Der harmonische Oszillator

Hendrik van Hees

7. Dezember 2012

1 Der ungedämpfte harmonische Oszillator

Bei vielen typischen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik tritt der Fall auf, daß ein Massepunkt sich in einem **Kräftepotential** bewegt. Wir betrachten eindimensionale Bewegungen entlang der x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Dann ist die Kraft durch die Ableitung des Potentials gegeben:

$$F(x) = -V'(x). \tag{1}$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für solch einen Massenpunkt lautet demnach

$$m\ddot{x} = -V'(x). \tag{2}$$

Um die Bahn der Bewegung als Funktion der Zeit zu erhalten, müssen wir also eine **Differentialgleichung** zweiter Ordnung lösen, d.h. wir suchen die Ortskoordinate x als Funktion von t. Dabei ergibt sich eine ganze Schar von Lösungen. Um die Bewegung des Massenpunktes eindeutig festzulegen, müssen wir noch **Anfangsbedingungen** fordern, d.h. wir müssen zu einem vorgegebenen Zeitpunkt, den wir bequemlichkeitshalber bei $t = 0$ wählen, **Ort und Geschwindigkeit** des Massenpunktes vorgeben. Wir verlangen also von der Lösung der Bewegungsgleichung (2), daß die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{3}$$

erfüllt sind. Wir wissen bereits, daß für die Bewegungsgleichung (2) der **Satz von der Energieerhaltung** gilt, denn multiplizieren wir (2) mit $\dot{x}$ und bringen alle Ausdrücke auf die linke Seite der Gleichung, erhalten wir

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}V'(x) = 0. \tag{4}$$

Es ist aber leicht zu sehen, daß dies eine totale Zeitableitung ist, denn es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}^2) = 2\dot{x}\ddot{x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) = \dot{x}V'(x). \tag{5}$$

Wir können also (4) in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)\right] = 0 \tag{6}$$

schreiben. Das bedeutet aber, daß der Ausdruck in den eckigen Klammern, die **Gesamtenergie** des Massenpunktes, für alle Lösungen der Bewegungsgleichung (2) zeitlich konstant ist:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0) = \text{const.} \tag{7}$$

Dabei haben wir die Anfangsbedingung (4) eingesetzt, um den Wert der Gesamtenergie zu bestimmen. Nun ist die **kinetische Energie**

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \geq 0. \tag{8}$$

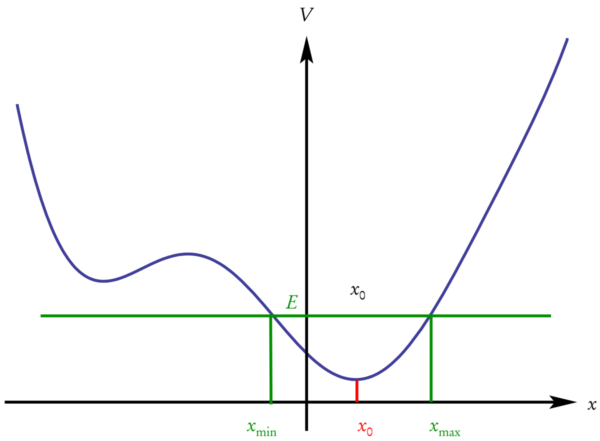

Abbildung 1: *Bewegung in einer Potentialmulde.*

In Abb. 1 haben wir ein beliebiges Potential als Funktion der Ortskoordinate aufgezeichnet und den konstanten Wert der Gesamtenergie als horizontale Linie eingetragen. Da $E_{\text{kin}} \geq 0$ muß für alle Zeiten

$$E \geq V(x) \tag{9}$$

gelten. D.h. für eine durch die Anfangsbedingungen gegebene Gesamtenergie E kann sich das Teilchen nur dort aufhalten, wo das Potential unterhalb der Linie für die Gesamtenergie verläuft.

Nun kommt es oft vor, daß das Potential bei einer Stelle x_0 ein **lokales Minimum** aufweist. In diesem Minimum ist $V'(x_0) = 0$. Ist dann die Energie E so gewählt, daß die Linie $E = \text{const}$ das Potential an zwei Stellen x_{min} und x_{max} schneidet, muß das Teilchen in dem Bereich $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$ bleiben, denn aufgrund der Differentialgleichung muß die Ortskoordinate als Funktion der Zeit mindestens zweimal differenzierbar sein und ist daher stetig. Der Massenpunkt kann also nicht über eine Potentialbarriere einfach in einen anderen Bereich springen, wo wieder $E > V(x)$ gilt. Das Teilchen ist also in dem besagten Intervall gefangen. Ist dieser Bereich nicht zu groß, reicht es weiter aus, das Potential um x_0 **in eine Potenzreihe** zu entwickeln und nur die Terme bis zur zweiten Ordnung mitzunehmen. Angenommen, das Potential ist mindestens dreimal stetig differenzierbar, können wir schreiben (**Taylor-Entwicklung**)

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}[(x - x_0)^3]. \tag{10}$$

Dabei bedeutet das **Landau-Symbol** $\mathcal{O}[(x - x_0)^3]$, daß der nächste Term in der Potenzreihenentwicklung von der Größenordnung $(x - x_0)^3$ ist. Es ist klar, daß der Term linear zu $(x - x_0)$ verschwindet, weil voraussetzungsgemäß V an der Stelle x_0 ein Minimum besitzt. Außerdem nehmen wir an, daß $V''(x_0) > 0$ ist.

Für die Kraft folgt dann

$$F(x) = -V'(x) = -V''(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}[(x - x_0)^2]. \tag{11}$$

Für nicht zu große Abweichungen der Lage des Massenpunktes von x_0 können wir also näherungsweise die vereinfachte Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -D(x - x_0) \quad \text{mit} \quad D = V''(x_0) > 0. \tag{12}$$

betrachten.

Wählen wir das Koordinatensystem noch so, daß $x_0 = 0$ ist, erhalten wir die relativ einfache Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$m\ddot{x} = -Dx. \tag{13}$$

Wir können diese Situation durch ein reales System in sehr guter Näherung realisieren, indem wir einen Massenpunkt an eine Feder hängen. Für nicht zu große Auslenkungen der Feder aus ihrer Gleichgewichtslage ist die von der Feder ausgeübte Kraft proportional zur Auslenkung ($|F_{\text{Feder}}| = D\Delta x$, wo Δx die Dehnung der Feder aus ihrer Ruhelage ist). Der Gleichgewichtspunkt $x_0 = 0$ ist dann dadurch gegeben, daß dort die Federkraft die Schwerkraft mg gerade kompensiert. Die Feder wirkt immer der Auslenkung entgegen, und die gesamte Kraft auf den Massenpunkt ist dann durch $F_x = -Dx$ gegeben. Dabei rührt das Vorzeichen in dieser Gleichung daher, daß die Feder immer der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage entgegenwirkt.

Zur Lösung dieser Gleichung beachten wir, daß es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung handelt. Wir besprechen das Lösungsverhalten solcher Differentialgleichungen im Anhang A so weit wir dies für diese Vorlesung benötigen.

