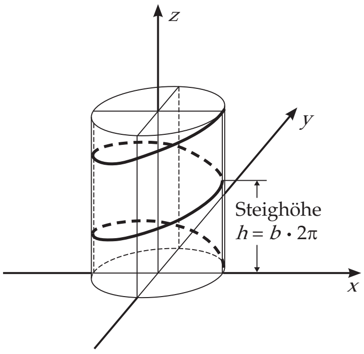
Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees Wintersemester 2013/2014

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 3 (11.11.-15.11.2013)

Präsenzübungen

(P8) Schraubenlinie



Wie in der Abbildung gezeigt, lauten die kartesischen Koordinaten der Schraubenlinie (mit $\omega > 0$)

$$\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, b\omega t)$$

(a) Ist b größer oder kleiner als Null? Welche geometrische Bedeutung hat dieses Vorzeichen?

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und $|\vec{v}(t)|$.

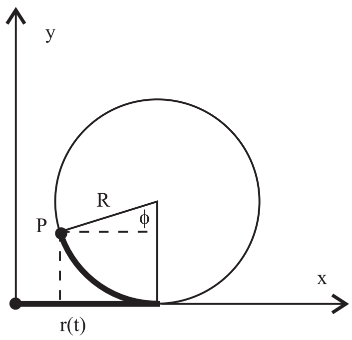
(c) Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ und $|\vec{a}(t)|$.

(d) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$.

(e) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ der Schraubenlinie.

(f) Berechnen Sie den Krümmungs- und Torsionsradius.

(P9) Zykloide



Ein Kreis mit Radius R rollt mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Geraden ab (siehe Skizze). Ein gegebener Punkt P auf diesem Kreis beschreibt dann eine sogenannte Zykloide.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $x(t)$ und $y(t)$ dieser Zykloide als Funktion der Zeit. Man nimmt an, dass zur Zeit $t = 0$ die Position des Punktes P $(x = 0, y = 0)$ ist. Skizzieren Sie den Verlauf des Punktes.

(b) Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ des betrachteten Punktes.

(P10) Linienintegral

Das Vektorfeld $\vec{A}$ und die Raumkurve $C: \ \vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in [0,2]$ sind gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = (3x^2 - 6yz, \, 2y + 3xz, \, 1 - 4xyz^2) \quad \text{und} \quad \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)\,.$$

Berechnen Sie das Linienintegral

$$\int_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

bitte wenden!

Hausübungen (Abgabe: 22.11.2013)

(H5) Bahnkurve eines Teilchens (4 Punkte)
Ein Teilchen bewege sich entlang einer Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = r_0 \begin{pmatrix} \cosh(kt) \\ \sinh(kt) \\ kt \end{pmatrix},$$

wobei $t \geq 0$ für die Zeit steht und die Parameter r_0 und k positiv und konstant sind.

(a) Diskutieren Sie qualitativ den Verlauf der Bahnkurve.

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(t=0)=0$ ist.

(c) Bestimmen Sie das begleitende Dreibein als Funktion der Zeit.

(d) Geben Sie die Krümmung $\varkappa$ als Funktion der Zeit an.

(H6) Logarithmische Spirale (4 Punkte)
Betrachten Sie im folgenden eine logarithmische Spirale, die durch die folgende Bahnkurve beschrieben wird:

$$\vec{r}(t) = a\exp(bt) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei seien $a, b, \omega > 0$ konstant.

(a) Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens.

(b) Berechnen Sie den Krümmungsradius als Funktion der Zeit.

(c) Berechnen Sie die Länge der ersten Windung, d.h. $t \in [0, 2\pi/\omega]$.

(d) Was passiert mit dem Krümmungsradius, wenn der Parameter b sehr groß wird (d.h. $b \to \infty$), und was bedeutet dies geometrisch für die Kurve?

(H7) Linienintegral (2 Punkte)
Berechnen Sie das Linienintegral mit dem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (2z, x^2 - y^2, 3y)$ entlang folgender gerader Wegstücke:
von $(0,0,1)$ nach $(2,0,1)$, dann nach $(0,1,1)$ und von dort nach $(0,0,1)$ (siehe Skizze).