I. Differentialrechnung

I.1 wichtige Begriffe

i) Stetigkeit

↳ mathematische Definition (eine von vielen!)

Sei $I \subset \mathbb{R}$. Eine Fkt. $f: I \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ stetig, falls für alle (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta .$$

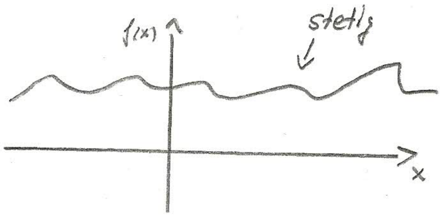
Die Fkt. f heißt stetig, falls obiges Kriterium für alle $x_0 \in I$ erfüllt ist!

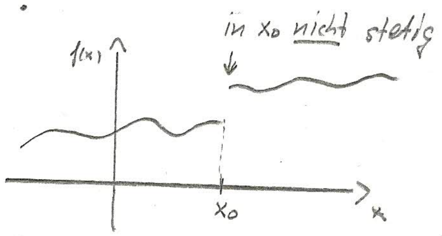
↳ Was heißt das im Klartext?

Eine Funktion f, welche aus einem reellwertigen Intervall I in die reellen Zahlen abbildet, ist stetig im Punkt x_0, wenn kleine Änderungen dieses x-Wertes nur kleine Änderungen des Funktionswertes $f(x)$ hervorrufen.

↳ Klartext²

Eine Fkt. f ist stetig, wenn man ihren Funktionsgraph zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen!





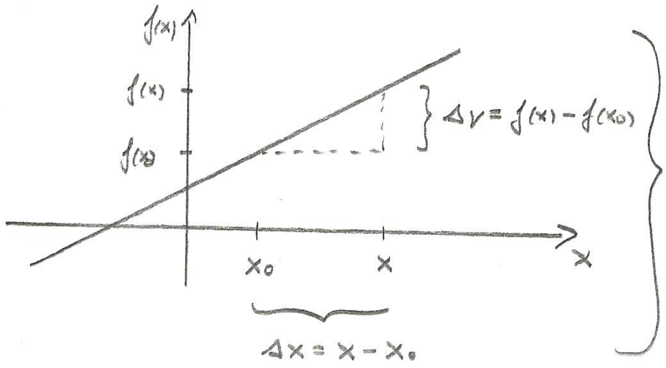
=> Alle "Standardfunktionen" (x^n, e^x, $\sin(x)$, ...) sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

ii) Differenzierbarkeit

↳ Differenzenquotient / L-Regel

• Frage: Wie "messe" ich die Steigung einer Funktion $f(x)$?

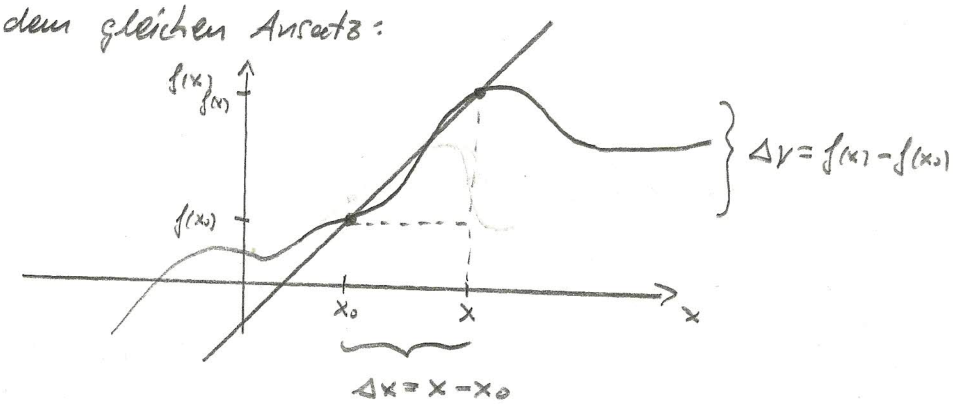
⟶ Für Geraden sehr einfach, denn Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

• Frage: Wie funktioniert das bei "krummen" Funktionen?