Aus den dortigen Überlegungen folgt, daß die allgemeine Lösung von der Form

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \tag{14}$$

ist, wobei x_1 und x_2 irgendwelche zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung sind, d.h. es muß $x_1/x_2 \neq$ const sein, und beide Funktionen müssen die DGL lösen. Ein Blick auf (13) zeigt, daß ein Ansatz mit trigonometrischen Funktionen

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega_0 t), \quad x_2(t) = C_2 \cos(\omega_0 t) \tag{15}$$

erfolgsversprechend ist, denn es gilt

$$\dot{x}_1 = C_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad \ddot{x}_1 = -C_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \tag{16}$$

und

$$\dot{x}_2 = C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad \ddot{x}_2 = -C_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t). \tag{17}$$

Setzt man diese Ansätze in (13) ein, erkennt man sofort, daß beides Lösungen der Differentialgleichung sind, und zwar für

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}. \tag{18}$$

Die allgemeine Lösung der DGL (13) lautet also

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t). \tag{19}$$

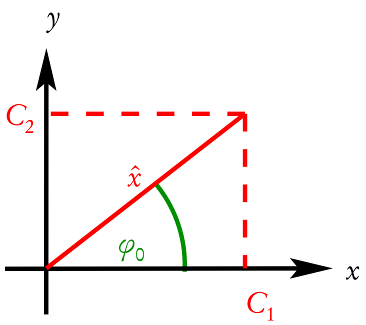

Abbildung 2: *Zur Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten*

Um diese Lösung etwas einfacher analysieren zu können, bringen wir sie noch in eine etwas einfachere Form, und zwar versuchen wir Konstanten $\hat{x} \geq 0$ und φ_0 so zu bestimmen, daß

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \tag{20}$$

gilt. Ausnutzen des Additionstheorems für den Cosinus liefert

$$x(t) = \hat{x}[\cos\varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \sin\varphi_0 \sin(\omega_0 t)]. \tag{21}$$

Vergleicht man dies mit (19) folgt, daß dann

$$C_1 = \hat{x}\cos\varphi_0, \quad C_2 = \hat{x}\sin\varphi_0 \tag{22}$$

gelten muß. Es ist klar, daß man dies als Gleichung für die Komponenten eines Vektors (C_1, C_2) in der Ebene, ausgedrückt durch seine Polarkoordinaten $(\hat{x}, \varphi_0)$ ansehen kann (s. Abb. 2). Quadriert man jedenfalls diese beiden Gleichungen, erhält man

$$\hat{x}^2(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0) = \hat{x}^2 = C_1^2 + C_2^2 \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \tag{23}$$

Aus dem Bild liest man weiter ab, daß

$$\varphi_0 = \operatorname{sign} C_2 \arccos\left(\frac{C_1}{\hat{x}}\right) \in (-\pi, \pi) \tag{24}$$

gegeben ist. Das einzige Problem mit dieser Formel ist, daß für $C_2 = 0$ und $C_1 \neq 0$ ein unbestimmtes Ergebnis herauskommt. Man hat dann aber $\cos\varphi_0 = C_1/|C_1| = \pm 1$. Für $C_1 > 0$ erhält man dann immer noch eindeutig $\varphi_0 = 0$. Für $C_1 < 0$ wären aber zwei Lösungen $\varphi_0 = \pm\pi$ korrekt. Man kann in diesem Fall einfach eine von beiden Möglichkeiten wählen, z.B. $\varphi_0 = +\pi$. Diese Gleichung zur Berechnung des Polarwinkels liefert im Gegensatz zu der in der Literatur oft zu findenden Formel "$\varphi_0 = \arctan(C_2/C_1)$" stets den korrekten Winkel, ohne daß man sich genauere Gedanken machen muß, in welchem Quadranten der gerade betrachtete Punkt liegt.

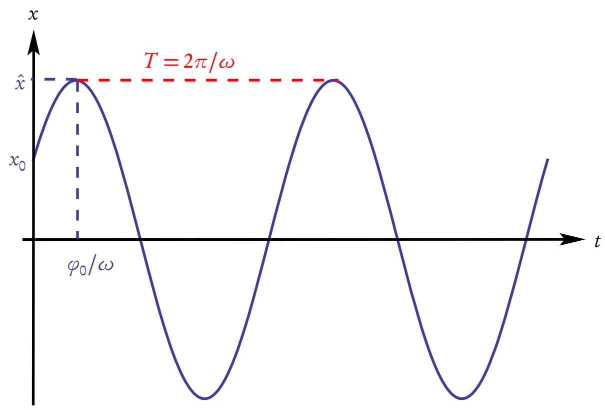

Abbildung 3: *Lösung zum harmonischen Oszillator mit den Kenngrößen $\hat{x}$ (Amplitude), φ_0 (Anfangsphase) und T (Periodendauer).*

Die Konstanten C_1 und C_2 in (19) lassen sich aus den Anfangsbedingungen (3) bestimmen. Wir verlangen also

$$x(0) = C_1 = x_0,$$
$$\dot{x}(0) = C_2\omega_0 = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \tag{25}$$

Die Lösung für das Anfangswertproblem lautet also

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{26}$$

Für die Lösungsform (20) ergibt sich aus (23) und (24)

$$\hat{x} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},$$
$$\varphi_0 = \operatorname{sign} v_0 \arccos\left(\frac{x_0}{\hat{x}}\right). \tag{27}$$

Es ergibt sich also insgesamt eine um $\Delta t = \varphi_0/\omega_0$ entlang der t-Achse verschobene cos-Funktion mit der **Periodendauer** T, wobei

$$\omega_0 T = 2\pi \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{28}$$

Die **Frequenz**, also die Anzahl der Schwingungen pro Zeitheinheit ist durch

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{29}$$

gegeben. Der Massepunkt schwingt zwischen den Werten $\pm\hat{x}$ hin und her. Diese Maximalabweichung von der Ruhelage $\hat{x}$ heißt **Amplitude** der Schwingung (vgl. Abb. 3). Wir bemerken, daß die Periodendauer der Schwingung unabhängig von der Amplitude ist. Man bezeichnet solche Schwingungen als **harmonische Schwingungen**. Schwingungen sind nur dann strikt harmonisch, wenn die Kraft exakt proportional zur Auslenkung von der Ruhelage ist. Für allegemeinere Kraftgesetze liegt dieser Fall nur näherungsweise für **kleine Amplituden** vor.

2 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Im allgemeinen wird die Bewegung eines Massepunktes auch irgendwelchen Reibungsprozessen unterliegen. Um zu sehen, welche Auswirkungen die Reibung besitzt, untersuchen wir den besonders einfachen Fall der **Stokesschen Reibung**, wo die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ ist. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} = -Dx - \beta\dot{x}. \tag{30}$$

In die Normalform gebracht ergibt sich wieder eine lineare homogene Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}. \tag{31}$$

Wir werden gleich sehen, daß die willkürlich erscheinende Einführung des Faktors 2 im Reibungsterm einige Formeln ein wenig übersichtlicher macht.
Um diese Gleichung zu lösen, bemerken wir, daß sich die Exponentialfunktion beim Differenzieren „reproduziert". Daher erscheint der Ansatz für die Lösung der Gleichung (31)

$$x(t) = A\exp(\lambda t), \quad \lambda = \text{const} \tag{32}$$

erfolgsversprechend. In der Tat ist

$$\dot{x}(t) = A\lambda\exp(\lambda t), \quad \ddot{x}(t) = A\lambda^2\exp(\lambda t). \tag{33}$$

Setzt man also den Ansatz (32) in (31) ein, ergibt sich

$$A\exp(\lambda t)(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0. \tag{34}$$

Demnach erhalten wir also (nichttriviale) Lösungen, d.h. für $A \neq 0$, für die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow (\lambda + \gamma)^2 + \omega_0^2 - \gamma^2 = 0. \tag{35}$$

Wir müssen nun mehrere Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Lösungen reell oder komplex sind und ob das quadratische Polynom zwei einfache oder eine doppelte Nullstelle besitzt:

1. $\omega_0 > \gamma$: Zwei zueinander konjugiert komplexe Nullstellen,
2. $\omega_0 < \gamma$: Zwei einfache reelle Nullstellen,
3. $\omega_0 = \gamma$: Eine doppelte Nullstelle.

Wir behandeln diese Fälle nun nacheinander ausführlich. Für eine kurze Einführung in die **komplexen Zahlen** s. Anhang B.

