Vektorrechnung und orthogonale Transformationen

(1) Motivation

In den vorherigen Vorlesungen haben wir gelernt, daß experimentelle Fakten zur Lichtausbreitung eine Änderung der Beschreibung von Raum und Zeit erfordern. Im wesentlichen führt dies zu den beiden Einsteinschen Postulaten der Speziellen Relativitätstheorie* (SRT):

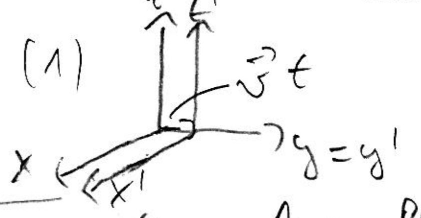
(1) Die Form der Naturgesetze ist in allen Inertialsystemen gleich (Forminvarianz).
Man kann durch keinerlei Messungen die absolute Geschwindigkeit des gewählten inertialen Bezugssystems feststellen
(Spezielles Relativitätsprinzip)

(2) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum der Wellenfront einer jeden elektromagnetischen Welle (insbesondere also auch des Lichts) ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit zwischen Lichtquelle und einem Beobachter in einem inertialen Bezugssystem.

Wir bemerken, daß (1), das spezielle Relativitätsprinzip, sowohl in der klassischen Mechanik (à la Galilei und Newton) als auch in der SRT (à la Einstein und Minkowski) gilt. Das Postulat (2) von der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit widerspricht hingegen eklatant der Galilei-Newtonschen Beschreibung von Raum und Zeit.

Die Transformation von einem Inertialsystem in ein anderes ist in der Galilei-Newtonschen Mechanik durch die Galilei-Transformation

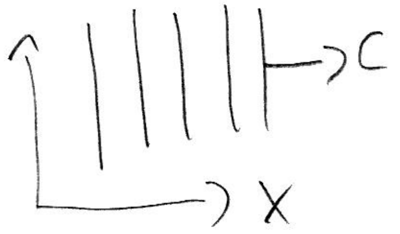
$$t' = t\ ;\quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}\,t \quad (1)$$



*A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. Phys. (Leipzig) 17, 891 (1905); http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004 gegeben.

Hat man nun eine ebene Lichtwelle und breitet sich die Wellenfront im System S mit der Geschwindigkeit c fort, d.h. gilt

$$x_{Front} - c\,t_{Front} = 0 \qquad (2)$$



Maßgemäß (1)

$$x'_{Front} \overset{(1)}{=} x_{Front} - v\,t_{Front} \qquad (3)$$

$$= (c-v)\,t_{Front} \overset{(1)}{=} (c-v)\,t'_{Front}$$

Der Beobachter im System S' müßte also die Ausbreitungsgeschwindigkeit $(c-v)$ für die Lichtwelle messen.
Das widerspricht aber allen Beobachtungstatsachen! S. Michelson-Morley-Experiment!
Es widerspricht eben <u>auch</u> Einsteins Postulat (2).
Es stellt sich also die Frage, durch welches Transformationsgesetz man in Übereinstimmung mit Postulat (2) von der Zeit und den Raumkoordinaten im System S zu den entsprechenden Größen in S' gelangt!
Die Antwort darauf wollen wir in den nächsten Vorlesungsstunden finden. Dazu benötigen wir zunächst einige Hilfsmittel aus der linearen Algebra.
Es ist nämlich klar, daß die Transformation <u>linear</u> in der Zeit und den Raumkomponenten ist.

Erinnern wir uns dazu an die Definition eines Inertialsystems: ③

Def. Ein Inertialsystem liegt vor, wenn jeder in diesem System ruhende Beobachter die Gültigkeit des Trägheitsgesetzes konstatiert:

Ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, bewegt sich geradlinig gleichförmig, d.h. mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$:

$$\vec{x} = \vec{v}\,t \qquad (4)$$

(bei geeigneter Wahl des Koordinatenursprungs und des Zeitanfangspunktes).

Sei nun das Transformationsgesetz von einem zu einem anderen Bezugssystem durch

$$\vec{x}\,' = \vec{A}_{\vec{u}}(t, \vec{x}) \qquad (\vec{u}: \text{Relativgeschw. zwischen S und S}') \qquad (5)$$

$$t' = B_{\vec{u}}(t, \vec{x})$$

gegeben, gilt nur dann

$$\vec{x}\,' = \vec{v}\,' t', \qquad (6)$$

wenn die obigen Funktionen $\vec{A}_{\vec{u}}$ und $B_{\vec{u}}$ lineare Funktionen von t und $\vec{x}$ sind.

Das trifft für die Galilei-Trafo (2) sicher zu.