⟶ Für eine beliebige "krumme" Funktion versuchen wir es mit dem gleichen Ansatz:



⟶ Offenbar gibt dieses "Steigungsdreieck" die tatsächliche Steigung von $f(x)$ in x_0 noch nicht sehr gut wieder!

⟶ Würde man aber den Punkt x immer näher (unendlich nahe) an x_0 ranschieben, so würde die Gerade zur Tangente in x_0 werden und die Steigung von f in x_0 korrekt wiedergeben.

⟶ Diese Überlegung liefert den Differenzenquotienten bzw. die Ableitung von f in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

→ Die h-Regel

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

erhält man durch analoge Überlegungen! (Übungsaufgabe)

→ Beide Grenzwerte (Differenzenquotient & h-Regel) sind äquivalent und heißen Ableitung von f.

↳ Differenzierbarkeit

Sei $I \subset \mathbb{R}$. Eine Fkt. $f: I \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, falls f in x_0 stetig ist und der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Man nennt $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0 und schreibt alternativ:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \ldots$$

Die Fkt. f heißt differenzierbar, falls f in allen $x_0 \in I$ differenzierbar ist!

↳ FOLGERUNG: Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit! Umkehrung gilt NICHT! (Bsp: Betragsfunktion)

iii) stetige Differenzierbarkeit

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $I \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar in I, falls f in I n-mal differenzierbar und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ in I stetig ist.

Die Menge aller in I n-mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet man mit $\mathcal{C}^n(I)$.

I.2 Ableitungsregeln

Seien f, g differenzierbar und $g \neq 0$. Dann gilt

i) Summenregel: $(f+g)' = f' + g'$

ii) Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + g' \cdot f$

iii) Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

iv) Kettenregel: $(f(g))' = g' \cdot f'(g)$

↳ Ableitungen von Standardfunktionen:

i) Polynom: $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$

ii) Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

iii) Sin-Funktion: $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$

iv) Kosinus-Fkt: $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$

v) ln-Fkt: $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

↳ Ableitung d. Umkehrfunktion

Sei f in I differenzierbar und $f'(x)$ entweder stets positiv oder negativ. Dann ist $J = f(I)$ wieder ein Intervall, $f: I \to J$ bijektiv und f^{-1} ist differenzierbar in J. Die Ableitung von f^{-1} ist gegeben durch

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{für alle } y \in J \text{ und } x = f^{-1}(y).$$

I.3 Grenzwerte

↳ Eigenschaften von Grenzwerten:

i) $\lim\limits_{x\to a} \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ für $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$!

↳ Gesucht ist der Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-x^2} = \infty \cdot 0 = ???$

⇒ Die Auswertung solcher Grenzwerte erfolgt durch Anwendung der Regel von de l'Hospital:

↳ <u>Regel von de l'Hospital:</u>

Sind f, g differenzierbar in $I = (a, b)$. Weiterhin gelte $g'(x) \neq 0 \;\forall x \in I$ und der Limes $\lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$ existiert. Dann gilt:

i) Falls $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$, ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

ii) Falls $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \pm\infty$, ist $g(x) \neq 0$ für $x \geq x_0$ $(a < x_0 < b)$, und es gilt $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.

⇒ Damit folgt für den obigen Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = \underline{\underline{0}}$$

I.4 Beispiele zu Ableitungen und Grenzwerten

↳ Ableitungsregeln elementarer Funktionen

i) Zeige, dass gilt $(e^x)' = e^x$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^{x_0}$$

$= 1$ (lässt sich beispielsweise mit "de l'Hospital" zeigen)

ii) Zeige, dass gilt $(\sin x)' = \cos x$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{h}$$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ (Additionstheorem)

$$= \sin(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}}_{=0} + \cos(x_0) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=1} = \cos(x_0)$$

(de l'Hospital)

iii) Zeige, dass gilt $(\ln x)' = \frac{1}{x}$:

$$f(x) = \ln x \quad , \quad f'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{e^{\ln x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

Ableitung d. Umkehrfkt.