2.1 Schwingfall ($\omega_0 > \gamma$)

In diesem Fall besitzt die Gleichung (35) die beiden zueinander konjugiert komplexen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm \mathrm{i}\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} > 0. \tag{36}$$

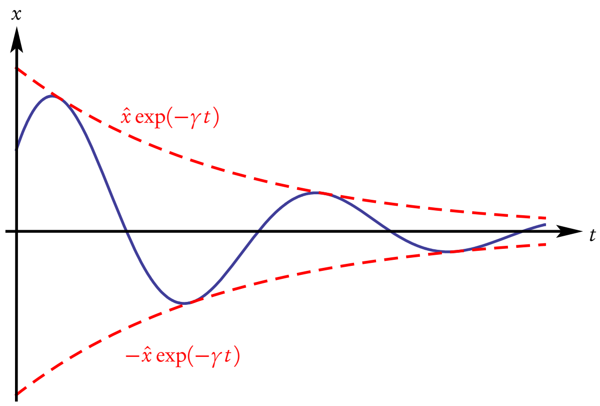

Abbildung 4: *Lösung zum gedämpften harmonischen Oszillator. Für $\omega_0 > \gamma$ schwingt der Massenpunkt wieder sinusförmig auf und ab, aber die Amplitude ist exponentiell gedämpft. Die Dämpfungsrate ist γ.*

Wir haben damit offenbar zwei linear unabhängige Lösungen über unseren Ansatz (32) gefunden, und die allgemeine Lösung ergibt sich als deren Linearkombination

$$x(t) = \exp(-\gamma t)[C_1 \exp(\mathrm{i}\omega t) + C_2 \exp(-\mathrm{i}\omega t)]. \tag{37}$$

Da selbstverständlich nur reelle Lösungen physikalisch sinnvoll sind, muß offenbar

$$C_1 = C_{1,R} + \mathrm{i}C_{1,I}, \quad C_2 = C_1^* = C_{1,R} - \mathrm{i}C_{2,I} \tag{38}$$

mit $C_{1,R}, C_{1,I} \in \mathbb{R}$ gelten. Wir können also (37) in der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-\gamma t) \\ &\quad \times \{C_1 \exp(\mathrm{i}\omega t) + [C_1 \exp(\mathrm{i}\omega t)]^*\} \\ &= \exp(-\gamma t) 2 \operatorname{Re}[C_1 \exp(\mathrm{i}\omega t)] \end{aligned} \tag{39}$$

schreiben.

Mit der Eulerschen Formel folgt

$$\operatorname{Re}[C_1 \exp(\mathrm{i}\omega t)] = \operatorname{Re}[(C_{1,R} + \mathrm{i}C_{1,I})(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t))] = C_{1,R}\cos(\omega t) - C_{1,I}\sin(\omega t). \tag{40}$$

Benennen wir die *reellen* Konstanten zu

$$\tilde{C}_1 = 2C_{1,R}, \quad \tilde{C}_2 = -2C_{1,I} \tag{41}$$

um, erhalten wir als allgemeine *reelle* Lösung

$$x(t) = \exp(-\gamma t)[\tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)]. \tag{42}$$

Die Anfangsbedingungen (3) gestatten wieder die eindeutige Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$x(0) = \tilde{C}_1 \stackrel{!}{=} x_0, \quad \dot{x}(0) = -\gamma \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \omega \stackrel{!}{=} v_0. \tag{43}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist offenbar

$$\tilde{C}_1 = x_0, \quad \tilde{C}_2 = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}, \tag{44}$$

und die Lösung des Anfangswertproblems lautet also

$$x(t) = \exp(-\gamma t)\left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}\sin(\omega t)\right]. \tag{45}$$

Analog zu unserem Vorgehen oben können wir die eckige Klammer auch in Form einer einzelnen Cosinus-Funktion gemäß

$$x(t) = \exp(-\gamma t)\hat{x}\cos(\omega t - \varphi_0) \tag{46}$$

schreiben, wobei

$$\hat{x} = \frac{\sqrt{x_0^2\omega^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2}}{\omega}, \quad \varphi_0 = \operatorname{sign}(v_0 + \gamma x_0)\arccos\left(\frac{x_0}{\hat{x}}\right) \tag{47}$$

ist. Wir haben also insgesamt eine periodische Schwingung mit der durch die Dämpfung verringerten Kreisfrequenz ω, deren Amplitude exponentiell abfällt. In der **Dämpfungszeit** $t_\mathrm{d} = 1/\gamma$ verringert sich die Amplitude um einen Faktor $1/\mathrm{e} = \exp(-1) \approx 1/2.718$. Der Massepunkt bewegt sich stets innerhalb der Einhüllenden $\pm\hat{x}\exp(-\gamma t)$ (vgl. Abb 4).

2.2 Kriechfall ($\omega_0 < \gamma$)

In diesem Fall besitzt die quadratische Gleichung (35) zwei *verschiedene* reelle Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \tag{48}$$

und wir haben direkt die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in der reellen Form

$$x(t) = C_1\exp(-\gamma_1 t) + C_2\exp(-\gamma_2 t). \tag{49}$$

Da offenbar $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ ist, ist $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Die Dämpfung ist hierbei so stark, daß es zu keinerlei Schwingungen kommt. Der Massepunkt läuft gegen den Gleichgewichtspunkt bei $x = 0$. Für große t dominiert der Term mit der kleineren Dämpfungskonstante γ_1.

Die Anfangsbedingungen (3) liefern für die Integrationskonstanten C_1 und C_2 die Gleichungen

$$x(0) = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} x_0, \quad \dot{x}(0) = -C_1\gamma_1 - C_2\gamma_2 \stackrel{!}{=} v_0. \tag{50}$$

Die Lösung des linearen Gleichgungssystems ergibt

$$C_1 = -\frac{v_0 + \gamma_2 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = +\frac{v_0 + \gamma_2 x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}, \quad C_2 = \frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = -\frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}. \tag{51}$$

Die Lösung für das Anfangsproblem lautet also

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\left[(v_0 + \gamma_2)\exp(-\gamma_1 t) - (v_0 + \gamma_1 x_0)\exp(-\gamma_2 t)\right]. \tag{52}$$

Setzt man hierin für γ_1 und γ_2 (48) ein, erhält man das Resultat in der Form

$$x(t) = \exp(-\gamma t)\left[x_0\cosh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\sinh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t)\right]. \tag{53}$$

Dabei haben wir die Definition der Hyperbelfunktionen

$$\cosh z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} \tag{54}$$

benutzt, die übrigens nicht nur im Reellen sondern auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Daraus folgt (wieder für $z \in \mathbb{C}$)

$$\cosh(\mathrm{i}z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2} = \cos z, \quad \sinh(\mathrm{i}z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2} = \mathrm{i}\sin z. \tag{55}$$

Wir können also die Lösung für den Schwingfall (37) gewinnen, indem wir einfach in (53) überall

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \mathrm{i}\omega \tag{56}$$

setzen. Denn dann liefert die Anwendung der Formeln (55) in (53) in der Tat sofort (37).