Postulat 2 ist aber verletzt. Wir gelangen aber leicht zu einer Zusatzbedingung für das Transformationsgesetz (5):

Betrachten wir dazu eine Kugelwelle, die in einem Inertialsystem von einer ruhenden Punktlichtquelle ausgesandt wird. Die Wellenfront ist also auf eine Kugelschale lokalisiert.

$$\vec{x}^{\,2}_{\text{Front}} = (ct)^2 \qquad (7)$$

Das können wir auch schreiben als

$$\vec{x}_{Front}^{\,2} - c^2t^2 = 0 \quad (8)$$

Gemäß Einsteins Postulat muß das also auch für für einen Beobachter in dem glf. geradlinig zu S bewegten Bezugssystem S' gelten

$$\vec{x}'^{\,2}_{Front} - (ct')^2 = 0 \quad (9)$$

Minkowski kam auf die Idee, daß (8) und (9) auch anders zu formulieren sei. Dazu betrachtete er die Zeit und die Raumkoordinaten als Komponenten eines vierdimensionalen Vektorraumes, indem er sie in der Gestalt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (10)$$

schrieb. Dabei ist i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$.
Demnach ist also die Transformation (5) so zu wählen, daß

$$\underline{x}\cdot\underline{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = \vec{x}^{\,2} - c^2t^2 \quad (11)$$
$$\stackrel{!}{=} \underline{x}'\cdot\underline{x}' = \vec{x}'^{\,2} - c^2t'^2$$

gilt, und zwar für alle Vierervektoren $\underline{x}$.
Die lineare Transformation schreibt sich dann auch einfach

$$\underline{x}' = \underline{\Lambda}\,\underline{x} \quad (12)$$

mit einer geeigneten 4x4-Matrix Λ.
Wir müssen nun also die (4x4)-Matrizen Λ untersuchen, für die $\underline{x}'$ und $\underline{x}$ (11), also

$$\underline{x}\cdot\underline{x} = \underline{x}'\cdot\underline{x}' \quad (13)$$

erfüllen. Dazu rekapitulieren wir zunächst allgemein Lineare Abbildungen in Vektorräumen und dann die speziellen Abbildungen, die (13) erfüllen.

2. Lineare Abbildungen

Wir betrachten einen n-dimensionalen Vektorraum. Bzgl. einer beliebigen Basis können wir uns die Spaltenvektoren

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (14)$$

darunter vorstellen. Eine lineare Abbildung $\hat{A}$ in einen m-dim. VR liegt vor, wenn für irgendwelche Zahlen (reell oder komplex, je nachdem, was man gerade benötigt) λ_1 und λ_2 und beliebige Vektoren $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$

$$\underline{x}_1 \mapsto \underline{y}_1 = \hat{A}\,\underline{x}_1 \;;\; \underline{x}_2 \mapsto \underline{y}_2 = \hat{A}\,\underline{x}_2 \qquad (15)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 \mapsto \hat{A}(\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2) = \lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2$$
$$= \lambda_1 \hat{A}\,\underline{y}_1 + \lambda_2 \hat{A}\,\underline{y}_2 \qquad (16)$$

Es seien nun die Einheitsvektoren durch

$$\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle} \quad (i \in \{1, \dots, n\}) \qquad (17)$$

und $\underline{e}'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$-te Stelle $(j \in \{1, \dots, m\})$

für den Ur-VR und den Bild-VR der Abbildung definiert.

Dann gilt

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i \quad \text{und} \quad \underline{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \underline{e}_j. \qquad (18)$$

Wegen (16) gilt nun aber

$$\underline{y} = \hat{A}\,\underline{x} = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i\right) \qquad (19)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{A}\,\underline{e}_i)\, x_i$$

Wirkt man also die LA* schon, wenn wir wissen, wohin die Basisvektoren $\underline{e}_i$ abgebildet werden. Die Bildvektoren sind aber wieder eindeutig nach der Basis $(\underline{e}'_j)$ entwickelbar, d.h. es muß gelten

$$\hat{A}\,\underline{e}_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ji}\,\underline{e}'_j \qquad (20)$$

mit geeigneten Zahlen A_{ji}, wobei $j \in \{1,\dots,m\}$ und $i \in \{1,\dots,n\}$

Aus (19) folgt dann

$$\underline{y} = \hat{A}\,\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{A}\,\underline{e}_i)\,x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} A_{ji}\,\underline{e}'_j \right) x_i \qquad (21)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji}\,x_i \right) \underline{e}'_j$$

Nun ist aber die Entwicklung von $\underline{y}$ nach den Basisvektoren $\underline{e}'_j$ eindeutig:

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j\,\underline{e}'_j \overset{(21)}{\Longrightarrow} y_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\,x_i \qquad (22)$$

Hat man also Basen $(\underline{e}_i)_{i=1\dots n}$ und $(\underline{e}'_j)_{j=1\dots m}$ für Ur- und Bild-VR der LA $\hat{A}$ gegeben, so bestimmen bereits die $m \cdot n$ Zahlen A_{ji} die LA eindeutig via (21). Es ist weiter bequem, diese Zahlen in einem rechteckigen Schema, das man Matrix nennt, darzustellen:

$$(A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

---

*LA = Lineare Abb.

