Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 10 (20.01.-24.01.2014)

Präsenzübungen

(P23) Abgeänderte Schwerkraft

Wenn die anziehende Schwerkraft $\vec{F}$ zwischen einer sehr großen zentralen Kugel der Masse M und einem Satelliten der Masse m, der sich um sie bewegt, tatsächlich durch

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^{3+a}}\vec{r} \quad , \quad |a| \ll 1$$

gegeben wäre, wobei $\vec{r}$ den Vektor zwischen den beiden Körpern bezeichnet, wie würden dann das zweite und das dritte Keplersche Gesetz modifiziert? (In der Diskussion des dritten Gesetzes nehmen Sie eine Kreisbahn als gegeben an!)

(P24) Schwerpunktsatz

Betrachten Sie zwei Massenpunkte mit Massen m_1 und m_2 mit Ortsvektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$, die sich in einem zentralen Wechselwirkungspotential bewegen, d.h. die Kräfte auf die Massenpunkte aufgrund der Wechselwirkung (z.B. Gravitation) lauten

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|), \quad \vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|). \tag{1}$$

(a) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Bewegung der beiden Massenpunkte auf.

(b) Der Schwerpunkt der beiden Teilchen ist durch

$$\vec{s} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

definiert. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung der Teilchen in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten, also $\vec{s}$ und $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ an und interpretieren Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{s}$ und $\vec{r}$ physikalisch.

(c) Wie lautet die Gesamtenergie der beiden Massenpunkte in Relativ- und Schwerpunktkoordinaten? Gilt der Energieerhaltungssatz?

(P25) Periheldrehung in Störungsrechnung (Knobelaufgabe!)

Ein Planet der Masse m bewegt sich im Gravitationspotential der Sonne,

$$V(r) = -\frac{\varkappa}{r} - \frac{B}{r^3},$$

wobei der Zusatzterm von einer Abplattung der Sonne an den Polen herrührt. Berechnen Sie die Periheldrehung $\delta\phi$ der Planetenbahn per Umlauf.

Hinweis 1: Als Ausgangspunkt kann die von der Vorlesung her bekannte Gleichung

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\varkappa}{r^2} - \frac{3B}{r^4} + \frac{L^2}{mr^3}$$

für die Radialbewegung in einem beliebigen Zentralpotential verwendet werden.

Hinweis 2: B soll klein sein, so daß die Bahn als Überlagerung einer festen Ellipsenbahn und einer kleinen Störung angenommen werden kann:

$$\frac{1}{r(\phi)} = u(\phi) = u_0(\phi) + \epsilon u_1(\phi) + O(\epsilon^2) \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{3\varkappa m^2 B}{L^4},$$

wobei L der Drehimpuls $L = mr^2\dot{\varphi}$ des Planeten ist.

Bemerkung: Historisch war diese Rechnung sehr wichtig als eine der ersten Bestätigungen von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie. Die Abweichung vom Newtonschen Potential ist in führender Ordnung genau ein $1/r^3$-Term, und die entsprechende Periheldrehung beim Merkur, bereits 1859 durch Verrier genau vermessen, die nicht durch Bahnstörungen aufgrund anderer Planeten erklärt werden konnte, wurde genau durch diese Korrektur aufgrund der Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt.

`https://de.wikipedia.org/wiki/Periheldrehung#Periheldrehung_des_Merkur`

Hausübungen (Abgabe: 31.01.2014)

(H20) Geostationäre Satellitenbahn (2 Punkte)

In welcher Höhe muß sich ein Satellit befinden, damit er über einen bestimmten Punkt am Äquator bleibt? (Radius der Erde ist $R_E = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.)

(H21) Störung einer Kreisbahn beim Keplerproblem (4 Punkte)

Wir wir aus der Vorlesung wissen, kann die radiale Bewegungsgleichung eines Teilchen in einem Zentralfeld $F(r)$ in der Form

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{mh^2}{r^3}$$

geschrieben werden, wobei $h = L/m = r^2\omega = \text{const}$ die doppelte „Flächengeschwindigkeit" bezeichnet. Wir betrachten in dieser Aufgabe den Sonderfall des bekannten Schwerefeldes

$$F(r) = -G\frac{Mm}{r^2} \quad .$$

(a) Mit welchem Radius r_0 kann für gegebenes h eine Kreisbewegung aufrecht gehalten wereden?

(b) Wie groß ist dann die entsprechende Umlaufsfrequenz?

(c) Man betrachte eine Störung $\Delta r = r - r_0 = \xi(t)$ der Kreisbewegung, wobei $|\xi(t)| \ll r_0$ ist. Mit welcher Frequenz schwingt $\xi(t)$?

(d) Wie könnte man von schon bekannten Eigenschaften der Keplerbewegung herleiten, daß die in (b) und (c) ermittelten Frequenzen identisch sein müssen?

(H22) Absturz eines Meteors (4 Punkte)

Ein Meteor der Masse m bewege sich im Gravitationsfeld der Erde (Masse M), die als fixiertes Zentrum betrachtet werden darf, radial auf die Erde zu. Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter der Annahme, daß der Meteor aus dem Unendlichen mit Geschwindigkeit 0 losgeflogen ist (d.h. $v \to 0$ für $r \to \infty$).

Hinweis: Verwenden Sie den Energiesatz! Gehen Sie bei der Integration der Bewegungsgleichung davon aus, daß sich der Meteorit zur Zeit $t = 0$ in einer endlichen Entfernung r_0 von der Sonne befindet.