2.3 Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0 = \gamma$)

Hier hat die quadratische Gleichung (35) nur die eine (reelle) Lösung

$$\lambda = -\gamma = -\omega_0. \tag{57}$$

Wir erhalten also auch mit dem Exponentialansatz (32) nur eine Lösung. Um die vollständige Lösung der Bewegungsgleichung zu finden, benötigen wir allerdings noch eine zweite linear unabhängige Lösung. Statt direkt eine solche Lösung zu konstruieren, ist es einfacher, für festgehaltene Anfangsbedingungen den Limes $\omega_0 \to \gamma$ von (53) zu berechnen. Dabei macht nur der zweite Term in der eckigen Klammer Probleme, weil dessen Nenner dort verschwindet. Hier führt die Potenzreihenentwicklung der sinh-Funktion zum Ziel. Es gilt

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}. \tag{58}$$

Auf den fraglichen Term in (53) angewandt, ergibt diese Reihenentwicklung

$$\frac{\sinh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t)}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t + \mathcal{O}(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}^{\,3})}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = t + \mathcal{O}\left[\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)^2\right]. \tag{59}$$

Die übrigen Terme in (53) sind unproblematisch, und wir können für diese einfach $\omega_0 = \gamma$ setzen, weil alle vorkommenden Funktionen stetig sind. Wenden wir also (59) in (53) an und führen den Grenzwert $\omega_0 \to \gamma$ aus, erhalten wir schließlich

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t] \exp(-\gamma t). \tag{60}$$

Man prüft leicht nach, daß diese Funktion tatsächlich die Bewegungsgleichung (31) für $\omega_0 = \gamma$ löst und die Anfangsbedingungen (3) erfüllt.

Auch hier fällt die Auslenkung des Massenpunktes unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit stets zum Gleichgewichtspunkt $x = 0$ ab, denn sowohl die Funktion $\exp(-\gamma t)$ als auch $t \exp(-\gamma t)$ streben gegen 0 für $t \to \infty$. Es zeigt sich, daß insgesamt das Abklingen der Anfangsauslenkung und -geschwindigkeit im aperiodischen Grenzfall am schnellsten vonstatten geht. Dies hat praktische Bedeutung für die Konstruktion von Meßinstrumenten wie (analogen) Galvanometern zur Spannungs- und Strommessungen in der Elektrotechnik.

2.4 Direkte Lösung im aperiodischen Grenzfall

Alternativ zu der im vorigen Abschnitt vorgestellten Methode, den aperiodischen Grenzfall des gedämpften Oszillators als Grenzwert für den überdämpften Fall zu behandeln, können wir auch die Differentialgleichung direkt lösen. Setzen wir also in (31) $\omega_0 = \gamma$, erhalten wir

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \gamma^2 x = 0. \tag{61}$$

Der Exponentialansatz (32) liefert nur die eine Lösung für $\lambda = -\gamma$. Um die vollständige Lösung, also eine zweite linear unabhängige Lösung zu finden, machen wir stattdessen den Ansatz („**Variation der Konstanten**")

$$x(t) = f(t)\exp(-\gamma t). \tag{62}$$

Die Ableitungen sind wegen der Produktregel

$$\dot{x} = (\dot{f} - \gamma f)\exp(-\gamma t), \quad \ddot{x} = (\ddot{f} - 2\gamma \dot{f} + \gamma^2 f)\exp(-\gamma t). \tag{63}$$

Setzen wir also unseren Ansatz in (61) ein, erhalten wir

$$\exp(-\gamma t)[\ddot{f} - 2\gamma \dot{f} + \gamma^2 f + 2\gamma(\dot{f} - \gamma f) + \gamma^2 f] = \exp(-\gamma t)\ddot{f} \stackrel{!}{=} 0. \tag{64}$$

Das bedeutet, daß f die Differentialgleichung

$$\ddot{f} = 0 \tag{65}$$

erfüllen muß. Ihre allgemeine Lösung finden wir durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit. Es ergibt sich

$$f(t) = C_1 + C_2 t, \tag{66}$$

und demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (61)

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\exp(-\gamma t). \tag{67}$$

Anpassung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 an die Anfangsbedingungen (3) liefert wieder die bereits oben gefundene Lösung (60).

3 Der getriebene gedämpfte Oszillator

Wir schließen unsere Betrachtung der harmonischen Oszillatoren mit der Behandlung der Bewegungsgleichung für den Fall, daß zusätzlich zur Reibungs- und harmonischen Kraft noch eine zeitabhängige äußere **treibende Kraft** an dem Massenpunkt angreift. Dabei beschränken wir uns auf den Fall einer **harmonischen Zeitabhängigkeit der äußeren Kraft**. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - 2m\gamma \dot{x} + mA\cos(\Omega t). \tag{68}$$

Dies in die Normalform für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung gebracht liefert die **inhomogene Gleichung**

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\Omega t). \tag{69}$$

Wir bemerken als erstes, daß wegen der Linearität des Differentialoperators auf der linken Seite die Differenz zweier Lösungen dieser inhomogenen Gleichung wieder die homogene Gleichung löst. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also durch die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer beliebigen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben:

$$x(t) = C_1 x_1^{(\mathrm{hom})}(t) + C_2 x_2^{(\mathrm{hom})}(t) + x^{(\mathrm{inh})}(t). \tag{70}$$

Dabei sind x_1 und x_2 beliebige zueinander linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung, die wir im vorigen Abschnitt für die drei Fälle (Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall) gefunden haben:

$$\begin{cases} x_1(t) = \exp(-\gamma t)\cos(\omega t), \quad x_2(t) = \exp(-\gamma t)\sin(\omega t) & \text{für} \quad \omega_0 > \gamma, \\ x_1(t) = \exp(-\gamma_1 t), \quad x_2(t) = \exp(-\gamma_2 t) & \text{für} \quad \omega_0 < \gamma, \\ x_1(t) = \exp(-\gamma t), \quad x_2(t) = t\exp(-\gamma t) & \text{für} \quad \omega_0 = \gamma. \end{cases} \tag{71}$$

Dabei ist im Schwingfall $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und im Kriechfall $\gamma_{12} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.
Diese Lösungen werden allesamt für $t \gg 1/\gamma$ (bzw. im Kriechfall für $t \gg 1/\gamma_2$) exponentiell weggedämft werden. Für große Zeiten wird die Lösung also durch die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung dominiert. Man spricht vom **eingeschwungenen Zustand**, und wir interessieren uns im folgenden für diesen Zustand.

3.1 Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Das Auffinden einer speziellen Lösung für die inhomogene Gleichung wird nun dadurch wesentlich erleichtert, daß sowohl die unabhängige Variable, die Zeit t, als auch die Koeffizienten auf der linken Seite in (69) reelle Zahlen sind. Wir können also die linke Seite der Gleichung (69) als Realteil derselben Gleichung einer komplexen Funktion $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ ansehen:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \mathrm{Re}(\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z). \tag{72}$$

Die rechte Seite der Gleichung können wir aber auch als Realteil ausdrücken, denn wegen der Eulerschen Formel gilt

$$A\cos(\Omega t) = \mathrm{Im}[A\exp(-\mathrm{i}\Omega t)]. \tag{73}$$

Wir können also die etwas einfacher zu lösende komplexe Gleichung

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = A\exp(-\mathrm{i}\Omega t) \tag{74}$$

betrachten. Die Wahl des negativen Vorzeichens im Exponenten auf der rechten Seite ist dabei willkürlich und entspricht der in den meisten Lehrbüchern verwendeten Konvention in der theoretischen Physik.
Jedenfalls legt die Form der Gleichung (74) den Ansatz

$$z(t) = AB\exp(-\mathrm{i}\Omega t) \tag{75}$$

nahe. Dabei ist B eine zu bestimmende komplexwertige Konstante. Setzen wir also (75) in (74) ein, finden wir

$$AB\exp(-\mathrm{i}\Omega t)(-\Omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\Omega + \omega_0^2) = A\exp(-\mathrm{i}\Omega t). \tag{76}$$