(22) Kann man dann als <u>Matrix-Vektorprodukt</u> schreiben

$$\underline{y} = \hat{A}\,\underline{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \cdots + A_{1n} x_n \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \cdots + A_{2n} x_n \\ \vdots \\ A_{m1} x_1 + A_{m2} x_2 + \cdots + A_{mn} x_n \end{pmatrix} \qquad (24)$$

Man hat also die Abbildung durch die Vektor Produkte "Zeile x Spalte" gegeben.

Man definiert nun zu zwei Linearen Abb. $\hat{A}, \hat{B} : V^{(n)} \to V^{(m)}$ die <u>Summe</u> über

$$\hat{C}\underline{x} = (\hat{A} + \hat{B})\,\underline{x} \stackrel{\text{Def}}{=} \hat{A}\,\underline{x} + \hat{B}\,\underline{x} \text{ für alle } \underline{x} \in V^{(n)} \quad (25)$$

Diese Abb. ist wieder linear (warum?) und für die entsprechenden Matrizen bzgl. Basen $\underline{e}_i$ und $\underline{e}_j'$ gilt

$$C_{ji} = A_{ji} + B_{ji} \qquad (26)$$

Die Multiplikation mit einer Zahl ist durch

$$\hat{B} = \lambda \hat{A} \Leftrightarrow \hat{B}\,\underline{x} = \lambda(\hat{A}\,\underline{x}) \text{ für alle } \underline{x} \in V^{(n)} \quad (27)$$

Offenbar ist auch $\lambda \hat{A} = \hat{B}$ wieder eine LA von $V^{(n)} \to V^{(m)}$

Schließlich $\hat{A} : V^{(n)} \to V^{(m)}$ und $\hat{B} : V^{(m)} \to V^{(l)}$ seien LAn. Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$\hat{A}\cdot\hat{B} : (\hat{A}\cdot\hat{B})\,\underline{x} \stackrel{\text{Def}}{=} \hat{A}(\hat{B}\,\underline{x}) \text{ für alle } \underline{x} \in V^{(n)} \quad (28)$$

wieder eine LA: $V^{(n)} \to V^{(l)}$

Wir müssen nur die Regeln für die Matrix-Vektormultiplikation anwenden, um aus den entsprechenden Matrizen $\hat{A}, \hat{B}$ die Matrix $\hat{C}$ zu gewinnen:

$$\underline{y} = \hat{A}\,\underline{x} \iff y_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\, x_i \quad (j \in \{1,\dots,m\})$$

$$\underline{z} = \hat{B}\,\underline{y} \iff z_k = \sum_{j=1}^{m} B_{kj}\, y_j \qquad (29)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} B_{kj} \sum_{i=1}^{n} A_{ji}\, x_i \quad (k \in \{1,\dots,l\})$$

Nun ist aber

$$\underline{z} = \hat{B}\,(\hat{A}\,\underline{x}) = (\hat{B}\cdot\hat{A})\,\underline{x} \overset{\text{Def}}{=} \hat{C}\,\underline{x},$$

und in Matrix-Schreibweise heißt das

$$z_k = \sum_i C_{ki}\, x_i \qquad (30)$$

Der Vergleich mit (29) zeigt, daß eindeutig

$$C_{ki} = \sum_{j=1}^{m} B_{kj}\, A_{ji} \quad (k \in \{1,\dots,l\},\ i \in \{1,\dots,n\}) \qquad (31)$$

sein muß.

Das kann man wieder als Vorschrift zur Matrizenmultiplikation lesen, und auch hier gilt wieder die Regel "Zeile × Spalte":

$$\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{l1} & \cdots & C_{ln} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & \cdots & B_{lm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}A_{11}+B_{12}A_{21}+\dots+B_{1m}A_{m1} & \dots & B_{11}A_{1n}+\dots+B_{1m}A_{mn} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l1}A_{11}+\dots+B_{lm}A_{m1} & \dots & B_{l1}A_{1n}+\dots+B_{lm}A_{mn} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Bemerkung 1:

Aus der Definition ist klar, daß für ein Matrix-Produkt $\hat{C} = \hat{B}\cdot\hat{A}$ notwendig A vom Typ $(m \times n)$ ≙ (m Zeilen und n Spalten) und B vom Typ $(l \times m)$ sein muß. Anders kann man ja auch die Vorschrift "Zeile x Spalte" garnicht sinnvoll ausführen!