iv) Übungsaufgabe: Ableitungsregeln für $\cos x$, x^n, $\arcsin x$ und die in i)+ii) angegebenen Grenzwerte zeigen!

v) Berechne folgende Ableitungen: $f(x) = 3x^3 \cos x$, $g(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $h(x) = e^{3\cos x}$

$$f'(x) = 9x^2\cos(x) - 3x^3\sin(x) = 3x^2(3\cos x - x\sin x)$$

$$g'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$h'(x) = -3\sin(x)\, e^{3\cos x}$$

II Integralrechnung

II.1 Stammfunktion und bestimmtes Integral

i) Stammfunktion

Sei $I \subset \mathbb{R}$. Eine Fkt. $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$, falls F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

$\Rightarrow$ Besitzt f eine Stammfunktion F, so sind alle Stammfunktionen von der Form $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

ii) Hauptsatz d. Differential- & Integralrechnung

a) Für jede Stammfunktion F von $f \in \mathcal{C}(I)$ und $a, b \in I$ gilt

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

b) Für $f \in \mathcal{C}^1(I)$ und $a, x \in I$ gilt

$$f(x) = f(a) + \int_a^x dt\, f'(t).$$

c) Nach i) erhält man für jede auf I stetige Funktion f eine Stammfunktion F durch das Integral

$$F(x) = \int_a^x dt\, f(t) \quad , \; a \in I.$$

iii) Eigenschaften d. bestimmten Integrals

Seien f, g auf $I = [a, b]$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $$\int_a^b dx\, (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int_a^b dx\, f(x) + \beta \int_a^b dx\, g(x) \qquad \text{(Linearität)}$$

b) Für $f(x) \leq g(x)$ gilt: $$\int_a^b dx\, f \leq \int_a^b dx\, g(x) \qquad \text{(Monotonie)}$$

Folgerungen aus ii.a):

c) $$\int_a^a dx\, f(x) = 0$$

d) $$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x) + \int_c^b dx\, f(x) \quad , \text{mit } a < c < b.$$

e) $$\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$$

↳ zwei weitere nützliche Eigenschaften sind die Folgenden:

f) sei f eine ungerade ($\hat{=}$ punktsymmetrische) Funktion, dann gilt

$$\int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 0 .$$

g) sei g eine gerade ($\hat{=}$ achsensymmetrische) Funktion, dann gilt

$$\int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 2\int_{0}^{a} dx\, f(x) .$$

II.2 Integrationsmethoden

II.2.1 Integration elementarer Funktionen

i) Polynom: $\int_a^b dx\, x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$ für alle $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$.

ii) Exponentialfunktion: $\int_a^b dx\, e^{nx} = \frac{1}{n} e^{nx}\Big|_a^b$ für alle $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$

iii) Sinus-Fkt: $\int_a^b dx\, \sin(nx) = -\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_a^b$ für alle $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$

iv) Kosinus-Funktion: $\int_a^b dx\, \cos(nx) = \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_a^b$ für alle $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$

v) Polynom ($n=-1$): $\int_a^b dx\, \frac{1}{x} = \ln(x)\Big|_a^b$ für $a \cdot b > 0$

↳ Die Integration von Funktionen wie $\ln(x)$ oder $\arcsin(x)$ werden wir später vorführen.

II.2.2 Partielle Integration

↳ Um Produkte von Funktionen zu integrieren, brauchen wir die sog. partielle Integration:

↳ partielle Integration:
Seien $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Dann gilt:

$$\int_a^b dx\, f'(x) g(x) = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, f(x) g'(x)$$

↳ bei der partiellen Integration ist zu beachten, dass es im Allg. <u>nicht</u> egal ist, welche Funktion man f' und welche man g setzt.