Auflösen nach B liefert

$$B = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\Omega}. \tag{77}$$

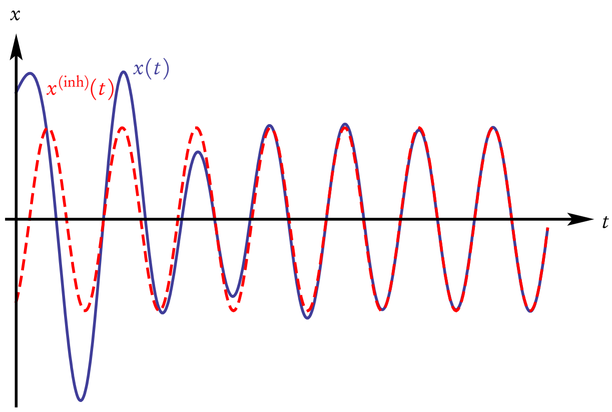

Abbildung 5: *Lösung zum getriebenen gedämpften harmonischen Oszillator im Schwingfall $\omega_0 > \gamma$. Für $t \gg 1/\gamma$ werden die Eigenschwingungen, also der Anteil der Lösung der homogenen Gleichung in (70) merklich gedämpft, und die Bewegung geht in den durch die spezielle Lösung der inhomogenen Schwingung eingeschwungenen Zustand über.*

Um nun einfacher $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ bestimmen zu können, machen wir noch den Zähler reell, indem wir den Bruch mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitern:

$$B = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\mathrm{i}\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}. \tag{78}$$

Wir können nun B in die Polardarstellung bringen:

$$B = |B| \exp(\mathrm{i}\varphi_0), \quad |B| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \quad \varphi_0 = +\arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{|B|}\right). \tag{79}$$

Setzen wir dies in unseren Ansatz ein, ergibt sich für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung schließlich

$$x^{(\mathrm{inh})}(t) = \mathrm{Re}\, z(t) = A|B| \,\mathrm{Re}\,\{\exp[-\mathrm{i}(\Omega t - \varphi_0)]\} = A|B|\cos(\Omega t - \varphi_0). \tag{80}$$

Im eingeschwungenen Zustand schwingt also der Massenpunkt mit derselben Frequenz wie die äußere harmonische Kraft, und zwischen der Kraft und der Schwingung des Massenpunktes besteht eine *stets positive* Phasenverschiebung φ_0 (vgl. Abb 6, rechts). Als Funktion von Ω ist φ_0 monoton wachsend. Für $\Omega = \omega_0$ wird $\varphi_0 = \pi/2$, und für $\Omega \to \infty$ strebt $\varphi_0 \to \pi$.

Bei vorgegebener Amplitude der äußeren Kraft mA ist die Amplitude des eingeschwungenen Zustands durch $|B|$ gemäß (79) gegeben. In Abb. 6 (links) haben wir diesen Proportionalitätsfaktor als Funktion der Kreisfrequenz der antreibenden Kraft Ω geplottet. Er weist in dem gewählten Fall ein ausgeprägtes Maximum bei einer **Resonanzfrequenz** Ω_{res} auf, die wir im nächsten Abschnitt ausrechnen werden.

3.2 Amplitudenresonanzfrequenz

Die Lösung (80) zeigt, daß die Amplitude der Schwingung im eingeschwungenen Zustand zur Amplitude der äußeren Kraft proportional ist und der Proportionalitätsfaktor $|B|$ gemäß (79) durch die

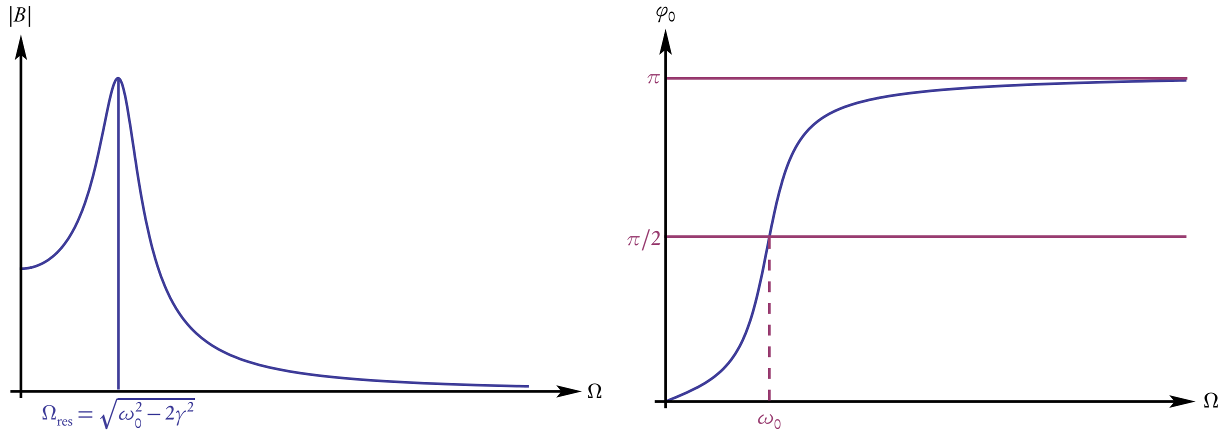

Abbildung 6: *Amplitudenfaktor (links) $|\Omega|$ und Phasenverschiebung φ_0 für den eingeschwungenen Zustand (80).*

Parameter des gedämpften freien Oszillators, also ω_0 und γ und die Kreisfrequenz Ω der äußeren Kraft allein bestimmt ist (s. Abb 6, links).

Wir untersuchen nun, für welches Ω dieser Proportionalitätsfaktor maximal wird, d.h. für welche Frequenz der äußeren Kraft die Amplitude der Schwingung bei festgehaltener Amplitude der äußeren Kraft am größten wird.

Dazu müssen wir das Minimum des Ausdrucks unter der Wurzel in (79) suchen, d.h. wir müssen die Funktion

$$f(\Omega) = (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2 \tag{81}$$

untersuchen. Dazu bilden wir die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega} f(\Omega) = f'(\Omega) = 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2). \tag{82}$$

Mögliche Minima ergeben sich als die Nullstellen dieser Ableitung. Offenbar ist die Lösung entweder $\Omega = 0$, d.h. es wirkt eine zeitlich konstante äußere Kraft. Es liegt dann offenbar ein Minimum vor, wenn $\omega_0^2 < 2\gamma^2$ ist, denn es gilt

$$f''(\Omega) = 4(2\gamma^2 - \omega_0^2 + 3\Omega^2). \tag{83}$$

Es ist also $f''(0) = 4(2\gamma^2 - \omega_0^2)$, und dies ist postiv für $\omega_0^2 < 2\gamma^2$.

Falls $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, nimmt (82) eine Nullstelle bei der **Resonanzfrequenz**

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{84}$$

an. Dort gilt $f''(\Omega_{\text{res}}) = 8(\omega_0^2 - 2\gamma^2) > 0$, und es liegt also auch in diesem Fall ein Minimum für f und also ein Maximum der Amplitude vor.

Man nennt daher Ω_{res} die **Amplitudenresonanzfrequenz**, weil dies die Frequenz ist, wo die Amplitude der eingeschwungenen Bewegung maximal wird. Interessanterweise ist sie weder durch die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators ω_0 noch durch die Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ im Schwingfall $\omega_0 > \gamma$ gegeben sondern durch die kleinere Amplitudenresonanzfrequenz (84).