Bemerkung 2:

Im folgenden benötigen wir insbesondere LAen von $V^{(n)}$ in $V^{(n)}$ selbst. Dann sind die Matrizen vom Typ. $(n \times n)$. Für diese Matrizen ist es sinnvoll, Potenzen zu definieren, denn

$$\hat{A}^k = \underbrace{\hat{A}\cdot\hat{A}\cdot\hat{A}\cdots\hat{A}}_{k\text{-mal}} \quad (33)$$

ergibt einen Sinn. Da beim Multiplizieren nacheinander immer wieder $(n \times n)$-Matrizen entstehen.

Man kann mit Matrizen vom Typ $(n \times n)$ fast so rechnen wie mit Zahlen. Insbesondere gelten das Assoziativgesetz

$$\hat{A}(\hat{B}\cdot\hat{C}) = (\hat{A}\cdot\hat{B})\cdot\hat{C}, \quad (34)$$

das Distributivgesetz

$$\hat{A}\cdot(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\cdot\hat{B} + \hat{A}\cdot\hat{C} \quad (35)$$

aber nicht das Kommutativgesetz:

$$\hat{A}\cdot\hat{B} \neq \hat{B}\cdot\hat{A}$$

↑ !! ungleich

Weiter bezeichnen wir mit

$$\hat{\underline{1}} : V^{(n)} \to V^{(n)} \tag{36}$$

die identische Abbildung des $V^{(n)}$ in sich

$$\underline{x} \longmapsto \hat{\underline{1}}\,\underline{x} \overset{\text{Def.}}{=} \underline{x} \tag{37}$$

Daraus folgt

$$\underline{1}_{ji} = \delta_{ji} \overset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i \\ 0 & \text{falls } j \neq i \end{cases} \tag{38}$$

Kronecker-Symbol

Manchmal existiert zu einer $(n \times n)$-Matrix $\hat{A}$ auch die "Umkehrmatrix" $\hat{A}^{-1}$, die durch die Eigenschaft

$$\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A} \overset{\text{Def}}{=} \hat{\underline{1}} \tag{39}$$

definiert ist. Wie gesagt, muß nicht zu jedem $\hat{A}$ die Umkehrmatrix $\hat{A}^{-1}$ existieren.
Man kann zeigen, daß dann auch

$$\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = \hat{\underline{1}} \tag{40}$$

gilt. Es ist also

$$\left(\hat{A}^{-1}\right)^{-1} = \hat{A} \tag{41}$$

Sind $\hat{A}$ und $\hat{B}$ invertierbare Matrizen, so gilt

$$\left(\hat{B} \cdot \hat{A}\right)^{-1} = \hat{A}^{-1} \cdot \hat{B}^{-1} \tag{42}$$

Reihenfolge beachten!

Beweis:

$$\left(\hat{A}^{-1} \cdot \hat{B}^{-1}\right) \cdot \left(\hat{B} \cdot \hat{A}\right) = \hat{A}^{-1} \cdot \left(\hat{B}^{-1} \cdot \hat{B}\right) \hat{A}$$
$$= \hat{A}^{-1}\,\hat{\underline{1}}\,\hat{A} = \hat{A}^{-1}\,\hat{A} = \hat{\underline{1}}$$

Nun ist $\hat{A}^{-1}$ eindeutig durch A bestimmt, falls A überhaupt invertierbar ist.

$$\Rightarrow \quad (\hat{B}\cdot\hat{A})^{-1} = \hat{A}^{-1}\cdot\hat{B}^{-1} \qquad \text{QED.}$$

3. Orthogonale Abbildungen

Wir betrachten nun den $V^{(n)}$ mit Skalarprodukt. Für eine Orthonormal- (oder kartesische) Basis gilt

$$\underline{e}_j\cdot\underline{e}_k = \delta_{jk} \quad \text{für alle } j,k \in \{1,\dots,n\} \qquad (43)$$

Da ein Skalarprodukt linear in beiden Argumenten ist, folgt dann

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \underline{e}_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \underline{e}_k\right)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} x_j y_k \,\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k \qquad (44)$$

$$\overset{(43)}{=} \sum_{j,k=1}^{n} x_j y_k \,\delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

Außerdem findet man Vektorkomponenten bzgl. einer solchen kartesischen Basis einfach durch skalare Multiplikation mit dem entsprechenden Basisvektor:

$$\underline{e}_j\cdot\underline{x} = \underline{e}_j\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \underline{e}_j\cdot\underline{e}_i \qquad (45)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\,\delta_{ji} = x_j$$

Eine LA $\hat{R}: V^{(n)} \to V^{(n)}$ heißt nun orthogonal, falls

$$(\hat{R}\underline{x})\cdot(\hat{R}\underline{y}) \overset{\text{Def}}{=} \underline{x}\cdot\underline{y} \quad \text{für alle } \underline{x},\underline{y}\in V^{(n)} \qquad (46)$$

