ z_\nu \end{pmatrix}$$

Dann können wir schreiben

$$L_j = \sum_\nu m_\nu \left[\vec{r}_\nu^{\,2} \omega_j - r_{\nu j} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\nu)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_\nu m_\nu (\vec{r}_\nu^{\,2} \delta_{jk} - r_{\nu j} r_{\nu k})\, \omega_k$$

Trägheitstensor

$$\Theta_{jk} = \sum_\nu m_\nu (\vec{r}_\nu^{\,2} \delta_{jk} - r_{\nu j} r_{\nu k})$$

Dann

$$L_j = \sum_{k=1}^{3} \Theta_{jk}\, \omega_k$$

Betrachtet man den starren Körper als kontinuierliche Massenverteilung, folgt

$$\Theta_{jk} = \int_V d^3\vec{r}\; \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^{\,2} \delta_{jk} - r_j r_k\right)$$

In Matrixform ist

$$\left(\vec{r}^{\,2} \delta_{jk} - r_j r_k\right) = \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{r}^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{r}^{\,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\Theta} = \int_V d^3\vec{r}\; \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\vec{L} = \hat{\Theta}\, \vec{\omega}$$

ist i.a. $\vec{L}$ nicht in Richtung von $\vec{\omega}$ gerichtet.

Das Trägheitsmoment um eine feste Achse ergibt sich aus dem Trägheitstensor durch

$$\Theta_{\vec{n}} = \sum_{j,k=1}^{3} \Theta_{jk}\, n_j n_k = \vec{n} \cdot \left(\hat{\Theta}\, \vec{n}\right)$$

Zum Beweis verwenden wir den obigen Ausdruck

$$\sum_{j,k=1}^{3} n_j \Theta_{jk} n_k = \int_V d^3\vec{r}\, \varrho(\vec{r}) \left[\vec{r}^{\,2} \cdot \vec{n}^{\,2} - (\vec{r}\cdot\vec{n})^2\right]$$

$$= \int_V d^3\vec{r}\, \varrho(\vec{r}) \left[\vec{r}^{\,2} - (\vec{r}\cdot\vec{n})^2\right]$$

$$= \Theta_{\vec{n}}$$

Bemerkungen

(1) Die Komponenten von $\hat{\Theta}$ hängen von der Wahl des körperfesten Bezugspunktes und dem Koordinatensystem ab.

(2) Komponenten Θ_{jk} bzgl. eines "raumfesten" Inertialsystems sind i.a. zeitabhängig, weil sich die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems relativ zum raumfesten System ändert. Die Bewegungsgleichungen werden also in raumfesten Koordinaten einfacher zu lösen sein, da dort die Komponenten Θ_{jk} zeitlich konstant sind.

Eigenschaften des Trägheitstensors

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß

$$\Theta_{jk} = \Theta_{kj}$$

$\Rightarrow$ Der Trägheitstensor ist symmetrisch.

Die gesamte Rotationsenergie ist

$$T_{rot} = \int_V d^3\vec{r}\, \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\, [\vec{\omega}\times\vec{r}]^2$$

$$= \int_V d^3\vec{r}\, \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\, [(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})]$$

$$= \int_V d^3\vec{r}\, \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\, \vec{\omega}\cdot[\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]$$

$$= \frac{\vec{\omega}}{2}\cdot\int_V d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})\, [\vec{r}\times\vec{v}(\vec{r})] = \frac{\vec{\omega}}{2}\cdot\vec{L}$$

$$= \frac{1}{2}\, \vec{\omega}\cdot(\hat{\Theta}\,\vec{\omega})$$

Da $T_{rot} \geq 0$ ist
$\hat{\Theta}$ eine positiv (semi-) definite symmetrische Bilinearform.