3.3 Energieresonanz

Eine andere Frage ist es, bei welcher Frequenz der äußeren Kraft, diese die größte mittlere Leistung aufbringen muß, um den Massenpunkt in dem erzwungenen eingeschwungenen Schwingungszustand zu halten. Dazu berechnen wir die über eine Periode $T = 2\pi/\Omega$ gemittelte Leistung der äußeren Kraft

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, mA\cos(\Omega t)\dot{x}^{(\mathrm{inh})}(t). \tag{85}$$

Nun ist gemäß (80)

$$P(t) = mA\cos(\Omega t)\dot{x}^{(\mathrm{inh})}(t) = -mA^2|B|\Omega\cos(\Omega t)\sin(\Omega t - \varphi_0). \tag{86}$$

Mit dem Additionstheorem für den Sinus ist

$$P(t) = -mA^2|B|\Omega\cos(\Omega t)[\sin(\Omega t)\cos\varphi_0 - \cos(\Omega t)\sin\varphi_0]. \tag{87}$$

Zur einfacheren Integration bemerken wir, daß

$$\cos(\Omega t)\sin(\Omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\Omega t), \quad \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\Omega t)] \tag{88}$$

gilt, was man sofort durch Anwendung der Additionstheoreme nachweist. Da weiter

$$\int_0^T \mathrm{d}t\ \sin(2\Omega t) = -\left.\frac{\cos(2\Omega t}{2\Omega}\right|_{t=0}^{t=T} = 0, \quad \int_0^T \mathrm{d}t\ \cos(2\Omega t) = \left.\frac{\sin(2\Omega t}{2\Omega}\right|_{t=0}^{t=T} = 0 \tag{89}$$

gilt erhalten wir also durch Einsetzen von (87) in (85) für die mittlere Leitung

$$\overline{P} = \frac{1}{2}mA^2|B|\Omega\sin\varphi_0. \tag{90}$$

Aus (79) folgt, daß $\varphi_0 \in [0, \pi]$ und also $\sin\varphi_0 > 0$

$$\sin\varphi_0 = \sqrt{1 - \cos^2\varphi_0} = \frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2\Omega^2}} = 2\gamma\Omega|B|. \tag{91}$$

Damit wird (90)

$$\overline{P} = mA^2|B|^2\gamma\Omega^2. \tag{92}$$

Wir fragen nun, bei welcher Kreisfrequenz Ω der äußeren Kraft bei vorgegenen Parametern des Oszillators und der Amplitude A der äußeren Kraft maximal wird. Man spricht in diesem Fall von **Energieresonanz**, denn dort ist die mittlere Leistungsaufnahme des Massenpunktes aus der äußeren Kraft maximal. Wir haben also diesmal das Maximum der Funktion

$$g(\Omega) = \Omega^2|B|^2 = \frac{\Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \tag{93}$$

zu suchen. Nach einiger Rechnung findet man für die Ableitung

$$g'(\Omega) = \frac{2\Omega(\Omega^4 - \omega_0^4)}{[(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2]^2}. \tag{94}$$

Offenbar liegt bei $\Omega = 0$ ein Minimum vor, denn dort ist g' lokal monoton fallend. Ein Maximum erhalten wir bei $\Omega = \omega_0$, denn dort ist g' offenbar lokal monoton wachsend. Die größte mittlere Leistung wird also vom Oszillator aufgenommen, wenn $\Omega = \omega_0$ ist, also die Schwingungsfrequenz der äußeren Kraft der Eigenfrequenz des *ungedämpften* Oszillators entspricht. Wie (79) zeigt, ist dort gerade die Phasenverschiebung der eingeschwungenen Bewegung gegenüber der Phase der antreibenden Kraft $\varphi_0 = \pi/2$.

Wir bemerken noch, daß für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ bei $\Omega = \omega_0$ der Faktor $|B|$ unendlich wird. Das ist die sogenannte **Resonanzkatastrophe**. Wir werden die Bewegung für diesen speziellen Fall in den Übungen ausführlich untersuchen.

3.4 Lösung des Anfangswertproblems

Wir kommen schließlich auf die Lösung des Anfangswertproblems für den getriebenen harmonischen Oszillators zurück, die zur vollständigen Beschreibung der Bewegung bei beliebig vorgegebenen Anfangsbedingungen (3) dient und nicht nur den eingeschwungenen Zustand liefert. Man spricht auch vom **Einschwingvorgang**.

Wir müssen nur für die allgemeine Lösung (70) die Integrationskonstanten C_1 und C_2 aus den Anfangsbedingungen (30) durch Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems zu bestimmen. Wir geben das Ergebnis für die oben diskutierten drei Fälle an

Schwingfall ($\omega_0 > \gamma$):

$$\begin{aligned} x(t) = &\left[x_0 - \frac{A(\omega_0^2-\Omega^2)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}\cos(\omega t)\right]\exp(-\gamma t) \\ &+ \frac{1}{\omega}\left[v_0+\gamma x_0 - \frac{A\gamma(\Omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma\Omega^2}\right]\sin(\omega t)\exp(-\gamma t) \\ &+ A\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}\cos(\Omega t) + \frac{2A\gamma\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}\sin(\Omega t). \end{aligned} \tag{95}$$

Kriechfall ($\omega_0 < \gamma$): Setzen wir zur Abkürzung $\alpha = \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$, erhalten wir für diesen Fall

$$\begin{aligned} x(t) = &\left[x_0 - \frac{A(\omega_0^2-\Omega^2)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}\cosh(\alpha t)\right]\exp(-\gamma t) \\ &+ \frac{1}{\alpha}\left[v_0+\gamma x_0 - \frac{A\gamma(\Omega^2+\omega_0^2)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma\Omega^2}\right]\sinh(\alpha t)\exp(-\gamma t) \\ &+ A\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}\cos(\Omega t) + \frac{2A\gamma\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}\sin(\Omega t). \end{aligned} \tag{96}$$

Zu dieser Lösung können wir auch wieder gelangen, indem wir in (95) $\omega = \mathrm{i}\alpha$ setzen und die im Anhang B hergeleiteten Formeln

$$\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z, \quad \sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z \tag{97}$$

verwenden.

Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0 = \gamma$):

$$\begin{aligned} x(t) = \exp(-\gamma t) \left[x_0 - \frac{A(\gamma^2 - \Omega^2)}{(\gamma^2 + \Omega^2)^2} + \left(v_0 + \gamma x_0 - \frac{A\gamma}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) t \right] \\ + A \frac{(\gamma^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t) + 2\gamma\Omega \sin(\Omega t)}{(\Omega^2 + \gamma^2)^2}. \end{aligned} \tag{98}$$

A Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die allgemeine lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung lautet

$$\ddot{x}(t) + A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = C(t). \tag{99}$$

Dabei sind A, B und C vorgegebene Funktionen der unabhängigen Variablen t und $x(t)$ die gesuchte Funktion. Hier besprechen wir nur die wichtigsten Grundlagen über die Struktur der Lösungen solcher linearer Differentialgleichungen. Konkrete Beispiele liefern die im Haupttext behandelten harmonischen Oszillatoren.

Man nennt die obige Gleichung **homogen**, wenn $C(t) = 0$ und entsprechend **inhomogen**, wenn $C(t) \neq 0$. Wir betrachten zuerst die Lösungsstruktur der **homogenen Gleichung**

$$\ddot{x}(t) + A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = 0. \tag{100}$$

Da die Ableitungsoperation linear ist, d.h. für irgendwelche zwei Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die mindestens zweimal differenzierbar sind,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)] = C_1 \dot{x}_1 + C_2 \dot{x}_2, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)] = C_1 \ddot{x}_1 + C_2 \ddot{x}_2 \tag{101}$$

gilt, ist für zwei Lösungen x_1 und x_2 von (100) auch die **Linearkombination**

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \tag{102}$$

mit $C_1, \mathbb{C}_2 = \text{const}$ eine weitere Lösung. Es ist weiter klar, daß wir zur genauen Festlegung der Lösung **Anfangsbedingungen** fordern müssen, d.h. wir verlangen von der Lösung x der DGL zusätzlich, daß sie und ihre erste Ableitung bei $t = 0$ bestimmte Werte annimmt:

$$x(0) \stackrel{!}{=} x_0, \quad \dot{x}(0) \stackrel{!}{=} v_0. \tag{103}$$

Nehmen wir an, wir hätten zwei Lösungen x_1 und x_2 gefunden, können wir versuchen, die Konstanten C_1 und C_2 in der Linearkombination (102) so zu bestimmen, daß diese Anfangsbedingungen (103) gelten, d.h. wir müssen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1 x_1(0) + C_2 x_2(0) = x_0 \\ C_1 \dot{x}_1(0) + C_2 \dot{x}_2(0) = v_0 \end{aligned} \tag{104}$$

nach C_1 und C_2 auflösen. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\dot{x}_2(0)$ und die zweite mit $x_2(0)$ und subtrahieren die beiden entstehenden Gleichungen, finden wir

$$C_1[x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0)] = \dot{x}_2(0)x_0 - x_2(0)v_0. \tag{105}$$