Gemäß (20) ist die darstellende Matrix der LA durch

$$\underline{e}_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}\, \underline{e}'_i \qquad (47a)$$

gegeben. Da $\hat{R}$ orthogonale Abbildung sein soll, gilt

$$\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_j = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}, \qquad (48)$$

d.h. die $\underline{e}'_i$ bilden wieder ein Orthonormalsystem und damit eine kartesische Basis. Es gilt also

$$\underline{e}'_k \cdot \underline{e}_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}\, \underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}\, \delta_{ik} = R_{kj} \qquad (47b)$$

Damit folgt für den Vektor $\underline{x}$:

$$x'_i = \underline{e}'_i \cdot \underline{x} = \underline{e}'_i \sum_{j=1}^{n} x_j\, \underline{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j \overset{(47b)}{=} \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\, x_j \qquad (49)$$

Es gilt aber auch

$$x_j = \underline{e}_j \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j \overset{(47b)}{=} \sum_{i=1}^{n} x'_i\, R_{ij} \qquad (50)$$

Will man das mit einer Matrix $\hat{U} = \hat{R}^{-1}$ ausdrücken, d.h.

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} U_{ji}\, x'_i, \qquad (51)$$

folgt, daß

$$U_{ji} = R_{ij} \overset{\text{Def}}{\iff} \hat{U} = \hat{R}^{-1} = \hat{R} \qquad (52)$$

Man muß bei orthogonalen Transformationen, also nur die Spalten von $\hat{R}$ als Zeilen von $\hat{U}$ schreiben. Anders gesagt ist $\hat{U}$ die Matrix, die man durch "Spiegelung" von $\hat{R}$ an der Diagonalen erhält. Man kann (52) auch als Definition für eine orthogonale Abbildung betrachten.

Nun gilt also

$$x_j \overset{(50)}{=} \sum_{i=1}^{n} U_{ji} x_i' \overset{(49)}{=} \sum_{i=1}^{n} U_{ji} \sum_{k=1}^{n} R_{ik} x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} U_{ji} R_{ik} \right) x_k$$

Da dies für alle Vektoren $\underline{x}$ gilt, muß also

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ji} R_{ik} = \delta_{jk} \overset{(52)}{=} \sum_{i=1}^{n} R_{ij} R_{ik} \qquad (53)$$

$\Rightarrow$ Die Spaltenvektoren von $\hat{R}$ bilden eine orthogonale Basis (Spaltenorthogonalität)

Ebenso folgt

$$x_i' \overset{(49)}{=} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} x_j \overset{(50)}{=} \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \sum_{k=1}^{n} U_{jk} x_k'$$

$$\overset{(52)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} R_{ij} R_{kj} \right) x_k'$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} R_{ij} R_{kj} = \delta_{ik} \qquad (54)$$

$\Rightarrow$ Die Zeilenvektoren von $\hat{R}$ bilden ebenfalls eine orthogonale Matrix (Zeilenorthogonalität).

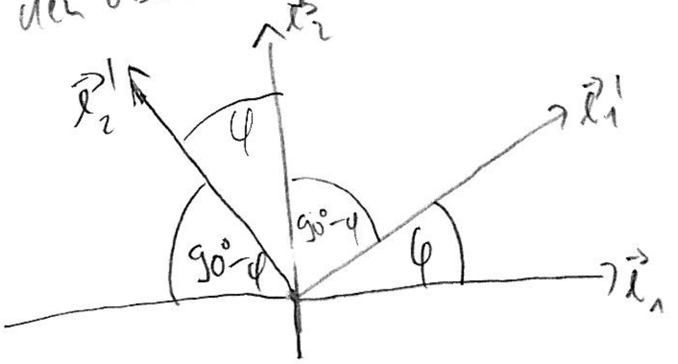
Außerdem besagt (53), daß

$$\hat{R} \text{ orthogonal} \Leftrightarrow \hat{R}^{-1} = \hat{R}^{T} \qquad (55)$$

Die orthogonalen Transformationen sind also stets invertierbar, und die Inverse der Darstellenden Matrix ist ihre Transponierten.

Beispiel: Drehung im $\mathbb{R}^2$

Offenbar sind Drehungen des Koordinatensystems orthogonale Transformationen, denn sie lassen Längen und Winkel ungeändert. Es ist mit den oben hergeleiteten Formeln sehr einfach, die Matrix herzuleiten:



Es ist gemäß (47)

$$R_{ij} = \vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_j$$

Es gilt also

$$R_{11} = \vec{e}_1\,' \cdot \vec{e}_1 = \cos\varphi$$
$$R_{21} = \vec{e}_2\,' \cdot \vec{e}_1 = -\cos(90° - \varphi) = -\sin\varphi$$
$$R_{12} = \vec{e}_1\,' \cdot \vec{e}_2 = \cos(90° - \varphi) = +\sin\varphi$$
$$R_{22} = \vec{e}_2\,' \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi$$