<u>Bsp:</u> Polynom $\cdot\ e^x$

$$\int_a^b dx\ \underset{g}{x^2}\,\underset{f'}{e^x} = e^x x^2\Big|_a^b - \int_a^b dx\ 2x\,e^x$$

$$= e^x x^2\Big|_a^b - \left[2x\,e^x\Big|_a^b - 2\int_a^b dx\ e^x\right]$$

$$= e^x x^2\Big|_a^b - 2x\,e^x\Big|_a^b + 2e^x\Big|_a^b$$

$$= e^x(x^2-2x+2)\Big|_a^b$$

$\Rightarrow$ Hätten wir das Polynom x^2 als f' gewählt, wäre dessen Grad mit jeder Integration gewachsen, während sich e^x beim Ableiten selbst reproduziert hätte.

↳ Im folgenden Beispiel empfiehlt sich ein anderes Vorgehen:

<u>Bsp:</u> Polynom $\cdot \ln(x)$

$$\int_a^b dx\ \underset{f'}{x}\cdot\underset{g}{\ln(x)} = \frac{1}{2}x^2\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\ \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b dx\ x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x)\Big|_a^b - \frac{1}{4}x^2\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{4}x^2(\ln(x)-2)\Big|_a^b$$

$\Rightarrow$ In diesem Fall war es sinnvoll den Logarithmus durch die Wahl $g=\ln x$ loszuwerden und dafür eben den erhöhten Grad des Polynoms in Kauf zu nehmen.

↳ Eine weitere Variante d. part. Integration ist es das Ausgangsintegral wiederherzustellen:

<u>Bsp:</u>
$$\int_a^b dx\ \sin^2 x = -\cos(x)\sin(x)\Big|_a^b + \int_a^b dx\ \underbrace{\cos^2(x)}_{=1-\sin^2(x)}$$

$$= -\cos(x)\sin(x)\Big|_a^b + \int_a^b dx - \int_a^b dx\ \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b dx\ \sin^2 x = -\cos(x)\sin(x)\Big|_a^b + x\Big|_a^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\ \sin^2 x = \left(-\frac{\cos(x)\sin(x)}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_a^b$$

↳ Die Stammfunktion des $\ln(x)$ findet man ebenfalls durch partielle Integration:

Bsp: $\ln(x)$

$$\int_a^b dx\; \underset{\substack{\uparrow\\ f'}}{1}\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ g}}{\ln(x)} = x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\; x\cdot\frac{1}{x}$$

$$= x\ln(x)\Big|_a^b - x\Big|_a^b$$

$$= x(\ln(x)-1)\Big|_a^b \qquad (\text{für } 0<a<b)$$

II.2.3 Integration durch Substitution

↳ Die Substitutionsmethode benötigt man, sobald man es mit "inneren" Funktionen zu tun hat.

↳ Integration durch Substitution

Sei $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ stetig differenzierbar und $f\in\mathcal{C}([a,b])$, so gilt

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} dx\; f(x) = \int_\alpha^\beta dt\; u'(t)\, f(u(t)) \;.$$

↳ Es gibt Integrale bei denen es sich anbietet die komplette innere Funktion zu substituieren:

Bsp: $$\int_a^b dx\,(5x-7)^{-3} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{5}\int_{5a-7}^{5b-7} dz\; z^{-3} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) z^{-2}\Big|_{5a-7}^{5b-7}$$

$z=5x-7,\ \frac{dz}{dx}=5 \iff \frac{dz}{5}=dx$

$$= -\frac{1}{10}(5x-7)^{-2}\Big|_a^b$$

↳ Bei anderen Funktionen führt eine solche Substitution nicht zum Ziel. Dann bietet es sich evtl. an die Integrationsvariable durch eine Funktion zu substituieren:

Bsp: $$\int_a^b dx\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{\uparrow}{=} \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} dz\,\cos z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} \overset{\substack{\cos^2 z = 1-\sin^2 z\\ \downarrow}}{=} \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} dz = z\Big|_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} = \arcsin(x)\Big|_a^b$$

$x=\sin z,\ \frac{dx}{dz}=\cos z \iff dx = dz\,\cos z$

↳ Um Integrale dieser Form „zu knacken", bietet es sich häufig an mit trigonometr. oder hyperbolischen Funktionen zu substituieren!