Wenn die eckige Klammer nicht verschwindet, können wir nach C_1 auflösen:

$$C_1 = \frac{\dot{x}_2(0)x_0 - x_2(0)v_0}{x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0)}. \tag{106}$$

Unter derselben Voraussetzung können wir auf ähnliche Weise auch C_2 berechnen:

$$C_2 = \frac{v_0 x_1(0) - x_0\dot{x}_1(0)}{x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0)}. \tag{107}$$

Wir untersuchen nun noch, wann die Bedingung, daß der Nenner in (106) und (107) für die Lösungen x_1 und x_2 der DGL nicht verschwindet, erfüllt ist. Es handelt sich um die Determinante der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (104). Um diesen Ausdruck näher zu untersuchen, definieren wir für die beiden Lösungen die **Wronski-Determinante** genannte Größe

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t). \tag{108}$$

Berechnen wir die Zeitableitung, finden wir mit Hilfe der Produktregel nach einiger Rechnung

$$\dot{W}(t) = x_1(t)\ddot{x}_2(t) - x_2(t)\ddot{x}_1(t). \tag{109}$$

Jetzt verwenden wir, daß x_1 und x_2 Lösungen der DGL (100) sind und setzen

$$\ddot{x}_j(t) = -A(t)\dot{x}_j(t) - B(t)x_j(t), \quad j \in \{1,2\} \tag{110}$$

in (109) ein. Das ergibt

$$\dot{W}(t) = -A(t)[x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t)] = -A(t)W(t). \tag{111}$$

Teilen wir dies durch $W(t)$ erhalten wir

$$\frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = -A(t) \tag{112}$$

Integrieren wir diese Gleichung bzgl. t von $t = 0$ bis t, erhalten wir

$$\ln\left(\frac{W(t)}{W(0)}\right) = -\int_0^t \mathrm{d}t' A(t'). \tag{113}$$

Lösen wir dies nach $W(t)$ auf, finden wir schließlich

$$W(t) = W(0)\exp\left[-\int_0^t \mathrm{d}t' A(t')\right]. \tag{114}$$

Das bedeutet aber, daß entweder $W(t) = 0 = \text{const}$ ist (nämlich wenn $W(0) = 0$) oder $W(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Untersuchen wir deshalb weiter, was es für die Lösungen x_1 und x_2 der DGL bedeutet, wenn $W(t) = 0$ für alle t gilt. Aus der Definition der Wronski-Determinante (108) folgt dann

$$x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} = \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)}. \tag{115}$$

Auch diese Gleichung können wir wieder bzgl. t von 0 bis t integrieren, und das ergibt

$$\ln\left(\frac{x_1(t)}{x_1(0)}\right) = \ln\left(\frac{x_2(t)}{x_2(0)}\right) \Rightarrow x_2(t) = \frac{x_2(0)}{x_1(0)} x_1(t). \tag{116}$$

Das bedeutet aber, daß $W(0) = 0$ genau dann, wenn $x_2(t) = C x_1(t)$ mit $C = x_2(0)/x_1(0) = \text{const}$ ist.

Die Anfangsbedingungen (103) sind also durch die Linearkombination (102) genau dann immer erfüllbar, wenn die Lösungen x_1 und x_2 **linear unabhängig** sind und daher $W(0) \neq 0$ ist. Um also die **allgemeine Lösung der homogenen DGL** zu finden, müssen wir nur irgendwelche zwei linear unabhängigen Lösungen finden. Die allgemeine Lösung ist dann durch die allgemeine Linearkombination (102) gegeben.

Kommen wir nun auf die inhomogene Gleichung (99) zurück. Nehmen wir wieder an, daß $x_1^{(\text{inh})}(t)$ und $x_2^{(\text{inh})}(t)$ Lösungen dieser inhomogenen Gleichung ist. Wegen der Linearität der Ableitungsoperation und der Linearität der linken Seite der inhomogenen Gleichung erfüllt dann offenbar $x_1^{(\text{inh})}(t) - x_2^{(\text{inh})}$ die *homogene DGL*. Das bedeutet aber, daß bei Kenntnis von zwei linear unabhängigen Lösungen $x_1^{(\text{hom})}(t)$ und $x_2^{(\text{hom})}(t)$ der *homogenen DGL* diese Differenz durch eine Linearkombination dieser Lösungen gegeben sein muß. Es ist also die *allgemeine* Lösung der inhomogenen Gleichung durch

$$x(t) = C_1 x_1^{(\text{hom})}(t) + C_2 x_2^{(\text{hom})}(t) + x_1^{(\text{inh})}(t) \tag{117}$$

gegeben. Haben wir also die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gefunden, genügt es, nur eine einzige spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu kennen, um alle Lösungen in der Form (117) angeben zu können. Es ist klar, daß auch hier die Anfangsbedingungen (103) durch die entsprechende Berechnung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 stets erfüllbar sind, wenn nur $x_1^{(\text{hom})}(t)$ und $x_2^{(\text{hom})}(t)$ linear unabhängig sind und also die Wronksi-Determinante $W(0) \neq 0$ ist.

B Crashkurs zu komplexen Zahlen

Bei der Lösung der Oszillatorgleichung, insbesondere auch für den Fall ohne Dämpfung, haben wir gesehen, daß es nützlich wäre, wenn man „Zahlen“ hätte, die die Gleichung $\lambda^2 = -a$ auch für $a > 0$ lösen. Das ist aber im Bereich der **reellen Zahlen** unmöglich, denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda^2 \geq 0$.

Wir versuchen nun die reellen Zahlen einfach dadurch zu erweitern, daß wir eine neue zunächst rein symbolisch zu verstehende „Zahl“ i, die **imaginäre Einheit**, einführen, für die

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{118}$$

gelten soll. Dann hätte für $a > 0$ die Gleichung $\lambda^2 = -a$ die beiden Lösungen $\lambda = \pm\mathrm{i}\sqrt{a}$, wobei wir voraussetzen, daß die **komplexen Zahlen**, die allgemein von der Form

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{119}$$

sein sollen, die gewöhnlichen Rechenregeln wie für reelle Zahlen gelten, also die sogenannten Axiome eines **Zahlenkörpers** erfüllen. Dabei soll eine komplexe Zahl definitionsgemäß durch ihren **Real- und Imaginärteil** x bzw. y eindeutig bestimmt sein. Wir schreiben

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y. \tag{120}$$

Nehmen wir dies an, so folgt für die **Addition** zweier komplexer Zahlen

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \tag{121}$$

wobei wir mehrfach das Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz verwendet haben, wobei wir i wie eine gewöhnliche Variable behandelt haben. Die Menge aller komplexen Zahlen nennen wir $\mathbb{C}$.

Die Regel für die Multiplikation folgt ebenso durch formales Ausmultiplizieren:

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{122}$$

Dabei haben wir im zweiten Term des Realteils die definierende Eigenschaft (118) der imaginären Einheit benutzt.