Die Matrix ist also

$$\hat{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (56)$$

Wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ sieht man sofort, daß die Zeilen- und Spaltenorthogonalität erfüllt ist. Es gilt also

$$\hat{R}^{-1}(\varphi) = \hat{R}^T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \hat{R}(-\varphi) \qquad (57)$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (58)$$

Allgemeine orthogonale Transformation im $\mathbb{R}^2$

Eine allgemeine LA im $\mathbb{R}^2$ ist durch eine Matrix

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \qquad (58.2)$$

gegeben. Die Orthogonalität verlangt

$$\hat{R} \cdot \hat{R}^T = \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{11}^2 + R_{12}^2 & R_{11} R_{21} + R_{12} R_{22} \\ R_{21} R_{11} + R_{22} R_{12} & R_{21}^2 + R_{22}^2 \end{pmatrix} \qquad (58.3)$$

D.h. die 4 Zahlen $R_{ji} \in \mathbb{R}$ müssen die drei Bedingungen

$$R_{11}^2 + R_{12}^2 = 1 \qquad (58.4)$$

$$R_{11} R_{21} + R_{12} R_{22} = 0 \qquad (58.5)$$

$$R_{21}^2 + R_{22}^2 = 1 \qquad (58.6)$$

erfüllen. Dies bedeutet, daß die R_{ji} durch einen einzelnen Parameter beschrieben sein sollten. Bei den Drehungen war das der Drehwinkel.

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

(a) $R_{12} = 0 \overset{(58.4)}{\Rightarrow} R_{11}^2 = 1 \Rightarrow \boxed{R_{11} = \pm 1 \quad (58.7)}$

$\overset{(58.5)}{\Rightarrow} \boxed{R_{21} = 0 \quad (58.8)} \overset{(58.6)}{\Rightarrow} \boxed{R_{22} = \pm 1 \quad (58.9)}$

In diesen Falle sind also folgende Fälle möglich. (14.3)

(α) $\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (identische Abbildung)

(β) $\hat{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e}_1' = -\underline{e}_1 ; \underline{e}_2' = \underline{e}_2$ (Spiegelung an y-Achse)

(γ) $\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e}_1' = \underline{e}_1 ; \underline{e}_2' = -\underline{e}_2$ (Spiegelung an x-Achse)

(δ) $\hat{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e}_1' = -\underline{e}_1 ; \underline{e}_2' = -\underline{e}_2$ (Spiegelung am Ursprung)

Das ist aber auch eine Drehung um 180° bzw π

$\cos \pi = -1 , \sin \pi = 0$

$\Rightarrow \hat{R}\varphi = \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $R_{12} \neq 0$

$$R_{22} \overset{(58.5)}{=} -\frac{R_{11} R_{21}}{R_{12}} \qquad (58.10)$$

$$\overset{(58.6)}{\Rightarrow} \quad R_{21}^2 + \frac{R_{11}^2 R_{21}^2}{R_{12}^2} = 1$$

$$\Rightarrow R_{21}^2 \left(1 + \frac{R_{11}^2}{R_{12}^2}\right) = 1$$

$$R_{21}^2 = \frac{1}{1 + \frac{R_{11}^2}{R_{12}^2}} \qquad (58.11)$$

$\uparrow_{\geq 1} \Rightarrow$ nie 0 !

Weiter gilt

$$1 + \frac{R_{11}^2}{R_{12}^2} = \frac{R_{12}^2 + R_{11}^2}{R_{12}^2} \overset{(58.4)}{=} \frac{1}{R_{12}^2}$$

$$\overset{(58.11)}{\Longrightarrow} \quad R_{21}^2 = R_{12}^2 \Rightarrow \boxed{R_{21} = \pm R_{12} \quad (58.12)}$$

Weitere <u>Fallunterscheidung</u>

(b. α) $R_{21} = -R_{12}$

$$\overset{(58.10)}{\Longrightarrow} \quad R_{22} = R_{11} \quad (58.13)$$

Damit folgt bereits die Form

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ -R_{12} & R_{22} \end{pmatrix}$$

Aus (58.4) folgt, daß die allgemeinste Lösung durch

$$R_{11} = \cos\varphi \quad ; \quad R_{12} = \sin\varphi$$

gegeben ist $\Rightarrow \hat{R} = \hat{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad ; \quad \varphi \in [0, 2\pi[$

$\Rightarrow$ Drehungen

Setzt man $R_{11} = \sin\vartheta$ folgt $R_{12} = \cos\vartheta$. Dafür kann man aber auch

$$R_{11} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \quad ; \quad R_{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

schreiben, so daß man wieder bei Drehung um Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ ist (modulo 2π).