Hauptachsentransformation

Wir betrachten im folgenden alle Vektoren in einem körperfesten (i.a. also rotierenden) Bezugssystem. Es gilt freilich auch dort

$$\vec{L}' = \hat{\Theta}'\cdot\vec{\omega}'$$

Wir fragen nun nach solchen $\vec{\omega}'$, für die $\vec{L}' = \lambda\vec{\omega}'$ ist, d.h. für die der Drehimpuls in Richtung der Drehachse zeigt. Eine solche körperfeste Achse wird als Hauptträgheitsachse bezeichnet. Die Bedingung für eine solche Achse führt zur Eigenwertgleichung

$$\hat{\Theta}'\vec{\omega}' = \lambda\vec{\omega}'$$

oder auf

$$(\hat{\Theta}' - \lambda\mathbb{1})\vec{\omega}' = 0$$

Damit diese Gleichung für $\vec{\omega}' \neq 0$ erfüllt sein kann, muß notwendig

$$P_{\hat{\Theta}'}(\lambda) = \det(\hat{\Theta} - \lambda\mathbb{1}) = 0$$

werden. Die Determinante ist ein Polynom dritten Grades, und die Eigenwerte λ ergeben sich als deren Nullstellen. Wir zeigen jetzt, daß dieses charakteristische Polynom immer drei reelle Nullstellen hat, weil $\hat{\Theta}'$ eine symmetrische Matrix ist. Als reelles Polynom besitzt $P_{\hat{\Theta}}(\lambda)$ immer drei komplexe Nullstellen und das Polynom zerfällt in 3 Linearfaktoren (Hauptsatz der Algebra!) Es ist also

$$P_{\hat{\Theta}}(\lambda) = -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß der Koeffizient vor λ^3 gerade (-1) ist (Entwicklungssatz für Determinanten).

Da $P_{\hat{\Theta}}$ reell ist für $\lambda \in \mathbb{R}$, muß für jede echt komplexe Nullstelle auch ihr konjugiert komplexes Nullstelle sein. Angenommen $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ und $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Dann muß notwendig $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ sein.

Dann besitzt die Eigenwertgleichung

$$\hat{\Theta}' \vec{\omega}' = \lambda_3 \vec{\omega}'$$

eine von 0 verschiedene Lösung, und wir wählen $\vec{e}_3{}'$ als normierten Vektor in dieser Hauptachsenrichtung. Weiter seien $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ zwei beliebige zueinander senkrechte Einheitsvektoren in der Ebene $\perp$ zu $\vec{e}_3{}'$. Es sei weiter $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ wieder ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem. Wegen

$$\hat{\Theta}' \vec{e}_3{}' = \lambda_3 \vec{e}_3{}'$$

und der Symmetrie von $\hat{\Theta}'$ bzgl. jedem beliebigen Basissystem, muß der Trägheitstensor in diesem Bezugssystem die Gestalt

$$\hat{\Theta}' = \begin{pmatrix} \Theta_{11}' & \Theta_{12}' & 0 \\ \Theta_{12}' & \Theta_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

besitzen.

Das charakteristische Polynom lautet in diesem Bezugssystem

$$\det(\hat{\Theta}' - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda_3 - \lambda)\left[(\Theta_{11}' - \lambda)(\Theta_{22}' - \lambda) - \Theta_{12}'^2\right]$$

Außer λ_3 finden wir also noch Nullstellen für das Verschwinden der Klammer. Es ist

$$(\Theta_{11}' - \lambda)(\Theta_{22}' - \lambda) - \Theta_{12}'^2 = 0$$

zu lösen bzw.

$$\Theta_{11}' \Theta_{22}' - \lambda(\Theta_{11}' + \Theta_{22}') + \lambda^2 - \Theta_{12}'^2 = 0$$

oder

$$\lambda^2 - \lambda(\theta_{11}' + \theta_{22}') + \theta_{11}'\,\theta_{22}' - \theta_{12}'^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{\theta_{11}' + \theta_{22}'}{2} \pm \sqrt{\frac{(\theta_{11}' + \theta_{22}')^2}{4} - \theta_{11}'\,\theta_{22}' + \theta_{12}'^2}$$

Nun gilt

$$\frac{(\theta_{11}' + \theta_{22}')^2}{4} - \theta_{11}'\,\theta_{22}' + \theta_{12}'^2$$

$$= \frac{\theta_{11}'^2 + \theta_{22}'^2}{4} + \frac{\theta_{11}'\,\theta_{22}'}{2} - \theta_{11}'\,\theta_{22}' + \theta_{12}'^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\theta_{11}'^2 + \theta_{22}'^2 - 2\,\theta_{11}'\,\theta_{22}'\right) + \theta_{12}'^2$$

$$= \left(\frac{\theta_{11}' - \theta_{22}'}{2}\right)^2 + \theta_{12}'^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ beide Nullstellen reell. $\Rightarrow$ Polynom hat 3 reelle Nullstellen

Falls Wurzel $\neq 0$ sind beide Nullstellen verschieden.