↳ zum Abschluss ein komplexeres Integral:

Bsp:

$$\int_a^b dx \arcsin(x) = \int_a^b dx\, 1 \cdot \arcsin(x)$$

$$= x \cdot \arcsin(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \cdot \arcsin(x)\Big|_a^b + \sqrt{1-x^2}\Big|_a^b$$

$$= \left\{ x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \right\}\Big|_a^b$$

II.2.4 Integration rationaler Funktionen

↳ Funktionen der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome sind, können i. d. R. durch Reduktion des Integranden oder Partialbruchzerlegung erst vereinfacht und dann integriert werden.

Bsp: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{5x^2 + 12x + 47}{(x-3)(x+5)^2}$

↳ Der Nenner der Fkt. besitzt die Nullstellen $x_1 = 3$, $\overbrace{x_2 = -5,\ x_3 = -5}^{\text{doppelte Nullstelle!}}$.
Damit ist die Partialbruchzerlegung von der Form:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x+5} + \frac{\gamma}{(x+5)^2}$$

Durch Multiplikation mit $q(x) = (x-3)(x+5)^2$ erhält man:

$$5x^2 + 12x + 47 = \alpha(x+5)^2 + \beta(x-3)(x+5) + \gamma(x-3)$$

$$= \alpha\left[x^2 + 10x + 25\right] + \beta\left[x^2 + 2x - 15\right] + \gamma(x-3)$$

$$= x^2(\alpha + \beta) + x(10\alpha + 2\beta + \gamma) + 25\alpha - 15\beta - 3\gamma$$

Koeffizientenvergleich der beiden Seiten d. Glg. liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 5 = \alpha + \beta \\ 12 = 10\alpha + 2\beta + \gamma \\ 47 = 25\alpha - 15\beta - 3\gamma \end{cases}$$

Dieses besitzt als Lösungsmenge: $\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = -14$, so dass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+5} - \frac{14}{(x+5)^2}$$

⇒ Dieser Ausdruck lässt sich nun leicht integrieren.

III Vektoralgebra

III.1 Vektorräume

Eine nicht leere Menge V heißt Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{R}$), wenn auf V eine skalare Multiplikation mit den Elementen aus $\mathbb{K}$ definiert ist und die folgenden Eigenschaften gelten:

- Addition:

A1) Für alle $\underline{a}, \underline{b} \in V$ ist auch $\underline{a}+\underline{b} \in V$ (Abgeschlossenheit bzgl. Addition)

A2) Für alle $\underline{a} \in V$ existiert ein $\underline{0} \in V$, so dass
$\underline{a}+\underline{0} = \underline{0}+\underline{a} = \underline{a}$ (neutrales Element bzgl. Addition)

A3) Für alle $\underline{a} \in V$ existiert ein $(-\underline{a}) \in V$, so dass
$\underline{a}+(-\underline{a}) = \underline{0}$ (Inverses bzgl. Addition)

A4) Für alle $\underline{a}, \underline{b} \in V$ gilt: $\underline{a}+\underline{b} = \underline{b}+\underline{a}$ (Kommutativität)

A5) Für alle $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V$ gilt: $\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c}) = (\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$ (Assoziativität)

- skalare Multiplikation

S1) Für alle $\underline{a} \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ist auch $\alpha \cdot \underline{a} \in V$ (Abgeschlossenheit bzgl. skalarer Multiplikation)

S2) Für alle $\underline{a} \in V$ existiert ein $1 \in \mathbb{K}$, so dass
$1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$ (neutrales Element bzgl. -"-)

S3) Für alle $\underline{a} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt: $\alpha(\beta \underline{a}) = (\alpha\beta)\underline{a}$ (Assoziativität)

S4) Für alle $\underline{a}, \underline{b} \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt: $(\underline{a}+\underline{b})\alpha = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b}$ (Distributivität)

S5) Für alle $\underline{a} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt: $\underline{a}(\alpha+\beta) = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a}$ (-"-)

↳ Die Elemente von V nennt man Vektoren, die Elemente von $\mathbb{K}$ nennt man Skalare.

⇒ Das Konzept des Vektorraumes, sowie des Skalarproduktes und der Norm, lässt sich auch für andere Objekte anwenden (soll an dieser Stelle aber nicht geschehen - wir betrachten ausschließlich n-dimensionale reellwertige Vektoren).