(b. β)

$$R_{21} = +R_{12} \overset{(58.10)}{\Longrightarrow} R_{22} = -R_{11}$$

$$\Rightarrow \hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & -R_{11} \end{pmatrix}$$

Dann kann man wieder

$$R_{11} = \cos\varphi, \quad R_{12} = \sin\varphi$$

setzen, um (58.4) zu erfüllen

$$\Rightarrow \hat{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{R}_\varphi \quad (58.14)$$

D.h. wir haben eine Drehung um φ, gefolgt von einer Spiegelung an der x-Achse.

> Orthogonale Transformationen im $\mathbb{R}^2$ sind entweder Drehungen oder Drehungen gefolgt von einer Spiegelung an einer Achse.

Wir stellen weiter fest:

> Hintereinanderausführungen zweier Drehungen ergeben wieder eine Drehung.

Das ist zwar anschaulich klar. Wir können es uns aber auch explizit nachrechnen:

$$\hat{R}_{\varphi_2} \cdot \hat{R}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_2 \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 & -\sin\varphi_2 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

Additionstheoreme!

$$\overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}$$

(58.15)

$$= \hat{R}_{\varphi_1+\varphi_2}$$

Wir stellen fest, daß Drehungen immer kommutieren!

$$\hat{R}_{\varphi_1} \hat{R}_{\varphi_2} = \hat{R}_{\varphi_2+\varphi_1} = \hat{R}_{\varphi_1+\varphi_2} = \hat{R}_{\varphi_2} \hat{R}_{\varphi_1} \quad (58.16)$$

Offenbar kann man durch reine Drehungen nie die Spiegelung an einer Achse erreichen, denn wenn wir den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{R}_\varphi$$

(geht nicht!)

machen, folgt der Widerspruch $\cos\varphi = -\cos\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. Es ist aber $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und damit $\hat{R}_\varphi \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ nur die Drehungen können stetig aus der identischen Abbildung $\hat{1} = \hat{R}_{\varphi=0}$ hervorgehen, wenn man nur orthogonale Trafos zuläßt!

Daß in n-dim. ~~Vllu~~ auch

$$\sum_{j=1}^{n} x_j'^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (59)$$

gilt, folgt ebenfalls aus der Orthogonalität, denn es ist

$$\sum_{j=1}^{n} x_j'^2 \overset{(54)}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} R_{jk} x_k R_{jl} x_l$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} R_{jk} R_{jl} \right) x_k x_l$$

$$\overset{(53)}{=} \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{kl} x_k x_l = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 .$$

4. Die Lorentztransformation

4.1 "Lorentz-Boost" in 1-Richtung

Jetzt betrachten wir die Transformation des Raum-Zeit-Vektors

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ ct \end{pmatrix} \qquad (60)$$

Die den "Minkowski-Abstand"

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = \vec{x}^2 - c^2 t^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \qquad (61)$$

invariant lassen.

Als einfachsten nichttrivialen Fall betrachten wir eine Transformation von den RZ-Koordinaten (60) im System S, charakterisiert durch die Vektoren $e_1, \ldots, e_4$ in ein neues Bezugssystem S', charakterisiert durch $e_1', e_2', \ldots, e_4'$, das sich gegen S mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_1$ bewegt.

Die entsprechende Transformation muß orthogonal sein, damit das Minkowskiprodukt (61) invariant ist:

$$\underline{x}\cdot\underline{x} = \underline{x}'\cdot\underline{x}' \qquad (62)$$

Außerdem sollten die Koordinaten $\perp \vec{e}_1$ ungeändert bleiben. Es muß also

$$x_2' = x_2\ ;\ x_3' = x_3 \qquad (63)$$

gelten, und die Matrix $\hat{B}_1$, die die orthogonale Trafo beschreibt, muß gemäß der Überlegung zur Drehung von der Form

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (64)$$

sein. (63) ist erfüllt, und $\hat{B}_1$ ist sowohl zeilen- als auch spaltenorthogonal.

Jetzt darf aber $\varphi \in \mathbb{C}$ sein, weil ja x_4 rein imaginär ist. Allerdings müssen auch in S' die Raumkomponenten $\vec{X}' \in \mathbb{R}^3$ (reell!) und x_4' rein imaginär sein, damit die Koordinaten von $\underline{x}'$ wohldefinierte Bedeutung als Raum-Zeit-Komponenten besitzen und damit (62) die Bedeutung besitzt, daß für Lichtwellen die Frontgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den Wert c besitzt, unabhängig von der Relativbewegung zwischen Lichtquelle und Beobachter.

Im folgenden lassen wir der Kürze halber die durch (63) trivialen Koordinaten x_2, x_3 bzw. x_2', x_3' weg. Dann haben wir

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ict \end{pmatrix} \qquad (65)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\varphi + ict \sin\varphi \\ -x_1 \sin\varphi + ict \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (66)$$

Damit $x_1' \in \mathbb{R}$ muß offenbar

$$\cos\varphi \in \mathbb{R} \text{ und } \sin\varphi \in i\mathbb{R} \quad (67a)$$

sein. Dann ist automatisch auch

$$x_4' = ict' \in i\mathbb{R} \quad (67b)$$

wie es sein muß. Wir müssen nun nur noch den "erlaubten" Definitionsbereich von φ finden.

