Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2013/2014**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 4 (18.11.-22.11.2013)

Präsenzübungen

(P11) Differentialoperatoren der Vektoranalysis
Im folgenden sei $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, wobei die $\vec{e}_j$ $(j \in \{1,2,3\})$ eine kartesische Basis bilden.

(a) Berechnen Sie für das Skalarfeld
$$\Phi(\vec{r}) = xy + yz + zx$$
und das Vektorfeld
$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix}$$
   (i) $\vec{\nabla}\Phi$,
   (ii) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$,
   (iii) $\vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A})$.

(b) Beweisen Sie die Beziehung
$$\vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi) \times \vec{A} + \Phi(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$
für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. $\vec{A}$.

(P12) Rotationsellipsoid
Ein länglicher Atomkern besitzt die Form eines Rotationsellipsoiden ("*Zigarre*"), der implizit durch
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$
beschrieben wird.
Wie lautet der nach außen zeigende, auf 1 normierte Flächennormalenvektor $\vec{n}$? Berechnen Sie $\vec{n}$ in dem Punkt $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, 0)$.
Hinweis: Machen Sie sich die geometrische Interpretation des Gradienten zunutze.

(P13) Wegunabhängigkeit eines Wegintegrals
Begründen Sie, warum für das Vektorfeld
$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 2y \\ 3xz^2 - 2 \end{pmatrix}$$
das Linienintegral zwischen zwei beliebigen Punkten nicht von dem dazwischen liegenden Weg abhängt sondern nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges. Berechnen Sie dazu ein skalares Feld $\Phi(\vec{r})$, so daß $\vec{A}(r) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ ist.
Wie lautet damit der Wert des Linienintegrals zwischen dem Ursprung und dem Punkt $\vec{R} = (X, Y, Z)^t$?

---

bitte wenden!

Hausübungen (Abgabe: 29.11.2013)

(H8) Differentialoperatoren der Vektoranalysis (3 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Vektor- und Skalarfelder:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 3xyz^2 \\ 2xy^3 \\ -x^2yz \end{pmatrix}, \quad \Phi = 3x^2 - yz.$$

Berechnen Sie

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$,

(b) $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\Phi$,

(c) $\vec{\nabla} \cdot (\Phi\vec{A})$,

(d) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.

(H9) Radialfelder (2 Punkte)
Berechnen Sie $\vec{\nabla} r$ und zeigen Sie, daß $\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ gilt.

(H10) Wegintegral über das Newtonsche Gravitationsfeld (5 Punkte)
Im folgenden betrachten wir das Gravitationsfeld einer Masse M

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

(a) Zeigen Sie durch explizitrechnung, daß die Linienintegrale

$$\int_L \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

entlang folgender, gerader Wegstücke

(i) von $(a,0,a)$ nach $(3a,0,a)$, dann nach $(3a,2a,a)$ und von dort nach $(3a,2a,2a)$

(ii) von $(a,0,a)$ nach $(a,0,2a)$, dann nach $(a,2a,2a)$ und von dort nach $(3a,2a,2a)$, wobei a eine Konstante mit Dimension einer Länge bezeichnet,

unabhängig vom Weg den Wert

$$\int_L \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

besitzen.

(b) Geben Sie eine skalare Funktion $\Phi(\vec{r})$ an, so daß

$$\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})$$

gilt. **Hinweis:** Wenden Sie die Aussage der vorigen Aufgabe (H9) auf diesen Fall an! Begründen Sie daraus, warum die Ergebnisse für die Wegintegrale (i) und (ii) aus Aufgabenteil (a) identisch sind.