Dann gilt für die Eigenvektoren

$$\hat{\theta}'\,\vec{\omega}_1' = \lambda_1\,\vec{\omega}_1'$$

$$\hat{\theta}'\,\vec{\omega}_2' = \lambda_2\,\vec{\omega}_2'$$

Es folgt

$$\vec{\omega}_2{}' \cdot \hat{\theta}' \vec{\omega}_1{}' = \lambda_1 \vec{\omega}_1{}' \cdot \vec{\omega}_2{}'$$
$$\vec{\omega}_1{}' \cdot \hat{\theta}' \vec{\omega}_2{}' = \lambda_2 \vec{\omega}_1{}' \cdot \vec{\omega}_2{}'$$

Dann ist wegen der Symmetrie von $\hat{\theta}$

$$\vec{\omega}_2{}' \cdot \hat{\theta}' \vec{\omega}_1{}' = \vec{\omega}_1{}' \cdot \hat{\theta}' \vec{\omega}_2{}' \quad \text{(Symmetrie von } \hat{\theta}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, \vec{\omega}_1{}' \cdot \vec{\omega}_2{}'$$

Dann ist aber wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \vec{\omega}_1{}' \cdot \vec{\omega}_2{}' = 0$

Die Eigenvektoren sind also senkrecht aufeinander (und $\perp$ zu $\vec{e}_3{}'$). Wir können also stets 3 zueinander senkrechte Eigenvektoren finden, so daß diese $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem bilden. In diesem Hauptachsensystem ist

$$\hat{\theta}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

d.h. der Trägheitstensor wird diagonal. Wir bezeichnen im folgenden die Eigenwerte als Θ_I', Θ_{II}', Θ_{III}'. Dies sind die Trägheitsmomente für Drehungen um die Hauptachsen, und im (körperfesten!) Hauptachsensystem ist

$$\hat{\theta}' = \begin{pmatrix} \Theta_I' & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{II}' & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{III}' \end{pmatrix}$$

Falls die Wurzel oben verschwindet, muß notwendig

$$\Theta'_{12} = 0 \text{ und } \Theta'_{11} = \Theta'_{22} \text{ sein}$$

Dann ist für beliebige kartesische $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}' \perp \vec{e}_3{}'$ $\hat{\Theta}'$ bereits diagonal, und $\lambda_1 = \lambda_2 = \hat{\Theta}'_{I} = \hat{\Theta}'_{II}$. Man nennt einen Kreisel in dem Fall einen symmetrischen Kreisel. Falls sogar alle drei Trägheitsmomente gleich sind, spricht man von Kugelkreisel.

Die Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\, \vec{\omega}\,'\cdot \hat{\Theta}'\, \vec{\omega}\,'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Theta'_{I}\,\omega'^2_{I} + \Theta'_2\,\omega'^2_{II} + \Theta'_3\,\omega'^2_{III}\right) = \text{const.}$$

beschreibt ein Ellipsoid mit Hauptachsen $\frac{1}{\sqrt{\Theta'_I}}, \frac{1}{\sqrt{\Theta'_{II}}}, \frac{1}{\sqrt{\Theta'_{III}}}$

Falls $\Theta'_I = \Theta'_{II}$ liegt ein Rotationsellipsoid um die III-Achse vor. Man unterscheidet zwei Fälle $\Theta'_{III} > \Theta'_I = \Theta'_{II}$
Dann ist das Rotationsellipsoid abgeflacht (oblater Kreisel)
Falls $\Theta'_{III} < \Theta'_I = \Theta'_{II}$ ist es verlängert (in Richtung der III-Achse)
$\Rightarrow$ prolater Kreisel ("Zigarrenkreisel")