Dazu erinnern wir uns an die Definition der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion (s. Vorlesungen zum Harmonischen Oszillator und mein Manuskript!).

$$\cos\varphi = \frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2} \quad (68)$$

$$\sin\varphi = \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i}$$

Daraus folgt die Eulersche Formel

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad (69)$$

Wegen (67a) und (67b) ist also

$$\exp(i\varphi) \in \mathbb{R} \quad (70)$$

Daraus folgt, daß $i\varphi \in \mathbb{R}$ und also

$$\varphi = i\eta \quad \text{mit } \eta \in \mathbb{R} \quad (71)$$

ist.

Nun folgt

$$\cos\varphi = \cos(i\eta) = \frac{\exp(-\eta) + \exp(+\eta)}{2} = \cosh\eta$$

$$\sin\varphi = \sin(i\eta) = \frac{\exp(-\eta) - \exp(+\eta)}{2i} \qquad (72)$$

$$= i\,\frac{\exp(+\eta) - \exp(-\eta)}{2} = i\sinh\eta$$

Aus (66) wird

$$x_1' = x_1\cosh\eta - ct\sinh\eta \qquad (73a)$$

$$x_4' = i\,ct' = -i\,x_1\sinh\eta + i\,ct\cosh\eta \qquad (73b)$$

Die neue Zeitkoordinate ist also

$$t' = \frac{x_4'}{ic} = -\frac{x_1}{c}\sinh\eta + t\cosh\eta \qquad (74)$$

Jetzt müssen wir nur noch die physikalische Bedeutung des reellen Parameters herausfinden. Offenbar muß η etwas mit der Geschwindigkeit v des Systems S' gegenüber dem Bezugssystem S zu tun haben.

Der Koordinatenursprung in S', also $x_1' = 0$ wird im BZ-Koordinaten bzgl. S offenbar durch

$$x_1' \stackrel{!}{=} 0 = x_1\cosh\eta - ct\sinh\eta$$

bzw: $$x_1 = ct\tanh\eta \stackrel{!}{=} vt$$

beschrieben. Es ist also

$$\boxed{v = c\tanh\eta} \qquad (75)$$

Nun ist

$$\tanh \eta = \frac{\exp \eta - \exp(-\eta)}{\exp(\eta) + \exp(-\eta)}$$

stets

$$|\tanh \eta| < 1 \text{ (für alle } \eta). \quad (76)$$

Also muß

$$|v| < c$$

sein. Das ist die erste wichtige Folgerung aus Einsteins Postulaten: Die Relativgeschwindigkeit zwischen S und S' (also zwei Inertialsystemen) muß stets geringer als die LG im Vakuum sein. Wir können nun auch leicht $\cosh \eta$ und $\sinh \eta$ durch $\tanh \eta = \frac{v}{c}$ ausdrücken. Es gilt

$$\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1 \quad (77)$$

oder

$$\cosh^2 \eta = 1 + \sinh^2 \eta \overset{(\cosh \eta > 0)}{\Rightarrow} \cosh \eta = \sqrt{1 + \sinh^2 \eta} \quad (78)$$

$$\tanh \eta = \frac{v}{c} = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} = \frac{\sinh \eta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \eta}}$$

Quadrieren liefert

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\sinh^2 \eta}{1 + \sinh^2 \eta} \Rightarrow (1 + \sinh^2 \eta) \frac{v^2}{c^2} = \sinh^2 \eta$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sinh^2 \eta$$

$$\Rightarrow \sinh^2 \eta = \frac{v^2}{c^2} \cdot \gamma^2 \text{ mit } \gamma = + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (79)$$

Da $\sinh \eta$ und $\tanh \eta = \frac{v}{c}$ das gleiche Vorzeichen haben, ist also

$$\sinh\eta = \frac{v}{c}\gamma = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (80)$$

und

$$\cosh^2\eta \overset{(78)}{=} 1+\sinh^2\eta = 1+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2$$

$$= \frac{1-v^2/c^2-v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = \frac{1}{1-v^2c^2} = \gamma^2$$

$$\Rightarrow \cosh\eta = \gamma \quad (81)$$

Damit haben wir die Lorentz-Transformation gefunden

$$\boxed{x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \quad (82a)$$

$$\boxed{t' = \frac{t - x_1\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \quad (82b)$$

In den Minkowskikoordinaten ist also

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + i\frac{v}{c}(ict) \\ -i\frac{v}{c}x_1 + ict \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma \\ -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c};\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad (83)$$