↳ Übungsaufgabe: Zeige, dass es sich beim $\mathbb{R}^3$ (Raum der 3-dim. Vektoren über dem Körper $\mathbb{R}$) um einen Vektorraum handelt.

$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} \neq \underline{c}}$ Da kommt ein Skalar raus!

III. 2 Skalarprodukt (auf $\mathbb{R}^n$)

Das Skalarprodukt besitzt die folgenden Eigenschaften:

a) $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$ für alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $= 0$ nur wenn $\underline{a} = \underline{0}$.

b) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ für alle $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) $\alpha(\underline{a} \cdot \underline{b}) = (\alpha \underline{a}) \underline{b}$ für alle $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\,\underline{b} + \underline{a}\,\underline{c}$ für alle $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$

Weiterhin gilt:

i) $\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos(\sphericalangle(\underline{a}, \underline{b}))$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle(\underline{a}, \underline{b}) = \arccos\left(\frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}\right)$

ii) $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$ $\Rightarrow$ Das Skalarprodukt induziert eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

iii) Aus $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ folgt $\underline{a} \perp \underline{b}$.

III. 3 Das Vektorprodukt (in $\mathbb{R}^3$)

Für die Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

definiert man das Vektorprodukt durch

erzeugt zu $\underline{a}$ und $\underline{b}$ orthogonalen Vektor $\underline{a} \times \underline{b}$!

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

↳ Eigenschaften d. Vektorprodukts

i) $\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind genau dann lin. unabh., wenn $\underline{a} \times \underline{b} \neq 0$.

ii) Sind $\underline{a}, \underline{b}$ lin. unabh., so sind die zu $\underline{a}, \underline{b}$ senkrechten Vektoren alle Vielfache von $\underline{a} \times \underline{b}$

iii) Für $\underline{a}, \underline{b} \neq 0$ gilt: $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\varphi = \sqrt{|\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (\underline{a}\,\underline{b})^2}$

iv) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

v) $(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) \times \underline{c} = \alpha\, \underline{a} \times \underline{c} + \beta\, \underline{b} \times \underline{c}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

III. 4 wichtige Begriffe

i) Linearkombination

Eine Summe der Form:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \underline{a}_j = \alpha_0 \underline{a}_0 + \ldots + \alpha_n \underline{a}_n$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\underline{a}_j \in \mathbb{R}^n$ für alle $j \in [0, n]$ nennt man Linearkombination.

ii) lineare Unabhängigkeit

Die $n+1$ Vektoren $\underline{a}_j$ $(j = 0, .., n)$ sind genau dann lin. unabhängig, falls

$$\alpha_0 \underline{a}_0 + \ldots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0} \quad \leftarrow \text{das ist ein lin. Gleichungssystem!}$$

nur durch $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$ gelöst wird.

iii) lineare Abhängigkeit

Die $n+1$ Vektoren $\underline{a}_j$ $(j = 0, .., n)$ sind genau dann lin. abhängig, falls

$$\alpha_0 \underline{a}_0 + \ldots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

neben $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$ mindestens eine weitere nicht triviale Lösung hat.

iv) Erzeugendensystem

Lässt sich jeder Vektor $\underline{b}$ eines Vektorraumes V als Linearkombination der Vektoren $\underline{a}_1, .., \underline{a}_n \in V$ gemäß

$$\underline{b} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{a}_n$$

darstellen, so heißt die Menge $\{ \underline{a}_j \mid j = 1, .., n \}$ ein Erzeugendensystem von V.

v) Basis

Ein Erzeugendensystem $\{ \underline{a}_j \mid j = 1, .., n \}$ lin. unabhängiger Vektoren von V wird als Basis d. Vektorraums V bezeichnet.

vi) Orthonormalbasis

Die Vektoren $\underline{a}_1, .., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, falls die Vektoren $\underline{a}_1, .., \underline{a}_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden und

$$\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{mit } i, j \in [1, .., n]$$

gilt.