Wir berechnen gleich noch die Potenzen von i:

$$\mathrm{i}^2 := -1, \quad \mathrm{i}^3 = (\mathrm{i}^2)\mathrm{i} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = (\mathrm{i}^2)(\mathrm{i}^2) = 1 \cdot 1 = 1, \ldots \tag{123}$$

Als weitere Operation an einer einzelnen komplexen Zahl ist noch die **komplexe Konjugation** nützlich. Sie ist so definiert, daß die konjugiert komplexe Zahl z^* von z denselben Real- und den entgegengesetzt gleichen Imaginärteil wie z haben soll, d.h. durch

$$z^* = x - \mathrm{i}y. \tag{124}$$

Offensichtlich ist $(z^*)^* = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiter ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, denn die komplexen Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil sind umkehrbar eindeutig auf $\mathbb{R}$ abbildbar. Offenbar ist $z \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\operatorname{Im} z = 0$, was zugleich $z^* = z$ impliziert. Wir haben weiter

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2\mathrm{i}}. \tag{125}$$

Weiter rechnet man leicht nach, daß

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \tag{126}$$

ist. Das Produkt einer komplexen Zahl mit ihrem konjugiert Komplexen ist

$$z z^* = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 - \mathrm{i}^2 y^2 = x^2 + y^2 \geq 0. \tag{127}$$

Den Betrag der komplexen Zahl definieren wir als

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z z^*}. \tag{128}$$

Schließlich können wir auch die Division im Bereich der komplexen Zahlen betrachten. Sei dazu $z_2 \neq 0$ und $z_1 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + \mathrm{i} \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \tag{129}$$

Da $z_2 \neq 0$ ist offenbar auch $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$ und also die Division für $z_2 \neq 0$ durch die soeben berechneten Real- und Imaginärteile wohldefiniert.

Die reellen Zahlen können wir geometrisch durch eine Zahlengerade veranschaulichen. Entsprechend kann man die komplexen Zahlen geometrisch interpretieren, wenn man das Zahlenpaar $(x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ als Komponenten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems in der Euklidischen Ebene interpretieren. Dies ist die **Gaußsche Zahlenebene**. Es ist klar, daß $|z|$ geometrisch die Länge des entsprechenden z repräsentierenden Ortsvektors in der Gaußschen Zahlenebene ist (s. Abb. 7).

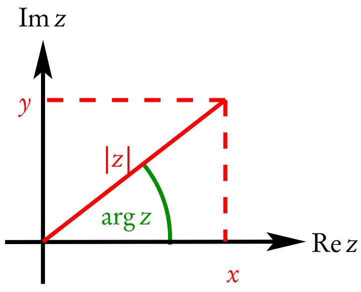

Abbildung 7: *Zur Gaußschen Zahlenebene und Polarform einer komplexen Zahl.*

Wir können nun diesen Vektor durch Polarkoordinaten (r, φ) darstellen. Offenbar ist $r = |z|$, und es gilt definitionsgemäß

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi). \tag{130}$$

Definieren wir den Bereich für den Polarwinkel als $(-\pi, \pi]$, so errechnet sich dieser Winkel gemäß

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{sign} y \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{falls} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{falls} \quad y = 0, x > 0, \\ \pi & \text{falls} \quad y = 0, x < 0. \end{cases} \tag{131}$$

Man nennt φ auch das **Argument der komplexen Zahl** ($\arg z$). Schließlich definieren wir noch einige elementare Funktionen, die wir schon aus der reellen Analysis kennen, auch für komplexe Zahlen. Dies geschieht am bequemsten über **Potenzreihen**.

Wir beginnen mit der Exponentialfunktion. Machen wir für diese Funktion für $x \in \mathbb{R}$ den Ansatz

$$f(x) = \exp x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j, \tag{132}$$

so folgt aus $\mathrm{d}\exp x/\mathrm{d}x = \exp x$ und $\exp(0) = 1$

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 = 1, \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2 x + \cdots \Rightarrow f'(0) = c_1 = 1, \\ f''(x) &= 2c_2 + 6c_3 x + \cdots \Rightarrow f''(0) = 2c_2 = 1, \ldots \end{aligned} \tag{133}$$

Dabei haben wir stillschweigend angenommen, daß die unendliche Potenzreihe konvergiert und wir die Ableitung der Funktion so bilden dürften als hätten wir es mit einem gewöhnlichen endlichen Polynom zu tun. In der Mathematikvorlesung wird gezeigt, daß das für Potenzreihen in dem Bereich, wo sie konvergieren unter bestimmten Voraussetzungen auch berechtigt ist (näheres dazu und zur **Funktionentheorie** ist auch in [CH10] zusammengestellt). Jedenfalls kann man mit Hilfe der so gebildeten Ableitungen die Koeffizienten berechnen. Es folgt

$$c_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}. \tag{134}$$

Für die Exponentialfunktion ist also $c_j = 1/j!$, d.h.

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j}. \tag{135}$$

Man kann zeigen, daß diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und tatsächlich die Exponentialfunktion liefert.

Wir übernehmen diese Reihe nun einfach als Definition für die Exponentialfunktion auch im Komplexen

$$\exp z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}. \tag{136}$$

Auch sie konvergiert wieder für alle $z \in \mathbb{C}$.
Weiter benötigen wir noch die trigonometrischen Funktionen. Aus (134) folgt (*nachrechnen!*)

$$\cos z = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} \tag{137}$$

$$\sin z = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}. \tag{138}$$

Berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}z) &= 1 + \mathrm{i}z + \frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}z)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{z} + \ldots\right) + \mathrm{i}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}\right) + \mathrm{i}\left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right). \end{aligned} \tag{139}$$

Dabei haben wir die Reihe so umgeordnet, daß wir in einem Term den Faktor i ausklammern konnten. Das ist bei Potenzreihen erlaubt, wie man ebenfalls in der Analysisvorlesung lernt.
Vergleichen wir nun die Reihen in den Klammern der Gleichung (139) mit (137) und (138), erhält man die **Eulersche Formel**

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i} \sin z. \tag{140}$$

Für die Polardarstellung der komplexen Zahl (130) folgt damit

$$z = |z| \exp(\mathrm{i}\varphi). \tag{141}$$

Da für die Exponentialfunktion auch im Komplexen die Formel

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2) \tag{142}$$

gilt, wie man mit Hilfe der Reihe (136) beweisen kann, erleichtert dies die Rechnung mit trigonometrischen Funktionen erheblich. Z.b. folgt genauso wie (140) auch die Gleichung

$$\exp(-\mathrm{i}z) = \cos z - \mathrm{i} \sin z. \tag{143}$$

Wir haben damit

$$\cos z = \frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)], \quad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)]. \tag{144}$$

Dies erinnert an die Definition der Hyperbelfunktionen

$$\cosh z = \frac{1}{2}[\exp(z) + \exp(-z)], \quad \sinh z = \frac{1}{2}[\exp(z) - \exp(-z)]. \tag{145}$$

Vergleicht man (144) mit diesen Definitionen folgt sofort, daß

$$\cosh(\mathrm{i}z) = \cos z, \quad \sinh(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \sin z \tag{146}$$

gilt. Die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen sind im Komplexen also bis auf Konstanten im wesentlichen die gleichen Funktionen, und beide sind durch die Exponentialfunktion definiert. Genauso folgt aus (144)

$$\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z, \quad \sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z. \tag{147}$$

Als Anwendungsbeispiel leiten wir noch die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen für reelle Argumente aus (142) ab. Es gilt nämlich einerseits wegen der Eulerschen Formel (140) und (141)

$$\exp[\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)] = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{148}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \exp[\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)] &= \exp(\mathrm{i}\varphi_1)\exp(\mathrm{i}\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2). \end{aligned} \tag{149}$$

Vergleicht man nun Real- und Imaginärteil von (148) und (149), folgen die bekannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2, \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2. \end{aligned} \tag{150}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß diese Additionstheoreme auch allgemein für komplexe Argumente gelten.

Literatur

[CH10] W. Cassing, H. van Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010). `http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/publ/maphy.pdf`