Falls sogar $\Theta_I = \Theta_{II} = \Theta_{III}$, ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel $\Rightarrow$ "Kugelkreisel"

Verhalten von $\hat{\Theta}$ unter Drehungen

Betrachten wir die Komponenten von $\hat{\Theta}$ bzgl. eines beliebigen kartesischen Koordinatensystems Σ und eines anderen dazu verdrehten Koordinatensystems (beide rechtshändig!), dann ist

$$\hat{\Theta}'_{jk} = \int_V d^3\vec{r}\,' \rho'(\vec{r}\,') \left[\vec{r}\,'^2 \delta_{jk} - r'_j r'_k\right]$$

Mit $r'_j = \sum_{l=1}^{3} D_{jl} r_l$

mit der Drehmatrix

$$\hat{D}^{-1} = \hat{D}^t \quad ; \det \hat{D} = +1$$

folgt

$$\vec{r}\,'^2 = \vec{r}^{\,2}$$

$$\sum_{lm=1}^{3} D_{jl} D_{km} \delta_{lm} = \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \Theta'_{jk} = \int_V d^3\vec{r}\,' \rho'(\vec{r}\,') \sum_{l,m=1}^{3} \left[\vec{r}^{\,2} \delta_{lm} - r_l r_m\right] \cdot D_{jl} D_{km}$$

Nun muß

$$d^3\vec{r}\,' \rho'(\vec{r}\,') = dm = d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

sein, weil das Massenelement unabhängig von der Wahl des Bezugssystems ist. Da weiter

$$d^3\vec{r}\,' = \det\left(\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}\right) d^3\vec{r} = \det\hat{D}\, d^3\vec{r} = d^3\vec{r}$$

ist, folgt sogar

$$\rho'(\vec r\,') = \rho(\vec r)$$

Damit ist

$$\Theta'_{jk} = \sum_{l,m=1}^{3} \int_V d^3\vec r\, \rho(\vec r)\, [\vec r^{\,2} \delta_{lm} - r_l r_m]\, D_{jl} D_{km}$$

$$\boxed{\Theta'_{jk} = \sum_{l,m=1}^{3} D_{jl} D_{km} \Theta_{lm}}$$

Das ist das Transformationsverhalten eines Tensors zweiter Stufe. Es definiert einen Tensor! Die physikalische Bedeutung ergibt sich daraus, daß man die Transformationsformel in Matrix-Schreibweise in der Form

$$\hat\Theta' = \hat D\, \hat\Theta\, \hat D^t = \hat D\, \hat\Theta\, \hat D^{-1}$$

$\hat D$ Drehmatrix = Orthogonalmatrix

Damit folgt für die Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec\omega\,'^t \hat\Theta' \vec\omega\,'$$

$$= \frac{1}{2} (\hat D \vec\omega)^t \hat\Theta' (\hat D \vec\omega)$$

$$= \frac{1}{2} \vec\omega^t (\hat D^t \hat\Theta' \hat D) \vec\omega = \frac{1}{2} \vec\omega^t \hat D^t \hat D \hat\Theta \hat D^t \hat D \vec\omega$$

$$= \frac{1}{2} \vec\omega^t \hat\Theta \vec\omega$$

Die kinetische Energie ergibt sich also in derselben Form in allen Bezugssystemen. Man muß nur immer dieselbe Basis für $\hat{\Theta}$ und $\vec{\omega}$ verwenden!

Bemerkung

Für einen Kugelkreisel ist

$$\hat{\Theta}' = \Theta_I' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Theta_I' \mathbb{1}$$

Damit folgt

$$\hat{\Theta} = \hat{D}^t \hat{\Theta}' \hat{D} = \Theta_I' \hat{D}^t \mathbb{1} \hat{D} = \Theta_I' \hat{D}^t \hat{D} = \Theta_I' \mathbb{1}$$

Für einen Kugelkreisel ist also $\hat{\Theta}$ in jedem Bezugssystem Diagonal und $\propto$ Einheitsmatrix!