Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 5 (25.11.-29.11.2012)

Präsenzübungen

(P14) Konstruktiver Beweis für Poincaré-Lemma (lokale Version)

Wir betrachten ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x})$, das in einer offenen Umgebung eines Punktes $\vec{x}_0$ definiert sei und für das dort

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{x}) = (\partial_y A_3 - \partial_z A_2, \partial_z A_1 - \partial_x A_3, \partial_x A_2 - \partial_y A_1) = 0 \tag{1}$$

gilt. Wir setzen weiter voraus, daß die Komponenten von $\vec{A}(\vec{x})$ nach allen drei Koordinaten stetig partiell differenzierbar sind. Dann existiert ein Quader Q, der $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ im Inneren enthält, und wir können für jedes $\vec{x} = (x, y, z) \in Q$ das Kurvenintegral von $\vec{A}$ entlang der drei folgenden aus geraden, parallel zu den Koordinatenachsen verlaufenden Wegstücken zusammengesetzten Kurve berechnen:

$$C_1: \quad (x_0, y_0, z_0) \to (x, y_0, z_0), \quad C_2: \quad (x, y_0, z_0) \to (x, y, z_0), \quad C_3: \quad (x, y, z_0) \to (x, y, z).$$

(a) Drücken Sie das Wegintegral

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{C_1+C_2+C_3} \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

explizit durch die drei entsprechenden einfachen Integrale bzgl. x, y bzw. z aus.

(b) Berechnen Sie den Gradienten des so konstruierten Skalarfeldes $\Phi(\vec{x})$, indem Sie die partiellen Ableitungen ausführen.

(c) Zeigen Sie unter Anwendung von Gl. (1), daß $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$ gilt.

(d) Wenden Sie die Konstruktion des Skalarfeldes auf das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x}) = (2xy + z^3, x^2 + 2y, 3xz^2 - 2)^t$ aus Aufgabe (P13) an. Wählen Sie dazu $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)^t$.

(P15) Potentialwirbel (Knobelaufgabe)

Die folgende Aufgabe zeigt, daß das eben bewiesene Poincaré-Lemma nur lokal gilt. Wir betrachten dazu das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y),$$

wobei (x, y, z) die Komponenten von $\vec{x}$ bzgl. einer rechtshändigen kartesischen Basis sind.

(a) Geben Sie den Bereich in $\mathbb{R}^3$ an, wo $\vec{V}$ definiert ist.

(b) Zeigen Sie, daß dort $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ gilt.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral entlang des Kreises

$$C_R: \quad \vec{x}(t) = R(\vec{e}_x \cos t + \vec{e}_y \sin t), \quad t \in (-\pi, \pi).$$

(d) Gemäß der Aufgabe (P15) gibt es in jedem offenen Quader, der ganz im Definitionsbereich von $\vec{V}$ liegt, ein Skalarfeld Φ, so daß $\vec{V} = \vec{\nabla}\Phi$ ist. Berechnen Sie solch ein Skalarfeld für einen möglichst großen Teilbereich des Definitionsbereichs von $\vec{V}$! Gibt es auch ein entsprechendes Potentialfeld für den gesamten Definitionsbereich?

Hinweis: Hier empfiehlt es sich, das Potential direkt durch Hochintegrieren der Gleichung $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$ anstatt mit Hilfe von Kurvenintegralen zu bestimmen.

Hausübungen (Abgabe: 06.12.2012)

(H11) Galilei-Invarianz und Erhaltung der Masse (6 Punkte)

Wir betrachten ein System von untereinander wechselwirkenden Punktmassen im Inertialsystem Σ mit Massen m_j $(j \in \{1, 2, \ldots, N\})$ und Ortsvektoren $\vec{x}_j$, die über Wechselwirkungskräfte (z.B. Gravitations- oder elektrische Coulomb-Kräfte) interagieren. Dazu sei $\vec{F}_{ij}$ die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte Kraft.

(a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die Teilchen aufgrund des 2. Newtonschen Gesetzes in einem Inertialsystem Σ?

(b) Zeigen Sie, daß aufgrund des 3. Newtonschen Gesetzes $(\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji})$ der Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j, \quad \vec{p}_j = m_j \vec{v}_j = m_j \dot{\vec{x}}$$

erhalten ist.

(c) Betrachten Sie nun ein Bezugssystem Σ', das sich gegenüber dem Inertialsystem Σ mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt. Zeigen Sie, daß die Koordinaten der Punktteilchen im System Σ' durch

$$\vec{x}\,'_j = \vec{x}_j - \vec{u}\,t, \quad \vec{u} = \text{const}$$

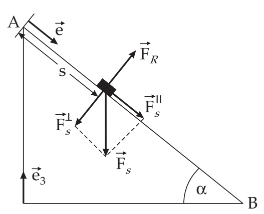
gegeben sind. Die Massen und Kräfte ändern sich definitionsgemäß bei dieser Galilei-Transformation nicht: $m_j = m'_j$, $\vec{F}_{ij} = \vec{F}\,'_{ij}$.

(d) Bestimmen Sie daraus die Transformationsformel für den Gesamtimpuls und zeigen Sie, daß auch in Σ' das 2. Newtonsche Gesetz gilt, also auch Σ' ein Inertialsystem ist.

(e) Betrachten Sie nun einen Stoßprozeß, bei dem Punktmassen auch auseinanderbrechen oder miteinander verkleben können. Zeigen Sie, daß aufgrund der Gesamtimpulserhaltung in beiden Systemen Σ und Σ', die aufgrund der Galilei-Invarianz der Newtonschen Mechanik in allen Inertialsystemen gelten muß, notwendig auch die Summe aller Massen vor und nach dem Stoß erhalten sein muß, d.h. wenn m_j $(j \in \{1, 2, \ldots, N\})$ die Massen der Teilchen vor dem Stoß und $\tilde{m}_k$ $(k \in \{1, 2, \ldots, N'\})$ die Massen nach dem Stoß sind, gilt

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j = \sum_{k=1}^{N'} \tilde{m}_k.$$

(H12) Schiefe Ebene (4 Punkte)



Ein Teilchen P der Masse m rutscht unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungslos entlang einer schiefen Ebene AB, die unter einem Winkel α zur Horizontalen geneigt ist (vgl. Abb.). Das ruhende Teilchen wird zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt A losgelassen. Finden Sie die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit.